HOMOLOGIE CYCLIQUE TOPOLOGIQUE ET K-THÉORIE ALGÉBRIQUE

MAO ZHOUHANG

Résumé. Dans cet article, on va présenter les définitions basiques de K-théorie algébrique, l'homologie d'Hochschild et l'homologie cyclique. Par ailleurs, on va esquisser un nouveau cadre de l'homologie d'Hochschild topologique et l'homologie cyclique topologique développé par Nikolaus et Scholze dans leur article [11], ce qui simplifie beaucoup de calculs et rend les choses plus conceptuelles. On va aussi énoncer le théorème Dundas-Goodwillie-McCarthy sur l'application de trace cyclotomique qui est un résultat substantiel pour relier la K-théorie et l'homologie cyclique topologique.

Table des matières

1. Introduction

On présume que tous les anneaux sont associatifs et unitaires.

C'est Grothendieck qui a fait la première construction d'un groupe de K-théorie d'un anneau R dans son travail sur le théorème maintenant appelé le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Les développements suivants nous a menés de chercher une bonne définition des K-groupes supérieurs, dont Quillen a construit la première version comme les groupes d'homotopie du spectre de K-théorie $K(R)$ en se prévalant de son $+$-construction et Q-construction (voir [13] et [15]). Cependant, en général c'est très difficile de calculer $K(R)$.

Une application $\mathrm{tr}\colon K(R) \to \mathrm{HC}^{-}(R)$, appelée «application de trace», a été construite par Dennis, Goodwillie, Karoubi, Weibel et d'autres ([5], [7] et [16]), qui est un analogue du caractère de Chern $K^0_{\mathbb{C}}(X) \to H^*_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ où X est une variété complexe lisse et $H^*_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ est la cohomologie de de Rham de X à valeur dans $\mathbb{C}$. L'homologie cyclique négative $\mathrm{HC}^{-}(R)$ en question est étroitement reliée à la cohomologie de de Rham : en effet, Connes et Tsygan ont indépendamment construit l'homologie cyclique $\mathrm{HC}(R)$ dans les années 80 comme un analogue de la cohomologie de de Rham pour les espaces pas nécessairement lisse et pour la géométrie non-commutative d'un corps de caractéristique nulle. Les liens entre l'homologie cyclique et la cohomologie de de Rham sont expliqués dans le livre de Loday, [8]. L'importance

Date: 1[er] juin 2018.

de l'application de trace s'énonce dans un théorème de Goodwillie qui affirme qu'elle induit une équivalence d'homotopie faible $K(R,I) \to \mathrm{HC}^-(R,I)$, du spectre $K(R,I)$ de K-théorie relative à l'homologie cyclique négative relative $\mathrm{HC}^-(R,I)$, pour une nil-idéal I dans une $\mathbb{Q}$-algèbre R. D'ailleurs, contrairement au cas de K-groupes, l'homologie cyclique négative $\mathrm{HC}^-(R)$ et $\mathrm{HC}^-(R,I)$ sont beaucoup plus faciles à calculer. Cela nous permit de maîtriser les K-groupes de $\mathbb{Q}$-algèbres.

Pour le cas de caractéristique p ou caractéristique mixte, Bökstedt, Hsiang et Madsen ont construit [2] l'homologie cyclique topologique $\mathrm{TC}(A)$ d'un spectre en anneau A, qui joue un rôle similaire à $\mathrm{HC}^-(R)$ quand R est une $\mathbb{Q}$-algèbre. D'ailleurs, ils ont construit une application $\mathrm{tr}\colon K(A) \to \mathrm{TC}(A)$, appelée «application de trace cyclotomique» dans le même article. Ensuite, Dundas, Goodwillie et McCarthy a démontré [3] un analogue de l'équivalence $K(R,I) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{HC}^-(R,I)$.

Récemment, Nikolaus et Scholze ont développé [11] une nouvelle définition de l'homologie cyclique topologique, ce qui est fondée sur les ∞-catégories, est beaucoup plus directe et facilite beaucoup de calculs.

Dans cet article, on va rappeler les définitions basiques de K-théorie algébrique, l'homologie cyclique classique et esquisser l'homologie cyclique topologique.

2. K-Théorie Algébrique

On rappelle la définition classique de la complétion en groupe, aussi appelé le groupe de Grothendieck ou la symétrisation, d'un monoïde commutatif.

Définition 2.1. Soit M un monoïde commutatif. La complétion en groupe de M est un groupe abélien M^{gp} avec un morphisme monoïdal $M \to M^{\mathrm{gp}}$ satisfaisant la propriété universelle que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rp}}(M^{\mathrm{gp}}, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}\mathrm{on}}(M, A)$$

induite par $M \to M^{\mathrm{gp}}$ est une bijection pour tout groupe abélien A.

