

Graphes ADE et Correspondance de McKay

Arnaud Vanhaecke et Simon Machado
encadré par Jean-François Dat

Le but de ce mémoire est de donner une construction élémentaire de la correspondance de McKay. La correspondance de McKay est un lien fondamental entre les variétés quotients, leurs singularités et la théorie des représentations. Elle se manifeste par l'apparition des diagrammes *ADE* de Dynkin classifiant les objets sous jacent. Nous présenterons des aspects algébriques, analytiques et géométriques de cette correspondance. Nous tenons à remercier Monsieur Dat pour la grande liberté qu'il nous a accordé pour ce mémoire et pour ses précieux conseils.

Table des matières

1	Une première classification des sous-groupes de $SL_2(\mathbb{C})$	3
2	Représentations complexes et diagrammes de Dynkin	6
2.1	Les diagrammes de Dynkin	6
2.2	Une construction par les représentations	10
3	Le point de vue des variétés algébriques affines	13
3.1	Variétés algébriques affines	13
3.2	Algèbres Invariantes	17
3.3	Applications rationnelles	19
3.4	Singularités de variétés affines	21
4	Singularités simples de germes analytiques	22
4.1	Définitions	22
4.2	Algèbre locale des fonctions analytiques	24
4.3	Germes déterminés	26
4.4	Classification des singularités simples isolées dans \mathbb{C}^2	29
4.5	Classification des singularités simples isolées dans \mathbb{C}^n	30
4.6	Singularités simples d'hypersurfaces	32
4.7	Résolutions de singularités	34
5	Construction géométrique de La correspondance	40
5.1	Diviseurs	40
5.2	Singularités isolées de surfaces	43
5.3	Correspondance géométrique de McKay	45

1 Une première classification des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Pour accéder à une classification des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on s'intéresse d'abord aux sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Théorème 1. *Tout sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à l'un des groupes suivants :*

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- \mathbf{D}_n .
- $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ ou \mathfrak{A}_5 .

Démonstration: Soit G un tel groupe, on remarque que G agit sur \mathbb{S}^2 et que tout $g \in G \setminus \{I_3\}$ a exactement deux points fixes. On pose donc $X = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in G \setminus \{I_3\}, g.x = x\}$; l'action de G sur \mathbb{S}^2 induit une action de G sur X . On a alors les faits suivants :

- Tout $g \in G \setminus \{I_3\}$ fixe exactement deux points de X
- Tout $x \in X$ est fixé par au moins un élément de $G \setminus \{I_3\}$.

En comptant de deux manières le cardinal de l'ensemble $\{(g, x) \in G \setminus \{I_3\} \times X \mid g.x = x\}$ on obtient alors :

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{\omega \in X/G} \left(1 - \frac{1}{|G_\omega|}\right) \quad (1)$$

où G_ω dénote le stabilisateur d'un élément de ω . On déduit de cette formule que X a deux ou trois orbites.

Si X a deux orbites dont le cardinal des stabilisateurs est noté p_1 et p_2 :

L'équation se transforme en $2 = \frac{|G|}{p_1} + \frac{|G|}{p_2}$ or les deux termes de la somme sont des entiers non nuls, donc $p_1 = p_2 = |G|$. Par conséquent les deux orbites sont réduites à un point (x et $-x$) et G laisse donc stable l'axe $\mathbb{R}x$. Il s'identifie alors à un groupe fini de rotations du plan et est donc cyclique.

Si X a trois orbites :

La formule se réécrit :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 + \frac{2}{|G|}, \quad (2)$$

pour $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ les cardinaux des stabilisateurs de chaque orbite. Par conséquent $p_1 = 2$: Par conséquent il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $|G| = 2r$, on a alors $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}$. De plus, $p_2 \in \{2; 3\}$:

- si $p_2 = 2$ alors $p_3 = r$. Et les valeurs possibles sont $(p_1, p_2, p_3, |G|) = (2, 2, r, 2r)$ pour $r \in \mathbb{N}$.
- si $p_2 = 3$ alors $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{r}$ et les valeurs possibles sont donc $(2, 3, 3, 12), (2, 3, 4, 24)$ et $(2, 3, 5, 60)$.

On remarque tout d'abord que si $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ fixe deux vecteurs non colinéaires c'est l'identité. Explicitons maintenant les groupes dans les différents cas :

1. **$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, |\mathbf{G}|) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{r}, \mathbf{2r})$** : Si $n := |G| = 4$ on a $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathcal{D}_4$. On peut donc supposer $n > 4$. Il existe donc une orbite à deux éléments, qui sont

- donc opposés, notons les $\{x; -x\}$. Le stabilisateur de x forme un groupe cyclique d'ordre r de rotations dans le plan orthogonal à x , noté P . Soit $g \in G$ qui n'est pas dans le stabilisateur de x , $g.x = -x$ et $g.P = P$. Par conséquent, comme g est de déterminant 1 il induit une symétrie sur le plan P . On en déduit que l'application de restriction à P induit un morphisme surjectif de G sur \mathcal{D}_r qui est donc injectif par égalité des cardinaux. En conclusion, $G \simeq \mathcal{D}_r$.
2. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, |\mathbf{G}|) = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{12})$: Il existe donc une orbite à 4 éléments, qui forment les sommets d'un carré. A nouveau, comme $G \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$, aucun élément autre que l'identité ne peut stabiliser ces 4 éléments. On obtient donc un morphisme $G \rightarrow \mathfrak{S}_4$ injectif. Par un argument de cardinalité $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
 3. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, |\mathbf{G}|) = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{24})$: Soit X_2 les éléments de l'orbite à 8 éléments. Pour $g \in G$ et $x \in X_2$, $g.(-x) = -(g.x)$, et l'action sur X_2 induit une action sur l'ensemble $Y := \{\{x; -x\} | x \in X_2\}$. Montrons que cette action est fidèle. Soit $g \in G$ ayant une action triviale, si g n'est pas l'identité il existe une unique paire $\{x; -x\}$ telle que $g.x = x$, par une remarque faite plus haut. On a donc que x est orthogonal ou colinéaire à tout élément de X_2 . De plus comme G a une action transitive sur X_2 , pour tout $y \in X_2$ il existe $h \in G$ tel que $h(x) = y$, par conséquent $h \circ g \circ h^{-1}$ agit aussi trivialement sur Y , est différent de l'identité et stabilise y , d'où y est colinéaire ou orthogonal à tout élément de X . On en déduit, en prenant un représentant de chaque paire de Y , l'existence de quatre éléments deux à deux orthogonaux, ce qui est absurde. D'où $G \simeq \mathfrak{S}_4$.
 4. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, |\mathbf{G}|) = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{60})$: On dispose d'une orbite X_1 de cardinal 30, d'une orbite X_2 de cardinal 20 et d'une orbite X_3 de cardinal 12. Pour tous point $x, y \in X$ non colinéaires, $\text{Stab}(x) \cap \text{Stab}(y) = \{\text{Id}\}$. On en déduit l'existence de 15 sous-groupes d'ordre 2, 10 sous-groupes d'ordre 3 et 6 sous-groupes d'ordre 5, à chaque fois deux à deux conjugués et qui correspondent exactement aux sous-groupes cycliques de G . Soit $H \triangleleft G$ non réduit à l'élément neutre, si $|H|$ est pair, H possède au moins les 15 éléments d'ordre 2 car il est distingué. On a donc $|H| \geq 15$ et donc H possède des éléments d'ordre 3 ou 5. En comptant les éléments on a donc nécessairement $H = G$. Les deux autres cas se traitent de manière similaire. Par conséquent G est un groupe simple d'ordre 60 et un résultat classique montre : $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

□

Remarque:

- Maintenant qu'une telle caractérisation est effectuée il est possible de calculer explicitement l'ensemble X introduit au début de la preuve. Ces ensembles sont en fait exactement les polygones et polyèdres réguliers inscrits dans \mathbb{S}^2 . Ce qui permet d'affirmer que deux sous-groupes finis isomorphes de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sont conjugués. On utilisera cette dernière affirmation dans la suite sans toutefois la démontrer.
- Plus précisément on peut obtenir la description suivante des différents sous-groupes finis de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$: C_n le groupe cyclique d'ordre n , \mathcal{D}_n l'ensemble des symétries d'un prisme dont la base est un n -gone, \mathfrak{A}_4 l'ensemble des symétries d'un tétraèdre

régulier, \mathfrak{S}_4 l'ensemble des symétries d'un octaèdre régulier, et \mathfrak{A}_5 l'ensemble des symétries d'un icosaèdre régulier.

Utilisons maintenant la classification des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ pour classifier ceux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Pour cela, nous allons avoir besoin du résultat suivant :

Proposition 1. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, G est conjugué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ à un sous-groupe de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.*

Démonstration: Soit (\cdot, \cdot) le produit hermitien naturel sur \mathbb{C}^2 et soit $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini. Pour $u, v \in \mathbb{C}^2$ posons $\langle u, v \rangle = \sum_{g \in G} (gu, gv)$ qui est clairement sesquilineaire, définie positive et invariante par l'action de G . Par conséquent, $G \subset \mathrm{SU}(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. De plus, deux produits hermitiens sur \mathbb{C}^2 sont toujours isométriques donc il existe $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $(u, v) = \langle Su, Sv \rangle, \forall u, v \in \mathbb{C}^2$. En posant maintenant $P = \frac{1}{\alpha} S$ où $\alpha^2 = \det(S)$. On a alors $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $P^{-1}GP \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. \square

On peut donc maintenant s'intéresser uniquement aux sous-groupes de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ les autres s'y ramenant par conjugaison. La proposition suivante permet de faire le lien entre ces groupes et la classification obtenue précédemment :

Proposition 2. *Il existe un morphisme π tel que :*

$$1 \longrightarrow \{\mathrm{Id}; -\mathrm{Id}\} \longrightarrow \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow 1 \quad (3)$$

est exacte.

Démonstration: On a : $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$. Posons $V = \mathrm{Vect}\{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})\}$;

cet espace est engendré par les matrices Id , $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K := IJ$.

Posons alors $W := \mathrm{Vect}\{I, J, K\}$, on remarque que W est de dimension 3, que la restriction du déterminant sur cet espace correspond à la norme euclidienne standard et que pour tout $P \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $PWP^{-1} = W$ et $\forall x \in W, \det(PxP^{-1}) = \det(x)$. Ainsi on a le morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \\ P &\mapsto (x \mapsto PxP^{-1}) \end{aligned}$$

avec $\ker(\pi) = Z(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})) = \{\mathrm{Id}; -\mathrm{Id}\}$. De plus, pour $P \in W \cap \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$:

- $\pi(P)(P) = P$.
- $\pi(P) \circ \pi(P) = \mathrm{Id}$.
- $P \notin \ker(\pi)$.

Par conséquent c'est le renversement d'axe $\mathbb{R}P$, donc $\mathrm{Im}(\pi)$ contient tous les renversements et π est surjectif. D'où le résultat. \square

Proposition 3. *Deux sous-groupes finis de $SU_2(\mathbb{C})$ sont isomorphes si et seulement si ils sont conjugués.*

Pour démontrer cela on aura besoin du lemme suivant qui se prouve par le calcul :

Lemme 1:

– Id est le seul élément d'ordre 2 de $SU_2(\mathbb{C})$.

On démontre la proposition.

Démonstration: Soit G et G' deux sous-groupes isomorphes. Si les groupes sont cycliques c'est évident. Sinon, on remarque que comme le noyau de π est $\{\text{Id}; -\text{Id}\}$, $\pi(G)$ et $\pi(G')$ sont conjugués, non cycliques et donc d'ordre pair. Par conséquent $|G| = |G'|$ sont paire et on déduit par le lemme de Cauchy que $-\text{Id} \in G$ et $-\text{Id} \in G'$. Soit P dans $SO_3(\mathbb{R})$ tel que $P\pi(G)P^{-1} = \pi(G')$, et Q un de ses antécédents par π . On a $QGQ^{-1} \subseteq \pi^{-1}(\pi(G')) = G'$. Donc $QGQ^{-1} = G'$. \square

Par des arguments similaires et en utilisant ce qui précède on trouve la classification suivante :

Théorème 2. *Tout sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$ est conjugué à l'un des sous-groupes suivants :*

- $\left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ pour ζ une racine primitive de l'unité et $n \in \mathbb{N}$, c'est le groupe cyclique d'ordre n , noté C_n .
- $\left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ pour ζ une racine primitive $2n$ -ième de l'unité et $n \in \mathbb{N}$, c'est le n -ième groupe binaire diédral noté \mathbb{D}_n .
- Le groupe \mathbb{T} , d'ordre 24 et donné par $\left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \right\rangle$ avec $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{8}}$.
- Le groupe \mathbb{O} , d'ordre 48 et donné par $\left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}, \mathbb{T} \right\rangle$ avec toujours $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{8}}$.
- Le groupe \mathbb{I} , d'ordre 120 et donné par $\left\langle -\begin{pmatrix} \zeta^3 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta^4 - \zeta & \zeta^2 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^4 \end{pmatrix} \right\rangle$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

2 Représentations complexes et diagrammes de Dynkin

Dans la suite on construit un objet incarnant cette classification. En d'autres termes, on veut exhiber un objet dépendant uniquement de la classe de conjugaison du sous-groupe de $SL_2(\mathbb{C})$ considéré.