L'existence de M^{gp} pour tout monoïde commutatif M est bien connu (voir [14, Theorem 1.1.3]). En conséquence, le foncteur d'oubli $\mathcal{G}\mathrm{rp} \to \mathcal{M}\mathrm{on}$ admet un adjoint à gauche $(-)^{\mathrm{gp}}\colon \mathcal{M}\mathrm{on} \to \mathcal{G}\mathrm{rp}$.

Soit R un anneau. $\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}}$ désigne la catégorie des R-modules à gauche qui sont projectifs et de type fini, muni d'une opération $\oplus\colon \mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}} \times \mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}} \to \mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}}$. On note M_R l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}}$ muni d'une structure de monoïde commutatif induite par $\oplus$. On désigne $K_0(R)$ la complétion en groupe de M_R.

Pour comprendre la motivation d'introduire les K-groupes supérieurs, on remarque que quand on passe de $\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}}$ à M_R, on a perdu quelques informations. On suppose tout d'abord que tout R-module projectif $P \in \mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}}$ est un sous-module d'un R-module libre R^n, afin d'éviter les problèmes d'ensembliste. En ce cas, le nerf $\mathrm{N}(\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}})^{\simeq}$ est muni d'une structure de monoïde simplicial commutatif à homotopie cohérente près, où $\mathcal{C}^{\simeq}$ désigne le groupoïde maximal dans une (ordinaire ou ∞-)catégorie $\mathcal{C}$, et $M_R \simeq \pi_0(\mathrm{N}(\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}})^{\simeq})$. On a donc perdu les façons auxquelles les objets s'identifient en prenant π_0. Pour récupérer ce genre d'information, on va généraliser la complétion en groupe pour les monoïdes simpliciaux commutatifs à homotopie cohérente près, ou plus généralement, $\mathbb{E}_\infty$-espaces.

Définition 2.2 ([10, Definition 1.2.16.1])**.** $\mathcal{K}$an désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}\mathrm{ns}_\Delta$ engendrée par tous les complexe de Kan, où $\mathcal{E}\mathrm{ns}_\Delta$ est la catégorie simpliciale des ensembles simpliciaux. L'∞-catégorie des espaces $\mathcal{E}$ est définie par $\mathrm{N}(\mathcal{K}\mathrm{an})$, le nerf simplicial de la catégorie simpliciale $\mathcal{K}$an.

On note $\mathcal{F}$in la catégorie des ensembles finis, $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ la categorie des ensembles finis pointés, et $\langle n\rangle = \{*, 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{F}\mathrm{in}_*$.

Définition 2.3 ([4, Section 1])**.** Un $\mathbb{E}_\infty$-espace est, par définition, un foncteur $X\colon \mathrm{N}(\mathcal{F}\mathrm{in}_*) \to \mathcal{E}$ tel que le morphisme $X(\langle n\rangle) \to \prod_{i=1}^n X(\langle 1\rangle)$ induit par $\rho^i\colon \langle n\rangle \to \langle 1\rangle, i \mapsto 1, (j \neq i) \mapsto *$ est une équivalence pour tout $n \geq 0$. On note $\mathrm{AlgC}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Fon}(\mathrm{N}(\mathcal{F}\mathrm{in}_*), \mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine engendrée par les $\mathbb{E}_\infty$-espaces, où $\mathrm{Fon}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ désigne l'∞-catégorie des foncteurs d'une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ sur une autre catégorie $\mathcal{D}$.

Remarque 2.4 ([4, Proposition 1.1]). Par abus de notation, on appelle l'espace sous-jacent $M := X(\langle 1\rangle)$ un $\mathbb{E}_\infty$-espace. L'application $\langle 2\rangle \to \langle 1\rangle, * \mapsto *, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1$ induit une «multiplication» $M \times M \to M$ qui est associative et commutative à homotopie cohérente près, donc on peut considérer un $\mathbb{E}_\infty$-espace X comme un espace $M \in \mathcal{E}$ muni d'une multiplication $M \times M \to M$ associative et commutative à homotopie cohérente près, ce qui confirme notre abus de notation.

On rappelle que l'∞-catégorie Sp est l'∞-catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Sp}(\mathcal{E}_*)$ des objets en spectre dans $\mathcal{E}$ (voir [9, Definition 1.4.3.1]). On a un foncteur $\Omega^\infty\colon \mathrm{Sp} \to \mathcal{E}$ qui se factorise par $\mathrm{ev}_{\langle 1\rangle}\colon \mathrm{AlgC}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$, le foncteur d'évaluation à $\langle 1\rangle$. Par abus de notation, on note aussi par Ω^∞ le foncteur $\Omega^\infty\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{AlgC}(\mathcal{E})$. Ce foncteur Ω^∞ admet un adjoint à gauche que l'on désigne $(-)^{\mathrm{gp}}$. On appelle X^{gp} la complétion en groupe d'un $\mathbb{E}_\infty$-espace X.