2.1 Les diagrammes de Dynkin

La structure d'un diagramme de Dynkin est celle d'un graphe, qu'on définit ci-dessous :

Définition :

Un *graphe* $G = (V, w)$ est la donnée d'un ensemble V appelé ensemble de sommets, et d'une fonction $w : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$. On pose parfois $E := w^{-1}(\mathbb{N}^*)$, l'ensemble des arêtes de G .

Remarque: Cette définition n'est pas la définition générale d'un graphe ; cependant on verra qu'il n'y a pas besoin de plus de généralité.

Définition :

Soit $G = (V, w)$ un graphe. Un *sous-graphe* de G est un graphe $H = (W, \gamma)$ tel que $W \subseteq V$ et $\gamma((u, v)) \leq w((u, v))$ pour tous $u, v \in W$.

On introduit maintenant quelques notions élémentaires de théorie des graphes utiles dans la suite :

Définition :

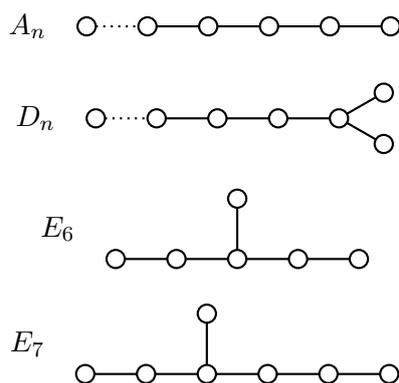
- Soit $x, y \in V$, on notera $x \sim y$, et on dira que x est *relié* à y , si $w((x, y)) > 0$.
- Soit $x, y \in V$, on appelle *chemin reliant* x à y toute suite $v_0 v_1 \dots v_n$ de sommets telles que $v_0 = x, v_n = y$ et $\forall 0 \leq i \leq n-1, v_i \sim v_{i+1}$.
- On dit que G est *connexe* si pour tout $x, y \in V$ il existe un chemin reliant x à y .
- G est dit *non-orienté* si pour tout $x, y \in V, w((x, y)) = w((y, x))$

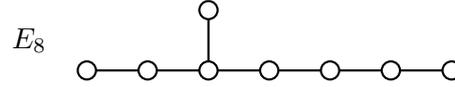
La notation qui vient sera utile dans le paragraphe suivant :

Notation:

Soit $G = (V, w)$ un graphe et $W \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets. On notera $G \setminus W$ le graphe défini par : $G \setminus W := (V \setminus W, w|_{(V \setminus W)^2})$.

A titre d'exemple, voici les *diagrammes de Dynkin* :

Exemple:



■

On peut aussi remarquer que ces graphes sont des objets intéressants en soi. En effet ils sont caractérisés par les propriétés suivantes :

Définition :

Soit $G = (V, \gamma)$ un graphe fini. On peut définir une matrice associée à G :

$$M_G := (\delta_{uv} - \gamma((u, v)))_{(u, v) \in V \times V} \quad (4)$$

Par conséquent, on peut définir une forme quadratique q_G sur \mathbb{R}^V donnée par $X \mapsto {}^t X(M_G + {}^t M_G)X$. Elle est appelée *forme de Tits*.

On peut remarquer que la positivité de la forme de Tits ne dépend pas vraiment de l'orientation des arêtes. En effet, $2q_G(X) = {}^t X(M_G + {}^t M_G)X$, et $M_G + {}^t M_G$ ne dépend pas de l'orientation mais seulement du nombre d'arêtes entre deux points.

Définition :

Pour G un graphe, on pose $C_G = M_G + {}^t M_G$, et c_G la forme quadratique induite par cette matrice.

Par conséquent, pour les propriétés liées à la positivité de la forme de Tits on pourra se restreindre aux graphes non-orientés et considérer la forme quadratique c_G donnée par C_G .

Définition :

Soit $G = (V, \gamma)$ on dit que G est de la *forme de Dynkin* si le graphe $G' = (V, \delta)$, où $\delta(u, v) = \gamma(u, v) + \gamma(v, u)$, est un diagramme de Dynkin.

On peut alors caractériser les graphes de la forme de Dynkin :

Proposition 4. *Soit $G = (V, \gamma)$ un graphe fini. La forme de Tits de G est définie positive si et seulement si G est un graphe de la forme de Dynkin.*

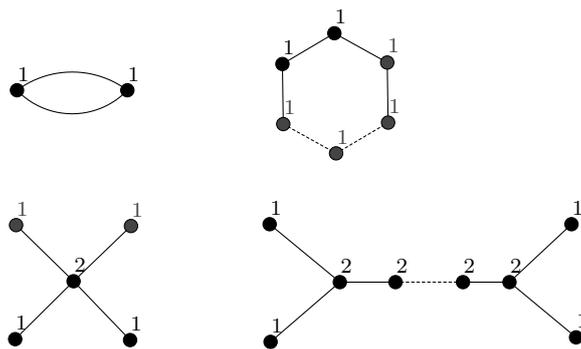
Démonstration: \Rightarrow :

Considérons la forme quadratique c_G et le graphe G' comme dans la définition précédente. Montrons tout d'abord le fait suivant :

Soit $H = (W, \delta)$ un sous-graphe non-orienté de G' . Soit $X \in (\mathbb{R}^+)^W \subseteq (\mathbb{R}^+)^V$, on a : $c_H(X) = \sum_{v \in W} 2x_v^2 - \sum_{(u, v) \in W^2} \delta(u, v)x_u x_v \geq \sum_{v \in W} 2x_v^2 - \sum_{(u, v) \in W^2} \gamma(u, v)x_u x_v = c_G(X)$

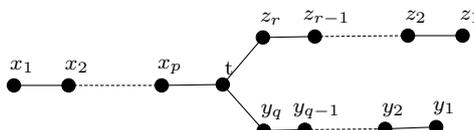
car $\delta \leq \gamma$. Par conséquent, pour tout sous-graphe $H = (W, \delta)$, tout $X \in (\mathbb{R}^+)^W \setminus \{0\}$, $c_H(X) > 0$.

On peut maintenant montrer que les sous-graphes suivants sont interdits :



où le nombre de sommets dans les deux graphes de droite est arbitraire non-nul ; en particulier ils peuvent être égaux aux deux de gauche. Les vecteurs contredisant le caractère défini positif sont ceux dont les coordonnées sont notées au-dessus des points correspondants (ils sont bien à valeur positive).

Cela permet de déduire que G est nécessairement de la forme suivante pour $p, q, r \in \mathbb{N}$:



où les coordonnées correspondant aux sommets sont indiquées. On peut alors voir que :

$$c_G(x_1, \dots, z_r, t) = q_p(x_1, \dots, x_p, t) + q_q(y_1, \dots, y_q, t) + q_r(z_1, \dots, z_r, t) + \left(2 - \frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} - \frac{r}{r+1}\right)t^2$$

où q_n est une forme quadratique admettant $(1, \dots, n+1)$ comme vecteur isotrope pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent en évaluant en $X = (\frac{1}{p+1}, \dots, \frac{p}{p+1}, \frac{1}{q+1}, \dots, \frac{q}{q+1}, \frac{1}{r+1}, \dots, \frac{r}{r+1}, 1)$ on obtient :

$$c_G(X) = \left(2 - \frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} - \frac{r}{r+1}\right) > 0$$

En remarquant que $\frac{p}{p+1} = 1 - \frac{1}{p+1}$ on réécrit l'inéquation :

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1$$

Quitte à permuter, on peut supposer que $p \leq q \leq r$. On remarque que la résolution de cette inéquation est équivalente à la résolution de l'inéquation trouvée lors de la classification des sous-groupes de $SO_3(\mathbb{R})$ et les solutions sont donc :

- $(0, q, r)$ pour $q, r \in \mathbb{N}$: On retrouve A_{q+r+1} .

- $(1, 1, r)$ pour $r \in \mathbb{N}$: On retrouve D_{r+3} .
- $(1, 2, 2)$: donne E_6 .
- $(1, 2, 3)$: donne E_7 .
- $(1, 2, 4)$: donne le graphe E_8 .

Réciproquement, un calcul permet de voir que ces graphes ont bien une forme de Tits définie positive. \square

2.2 Une construction par les représentations

Soit G un groupe fini et $\{R_i\}_{0 \leq i \leq n}$ l'ensemble de ses représentations irréductibles dans \mathbb{C} . Une représentation R est la donnée d'un couple (ρ, V) tel que V est un \mathbb{C} -espace vectoriel et ρ est une action de G sur V . A partir de deux représentations on peut construire de nouvelles représentations par la méthode suivante :

Définition :

Pour $R_1 = (\rho_1, V_1)$ et $R_2 = (\rho_2, V_2)$ deux représentations, on construit la représentation $R_1 \otimes R_2$ comme l'espace $V_1 \otimes V_2$ munit de l'application $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$.

Soit une représentation R de dimension finie de G , on dispose alors d'entiers m_{ij} pour $1 \leq i, j \leq n$ tels que :

$$R \otimes R_i = \bigoplus_{j=0}^n m_{ij} R_j \quad (5)$$

ces entiers permettent de définir les graphes suivants :

Définition :

Le diagramme associé à R est le suivant :

$G := (V, w)$ où $V := \{R_i | 0 \leq i \leq n\}$ et pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $w((R_i, R_j)) = m_{ij}$. On définit aussi la matrice de Cartan associée au diagramme :

$$c_R = (d\delta_{ij} - m_{ij})_{i,j \in \{0, \dots, n\}} \quad (6)$$

On peut maintenant, par un calcul direct avec les tables de caractères des sous-groupes de $SL_2(\mathbb{C})$, trouver les graphes définis ci-dessus. Cependant, on peut démontrer certains résultats plus abstraitement.

Proposition 5. *Soit G un groupe fini non trivial quelconque, $\{R_i\}_{0 \leq i \leq n}$ ses représentations irréductibles dans \mathbb{C} et R une représentation dans \mathbb{C} . Le diagramme associé à R est connexe si et seulement si R est fidèle.*

Démonstration: Pour $1 \leq i \leq n$ on note χ_i le caractère de R_i et χ celui de R .

Commençons par \Leftarrow . Soit $0 \leq i, j \leq n$. Pour $k \in \mathbb{N}$ le caractère de $(\bigotimes^k R) \otimes R_i$ est $\chi^k \chi_i$; regardons $\langle \chi^k \chi_i, \chi_j \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^k \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)}$. Comme R est injective, pour

tout $g \in G \setminus \{Id\}$, $\chi(g) \neq \chi(Id) = \dim(V) \neq 0$. Par conséquent, si on note $P(X) = X \prod_{g \in G \setminus Id} (X - \chi(g))$, $\langle P(\chi)\chi_i, \chi_j \rangle = \frac{1}{|G|} P(\dim(V))\chi_i(Id)\overline{\chi_j(Id)} \neq 0$. On en déduit qu'il

existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\langle \chi^k \chi_i, \chi_j \rangle \neq 0$ et par conséquent $i_0 = i, i_1, \dots, i_k = j$ des entiers entre 0 et n tels que $m_{i_l i_{l+1}} \neq 0$ pour tout $0 \leq l \leq k-1$. Ce qui conclut.

Réciproquement, si R n'est pas fidèle il existe $g \in G \setminus \{Id\}$ tel que $\rho(g) = Id$. De plus, soit R' une seconde représentation admettant g comme élément de son noyau, la représentation $R \otimes R'$ admet g comme élément de son noyau. Par conséquent, la composante connexe de la représentation triviale est incluse dans les représentations irréductibles ayant g dans leur noyau, qui ne peut être toutes les représentations irréductibles. \square

Si maintenant G est un sous-groupe fini non trivial de $SL_2(\mathbb{C})$ et R la représentation induite par son action sur \mathbb{C}^2 on peut démontrer quelques résultats plus précis.

Proposition 6. *Soit $G < SL_2(\mathbb{C})$ fini et R sa représentation standard. On a :*

1. *Le graphe est non orienté i.e. $m_{ij} = m_{ji}$ pour tout $0 \leq i, j \leq n$.*
2. *Il n'y a pas de boucle, i.e. $m_{ii} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$.*
3. *$m_{ij} \leq 1$ pour tous $0 \leq i, j \leq n$.*

Démonstration:

1. On remarque tout d'abord que pour tout $g \in G$, $\text{tr}(g) \in \mathbb{R}$ car $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ et est fini. Par conséquent si on note χ le caractère de R , on a : $m_{ij} = \langle \chi \chi_i, \chi_j \rangle = \langle \overline{\chi} \chi_j, \chi_i \rangle = m_{ji}$.
2. Si G est cyclique $R = R' \oplus R''$ où R' et R'' sont de dimension 1 et différents de la représentation triviale. Soit R_i une représentation irréductible, R_i est de dimension 1, par conséquent $R' \otimes R_i \neq R_i \neq R'' \otimes R_i$. Si G n'est pas cyclique R est irréductible. De plus on a vu dans la première partie que $-\text{Id} \in G$. Comme $-\text{Id} \in Z(G)$, est d'ordre 2 et R_i est irréductible, $\rho_i(-\text{Id}) = \pm \text{Id}$. On a donc $\rho \otimes \rho_i(-\text{Id}) = \mp \text{Id}$ et R_i n'apparaît donc pas dans la décomposition de $R \otimes R_i$.
3. A nouveau, le résultat est clair pour les groupes cycliques. Supposons donc que G n'est pas cyclique, on a :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}^2 = \langle \chi \chi_i, \chi \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)\chi_i(g)|^2 \leq 4 \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_i(g)|^2 \right) = 4$$

car $|\chi(g)| \leq 2$ pour tout $g \in G$. Si il existe j tel que $m_{ij} \geq 2$ alors $m_{ij} = 2$ et $\rho \otimes \rho_i = 2\rho_j$. Par le même argument qu'en 2 on a $\rho_i(-\text{Id}) = \pm \text{Id}$ et $\rho_j(-\text{Id}) = \mp \text{Id}$, supposons $\rho_i(-\text{Id}) = \text{Id}$. Par conséquent ρ_i induit une représentation irréductible de $H = G/\{\text{Id}; -\text{Id}\}$. L'inégalité du début étant une égalité et comme $|\chi(g)| < 2$ pour $g \neq \pm \text{Id}$ on déduit : $\chi_i(g) = 0$ pour $g \neq \pm \text{Id}$. Par suite, $|H| = \chi_i(\text{Id})^2$ et $|H| = \sum_{\chi_{\text{irréd}}} \chi(\text{Id})^2$ et χ_i est donc l'unique représentation irréductible de $|H|$ et est donc triviale. On conclut H est le groupe trivial et $G \subseteq \{\text{Id}; -\text{Id}\}$.