Revenir à la K-théorie. Soit R un anneau en spectre connectif (plus précisément, un $\mathbb{E}_1$-anneau connectif, voir [9, Definition 7.1.0.1, Section 7.1.1]). On peut simplement assumer que R est un anneau discret, c'est-à-dire, ordinaire, si vous n'avez pas entendu cette terminologie). On note LMod_R l'∞-catégorie des R-modules à gauche (Attention ! si l'on suppose que R est un anneau discret, LMod_R est l'∞-catégorie dérivée de la catégorie abélienne des R-modules discrets à gauche, voir [9, Remark 7.1.1.16]), et $\mathrm{Proj}_R \subseteq \mathrm{LMod}_R$ la sous-catégorie pleine engendrée par les R-modules projectifs, voir [9, Definition 7.2.2.4] (contrairement à LMod_R, modules projectives sont discrets si R est discret), $\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}} \subseteq \mathrm{Proj}_R$ la sous-catégorie pleine engendrée par les R-modules projectifs de type fini. L'espace $(\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}})^{\simeq}$ est muni d'une structure de $\mathbb{E}_\infty$-espace où la multiplication est le somme direct $\oplus$ des R-modules projectifs.

Définition 2.5. Le spectre de K-théorie $K(R)$ d'un $\mathbb{E}_1$-anneau connectif R est la complétion en groupe $(\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}})^{\simeq}$ du $\mathbb{E}_\infty$-espace $(\mathrm{Proj}_R^{\mathrm{f.t.}})^{\simeq}$. Le n-ème K-groupe $K_n(R)$ est le n-ème groupe d'homotopie $\pi_n(K(R))$ du spectre de K-théorie $K(R)$.

3. Homologie d'Hochschild et Homologie Cyclique

Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre. Tout d'abord, on suppose de plus que A est plate sur k. On peut alors considérer un objet simplicial dans Mod_k, la catégorie dérivée des k-modules discrets :

$$\cdots \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} A \otimes_k A \otimes_k A \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} A \otimes_k A \rightrightarrows A \tag{3.1}$$

où les opérateurs de faces sont définis par $d_i^{(n)}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \dots a_n$ si $i < n$, et $d_n^{(n)}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$, et les opérateurs de dégénérescences sont définie par $s_i^{(n)}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$. On va définir $\mathrm{HH}(A;k)$ comme la réalisation géométrique du objet simplicial ci-dessus.

Quand A n'est pas plate, il existe deux façons pour définir une version «correcte» de l'homologie d'Hochschild (plus précisément, homologie de Shukla) :

(i) On peut remplacer $\otimes_k$ par le produit tensoriel dérivé $\otimes_k^{\mathbb{L}}$. En ce cas, il est un peu plus technique de définir l'objet simplicial que ci-dessus. De manière équivalente, on regarde A comme une $\mathbb{E}_1$-algèbre dans Mod_k, appliquer les constructions dans la section 4 et en obtient un k-module en spectre $\mathrm{HH}(A;k)$;

(ii) Si A est commutative, on peut définir $\mathrm{HH}(A;k) = \mathbb{L}\,\mathrm{HH}(A;k)$, où $\mathbb{L}\,\mathrm{HH}(-;k)\colon \mathrm{AlgC}_k^{\Delta} \to \mathrm{Mod}_k$ est le foncteur dérivé à gauche du foncteur $\mathrm{HH}(-;k)\colon \mathrm{N}(\mathrm{Poly}_k) \to \mathrm{Mod}_k$, où Poly_k est la catégorie des k-polynômes, et $\mathrm{AlgC}_k^{\Delta} := \mathrm{Fon}^{\pi}(\mathrm{N}(\mathrm{Poly}_k)^{\mathrm{op}}, \mathcal{E})$ est la catégorie dérivée non-abélienne (voir [10, Section 5.8.8]) de l'∞-catégorie $\mathrm{N}(\mathrm{Poly}_k)$. Voir [1, Section 2] pour une explication plus détaillée. On veut remarquer que A s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{AlgC}_A}(- \otimes_k A, A)$.

En effet, on peut calculer $\mathrm{HH}(A;k)$ plus facilement grâce à l'énoncé suivant :

Énoncé 3.2. *L'homologie d'Hochschild* $\mathrm{HH}(A;k)$ *est équivalente (d'homotopie faible) à* $A \otimes^{\mathbb{L}}_{A \otimes_k^{\mathbb{L}} A^{\mathrm{op}}} A \in \mathrm{Mod}_k$.

Exemple 3.3. On va calculer $\mathrm{HH}(\mathbb{F}_p;\mathbb{Z})$. Tout d'abord, on choisit la résolution plate de $\mathbb{F}_p$ par une algèbre différentielle graduée commutative : $\mathbb{Z}[u]/u^2, du = p, |u| = 1$. Alors $\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{F}_p[u]/u^2 =: B, du = 0, |u| = 1$. On peut résoudre $\mathbb{F}_p$ comme une B-algèbre différentielle graduée commutative $B\langle x\rangle = B[X_1, X_2, \dots]/(x_i x_j - \binom{i+j}{i} x_{i+j})_{ij}, dx_i = u x_{i-1}, |x_i| = 2i$. Alors $\mathrm{HH}(\mathbb{F}_p;\mathbb{Z})$ est équivalent à $\mathbb{F}_p\langle x\rangle, dx = 0, |x| = 2$, une $\mathbb{F}_p$-algèbre différentielle graduée commutative formelle, effectivement, avec différentielle triviale.

On va énoncer le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg. Soit A une k-algèbre commutative. Pour la simplicité, on assume que k est un corps commutatif de caractéristique nulle (alors tout k-module est plat). On remarque que l'objet simplicial 3.1 admet une structure de k-algèbre commutative simpliciale, alors $\mathrm{HH}(A;k)$ admet une structure de $\mathbb{E}_\infty$-algèbre dans Mod_k. Les groupes d'homotopie $\pi_*(\mathrm{HH}(A;k))$ admet une structure d'algèbre graduée commutative.

Lemme 3.4. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\Omega^1_{A/k} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{HH}(A;k)) \tag{3.5}$$

où $\Omega_{A/k}$ *est le module des différentielles de Kähler.*

Théorème 3.6 (Hochschild-Kostant-Rosenberg)**.** *L'isomorphisme 3.5 induit une isomorphisme des algèbres graduées commutatives* $\Omega^*_{A/k} \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathrm{HH}(A;k))$ *si* A *est une* k*-algèbre lisse.*

Pour présenter l'homologie cyclique, on va principalement suivre la présentation [12] des notes par Thomas Nikolaus.

Dans cette section, on va assumer que k est un corps commutatif. Soit A une k-algèbre. L'objet simplicial 3.1 est effectivement un groupe abélien simplicial, dont le complexe de Moore est désigne par $\mathrm{HH}(A;k)_*$. En effet, $\mathrm{HH}(A;k)_*$ est un complexe de k-modules représentant $\mathrm{HH}(A;k) \in \mathrm{Mod}_k$. On va munir $\mathrm{HH}(A;k)_*$ une structure d'un R-module différentiel gradué, où $R := k[b]/b^2 = H^*(\mathbb{T}, k)$, $|b| = 1$ est une algèbre commutative différentielle graduée. Pour cette fin, considérons un morphisme $B\colon \mathrm{HH}(A;k)_* \to \mathrm{HH}(A;k)[-1]_*$, où $(C[i]_*, (-1)^i d)$ désigne un décalage (cohomologique) du complexe (C_*, d) défini par $C[i]_* = C_{*-i}$. Le morphisme B est défini par la collection de $(B_n\colon HH(A)_n \to HH(A)_{n+1})_n$ où

$$B_n(a_0 \otimes \cdots \otimes r_n) = \sum_{\sigma \in C_{n+1}} (-1)^{n\sigma(0)}(1 \otimes r_\sigma + (-1)^{n+1} r_\sigma \otimes 1)$$

où C_{n+1} est le groupe de permutations cycliques de $\{0, \dots, n\}$ et $r_\sigma = r_{\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes r_{\sigma(n)}$. On voit que $B^2 = 0$, donc $(\mathrm{HH}(A;k)_*, d, B)$ est un complexe mixte à la Kassel.

Définition 3.7. L'homologie cyclique de A est définie par

$$\mathrm{HC}(A;k) := k \otimes_A \mathrm{HH}(A;k)$$

et l'homologie cyclique négative de A est définie par

$$\mathrm{HC}^-(A;k) := \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(k, \mathrm{HH}(A;k))$$

4. Homologie d'Hochschild Topologique

On va commencer par le concept d'objet en algèbre dans une ∞-catégorie monoïdale symétrique.

Définition 4.1. La catégorie $\mathrm{Ass}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$ est définie par
- Les objets sont les ensembles finis ;
- Une flèche $S \to T$ est une application $f\colon S \to T$ avec des ordres totaux sur tous les images réciproques $f^{-1}(t)$ pour $t \in T$;
- La composition de deux flèches est la composition de deux applications, muni de l'ordre lexicographique. On remarque que $(gf)^{-1}(u) = \bigsqcup_{f(t)=u} g^{-1}(t)$.

avec une structure monoïdale symétrique induite par la réunion disjointe.