□

On peut maintenant calculer les graphes associés aux sous-groupes finis de $SL_2(\mathbb{C})$, cependant ceux-ci ne correspondent pas exactement aux diagrammes de Dynkin mais plutôt aux diagrammes de Dynkin dits étendus. Pour récupérer les diagrammes originaux il faut enlever aux graphes obtenus le point associé à la représentation triviale R_0 . On peut voir qu'ainsi on associe toujours un graphe connexe à ces groupes.

En effet, si G est cyclique alors le graphe associé est un cycle, et enlever un point ne rompt pas la connexité. Sinon R est irréductible, et donc $R \otimes R_0 = R$ et R_0 est donc un sommet de degré 1 dans le graphe. A nouveau le graphe obtenu en enlevant la représentation triviale est connexe.

On trouve par le calcul les associations suivantes :

- Aux groupes cycliques correspond la suite $(A_n)_{n \geq 1}$.
- Aux groupes binaires diédraux correspond la suite $(D_n)_{n \geq 1}$
- Aux groupes \mathbb{T}, \mathbb{O} et \mathbb{I} correspondent respectivement E_6, E_7 et E_8 .

Exemple:

Détaillons le calcul pour la suite $(D_n)_{n \geq 4}$. Pour cela, déterminons les représentations irréductibles (à isomorphisme près) de $\mathbb{D}_n \simeq \mathcal{D}_{2n}$, pour $n \geq 1$. On note s et r des éléments engendrant \mathbb{D}_n et vérifiant $s^2 = \text{Id}, r^{2n} = \text{Id}$ et $srs = r^{-1}$. Les représentations irréductibles sont alors :

- les quatre représentations de dimension 1 données par $\rho_{i,j}(r) = (-1)^i \text{Id}$ et $\rho_{i,j}(s) = (-1)^j \text{Id}$, pour $i, j \in \{0; 1\}$.
- les représentations de dimension 2 données par :

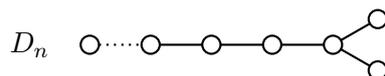
$$\rho_h(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho_h(r) = \begin{pmatrix} \omega^h & 0 \\ 0 & \omega^{-h} \end{pmatrix}$$

pour $h \in \{1; \dots; n-1\}$ et $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

De plus, on a $\rho \simeq \rho_k$ pour un certain $k \in \{1; \dots; n-1\}$. Calculons le produit tensoriel dans les différents cas :

- $\rho \otimes \rho_{1,1} \simeq \rho_{n-k}$: isomorphisme donné par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\rho \otimes \rho_{0,1} \simeq \rho_{n-k}$: isomorphisme donné par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\rho \otimes \rho_{1,0} \simeq \rho_k$: isomorphisme donné par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Soit $h \in \{1; \dots; n-1\} \setminus \{n-k\}$. On a l'isomorphisme $\rho \otimes \rho_h \simeq \rho_{k+h} \oplus \rho_{k-h}$ en décomposant $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ sur $\text{vec}\{(1,0) \otimes (1,0), (0,1) \otimes (0,1)\}$ et $\text{vec}\{(1,0) \otimes (0,1), (0,1) \otimes (1,0)\}$
- On déduit enfin $\rho \otimes \rho_{n-k} \simeq \rho_{n-2k} \oplus \rho_{1,1} \oplus \rho_{0,1}$ car le graphe est non orienté.

Par conséquent, le graphe associé à trois sommets de degré 1, $n-4$ sommets de degré 2 et 1 sommet de degré 3 relié à deux sommets de degré 1. De plus, il est connexe et non orienté. Par conséquent c'est le graphe suivant :



■

3 Le point de vue des variétés algébriques affines

Cette deuxième approche consiste à étudier l'ensemble \mathbb{C}^2/G des orbites de l'action de $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ fini sur \mathbb{C}^2 . Pour cela on met sur cet espace une structure de variété affine qu'on définit ici. Dans toute cette partie k désigne un corps algébriquement clos.

3.1 Variétés algébriques affines

Soit k un corps et n un entier naturel. On met sur k^n la topologie de Zariski, dont les fermés sont les ensembles $V(S) := \{x \in k^n \mid \forall f \in S, f(x) = 0\}$ où $S \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Ces ensembles définissent bien une topologie car, notamment, pour toute famille $(S_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$. On remarque que $V(S) = V(\langle S \rangle)$ où $\langle S \rangle$ est l'idéal engendré par S . On peut maintenant définir une variété algébrique affine :

Définition :

Une *variété algébrique affine* sur le corps k est un sous-espace fermé, pour la topologie de Zariski, de k^n pour un certain entier naturel n .

Par le théorème de base normal de Hilbert $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien, tout idéal est donc finiment engendré et on peut toujours voir une variété affine comme le lieu d'annulation d'un nombre fini de polynômes. De plus, pour faciliter l'étude on se restreindra au cas des corps algébriquement clos.

On peut maintenant définir deux objets naturellement associés à une variété affine X :

Définition :

Soit $X \subseteq k^n$ une variété affine. On pose $I(X) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \forall x \in X, f(x) = 0\}$ et $\mathcal{O}(X) := \{f|_X \mid f \in k[X_1, \dots, X_n]\}$. Ce second objet est appelé *anneaux des fonctions régulières* de X .

On a immédiatement : $\mathcal{O}(X) \simeq k[X_1, \dots, X_n]/I(X)$. On remarque ainsi que tout idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ ne peut être écrit sous la forme $I(X)$ pour une certaine variété X ; en effet, il est clair que $\mathcal{O}(X)$ est réduit i.e. $I(X) = \sqrt{I(X)}$. On dit que $I(X)$ est *radiciel*. Plus précisément :

Théorème 2 (Nullstellensatz fort):

Soit k un corps algébriquement clos et n un entier naturel, alors :

1. Si J est un idéal différent de A , $V(J) \neq \emptyset$.
2. Pour tout idéal J , $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

3. L'application $V(\cdot)$ est une bijection entre $\{\text{Idéaux radiciels de } k[X_1, \dots, X_n]\}$ et $\{\text{Variétés algébrique affine dans } k^n\}$ de réciproque $I(\cdot)$.

Ce théorème permet de voir :

Corollaire 3:

Soit X une variété algébrique affine sur un corps k algébriquement clos, Y et Z deux sous-ensembles fermés disjoints de X . Alors, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tel que $f(Y) = \{1\}$ et $f(Z) = \{0\}$.

En particulier, $\mathcal{O}(X)$ sépare les points de X .

Démonstration: Soit n entier naturel tel que $X \subseteq k^n$. On a $V(I(Y) + I(Z)) = V(I(Y)) \cap V(I(Z)) = Y \cap Z = \emptyset$ donc $I(Y) + I(Z) = A$ par le théorème précédent. Il existe donc $f_1 \in I(Y)$ et $f_2 \in I(Z)$ tels que $1 = f_1 + f_2$. L'image de f_1 dans $\mathcal{O}(X)$ est alors la fonction cherchée. \square

Une autre correspondance importante est celle qui a lieu entre les variétés affines et leurs anneaux de fonctions régulières. Pour exhiber cette correspondance il faut d'abord définir ce qu'est un morphisme de variétés affines.

Définition :

Soit $X \subseteq k^n$ et $Y \subseteq k^m$ deux variétés algébriques affines sur un corps k . On dit que $f : X \rightarrow Y$ est un *morphisme de variété* s'il existe $\Phi : k^n \rightarrow k^m$, dont les coordonnées sont polynomiales, telle que $\Phi(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

On vérifie qu'avec cette définition l'identité est un morphisme, et que la composée de deux morphisme est un morphisme. On a donc une notion naturelle d'isomorphisme. On a aussi :

Proposition 7. *Soit X et Y deux variétés algébriques affines sur un corps k . A tout morphisme $\psi : X \rightarrow Y$ on associe le morphisme de k -algèbre $\psi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ défini par $\psi^*(f) = f \circ \psi$. Alors, tout morphisme de k -algèbre entre $\mathcal{O}(Y)$ et $\mathcal{O}(X)$ est de la forme ψ^* pour un unique morphisme de variétés $\psi : X \rightarrow Y$. De plus, pour tous morphismes $\phi : X \rightarrow Y$ et $\psi : X \rightarrow Y$, $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.*

cela implique immédiatement :

Corollaire 4:

Soit X et Y deux variétés algébriques affines sur un corps k . Alors, X est isomorphe à Y si et seulement si $\mathcal{O}(X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(Y)$.

De plus, dans le cas d'un corps algébriquement clos, on a les quelques relations supplémentaires suivantes entre les deux morphismes donnés par la proposition ci-dessus :

Proposition 8. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés dont l'image est dense dans Y , alors f^* est injectif. On dira que f est dominant.*

Démonstration:

$$\begin{aligned} (f^*)^{-1}(\{0\}) &= \{g \in \mathcal{O}(Y) \mid f^*(g) = 0\} \\ &= \{g \in \mathcal{O}(Y) \mid g \circ f = 0\} \\ &= \{g \in \mathcal{O}(Y) \mid g(x) = 0, \forall x \in f(X)\} = \{0\} \end{aligned}$$

car le lieu d'annulation d'un élément de $\mathcal{O}(Y)$ est fermé. \square

Alors, on a le résultat suivant :

Proposition 9. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant de variétés affines sur un corps algébriquement clos. Supposons que $\mathcal{O}(X)$ soit engendré par au plus n éléments en tant que $\mathcal{O}(Y)$ module. Alors, f est surjectif, fermé, et a des fibres de cardinal $\leq n$.*

Une autre propriété topologique ayant une interprétation en terme de fonctions régulières est utile.

Définition :

Soit X un espace topologique. On dit que X est *irréductible* si pour tous fermés Y, Z de X , $Y \cup Z = X$ implique $Y = X$ ou $Z = X$.

Si X est une variété algébrique affine, la propriété algébrique équivalente est l'intégrité de $\mathcal{O}(X)$. On peut donc reformuler cela par : X irréductible $\Leftrightarrow \mathcal{O}(X)$ est intègre $\Leftrightarrow I(X)$ est premier.

Démontrons trois propriétés utiles sur les espaces irréductibles.

Proposition 10. *Soit X un espace topologique.*

- *Soit $U \subseteq X$ un ouvert non vide, si X est irréductible alors U est dense.*
- *Soit $U \subseteq X$ un ouvert non vide, si X est irréductible alors U est irréductible.*
- *Soit $Y \subseteq X$, si Y est irréductible alors \overline{Y} est irréductible.*

Démonstration:

1. Soit $V \subseteq X$ ouvert non vide, $X \setminus (V \cap U) = (X \setminus V) \cup (X \setminus U) \neq X$ par irréductibilité. Par suite, $V \cap U \neq \emptyset$ et U est dense.
2. Soit F_1, F_2 deux fermés de X tels que $U = (F_1 \cap U) \cup (F_2 \cap U)$ on a : $X = \overline{U} \subseteq F_1 \cup F_2$ et donc $F_1 = X$ ou $F_2 = X$. Ce qui conclut.
3. La même démonstration s'applique.

\square

Définition :

Soit X un espace topologique. X est dit *noethérien* si toute chaîne descendante de fermés est stationnaire à partir d'un certain rang.

Ou de manière équivalente par le lemme de Zorn : Tout ensemble de fermés non vide de X admet un élément minimal pour l'inclusion.

Proposition 11. Soit X un espace topologique noethérien, alors il existe Y_1, \dots, Y_r fermés irréductibles uniques à l'ordre près tels que :

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$$

Démonstration: On prouve d'abord l'existence. Par l'absurde supposons que X ne se décompose pas ainsi. Alors l'ensemble \mathcal{P} des fermés ne se décomposant pas comme dans la proposition est non vide et possède donc un élément minimal noté Y . Comme Y ne peut être irréductible il existe Y_1, Y_2 fermés tels que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Or $Y_1, Y_2 \notin \mathcal{P}$ par hypothèse. Et on voit donc immédiatement que $Y \notin \mathcal{P}$. Absurde.

Pour l'unicité, soit $Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ et $Z_1 \cup \dots \cup Z_s$ deux telles décompositions. Pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$ on a $Y_i = (Y_i \cap Z_1) \cup \dots \cup (Y_i \cap Z_s)$ et donc $Y_i \subseteq Z_j$ pour un certain j . Ce qui conclut. \square

Grâce à ces notions on peut définir la dimension d'une variété algébrique affine de manière topologique et algébrique :

Définition :

Soit X une variété algébrique affine. On définit la *dimension* de X comme le supremum des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe une suite $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n$ de fermés irréductibles de X .