Définition 4.2. Un objet en ($\mathbb{E}_1$-)algèbre, ou simplement une ($\mathbb{E}_1$-)algèbre dans une ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique $\mathrm{N}(\mathrm{Ass}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \to \mathcal{C}$. L'$\infty$-catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathcal{C})$, souvent aussi désignée par $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$, est l'$\infty$-catégorie des foncteurs monoïdal symétrique ci-dessus.

Exemple 4.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique. Les objets en algèbre dans $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ définis ci-dessus coïncident aux objets en algèbre dans $\mathcal{C}$ au sens classique.

Exemple 4.4. Une algèbre différentielle graduée A correspond à un objet en algèbre dans $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$: On peut tout d'abord choisir une résolution plate $P \to A$, et l'algèbre P naturellement se relève à un objet en algèbre dans $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$. Cela ne dépend que de l'algèbre A, pas de choix de la résolution P.

Il existe un foncteur $\mathrm{Coupe}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ass}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$ où Δ est la catégorie simpliciale, c'est-à-dire, la catégorie des ordinaux finis non-vide. $\mathrm{Coupe}(S)$ est l'ensemble des coupes d'un ordinal fini S, c'est-à-dire, $S = S_1 \sqcup S_2$ où $s_1 < s_2$ pour tout $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$, en identifiant les coupes $\emptyset \sqcup S$ et $S \sqcup \emptyset$ (la coupe triviale). Pour une application $f\colon S \to T$ qui préserve les ordres, l'application naturelle $\mathrm{Coupe}(f)\colon \mathrm{Coupe}(T) \to \mathrm{Coupe}(S)$ est définie par l'image réciproque de la coupe. Pour une coupe $S = S_1 \sqcup S_2$, l'image réciproque de la coupe S par $\mathrm{Coupe}(f)$ est l'ensemble des coupes $T = T_1 \sqcup T_2$ telles que $f(S_1) \subseteq T_1$ et $f(S_2) \subseteq T_2$. Si la coupe $S = S_1 \sqcup S_2$ est non-triviale, cet ensemble est ordonné par $\max T_1$. Si $S = S_1 \sqcup S_2$ est triviale, cet ensemble est ordonnée aussi par $\max T_1$ mais l'ordre sur $\{1, \dots, |T|\}$ est défini par $\max f(S) < \max f(S) + 1 < \cdots < |T| < 1 < \cdots < \max f(S) - 1$, c'est-à-dire, à partir de $\max f(S)$, et les ordonner cycliquement. Cet ordre sera plus naturellement décrit par l'ensemble cyclique.

Définition 4.5 ([12, Definition 3.5])**.** Soit A une algèbre dans une ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$. La bar-construction cyclique $\mathrm{HH}(A/\mathcal{C})_\bullet$ est un objet simplicial défini par la composition

$$\mathrm{N}(\Delta^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{N}(\mathrm{Ass}^{\otimes}_{\mathrm{act}}) \xrightarrow{A} \mathcal{C}$$

dont la réalisation géométrique, c'est-à-dire, la colimite, est écrite par $\mathrm{HH}(A/\mathcal{C})$.

Exemple 4.6. Soient k un corps commutatif et A une k-algèbre. On peut regarder A comme une algèbre dans Mod_k. Alors $\mathrm{HH}(A/\mathrm{Mod}_k)_\bullet$ coïncide à l'objet simplicial 3.1. En conséquence, $\mathrm{HH}(A/\mathrm{Mod}_k) \simeq \mathrm{HH}(A; k)$.

Remarque 4.7. Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre. On peut définir $\mathrm{HH}(A; k)$ par $\mathrm{HH}(P/\mathrm{Mod}_k)$ où $P \to A$ est une résolution plate.

Définition 4.8. Soit R un anneau en spectre, c'est-à-dire, une algèbre dans l'∞-catégorie Sp des spectres. L'homologie d'Hochschild topologique est définie par $\mathrm{HH}(R/\mathrm{Sp})$, désignée par $\mathrm{THH}(R)$.

On note $H\colon \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Sp}$ le foncteur d'oubli. On remarque que l'image du cœur, c'est-à-dire, les groupes abéliens, est la sous-catégorie pleine des spectre d'Eilenberg-Maclane. Soit A un anneau, on a un morphisme naturel $\mathrm{THH}(A) \to H\,\mathrm{HH}(A; \mathbb{Z})$, du fait que H est lax monoïdal symétrique.

Énoncé 4.9 ([11, Proposition IV.4.2])**.** *Le morphisme* $\mathrm{THH}(A) \to H\,\mathrm{HH}(A; \mathbb{Z})$ *est 3-connexe, c'est-à-dire, il induit les isomorphismes sur* $\pi_i, i < 3$ *et la surjection sur* π_3.

De plus, soit A une algèbre dans une ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$. Il existe une $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$-action sur $\mathrm{HH}(A/\mathcal{C})$. Pour préciser le concept d'une action, on va commencer par les définitions.