Algébriquement, cela revient à définir la dimension comme étant le supremum des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe une suite $\mathfrak{p}_n \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_0$ d'idéaux premiers de $\mathcal{O}(X)$.

On notera cet entier $\dim(X)$.

On peut de même définir une notion de codimension :

Définition :

Soit X un espace topologique et $Y \subseteq X$ un fermé irréductible. La *codimension* de Y dans X est le supremum des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe une suite croissante $(Y_i)_{0 \leq i \leq n}$ de fermés irréductibles vérifiant :

$$Y = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{n-1} \subsetneq Y_n$$

et est notée $\text{codim}(Y, X)$.

Si Y n'est plus supposée irréductible, on pose : $\text{codim}(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y \text{ fermé irr.}} \text{codim}(Z, X)$

et on a alors le résultat suivant :

Proposition 12. Soit k un corps et $n \in \mathbb{N}$, $\dim(k^n) = n$.

Ce résultat est assez délicat à montrer et est donc admis.

3.2 Algèbres Invariantes

Démontrons d'abord un résultat général, relié à l'action d'un groupe fini sur une variété algébrique affine.

Soit G un groupe fini agissant à gauche sur une variété affine X . Cette action induit une action à droite de G sur l'anneau $\mathcal{O}(X)$ donnée par : $f^g : x \mapsto f(g.x)$. On peut donc définir $\mathcal{O}(X)^G := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f^g = f\}$: c'est l'algèbre invariante. Le résultat général suivant est utile pour la suite :

Théorème 5 (Hilbert-Noether):

Soit k un corps et A une k -algèbre finiment engendrée sur lequel agit (à droite) un groupe fini G . On définit A^G comme précédemment. Alors :

1. A^G est une k -algèbre finiment engendrée.
2. A est un A^G -module de type fini.

Démonstration: On remarque tout d'abord que pour $a \in A$, $P(X) := \prod_{g \in G} (X - a^g) \in A^G[X]$. Soit maintenant r_1, \dots, r_n qui engendrent A en tant qu'algèbre et P_1, \dots, P_n des polynômes dans $A^G[X]$ annihilant ces générateurs. On note $S \subseteq A^G$ l'algèbre engendrée par les coefficients de ces polynômes. Elle est finiment engendrée et est donc un anneau noethérien d'après le théorème de la base normale de Hilbert.

Montrons alors la seconde assertion. A est une S -algèbre finiment engendrée et entière sur S car ses générateurs le sont. Par conséquent A est un S -module de type fini, et donc un A^G -module de type fini.

Il reste à montrer la première partie de la proposition. A^G est un sous- S -module de A qui est noethérien, A^G est donc un S -module de type fini. Comme S est une k -algèbre finiment engendrée, A^G aussi est finiment engendrée. \square

Il est donc possible, à partir de l'action d'un groupe sur une variété, de définir une autre variété via l'algèbre invariante. Soit X une variété, et G une telle action, on note $X//G$ la variété ainsi fabriquée. Le théorème précédent ainsi qu'une proposition de la partie 3.1 montre que le morphisme de variété $\pi : X \rightarrow X//G$ donnée par l'inclusion de $\mathcal{O}(X//G)$ dans $\mathcal{O}(X)$ est surjectif et fermé.

Remarque: On définit en fait ici plus une classe d'isomorphisme de variétés algébriques affines, qu'une variété algébrique affine à proprement parler. On se permettra de choisir un représentant de cette classe.

Montrons maintenant que $X//G$ peut être vu comme l'ensemble des orbites. Soit toujours $\pi : X \rightarrow X//G$ le morphisme de variétés induit par l'inclusion i de $\mathcal{O}(X)^G$ dans $\mathcal{O}(X)$, on va montrer :

Proposition 13. *Les fibres de π sont exactement les orbites de X sous l'action de G .*

Démonstration: Soit $x \in X$ et $g \in G$. Il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{O}(X)^G$ on a $f \circ \pi(x) = f \circ \pi(g.x)$. En effet, on a montré plus haut que $\mathcal{O}(X)$ sépare les points. Or

pour $f \in \mathcal{O}(X)^G$, $f \circ \pi(g.x) = i(f)(g.x) = i(f)(x) = f \circ \pi(x)$, car $i(f)$ n'est rien d'autre que f et $f^g = f$ pour tout $g \in G$.

Réciproquement, soit Y et Z deux orbites distinctes. Comme les orbites sont des unions finies de points elles sont fermées. Par conséquent il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tel que $f(Y) = \{1\}$ et $f(Z) = \{0\}$, de plus, $F := \prod_{g \in G} f^g$ vérifie la même chose et appartient à $\mathcal{O}(X)^G$. D'où $F \circ \pi(y) \neq F \circ \pi(z)$ pour $y \in Y$ et $z \in Z$ (le morphisme correspondant à π étant l'inclusion). Ce qui conclut. \square

Etant donné que π est surjectif, cela donne bien le résultat attendu. On notera dorénavant X/G au lieu de $X//G$.

Il ne reste plus qu'à calculer ces algèbres dans les cas particuliers qui nous intéressent.

On remarque maintenant que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}[X, Y]$ de la manière suivante : pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, et $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ on pose $P^g(X, Y) = P(g(X, Y)) = (g_{11}X + g_{12}Y, g_{21}X + g_{22}Y)$. Il est clair, au vu de l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[X, Y]$, que deux sous-groupes conjugués de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ont des algèbres invariantes isomorphes. Par conséquent, on a seulement besoin de les calculer pour les groupes donnés à la fin de la première section.

Proposition 14. *Les algèbres invariantes pour les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont engendrées par trois éléments. En particulier, on a à isomorphisme près :*

- Si G est un groupe cyclique d'ordre $n \geq 0$, $\mathbb{C}[X, Y]^G \simeq \langle X^n, Y^n, XY \rangle$.
- Si G est un groupe binaire diédral d'ordre $4n$, pour $n \geq 0$, $\mathbb{C}[X, Y]^G \simeq \langle X^{2n} + Y^{2n}, X^2Y^2, XY(X^{2n} - Y^{2n}) \rangle$.
- Si G est isomorphe à \mathcal{T} , $\mathbb{C}[X, Y]^G \simeq \langle XY(X^4 - Y^4), (X^4 - Y^4)^2 + 16X^4Y^4, (X^4 + Y^4)^3 - 36X^4Y^4(X^4 + Y^4) \rangle$.
- Dans les cas restant l'expression est encore plus complexe.

Démonstration: Soit $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ fini, on introduit l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ P &\mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P^g \end{aligned}$$

On remarque que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{C}[X, Y]^G$ et que ϕ est un projecteur. Par conséquent on peut chercher une base de $\mathbb{C}[X, Y]^G$ parmi les éléments $\phi(X^k Y^l)$, $k \geq 0, l \geq 0$. On procède au cas par cas, traitons les cas cycliques et diédraux :

- Si G est cyclique, d'ordre $n \geq 0$, comme à la fin de la première section. Soit $k, l \geq 0$, on calcule $\phi(X^k Y^l) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{2i(k-l)m\pi}{n}} X^k Y^l = X^k Y^l$ si $k = l \pmod{n}$ et 0 sinon. D'où les résultat.
- Si G est le groupe binaire diédral, d'ordre $4n$, $n \geq 0$. Pour $k, l \geq 0$, $\phi(X^k Y^l) = \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n} e^{i(k-l)m\pi} (X^k Y^l - Y^k X^l) = (X^k Y^l + (-1)^k Y^k X^l)$ si $k = l \pmod{2n}$ et 0 sinon. D'où le résultat à nouveau.
- Pour les autres cas la même méthode s'applique.

□

Ce résultat montre donc la chose suivante :

Soit $\phi : \mathbb{C}[X, Y, Z] \rightarrow \mathbb{C}[X, Y]^G$ les morphisme de \mathbb{C} -algèbre envoyant X, Y et Z sur les générateurs trouvés précédemment, ce morphisme est surjectif, et son noyau est l'idéal $I := \{P \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \mid P(\phi(X), \phi(Y), \phi(Z)) = 0\}$ de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. On a alors $\mathbb{C}[X, Y]^G \simeq \mathbb{C}[X, Y, Z]/I$ et $\mathbb{C}^2/G \simeq V(I) \subseteq \mathbb{C}^3$. Il reste donc à déterminer I .

Proposition 15. *Pour G sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ l'idéal I défini au-dessus est principal. Dans les différents cas, il est engendré par :*

- $C_n : XY - Z^n$.
- $D_n : X^{n+1} - XY^2 + Z^2$.
- $\mathbb{T} : X^4 + Y^3 + Z^2$.
- $\mathbb{O} : X^3Y + Y^3 + Z^2$.
- $\mathbb{I} : X^5 + Y^3 + Z^2$.

Démonstration: Supposons d'abord que la première partie de la proposition soit démontrée. Il résulte d'un calcul (qui peut être un peu fastidieux pour les groupes $\mathbb{T}, \mathbb{O}, \mathbb{I}$) que les éléments exhibés appartiennent bien à I . Cependant, il est facile de remarquer que ces éléments sont biens irréductibles par le critère d'Eisenstein, appliqué sur l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X, Y]$ à chaque fois. Par conséquent, ils engendrent bien I dans chacun des cas.

Montrons maintenant que l'idéal I est principal. Soit $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ deux idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$, il est clair que $\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{p}_1 \cap \mathbb{C}[X, Y]^G$ et $\mathfrak{q}_2 := \mathfrak{p}_2 \cap \mathbb{C}[X, Y]^G$ sont des idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]^G$. De plus, soit $f \in \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$ non nul, d'après Hilbert-Noether il existe $P \in (\mathbb{C}[X, Y]^G/\mathfrak{q}_1)[T]$ irréductible tel que $P(f) = f^n + \dots + a_0 = 0$, comme f est non nul $a_0 \neq 0$ et donc $a_0 \in \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$. Par conséquent $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ et en considérant une chaîne d'idéaux premiers de longueur 2 de $\mathbb{C}[X, Y]$ on trouve $\dim(\mathbb{C}^2/G) \geq \dim(\mathbb{C}^2) = 2$. Enfin, soit $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ une chaîne d'idéaux premiers de $\mathbb{C}^2/G \simeq \mathbb{C}[X, Y, Z]/I$ et $pr : \mathbb{C}[X, Y, Z] \rightarrow \mathbb{C}[X, Y, Z]/I$ la projection, on considère un élément P non nul de degré minimal de I qui est donc irréductible car I est premier ; si I n'est pas principal on a alors la chaîne d'idéaux premiers : $(0) \subsetneq (P) \subsetneq I \subsetneq pr^{-1}(\mathfrak{p}_1) \subsetneq pr^{-1}(\mathfrak{p}_2)$ absurde car $\dim \mathbb{C}^3 = 3$. Par conséquent I est principal. □

3.3 Applications rationnelles

On introduit ici quelques outils qui seront utilisés plus tard dans le mémoire.

Définition :

Soit X une variété algébrique affine sur un corps k , et $f \in \mathcal{O}(X)$. On note X_f l'ouvert de X défini par $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Soit Y un sous-ensemble fermé de X , comme $I(Y)$ est finiment engendré il existe $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ telles que $X \setminus Y = \bigcup_{i=1}^n X_{f_i}$ et ces ensembles forment une base de la

topologie de X .

Bien que ces ouverts ne puissent être vu en général comme des sous-variétés algébriques affines de X on peut les doter d'une structure de variété algébrique affine.

Proposition 16. *Soit $X \subseteq k^n$ une variété algébrique affine sur un corps k , et $f \in \mathcal{O}(X)$. Il existe une structure de variété algébrique affine sur X_f telle que l'inclusion $X_f \hookrightarrow X$ soit un morphisme.*

Démonstration: En effet, on pose $\mathcal{O}(X) \simeq k[X_1, \dots, X_n]/I$ avec $X = V(I)$. Comme précédemment on va d'abord construire l'ensemble des fonctions régulières de la variété souhaitée. On regarde $k[X_1, \dots, X_n]$ comme un sous-ensemble de $k[X_1, \dots, X_n, Y]$, et on remarque que l'application :

$$\begin{aligned} X_f &\rightarrow V((I(X), Yf - 1)) \\ p &\mapsto (p, f(p)^{-1}) \end{aligned}$$

est une bijection ; on identifie donc ces deux ensembles. L'inclusion $X_f \hookrightarrow X$ correspond alors à la restriction à $V((I(X), Yf - 1))$ de la projection sur les n premières coordonnées et est donc bien un morphisme. \square

Remarque: On remarque qu'avec cette construction $\mathcal{O}(X_f) = \mathcal{O}(X)[f^{-1}]$ et que le morphisme associé à l'inclusion $X_f \hookrightarrow X$ est l'inclusion $\mathcal{O}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)[f^{-1}]$.

Plus généralement :

Définition :

Soit X une variété algébrique affine irréductible et U un ouvert de X muni d'une structure de variété algébrique affine. On dit que U est une sous-variété ouverte si l'inclusion $U \hookrightarrow X$ est un morphisme de variétés et l'application $\phi : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ associée induit un isomorphisme $\text{Frac}(\mathcal{O}(U)) \simeq \text{Frac}(\mathcal{O}(X))$.

On peut maintenant définir une nouvelle notion d'équivalence entre variétés algébriques affines. Pour cela on notera, pour X une variété algébrique affine irréductible, $K(X)$ le corps des fractions de $\mathcal{O}(X)$.