Définition 4.10. Soient G un groupe topologique, $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie. Un objet G-équivariant est un foncteur $BG \to \mathcal{C}$, où BG est l'espace classifiant de G. $\mathcal{C}^{BG}$ désigne l'∞-catégorie des objets G-équivariant dans $\mathcal{C}$. Si $X\colon BG \to \mathcal{C}$ est un objet G-équivariant, on peut regarder l'objet sous-jacent $X(*)$ d'être muni d'une G-action à homotopie cohérente près.

Les objets cycliques nous fournissent une source riche des $\mathbb{T}$-équivariant objets, ce que l'on va esquisser. Les lecteurs sont invités à [11, Appendix T] pour les détailles.

Définition 4.11. La catégorie paracyclique Λ_∞ est définie par
- Objets ; $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- Flèches : Un flèche $f\colon \frac{1}{m}\mathbb{Z} \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ est une application croissante satisfaisant $f(x+1) = f(x) + 1$.

Il existe une $B\mathbb{Z}$-action sur Λ_∞ : Le foncteur $B\mathbb{Z} \times \Lambda_\infty \to \Lambda_\infty$ est déterminé par $(i, f) \mapsto i + f$ pour $i \in \mathbb{Z}$ et $f\colon \frac{1}{m}\mathbb{Z} \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}$.

Définitions 4.12. La catégorie cyclique Λ est définie par la quotient $\Lambda_\infty/B\mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie. Un objet cyclique dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $\Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

Il existe un foncteur naturel $\Delta \to \Lambda$, qui envoie $[n]$ sur $\frac{1}{n+1}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \times [n]$, dont l'opposé nous permet de définir le concept de réalisation géométrique d'un objet cyclique :

Définition 4.13. Soient $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie et $X\colon \Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un objet cyclique. La réalisation géométrique de X est la réalisation géométrique du objet simplicial sous-jacent $\Delta^{\mathrm{op}} \to \Lambda^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$.

La réalisation géométrique d'un objet cyclique admet une $\mathbb{T}$-action naturellement. Plus précisément,

Énoncé 4.14 ([11, Proposition B.5, Appendix T])**.** *Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie qui admet les réalisations géométriques des objets simpliciaux. Il existe un foncteur naturel* $\mathrm{Fon}(\mathrm{N}(\Lambda^{\mathrm{op}}), \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{B\mathbb{T}}$ *dont l'objet sous-jacent d'une image est la réalisation géométrique.*

Vu l'énoncé ci-dessous, $\mathrm{HH}(A/\mathcal{C})_\bullet$ est un objet simplicial sous-jacent d'un objet cyclique.

Énoncé 4.15. *Le foncteur de coupe* $\mathrm{Coupe}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ass}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$ *se factorise par $\Delta^{\mathrm{op}} \to \Lambda^{\mathrm{op}}$. V° désigne le résultat $\Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ass}^{\otimes}_{\mathrm{act}}$.*

En conséquence, soient k un corps commutatif et A une k-algèbre, $\mathrm{HH}(A; k)$ admet une $\mathbb{T}$-action. L'article [6] montre que

Théorème 4.16. *On a les équivalences d'homotopie faible :*

$$\mathrm{HC}(A; k) \simeq \mathrm{HH}(A; k)_{h\mathbb{T}}$$
$$\mathrm{HC}^-(A; k) \simeq \mathrm{HH}(A; k)^{h\mathbb{T}}$$

Parallèlement, $\mathrm{THH}(R)$ admet aussi une $\mathbb{T}$-action pour tout anneau en spectre R.

Définition 4.17. Soit R un anneau en spectre. L'homologie cyclique négative topologique $\mathrm{TC}^-(R)$ est définie par $\mathrm{THH}(R)^{h\mathbb{T}}$.

5. Homologie Cyclique Topologique

On va commencer par la construction de Tate. Tout d'abord, on considère le cas algébrique : soient G un groupe fini et M un G-module. Le morphisme $M \to M^G, m \mapsto \sum_{g \in G} gm$ est bien défini et G-invariant, donc il se factorise par $M \to M_G$, ce qui nous fournit une application de norme $\mathrm{Nm}^{\mathrm{alg}}_G\colon M_G \to M^G$. On rappelle que les groupes de cohomologie de Tate sont définis par $\hat{H}^n(G, M) = H^n(G, M) = \pi_{-n}(M^{hG})$ pour $n > 0$, $\hat{H}^{-n-1}(G, M) = H_n(G, M) = \pi_n(M_{hG})$ pour $n > 0$, $\hat{H}^0(G, M) = \mathrm{coker}(\mathrm{Nm}^{\mathrm{alg}}_G)$ et $\hat{H}^{-1}(G, M) = \ker(\mathrm{Nm}^{\mathrm{alg}}_G)$.