Définition :

Soit X, Y deux variétés algébriques affines irréductibles sur un corps k .

- On appelle application rationnelle et on note $f : X \dashrightarrow Y$ tout morphisme $U \rightarrow Y$ où $U \subseteq X$ est une sous-variété algébrique affine ouverte de X .
- On dira qu'une telle application est birationnelle si elle réalise un isomorphisme entre des sous-variétés algébriques affines ouvertes de X et Y .
- X et Y seront dites birationnelles s'il existe $f : X \dashrightarrow Y$ birationnelle.

Proposition 17. *On reprend les notations ci-dessus. Alors, X et Y sont birationnelles si et seulement si $K(X) \simeq K(Y)$.*

Démonstration:

$\Rightarrow :$

Notons $\phi : K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$ un isomorphisme. $\mathcal{O}(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments x_1, \dots, x_n et on dispose de $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tels que $\phi(a_i b_i^{-1}) = x_i$, $1 \leq i \leq n$. En posant $b := \prod_{i=1}^n b_i$, ϕ induit un morphisme $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(Y)[b^{-1}]$, et on a $\phi(\mathcal{O}(Y)[b^{-1}]) \subseteq \mathcal{O}(X)[(\phi(b))^{-1}]$. Or $x_1, \dots, x_n, (\phi(b))^{-1} \in \phi(\mathcal{O}(Y)[b^{-1}])$ donc il y a égalité. Comme de plus ϕ est injectif on en déduit un isomorphisme de variétés entre Y_b et $X_{\phi(b)}$.

$\Leftarrow :$

Soit $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$ deux sous-variétés ouvertes non vides isomorphes. On a donc $\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}(V)$ et par conséquent $K(U) \simeq K(V)$. On conclut car $K(U) \simeq K(X)$ et $K(V) \simeq K(Y)$. \square

3.4 Singularités de variétés affines

Définition :

Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une variété affine de dimension r et $f_1, \dots, f_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ une famille génératrice de l'idéal associé à X . On dit que X admet une *singularité* en $P \in X$ si la matrice Jacobienne en P , $(\partial f_i / \partial x_j(P))_{ij}$ est de rang inférieur à $n - r$. Si X n'admet pas de singularité on dit qu'elle est *non-singulière*.

On cherche à établir une définition intrinsèque de singularité, ne faisant intervenir que l'anneau des fonctions de la variété. Comme le fait d'être singulier est une notion locale, la définition ne peut que dépendre des fonctions localement définies autour du point. Introduisons cela algébriquement.

Définition :

Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une variété affine et $Y \subset X$ une sous variété affine irréductible, alors $I(Y) \subset \mathcal{O}(X)$ est un idéal premier et on pose l'*anneau local des fonctions* de X définies sur Y comme étant le localisé $\mathcal{O}(X)_Y := (\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / I(X))_{I(Y)}$. La notion algébrique de point singulier est la suivante.

Définition :

Soit A un anneau local noethérien et un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$. Alors $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel A/\mathfrak{m} et on dit que A est un *anneau local régulier* si

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim A.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 18. *Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une variété affine et $P \in X$ un point. Alors X est non-singulière en P si et seulement si $\mathcal{O}(X)_P$ est un anneau local régulier.*

Démonstration. Soit $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\mathfrak{m}_P \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ l'idéal maximal correspondant. On définit une application linéaire,

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ f &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right). \end{aligned}$$

Il est clair que la famille $(\theta(x_i - a_i))_i$ forme une base de \mathbb{C}^n et que $\theta(\mathfrak{m}_P^2) = 0$, ce qui induit un isomorphisme $\theta': \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$. Soit maintenant $I(X) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ l'idéal définissant la variété affine X et $f_1, \dots, f_t \in I$ des générateurs. Pour $g_1, \dots, g_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ et $j \in \{1; \dots; t\}$:

$$\frac{\partial(\sum_i f_i g_i)}{\partial x_j}(P) = \sum_i f_i(P) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(P) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) g_i(P) = \sum_i g_i(P) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)$$

car $I(X) \subseteq \mathfrak{m}_P$. C'est donc une combinaison linéaire et on déduit : $\dim(\theta(I(X))) = \text{rang}^t J$ où $J = (\partial f_i / \partial x_j(P))$ est la matrice jacobienne.

Par rapport à θ' le rang de J est donc exactement la dimension du sous-espace $(I(X) + \mathfrak{m}_P^2)/\mathfrak{m}_P^2 \subset \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

De plus, l'anneau local $\mathcal{O}(X)_P$ est obtenu comme le quotient de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ par l'idéal $I(X)$ localisé en \mathfrak{m}_P et donc,

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{m}_P \mathcal{O}(X)_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{O}(X)_P \simeq \mathfrak{m}_P \mathcal{O}(X) / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{O}(X) \simeq \mathfrak{m}_P / (I(X) + \mathfrak{m}_P^2)$$

où dans le membre de gauche \mathfrak{m} est l'idéal maximal de $\mathcal{O}(X)_P$. Donc $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim((\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)/(I(X) + \mathfrak{m}_P^2)/\mathfrak{m}_P^2) = n - \dim((I(X) + \mathfrak{m}_P^2)/\mathfrak{m}_P^2)$ d'où $\text{rang}_{\mathbb{C}}(J) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

Supposons que $\dim X = r$ alors $\mathcal{O}(X)_P$ est un anneau local de dimension r et donc $\mathcal{O}(X)_P$ est régulier si et seulement si $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = r$, ce qui est équivalent par l'égalité établie à ce que $\text{rang}_{\mathbb{C}}(J) = n - r$. Ainsi on a démontré l'équivalence. \square

4 Singularités simples de germes analytiques

On adopte dans la suite une approche plus analytique des singularités, centrée non plus autour des applications polynomiales mais des fonctions holomorphes.

4.1 Définitions

On établit ici toutes les définitions nécessaires pour la suite.

Définition :

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$. On dit que f est *holomorphe* si elle est différentiable et sa différentielle est \mathbb{C} -linéaire.

On énonce une proposition utile, pour une démonstration, on pourra consulter [5].

Proposition 19. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ est holomorphe si et seulement si elle est holomorphe par rapport à chacune des ses variables. Ainsi elle est holomorphe si et seulement si pour $1 \leq i \leq n$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0.$$

Définition :

Soit $p \in \mathbb{C}^n$. L'ensemble des germes d'applications en p à valeur dans \mathbb{C}^k est l'ensemble des couples (U, f) où U est un voisinage ouvert de p et $f : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ est une application définie sur U modulo la relation d'équivalence \sim suivante :

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff \exists W \subset U_1 \cap U_2, f_1(x) = f_2(x), \forall x \in W.$$

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ est une application définie sur un voisinage U de p , on peut lui associer son germe en p , noté $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}^k$, qui est la classe d'équivalence de (U, f) dans l'ensemble des germes d'applications. On notera parfois $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^k, q)$ pour indiquer de plus que $f(p) = q$.

On définit deux notions d'équivalence sur les germes de fonctions.

Définition :

- Deux germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, p_1) \rightarrow \mathbb{C}^k$ et $f_2 : (\mathbb{C}^n, p_2) \rightarrow \mathbb{C}^k$ sont dits *RL-équivalents* (ou équivalent à gauche-droite) si il existe deux représentants $\tilde{f}_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^k$ et $\tilde{f}_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}^k$ de f_1 et f_2 et deux applications biholomorphes $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, avec $\varphi(p_1) = p_2$, et $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, avec V_1 voisinage de $\tilde{f}_1(p_1)$, V_2 voisinage de $\tilde{f}_2(p_2)$ tel que $\psi \circ \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 \circ \varphi$. Ainsi le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi} & U_2 \\ \downarrow \tilde{f}_1 & & \downarrow \tilde{f}_2 \\ V_1 & \xrightarrow{\psi} & V_2 \end{array}$$

- Deux germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, p_1) \rightarrow \mathbb{C}^k$ et $f_2 : (\mathbb{C}^n, p_2) \rightarrow \mathbb{C}^k$ sont dits *R-équivalents* (ou équivalent à droite) s'il existe deux représentants $\tilde{f}_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^k$ et $\tilde{f}_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}^k$ de f_1 et f_2 et une application biholomorphe $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ avec $\varphi(p_1) = p_2$ et $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 \circ \varphi$. Ainsi le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi} & U_2 \\ & \searrow \tilde{f}_1 & \downarrow \tilde{f}_2 \\ & & \mathbb{C}^k \end{array}$$

Cette notion sera la plus fréquente et on notera parfois simplement $f_1 \sim f_2$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 1. Notons que deux germes R-équivalents sont RL-équivalents pour $\psi = id_{\mathbb{C}^k}$. Mais la réciproque est fausse.

Définition :

Une *déformation* d'un germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est un germe $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $F(x, 0) = f(x)$.

Définition :

Un germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est dit *R-simple* (ou juste simple si aucune confusion n'est possible) s'il existe un nombre fini de germes $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ pour $1 \leq i \leq m$ avec la propriété suivante : pour toute déformation $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de f où il existe un représentant $\tilde{F} : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout point $q \in V$ la fonction $F(., q)$ définit un germe $F(., q) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, ces germes sont alors R-équivalents à l'un des f_i .

On donne un exemple qui sera important pour la classification des singularités simples.

Exemple:

Le germe défini par $f(x, y) = x^3 + xy^4$ n'est pas simple. En effet on considère la déformation $F(x, y, t) = x^3 + xy^4 + ty^6$. Pour t fixé on factorise F en $F(x, y, t) = (x - \lambda_1 y^2)(x - \lambda_2 y^2)(x - \lambda_3 y^2)$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les solutions de l'équation $\lambda^3 + \lambda + t = 0$. Le lieu d'annulation de $F(., ., t)$ est formé de trois paraboles d'équations $x = \lambda_i y^2$ avec $i = 1, 2, 3$. Or ces paraboles ne peuvent pas être envoyés de façon biholomorphe les unes sur les autres pour des t différents. Par exemple pour

$$\begin{aligned} V_1 & : x = 0, & x = y^2, & x = ky^2 \\ V_2 & : x' = 0, & x' = y'^2, & x' = k'y'^2 \end{aligned}$$

si on a un biholomorphisme il est de la forme $(x', y') = (x(a_{11} + u(x, y)), a_{21}x + a_{22}y + v(x, y))$ où u et v sont des termes d'ordre supérieurs. Comme $x'^2 = y'^2$ on a $a_{11} = a_{21}^2$ donc $x = ky^2$ est envoyé sur $x' = k'y'^2$ modulo les termes d'ordre supérieur. Si $k \neq k'$ on obtient une contradiction. Ainsi pour différentes valeurs de t les germes $F(., ., t)$ ne sont pas équivalents et donc la singularité n'est pas simple. ■

Définition :

On appelle *singularité analytique* en $p \in \mathbb{C}^n$ la classe d'équivalence à droite du germe d'une application holomorphe en p dont la différentielle s'annule en ce point. La singularité est dite simple si elle admet un représentant simple.

Remarque: Lorsque le germe est germe d'une application polynomiale la définition de singularité ainsi donnée coïncide avec celle donnée précédemment pour les variétés algébriques.

4.2 Algèbre locale des fonctions analytiques

On se limite ici à l'étude des germes de fonctions $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes en 0, l'étude en un autre point étant obtenue par translation. Ces fonctions à valeur dans une algèbre forment donc une algèbre.

Définition :

On définit \mathcal{O}_n comme étant l'anneau des séries formelles en n variables de rayon de convergence non nul en 0. Il est parfois aussi noté $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Proposition 20. *L'anneau \mathcal{O}_n est isomorphe à l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0. De plus la dérivation formelle dans \mathcal{O}_n correspond à la dérivation de fonction holomorphe.*

On se permettra dans la suite de confondre l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0 et \mathcal{O}_n .

Proposition 21. *\mathcal{O}_n est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_n := \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$, et de corps résiduel \mathbb{C} .*

Démonstration. Soit $f \notin \mathfrak{m}_n$ alors $f(0) \neq 0$ et donc par continuité f est non nul sur un voisinage U de 0. Donc $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_n$, et donc \mathcal{O}_n est local. \square

Proposition 22. *Les idéaux $\mathfrak{m}_n^r \subset \mathcal{O}_n$ sont de types finis et $\mathfrak{m}_n^r = \{f \in \mathcal{O}_n; j^r f = 0\}$ où $j^r f$ est le polynôme de Taylor en 0 de degré r associé à f .*

Démonstration. On peut trouver une preuve détaillée dans [4]. \square

Définition :

Soit f le germe d'une fonction en 0. Alors pour tout $i = 0, \dots, n$ quitte à choisir un représentant de f on peut définir le germe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de la dérivée partielle en 0 par la deuxième partie de la proposition 20. On définit l'idéal de Jacobi par :

$$\mathcal{I}_{\nabla f} := \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle := \left\{ g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \mid g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}_n \right\}.$$

On peut alors définir l'algèbre locale de f en 0 par $Q_f := \mathcal{O}_n / \mathcal{I}_{\nabla f}$ et la multiplicité de f en 0 par $\mu_f := \dim_{\mathbb{C}} Q_f$. Si $0 < \mu_f < \infty$ on dira que la singularité en 0 définie par le germe f est isolée.

Proposition 23. *Soit $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un biholomorphisme alors $Q_{f \circ \varphi} \cong Q_f$. En d'autres termes Q_f est bien défini pour la singularité définie par f en 0.*

Démonstration. Par la règle de la chaîne

$$d_0(f \circ \varphi) = d_0 f \cdot d_0 \varphi$$

Ainsi la différentielle $d_0 \varphi$ induit un isomorphisme sur les germes $d_0 \varphi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ de sorte que la règle de la chaîne s'écrit $\mathcal{I}_{\nabla f} \cdot d_0 \varphi = \mathcal{I}_{\nabla f \circ \varphi}$ ou l'action de $d_0 \varphi$ est à gauche. Donc elle induit aussi un isomorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\nabla f} & \longrightarrow & \mathcal{O}_n & \longrightarrow & Q_f \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_0\varphi & & \downarrow d_0\varphi & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\nabla f \circ \varphi} & \longrightarrow & \mathcal{O}_n & \longrightarrow & Q_{f \circ \varphi} \longrightarrow 0
\end{array}$$

□

Exemple:

En guise d'exemple on va démontrer que les singularités des germes $f_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ définis par $f_1(x, y) = x^2$ et $f_2(x, y) = x^2y$ ne sont pas simples. En effet considérons la déformation $F_{i,k}(x, y, t) = f_i(x, y) + ty^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. On remarque que l'on a à $t > 0$ fixé $\mu_{F_{i,k}} = k$, ainsi les germes ne sont pas simples. ■

Proposition 24. *Le germe d'une fonction f définit une singularité isolée si et seulement s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\mathfrak{m}_n^k \subset \mathcal{I}_{\nabla f}$. En particulier, si la singularité est isolée, $k = \mu_f$ convient.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_n \supseteq \mathfrak{m}_n \supseteq \mathfrak{m}_n^2 \supseteq \dots$ la suite filtrante d'idéaux de \mathcal{O}_n . En notant leurs images $\tilde{\mathfrak{m}}_n^k$ dans le quotient Q_f on obtient une suite décroissante de sous espaces vectoriels $Q_f \supseteq \tilde{\mathfrak{m}}_n \supseteq \tilde{\mathfrak{m}}_n^2 \supseteq \dots$. Soit l le plus petit entier tel que $\tilde{\mathfrak{m}}_n^l = \tilde{\mathfrak{m}}_n^{l+1}$. Si $l \geq \mu_f$ alors pour $k \leq \mu_f$ le sous-espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{m}}_n^k$ est au moins de codimension k et donc $\mathfrak{m}_n^{\mu_f} \subseteq \mathcal{I}_{\nabla f}$. Si $l < \mu_f$ on obtient que $\mathfrak{m}_n^l \subseteq \mathcal{I}_{\nabla f} + \mathfrak{m}_n^{l+1}$. Comme \mathfrak{m}_l est un \mathcal{O}_n module de type fini on peut appliquer Nakayama et conclure que $\mathfrak{m}^l \subseteq \mathcal{I}_{\nabla f}$, ce qui entraîne aussi que $\mathfrak{m}^{\mu_f} \subseteq \mathcal{I}_{\nabla f}$ comme $\mathfrak{m}^{\mu_f} \subseteq \mathfrak{m}^l$. □

4.3 Germes déterminés

Dans la suite f dénotera un germe holomorphe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ et $j^r f$ son polynôme de Taylor en 0 de degré r que l'on appelle le r -jet.

Définition :

f est dit r -déterminé si tout germe $\tilde{f} : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $j^r \tilde{f} = j^r f$ est R-équivalent à f . Il est en particulier équivalent à $j^r f$.

Théorème 3 (Tougeron). *Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe. Alors f est r -déterminé si*

$$\mathfrak{m}_n^r \subset \mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{I}_{\nabla f}.$$

Démonstration. On se fixe un représentant de f que l'on notera toujours f . Soit $\varphi \in \mathfrak{m}_n^{r+1}$, on va montrer que $f + \varphi$ est équivalent à f . Pour ce faire on cherche une famille de germes biholomorphes $g_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tels que $g_0 \equiv Id$ et $g_t(0) = 0$ avec

$$(f + t\varphi) \circ g_t \equiv f \tag{7}$$

pour tout $t \in [0, 1]$. L'équivalence sera alors donnée par g_1 . Pour prouver l'existence de g_t on va le définir comme solution d'une équation différentielle. Supposons provisoirement qu'on a construit g_t . On cherche un champ de vecteurs X_t non autonome défini au voisinage de 0 pour tout $t \in [0, 1]$ et tel que

$$X_{t_0}(g_{t_0}(x)) := \left. \frac{d}{dt} g_t(x) \right|_{t=t_0}.$$

On différencie formellement (7) par rapport à t , on obtient :

$$\varphi(g_t(x)) + X_t(g_t(x)) \cdot \nabla(f + t\varphi)(g_t(x)) = 0.$$

Construire le champs de vecteur revient à construire une équation différentiel dont une solution est g_t , que l'on cherche à construire. En remarquant que la relation précédente est une relation linéaire dans $\mathcal{O}_n[t]$, entre φ et les dérivées partielles de $f + t\varphi$, il nous suffit de montrer que $\mathfrak{m}_n^{r+1}[t] \subset \mathfrak{m}_n[t] \cdot \mathcal{I}_{\nabla(f+t\varphi)}$ dans $\mathcal{O}_n[t]$, où $\mathfrak{m}_n^r[t]$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{m}_n^r \subset \mathcal{O}_n[t]$.

En considérant l'hypothèse de l'énoncé dans \mathcal{O}_n on obtient dans $\mathcal{O}_n[t]$

$$\mathfrak{m}_n^r \cdot \mathcal{O}_n[t] \subset \mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{O}_n[t] \cdot \mathcal{I}_{\nabla f}$$

Comme $t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathfrak{m}_n^r[t]$, on a

$$\mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{I}_{\nabla f} \subset \mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{I}_{\nabla(f+t\varphi)} + \mathfrak{m}_n \cdot \mathfrak{m}_n^r \cdot \mathcal{O}_n[t].$$

et donc comme $\mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_n[t]$, en combinant les deux inclusions précédentes on obtient :

$$\mathfrak{m}_n^r \cdot \mathcal{O}_n[t] \subset \mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{I}_{\nabla(f+t\varphi)} + \mathfrak{m}_n[t] \cdot \mathfrak{m}_n^r \cdot \mathcal{O}_n[t]$$

Or par la proposition $\mathfrak{m}_n^r \cdot \mathcal{O}_n[t]$ est un $\mathcal{O}_n[t]$ -module de type fini, et donc, comme $\mathfrak{m}_n[t]$ est le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_n[t]$ le lemme de Nakayama entraîne : $\mathfrak{m}_n^{r+1} \subset \mathfrak{m}_n^r \subset \mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{I}_{\nabla(f+t\varphi)}$. On dispose donc d'un champ $X_t \in (\mathfrak{m}_n[t])^n$ vérifiant l'égalité ci-dessus.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'un flot défini sur un ouvert $U \subseteq [0; 1] \times \mathbb{C}^n$. Or par construction $g_t(0) = 0$ pour $t \in [0; 1]$, donc $[0; 1] \times \{0\} \subseteq U$: Cela assure l'existence du germe g_t recherché. De plus, pour $t \in [0; 1]$, g_t est bien le germe d'un biholomorphisme comme flot d'un champ de vecteurs. \square

Exemple:

Un germe qui ne définit pas une singularité est 1-déterminé. \blacksquare

Corollaire 6:

Un germe de multiplicité μ_f finie est $(\mu_f + 1)$ -déterminé.

Démonstration. Ceci découle directement de la proposition 24 et du théorème précédent. \square

Ce théorème peut être utilisé pour obtenir directement le lemme de Morse. On démontre ici une généralisation de ce lemme.

Lemme 1. *Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe tel que $df(0) = 0$ et tel que la Hessienne de f soit de rang $k \geq 0$ alors f est R -équivalent à un germe de la forme*

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g(x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

avec $g \in \mathfrak{m}^3$

Démonstration. Comme toutes les formes quadratiques de même rang sur \mathbb{C} sont isométriques on peut supposer que $j^2 f = x_1^2 + \cdots + x_k^2$. Ainsi en notant $x = (x_1, \cdots, x_k)$ et $y = (x_{k+1}, \cdots, x_n)$ on peut décomposer f en une partie affine et des termes de degré supérieurs en x : $f(x, y) = {}^t h(y) \cdot x + g(y) + {}^t x \cdot Q(x, y) \cdot x$ où Q est à valeurs dans les matrices de taille $k \times k$, h est à valeurs dans \mathbb{C}^k et $g \in \mathfrak{m}^3$. Or on a $j^2 f(x, y) + {}^t h(y) \cdot x = x_1(x_1 + h_1(y)) + \cdots + x_k(x_k + h_k(y))$ donc par le changement de variable $x_i \leftarrow x_i - \frac{h(y)x_i}{2}$ pour tout $1 \leq i \leq k$ on supprime les termes linéaires en x .

En considérant la fonction $(X, Y) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \mapsto {}^t Y \circ X \circ Y \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence sur un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ de l'identité d'une fonction biholomorphe $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $X \in \mathcal{U}$ on ait ${}^t H(X) \circ X \circ H(X) = \text{Id}_k$.

On pose alors le biholomorphisme $\varphi(x, y) := (H(Q(x, y)), y)$ et on peut définir sur un voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(x, y) &= {}^t x \cdot {}^t H(Q(x, y)) \circ Q(x, y) \circ H(Q(x, y)) + g(y) \\ &= {}^t x \cdot x + g(y). \end{aligned}$$

Ce qui est la forme recherchée. □

Remarque 2. Pour $k = n$ on retrouve le lemme de Morse classique en complexe.

Proposition 25. *Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une fonction polynomiale homogène de degré m qui définit une singularité isolée en 0 et tel que $n^2 < \binom{n+m-1}{n}$. Alors f est m -déterminé mais pas simple.*

Démonstration. La m -suffisance découle du théorème de Tougeron et du fait qu'une singularité isolée est de multiplicité finie. L'espace des polynômes homogènes de degrés m en n variables est de dimension $\binom{n+m-1}{n}$. Pour deux polynôme homogènes équivalents on peut choisir l'équivalence comme une transformation linéaire de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension n^2 . Ainsi au voisinage de f on peut avoir une infinité de singularités non-équivalentes. f n'est donc pas simple. □

En particulier ce résultat est vrai dans le cas $n = 3, m = 3$ et dans le cas $n = 2, m = 4$. On en déduit directement deux corollaires intéressants.

Corollaire 7:

Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une singularité isolée simple en 0. Alors on a

$$\text{rang}(j^2 f) \geq (n - 2)$$

Ce corollaire va nous permettre de déduire du cas $n = 2$ de la classification le résultat pour n quelconque. On s'attache donc au cas $n = 2$.

Corollaire 8:

Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une singularité simple, alors $j^3 f \neq 0$.

La preuve est analogue à la précédente. Suite à ce résultat on aura besoin de connaître une forme normal pour les formes cubiques, pour réduire le 3-jet d'un germe à deux variables :

Lemme 2. Une forme cubique peut être réduite par une transformation linéaire en :

1. 0
2. $x^2 y + y^3$
3. $x^2 y$
4. x^3

Cette réduction s'obtient en remarquant que $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit 3-transitivement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La preuve n'est pas détaillée.

4.4 Classification des singularités simples isolées dans \mathbb{C}^2

Théorème 4. Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une singularité simple isolée en 0. Alors f est R-équivalente à l'un des germes simples suivants :

1. $x^{k+1} + y^2$ avec $k \geq 1$ (Type A_k)
2. $x^2 y + y^{k-1}$ avec $k \geq 2$ (Type D_k)
3. $x^3 + y^4$ (Type E_6)
4. $x^3 + x y^3$ (Type E_7)
5. $x^3 + y^5$ (Type E_8)

Démonstration. On s'attache ici à détailler les cas A_k et D_k . Soit f simple avec $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. On regarde $j^2 f$. Par le lemme de Morse généralisé :

$$rg(j^2 f) = \begin{cases} 2 & \implies f \text{ est équivalente à } x^2 + y^2 \text{ donc est de type } A_1 \\ 1 & \implies f \text{ est équivalente à } x^2 + g(y) \text{ avec } g \in \mathfrak{m}^3 \\ 0 & \implies ? \end{cases}$$

Supposons que $f \sim x^2 + g(y)$. On distingue deux cas :

- $g \equiv 0$ alors par le lemme f n'est pas simple par l'exemple 4.2 ;
- $g \not\equiv 0$ alors $g(y) \sim y^{k+1} + o(y^{k+1})$ pour $k \geq 2$ après une transformation linéaire et donc $g \sim y^{k+1}$ et $f \sim x^2 + y^{k+1}$, c'est à dire que f est de type A_k .

Il reste donc le cas $j^2 f = 0$. On regarde le 3-jet, par la classification des formes cubiques (lemme 2) on peut le mettre sous la forme :

$$j^3 f \sim \begin{cases} 0 \\ x^2 y + y^3 \\ x^2 y \\ x^3 \end{cases}$$

Le premier cas correspond à une singularité qui n'est pas simple par le corollaire 8. Dans le deuxième cas si $j^3 f \sim x^2 y + y^3$ alors par le théorème de Tougeron f est 3-déterminé et $f \sim x^2 y + y^3$ donc f est de type D_2 . Dans le troisième cas on pose $s \geq 4$ le plus petit entier tel que $j^s f \neq x^2 y$, alors par un changement de variable on peut se ramener à $j^s f = x^2 y + ay^s$. On a deux cas :

- $a = 0$ alors f n'est pas simple ;
- Sinon f est s -déterminé par le théorème de Tougeron et donc $f \sim x^2 y + y^{k-1}$ avec $k := s + 1$, c'est à dire que f est de type D_k .