La construction de Tate sert d'une généralisation du construction ci-dessus. Voir [11, Chapter 1] pour les détailles. Soient G un groupe topologique, $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie stable et X un objet G-équivariant dans $\mathcal{C}$. Si G est fini, on a une application de norme $\mathrm{Nm}_G\colon X_{hG} \to X^{hG}$. Si $G = \mathbb{T}$, on a une application de norme $\mathrm{Nm}_G\colon \Sigma X_{hG} \to X^{hG}$.

Définition 5.1. La construction de Tate est le foncteur $-^{tG}\colon \mathcal{C}^{BG} \to \mathcal{C}$ défini par la cofibre de l'application de norme $X^{tG} = \mathrm{cofib}(\mathrm{Nm}_G)$.

Remarque 5.2. Si G est un sous-groupe distingué d'un groupe topologique H. On a un foncteur $\mathcal{C}^{BH} \to \mathcal{C}^{B(H/G)}$ induit par $-^{tG}$ ci-dessus, donc par abus de notation, on écrit ce foncteur aussi par $-^{tG}$.

Remarque 5.3. Soient G est un groupe fini et M un G-module. Il existe une G-action sur le spectre d'Eilenberg-Maclane HM. Alors $\pi_n(HM^{tG}) = \hat{H}^{-n}(M, G)$, ce qui justifie l'appellation «construction de Tate».

Ensuite, on va présenter l'homologie topologique cyclique d'un spectre cyclotomique.

Définition 5.4. Un spectre cyclotomique est un spectre $\mathbb{T}$-équivariant X avec un morphisme $\mathbb{T}$-équivariant $\varphi_p \colon X \to X^{tC_p}$ pour tout nombre premier p.

Définition 5.5. L'homologie cyclique topologique $\mathrm{TC}(X)$ d'un spectre cyclotomique $(X, (\varphi_p)_p$ est l'égaliseur de deux morphismes $\prod_p \varphi_p^{h\mathbb{T}}, \mathrm{can} \colon X^{h\mathbb{T}} \to \prod_p (X^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$, où $\mathrm{can} \colon X^{h\mathbb{T}} \to \prod_p (X^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$ est le morphisme canonique $X^{h\mathbb{T}} \xrightarrow{\sim} (X^{hC_p})^{h(\mathbb{T}/C_p)} \xrightarrow{\mathbb{T}/C_p \simeq \mathbb{T}} (X^{hC_p})^{h\mathbb{T}} \to (X^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$.

On a vu dans la section 4 que $\mathrm{THH}(R)$ admet une $\mathbb{T}$-action pour tout anneau en spectre R. Afin de munir une structure cyclotomique sur $\mathrm{THH}(R)$, on va présenter la diagonale de Tate. Tout d'abord, on considère la version algébrique :

Soient p un nombre premier et A un groupe abélien. Il existe une C_p-action naturelle sur $A^{\otimes p} := A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$. La diagonale «naïve» $A \to (A^{\otimes p})^{hC_p}, a \mapsto a^{\otimes p}$ n'est pas linéaire. On considère alors $\mathrm{Nm}_{C_p}^{\mathrm{alg}} \colon (A^{\otimes p})_{hC_p} \to (A^{\otimes p})^{hC_p}$ et le conoyau $\mathrm{coker}(\mathrm{Nm}_{C_p}^{\mathrm{alg}})$. Cette fois-ci, la diagonale $A \to \mathrm{coker}(\mathrm{Nm}_{C_p}^{\mathrm{alg}}), a \mapsto a^{\otimes p}$ est bien définie, d'autant que l'action naturelle de C_p sur $\{0,1\}^p \setminus \{(0,\ldots,0),(1,\ldots,1)\}$ est libre.

Il existe un analogue dans Sp :

Théorème 5.6 ([11, Theorem III.1.7, Proposition III.3.1])**.** *Pour tout spectre X, il existe un morphisme $\Delta_p \colon X \to (X^{\otimes p})^{tC_p}$ tel que Δ_p s'étend à un transformation naturelle monoïdale symétrique entre deux foncteurs monoïdals symétriques* $\mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}$. *Par ailleurs, la transformation naturelle Δ_p est uniquement déterminée par cette propriété.*

On va esquisser la construction de $\varphi_p \colon \mathrm{THH}(R) \to \mathrm{THH}(R)^{tC_p}$. Les détailles se trouvent dans [11, Chapter III]. L'objet cyclique $\mathrm{HH}(R/\mathrm{Sp})_\bullet$ a une subdivision

$$\cdots \; A^{\otimes 3p} \;\rightrightarrows\; A^{\otimes 2p} \;\rightrightarrows\; A^{\otimes p}$$

dont la réalisation géométrique est équivalente à $\mathrm{THH}(R)$, et on peut identifier $\mathrm{THH}(R)^{tC_p}$ à la réalisation géométrique du objet cyclique

$$\cdots \; (A^{\otimes 3p})^{tC_p} \;\rightrightarrows\; (A^{\otimes 2p})^{tC_p} \;\rightrightarrows\; (A^{\otimes p})^{tC_p}$$

Le morphisme $\mathrm{THH}(R) \to \mathrm{THH}(R)^{tC_p}$ est induit par les diagonales $(\Delta_p(A^{\otimes i}) \colon (A^{\otimes i}) \to (A^{\otimes ip})^{tC_p})_{i>0}$.

Définition 5.7. Soit R un anneau en spectre. L'homologie cyclique topologie $\mathrm{TC}(R)$ est défini comme $\mathrm{TC}(\mathrm{THH}(R))$ d'après la structure cyclotomique de $\mathrm{THH}(R)$.

Enfin, on va énoncer le théorème qui relie K-théorie et l'homologie cyclique topologique :

Théorème 5.8 (Dundas-Goodwillie-McCarthy, [3]). *Il existe une transformation naturelle* $K \to \mathrm{TC}$ *entre deux foncteurs* $K, \mathrm{TC}\colon \mathrm{Alg}(\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sp}$*, appelée l'application de trace cyclotomique. Soit* $A \to \bar{A}$ *un morphisme entre deux anneaux en spectre connectif tel que le noyau de* $\pi_0(A) \to \pi_0(\bar{A})$ *est un nil-idéal, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\bar{A}) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(\bar{A}) \end{array}$$

est un pull-back dans l'∞*-catégorie* Sp.

Références

[1] B. Bhatt, M. Morrow et P. Scholze. "Topological Hochschild homology and integral p-adic Hodge theory". In : *ArXiv e-prints* (fév. 2018). arXiv : 1802.03261 [math.AG].

[2] M. Bökstedt, W. C. Hsiang et I. Madsen. "The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces". In : *Inventiones mathematicae* 111.1 (1993), p. 465–539. issn : 1432-1297. doi : 10.1007/BF01231296. url : https://doi.org/10.1007/BF01231296.

[3] Bjørn Ian Dundas, Thomas G. Goodwillie et Randy McCarthy. "The Comparison of K-Theory and TC". In : *The Local Structure of Algebraic K-Theory*. London : Springer London, 2012, p. 281–332. isbn : 978-1-4471-4393-2. doi : 10.1007/978-1-4471-4393-2_7. url : https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4393-2_7.

[4] D. Gepner, M. Groth et T. Nikolaus. "Universality of multiplicative infinite loop space machines". In : *ArXiv e-prints* (mai 2013). arXiv : 1305.4550 [math.AT].

[5] Thomas G. Goodwillie. "Relative Algebraic K-Theory and Cyclic Homology". In : *Annals of Mathematics* 124.2 (1986), p. 347–402. issn : 0003486X. url : http://www.jstor.org/stable/1971283.

[6] M. Hoyois. "The homotopy fixed points of the circle action on Hochschild homology". In : *ArXiv e-prints* (juin 2015). arXiv : 1506.07123 [math.KT].

[7] Max Karoubi. *Homologie cyclique et K-théorie*. Société Mathématique de France, 1987.

[8] Jean-Louis Loday. *Cyclic Homology*. Second. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[9] Jacob Lurie. "Higher Algebra". Sept. 2017.

[10] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory (AM-170)*. Princeton University Press, 2009. isbn : 9780691140490. url : http://www.jstor.org/stable/j.ctt7s47v.

[11] T. Nikolaus et P. Scholze. "On topological cyclic homology". In : *ArXiv e-prints* (juil. 2017). arXiv : 1707.01799 [math.AT].

[12] Thomas Nikolaus. *Lectures on Topological Hochschild Homology and Cyclotomic Spectra*. 2018.

[13] Daniel Quillen. "Higher algebraic K-theory : I". In : *Higher K-Theories : Proceedings of the Conference held at the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, from August 28 to September 8, 1972*. Sous la dir. de H. Bass. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1973, p. 85–147. isbn : 978-3-540-37767-2. doi : 10.1007/BFb0067053. url : https://doi.org/10.1007/BFb0067053.

[14] Jonathan Rosenberg. “K0 of Rings”. In : *Algebraic K-Theory and Its Applications*. New York, NY : Springer New York, 1994, p. 1–58. isbn : 978-1-4612-4314-4. doi : 10.1007/978-1-4612-4314-4_1. url : https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4314-4_1.

[15] V. Srinivas. *Algebraic K-Theory*. Second. Birkhäuser Basel, 1996.

[16] Charles A. Weibel. “Nil K-Theory Maps to Cyclic Homology”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 303.2 (1987), p. 541–558. issn : 00029947. url : http://www.jstor.org/stable/2000683.