Le dernier cas $j^3 f \sim x^3$ nous donne les trois cas exceptionnels E_6 , E_7 et E_8 . Ces cas étant très techniques on renvoie à [2] pour une preuve détaillée. \square

4.5 Classification des singularités simples isolées dans \mathbb{C}^n

Lemme 3. Soit $g : (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe dans \mathfrak{m}^3 et $\varphi \in (\mathcal{I}_{\nabla g})^2$ alors $g + \varphi$ est R -équivalente à g .

Démonstration. La preuve est analogue à la preuve du théorème de Tougeron. En se référant à celle-ci on déduit qu'il suffit de démontrer que dans $\mathcal{O}_l[t]$

$$\varphi \in \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g + t\varphi}$$

En effet on sait que :

$$\mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g} \subset \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g + t\varphi} + t \cdot \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla \varphi}.$$

Or le deuxième terme de la somme est inclus dans $\mathfrak{m}_l[t] \cdot \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g}$. Le lemme de Nakayama assure donc que l'on a dans \mathcal{O}_{l+1}

$$\mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g} \subset \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g + t\varphi}.$$

Par hypothèse $\varphi \in (\mathcal{I}_{\nabla g})^2$ et comme $(\mathcal{I}_{\nabla g})^2 \subset \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g}$ on obtient que $\varphi \in \mathfrak{m}_l \cdot \mathcal{I}_{\nabla g + t\varphi}$ ce qui démontre le lemme. \square

Lemme 4. Soit $f_1, f_2 : (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ deux germes de fonctions de la forme suivante :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g_1(y) && \text{avec } g_1 \in \mathfrak{m}^3 \\ f_2(x, y) &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 + g_2(y) && \text{avec } g_2 \in \mathfrak{m}^3. \end{aligned}$$

Alors f_1 et f_2 sont R -équivalents si et seulement si g_1 et g_2 le sont.

Démonstration. Si g_1 et g_2 sont équivalents à droite il est clair que f_1 et f_2 le sont aussi.

Réciproquement soit $\varphi : (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l, 0)$ un biholomorphisme tel que $f_2 = f_1 \circ \varphi$ et soit

$$A(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq k}$$

la matrice jacobienne de la fonction $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$. Comme $f_2 = f_1 \circ \varphi$ on déduit que pour tout $1 \leq i \leq k$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{j+k}}{\partial x_i} \Big|_{x=0}.$$

Or comme $\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 2x_j$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y_j} = \frac{\partial g_1}{\partial y_j}$ on trouve un système linéaire pour les k premières coordonnées de φ :

$$2A \cdot (\varphi_i|_{x=0})_{1 \leq i \leq k} = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial g_1}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{j+k}}{\partial x_i} \Big|_{x=0} \right)_{1 \leq i \leq k}.$$

Dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l$ la matrice A est inversible par la biholomorphie de φ . Ceci nous donne les k premières coordonnées de $\varphi(0, y)$ en fonction des l dernières, de sorte à ce que pour $1 \leq i \leq k$ on ait $\varphi(0, y)_i \in \mathcal{S}_{\nabla g_1}$. On obtient alors pour $y \in \mathbb{C}^l$ au voisinage de 0 que

$$g_2(y) = g_1((\varphi(0, y)_i)_{k+1 \leq i \leq k+l}) + \sum_{i=0}^k \varphi(0, y)_i^2.$$

Comme la somme est dans $\mathcal{S}_{\nabla g_1}$, le premier lemme nous permet de conclure. \square

Ce lemme nous permet de démontrer la classification

Théorème 5. Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une singularité simple isolée en 0. Alors f est équivalent à l'un des germes simples suivants :

1. $x_1^{k+1} + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ pour $n \geq 1$ avec $k \geq 1$ (Type A_k)
2. $x_1^2 y + x_2^{k-1} + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ pour $n \geq 2$ avec $k \geq 2$ (Type D_k)
3. $x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ (Type E_6)
4. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ (Type E_7)
5. $x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ (Type E_8)

Démonstration. Par le corollaire $\text{rang}(j^2 f) \geq n - 2$. Si $j^2 f$ est non dégénéré le lemme de Morse assure que f est de type A_1 , sinon on utilise le lemme de Morse généralisé pour les autres cas.

Si $\text{rang}(j^2 f) = n - 2$ on obtient que $f \sim x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + g(x_{n-1}, x_n)$. Le lemme 4 nous assure que toute déformation assez petite est \mathbb{R} -équivalente à une déformation de g . Ainsi comme g est en deux variables, on récupère les même cas que pour la classification dans \mathbb{C}^2 , ce qui permet de conclure dans ce cas. si $\text{rang}(j^2 f) = n - 1$ on va directement que l'on obtient une singularité de type A_k . \square

4.6 Singularités simples d'hypersurfaces

Définition :

Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . Une sous-variété analytique dans U est un ensemble V tel que pour tout point $p \in V$ il existe une application holomorphe $f_p : U(p) \rightarrow \mathbb{C}^k$ définie sur un voisinage $U(p)$ de p , tel que

$$V \cap U(p) = \{x \in U(p) \mid f_p(x) = 0\}.$$

On notera $V(f)$ la variété analytique définie par le lieu de zéros d'une application holomorphe f à valeur dans \mathbb{C}^k . Si $k = 1$ on dit que V est une *hypersurface*. Si les applications f_p sont polynomiales on dit que V est une *variété complexe algébrique affine*.

Remarque 3. Plusieurs remarques concernant cette définition. Tout d'abord une sous-variété analytique n'est pas une variété analytique car elle n'est pas nécessairement lisse. Nous avons déjà introduit les variétés affines sur un corps k quelconque mais l'intérêt de la nouvelle définition ici est la présence d'une *topologie complexe* face à la topologie de Zariski. On se permettra donc pour les variétés complexes algébriques de faire usage de ces deux topologies.

Définition :

Le germe d'une sous-variété analytique en $p \in \mathbb{C}^n$ est la classe d'équivalence des sous-variétés analytiques de la forme $V(f)$ pour $p \in V(f)$ pour la relation \sim définie par : $V(f_1) \sim V(f_2)$ s'il existe un voisinage ouvert U' de p dans \mathbb{C}^n tel que $V(f_1) \cap U' = V(f_2) \cap U'$. On note un tel germe (V, p) . De la même façon une sous-variété analytique est dite *R-simple* si elle est définie par un germe R-simple.

Définition :

Deux germes de sous-variétés analytiques (V_1, p_1) et (V_2, p_2) sont dits *isomorphes* si pour des représentants respectifs \tilde{V}_1 et \tilde{V}_2 et des voisinages ouverts dans \mathbb{C}^n de ces représentants U_1 et U_2 il existe une application biholomorphe $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ avec $\phi(p_1) = p_2$ et $\phi(\tilde{V}_1) = \tilde{V}_2$.

On a la proposition suivante qui est immédiate :

Proposition 26. *Les lieux d'annulation de deux germes équivalents à droite définissent des germes de variétés analytiques isomorphes.*

On introduit de façon naturelle et analogue à la définition 4.1 la notion de germes de sous-variétés analytiques simples. On utilisera le terme de "germe" pour les germes d'applications et de sous-variétés analytiques lorsque la distinction ne sera pas nécessaire.

Définition :

Un germe $V(f)$ est dit *simple* s'il existe un nombre fini de germes $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ pour $1 \leq i \leq m$ avec la propriété suivante : pour toute déformation $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de f il existe un représentant $\tilde{F} : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout point $(p, q) \in U \times V$

on ait $V(F(., q)) = V(f_i)$ pour un certain i .

Le cas des sous-variétés analytiques générales est plus délicat et ne sera pas considéré ici, on ne traitera que le cas d'hypersurfaces. On utilisera une conséquence du Nullstellensatz de Hilbert, énoncé sous cette forme :

Corollaire 9:

L'application $f \mapsto V(f)$ établit une correspondance biunivoque entre germes d'hypersurfaces algébriques complexes en 0 à isomorphisme près et les germes polynomiaux définis par des polynômes réduits en 0 à R-équivalence près, c'est à dire les polynômes $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tel que l'idéal $\langle f \rangle$ est radical.

Ceci est une conséquence directe du Nullstellensatz au sens classique (Théorème 2). Comme on peut se ramener à des fonctions polynomiales on obtient la classification des germes d'hypersurfaces.

Théorème 6. Soit $V(f)$ le germe d'une hypersurface analytique simple tel que f définit une singularité isolée en 0. Alors $V(f)$ est isomorphe à un certain $V(g)$ de l'une des formes suivantes :

1. $x_1^{k+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ pour $n \geq 1$ avec $k \geq 1$ (Type A_k)
2. $x_1^2 y + x_2^{k-1} + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 0$ pour $n \geq 2$ avec $k \geq 2$ (Type D_k)
3. $x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 0$ (Type E_6)
4. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 0$ (Type E_7)
5. $x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 0$ (Type E_8)

Remarque 4. Nous serons principalement intéressés par le cas $n = 2$, où ces singularités sont appelées les *singularités de Du Val* ou *singularités de Klein*. Dans ce cas les singularités obtenues sont les mêmes que les singularités quotients obtenues à la proposition 15.

$$x^2 + yz = 0$$

$$x(y^2 - x^2) + z^2 = 0$$

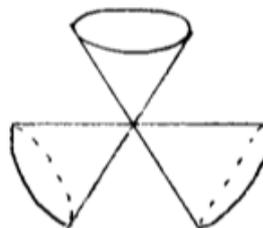


FIGURE 1 – Des exemples de singularités de Klein

Démonstration. Ce théorème repose essentiellement sur le théorème 5 et le corollaire précédent. En effet si $V(f)$ vérifie les hypothèses de l'énoncé f est \mathbb{R} -équivalent à un polynôme P qui peut être choisit réduit par le corollaire précédent. Alors $V(f) \cong V(P)$ et P est un germe polynômial qui définit une singularité en 0. Par le corollaire précédent comme $V(P)$ est simple on en déduit que P est \mathbb{R} -simple et donc \mathbb{R} -équivalent à une singularité donné par le théorème 5. \square

4.7 Résolutions de singularités

On est par la classification du théorème 6 principalement intéressé par les germes algébriques. On établit une construction algébrique pour construire des nouvelles surfaces lisses "proches" de la surface initiale. On se placera dans le cadre des variétés algébriques complexes, que l'on considère ici comme des variétés analytiques. Soit X une variété algébrique complexe. On s'intéressera principalement à des singularités isolées.

Définition :

On considère une variété (X, x) avec un unique point singulier en $x \in X$. On appellera *résolution* une variété lisse S munie d'un morphisme $\pi: S \rightarrow X$ définissant une application birationnelle et tel que

- le morphisme π induit par restriction un isomorphisme entre $S - \pi^{-1}(x)$ et $X - \{x\}$.
- $\pi^{-1}(x)$ est une sous variété de codimension 1. On considère $\pi^{-1}(x)$ comme un diviseur appelé le *diviseur exceptionnel*, parfois noté E . Cette notion sera définie ultérieurement.

On s'intéressera principalement à des surfaces. Le diviseur exceptionnel est alors une union de courbes. On introduit un diagramme pour décrire les intersections de cette famille.

Définition :

Soit (X, x) une surface avec une singularité isolée en x . On introduit le *graphe de la résolution* $G = (V, w)$ où V est l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel et w est la valeur absolue de la forme d'intersection des diviseurs au sens ou nous l'introduirons plus précisément au théorème 8. De façon élémentaire on considère une arrête entre deux sommet du graphe, si les composantes correspondantes s'intersectent.

On va présenter une méthode qui permet de désingulariser en un point.

"Blow up" On commence par définir l'éclatement de l'espace affine \mathbb{C}^n en 0.

Définition :

L'éclatement de \mathbb{C}^n en 0 est la sous variété algébrique complexe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ définie par,

$$\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) := \{(x_1, \dots, x_n) \times [y_1 : \dots : y_n] \mid \forall i, j \ x_i y_j - x_j y_i = 0\}.$$

Cette variété est munie d'un morphisme canonique $\pi: \text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ obtenu en projetant sur le premier facteur. $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ est muni de n cartes affines correspondant aux ensembles $\{y_i \neq 0\}$ qui s'identifient canoniquement à \mathbb{C}^n par les coordonnées $(x_i \frac{y_j}{y_i})_{1 \leq i \leq n}$.

On remarque que $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ n'est pas une variété affine, mais que chaque point est contenu dans un ouvert de Zariski qui est affine. Cet objet devient ce que l'on appelle une *variété algébrique* au sens général que l'on peut trouver dans [8]. On énonce ici plusieurs résultats concernant des notions introduites pour les variétés affines dans le cas de variétés algébriques, ces notions ne seront pas précisées mais on peut tout de même considérer ces résultats dans un ouvert affine de la variété.

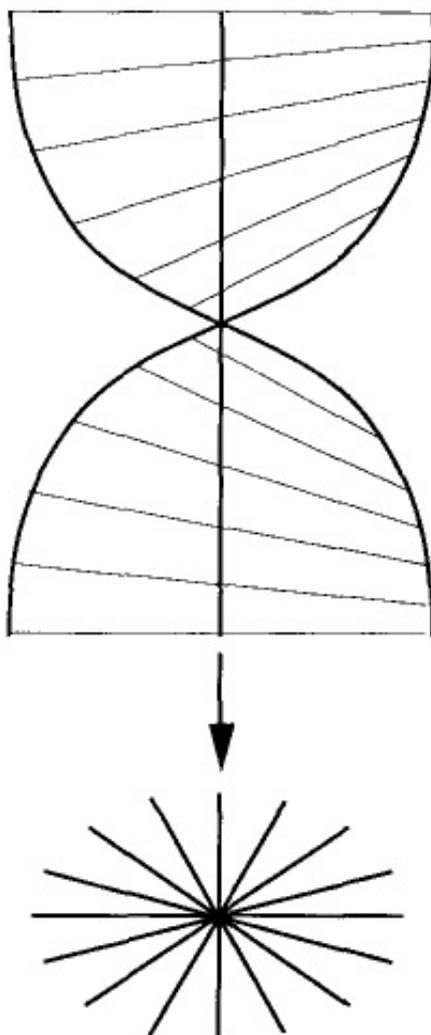


FIGURE 2 – L'éclatement du plan

Proposition 27. *On a les propriétés suivantes :*

- (i) *Le morphisme π induit par restriction un isomorphisme entre $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) - \pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{C}^n - \{0\}$. En particulier π est une application birationnelle.*
- (ii) *On a un isomorphisme canonique $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, de plus on a une bijection canonique entre $\pi^{-1}(0)$ et les droites de \mathbb{C}^n passant par l'origine.*
- (iii) *La variété $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ est irréductible.*

Démonstration. (i) Soit $P = (a_1, \dots, a_n)$ un point de \mathbb{C}^n tel que l'une de ses coordonnées, disons a_j , soit non-nulle. Alors $(a_1, \dots, a_n) \times [y_1 : \dots : y_n] \in \pi^{-1}(P)$ si et seulement si pour tout $1 \leq j \leq n$ on a $y_j = \frac{a_i}{a_j} y_i$. Or il y a un unique point qui vérifie cette condition et donc on peut définir un morphisme inverse de π donné par $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n) \times [a_1 : \dots : a_n]$.

(ii) Il est clair que $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ canoniquement. De plus si L est une droite vectorielle de \mathbb{C}^n paramétré par $x_i = a_i t$ pour tout i , où les a_i sont des coefficients complexes fixés, alors on considère $L' := \overline{\pi^{-1}(L - 0)}$. On remarque que L' coupe $\pi^{-1}(0)$ en un unique point identifié à $Q = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$, ce qui donne la bijection.

(iii) $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n) - \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{C}^n - 0$ est irréductible et dense dans $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$, qui est donc irréductible. □

Définition :

Soit $Y \subset \mathbb{C}^n$ une variété algébrique passant par 0. On appelle $\text{Bl}_0(Y) = \overline{\pi^{-1}(Y - \{0\})}$ l'éclatement de Y en 0.

On obtient de la proposition 27 le corollaire suivant.

Corollaire 10:

Le morphisme π induit par restriction une application birationnelle entre $\text{Bl}_0(Y)$ et Y .

Exemple:

- Graphiquement on a la situation suivante :

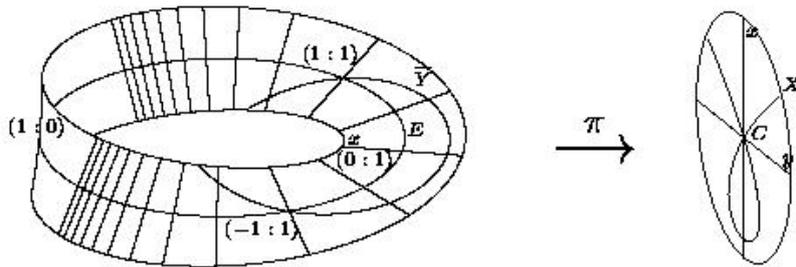


FIGURE 3 – L'éclatement de $y^2 = x^2(x - 1)$ en $(0, 0)$

- Soit $Y: x_2^2 = x_1^3$ une sous variété de \mathbb{C}^2 . Alors $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ est la variété définie par l'équation $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$. On a donc $\text{Bl}_0(Y) = \{(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \mid y_2^2 = x_1y_1^2, x_1y_2 - x_2y_1 = 0\}$ qui dans la carte affine $y_1 \neq 0$ donne la parabole de \mathbb{C}^2 d'équation $x_1 = t^2$. On remarque que l'éclatement est bien une méthode pour construire des résolutions de singularités. ■

L'éclatement semble donc être une bonne façon de résoudre des singularités. On va développer un exemple pour voir comment procéder.

Remarque 5. On peut (et on sera amené à le faire) désingulariser des variétés qui ne sont pas nécessairement affines, en adaptant légèrement l'éclatement. Nous prendrons le soin de détailler les objets introduits mais nous admettrons que les propositions précédentes restent vérifiées, ce qui est le cas en adaptant légèrement les preuves.

Résolution des singularités de Klein Soit X une variété complexe algébrique. Alors chaque point admet un voisinage pour la topologie de Zariski qui est isomorphe à une variété complexe algébrique affine. Celle-ci étant munit de la topologie complexe, on peut définir sur X une topologie complexe et parler d'un *voisinage analytique* au sens où il est isomorphe à une sous-variété analytique.

Définition :

Soit $X \subset \mathbb{C}^3$ une surface, soit $x \in X$ un point singulier tel qu'il existe un voisinage complexe U de x isomorphe à une hypersurface de la forme $V(f)$. Alors

- (A_n) On dit que x est de *type* A_n pour $n > 0$ si f peut être choisie de la forme $f = x^2 + y^2 + z^{n+1}$.
- (D_n) On dit que x est de *type* D_n pour $n \geq 4$ si f peut être choisie de la forme $f = x^2y + y^2 + z^{n-1}$.
- (E_6) On dit que x est de *type* E_6 si f peut être choisie de la forme $f = x^2 + y^3 + z^4$.
- (E_7) On dit que x est de *type* E_7 si f peut être choisie de la forme $f = x^2 + y^3z + z^3$.
- (E_8) On dit que x est de *type* E_8 si f peut être choisie de la forme $f = x^2 + y^3 + z^5$.

Dans ce paragraphe on va construire des résolutions des singularités de Du Val obtenus comme singularités quotients. Comme le diviseur exceptionnel est une réunion de courbes irréductibles sur une surface, on verra comment lui associer un diagramme d'intersection, ce qui nous permettra de faire l'observation de McKay. Soit G un sous-groupe fini de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, on considère $X := \mathbb{C}^2/G$ la variété quotient que l'on identifie par la proposition 15 à son plongement dans \mathbb{C}^3 . Elle est donc muni d'une structure analytique.

On commence par le cas où $G = C_n$ est cyclique. La variété $X \subset \mathbb{C}^3$ définit alors une singularité en 0 de type A_n d'équation $X_{n+1}: x_1x_2 - x_3^{n+1} = 0$. On énonce précisément le résultat qui sera utilisé comme un lemme pour le cas général :

Lemme 5. *Le graphe de résolution associé à la surface X_{n+1} est le graphe A_n . Plus généralement le graphe de la résolution d'une surface X avec une singularité isolée $x \in X$ de type A_n est le diagramme de Dynkin A_n .*

Démonstration. On note \tilde{X}_{n+1} l'éclatement en 0 de X_{n+1} . On a trois cartes affines de $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^3)$ dans lesquels on va écrire les équations de \tilde{X}_{n+1} :

(U_1) Dans $U_1 = \{y_1 \neq 0\}$ on note les coordonnés

$$\begin{cases} x_2 &= \frac{y_2}{y_1} x_1 = t_2 x_1 \\ x_3 &= \frac{y_3}{y_1} x_1 = t_3 x_1 \end{cases}$$

on obtient

$$\tilde{X}_{n+1} \cap U_1: x_1^2(t_2 - t_3^{n+1} x_1^{n-1}) = 0$$

(U_2) Dans $U_2 = \{y_2 \neq 0\}$ on note les coordonnés

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{y_1}{y_2} x_2 = t_1 x_2 \\ x_3 &= \frac{y_3}{y_2} x_2 = t_3 x_2 \end{cases}$$

on obtient

$$\tilde{X}_{n+1} \cap U_2: x_2^2(t_1 - t_3^{n+1} x_2^{n-1}) = 0$$

(U_3) Dans $U_3 = \{y_3 \neq 0\}$ on note les coordonnés

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{y_1}{y_3} x_3 = t_3 x_3 \\ x_2 &= \frac{y_2}{y_3} x_3 = t_2 x_3 \end{cases}$$

on obtient

$$\tilde{X}_{n+1} \cap U_3: x_3^2(t_1 t_2 - x_3^{n-1}) = 0$$

Dans U_3 on obtient une équation de X_{n-1} . On étudie le diviseur exceptionnel et on pourra conclure par récurrence. Dans chaque carte on obtient :

(U_1) Dans U_1 le diviseur exceptionnel est donné par $t_2 = 0$ si $n \geq 2$, dans quel cas c'est une droite affine \mathbb{C} de coordonnée t_3 . On obtient $t_2 = t_3^2$ si $n = 1$ et donc une variété isomorphe à la droite affine.

(U_2) De même dans U_2 le diviseur exceptionnel est donné par $t_1 = 0$ si $n \geq 2$, dans quel cas c'est une droite affine \mathbb{C} de coordonnée t_3 . On obtient $t_1 = t_3^2$ si $n = 1$ et donc une variété isomorphe à la droite affine.

(U_3) Dans U_3 : Si $n \leq 2$ le diviseur exceptionnel est donné par $t_1 t_2 = 0$, ce sont donc deux droites affines qui se coupent transversalement. Les droites obtenus dans U_1 et U_2 sont les points à l'infinie de ces deux droites là, on obtient donc deux droites projectives qui se coupent en un unique point. Si $n = 1$ le diviseur exceptionnel est donné par $t_1 t_2 = 1$ et on obtient finalement une unique droite projective.

Ainsi par une récurrence immédiate on obtient bien le diagramme voulu. \square

On traite maintenant le cas général,

Théorème 7. *Soit $G \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ un sous groupe fini, alors le graphe de la singularité obtenu dans le quotient $X := \mathbb{C}^2/G$ est le diagramme de Dynkin donné en 2.1 associé au type ADE de la singularité décrite au théorème 6.*

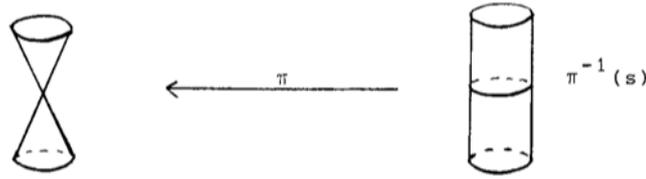


FIGURE 4 – L'éclatement de A_2



FIGURE 5 – L'éclatement de D_4

Démonstration. On choisit $G \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ non cyclique, le cas cyclique étant décrit en 4.7, et on va décrire une résolution de la surface \mathbb{C}^2/G . Pour construire une résolution on ne va pas éclater directement la singularité mais on va considérer $\pi: \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ et on notera $S := \pi^{-1}(0)$. On définit une action de G sur $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ en prenant pour $(p, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ un point de $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ l'action :

$$g \cdot (p, l) := (g \cdot p, g \cdot l),$$

où $g \cdot p$ est l'action standard et $g \cdot l$ est l'action induite sur \mathbb{P}^1 par l'action de G sur \mathbb{C}^2 . On pose alors $X' := \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)/G$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S \subset \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2) & \xrightarrow{\tau'} & S' \subset X' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ 0 \in \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\tau} & X. \end{array}$$

On étudie maintenant la singularité X' et l'action de G sur l'éclatement. X' est lisse en dehors des points dans l'image S' de S par τ' étant donné que l'action y est libre car elle l'est sur \mathbb{C}^2 . On va donc décrire les stabilisateurs des points de S . Comme $-\text{Id}_2$ fixe S , ces stabilisateurs sont d'ordre pair. De même ceci nous indique que l'action de G sur S passe au quotient par le morphisme de revêtement $\pi: \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R})$ décrit dans la proposition 2 . On note \tilde{G} l'image de G . On a décrit dans la démonstration du théorème 1 l'action des sous-groupes finies de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère donc comme \mathbb{P}^1 est la sphère de Riemann, on connaît l'action de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur ce dernier. De plus G n'est pas cyclique donc on a trois orbites avec des stabilisateurs respectivement d'ordres $2p_1, 2p_2$ et $2p_3$ où (p_1, p_2, p_3) sont les nombres caractéristiques de \tilde{G} introduit dans la preuve du théorème 1. On récapitule ces données pour les différents groupes finis G :

- G est le groupe diédral d'ordre $4n$: $(p_1, p_2, p_3) = (2, 2, n)$

- G est le groupe des symétries du tétraèdre : $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 3)$
- G est le groupe des symétries de l'octaèdre : $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 4)$
- G est le groupe des symétries de l'icosaèdre : $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 5)$

Soit $P \in S$, le stabilisateur G_P est cyclique de cardinal $2p$. On utilise la topologie complexe sur $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$. Soit U un voisinage de P , de sorte que l'on ait des coordonnées x, y . Soit $g \in G_P$ un générateur, alors g est de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix},$$

avec ξ une racine primitive $2p$ -ième de l'unité. On va réaliser des changement de coordonnées pour montrer que la singularité est de type A_{p-1} , et que l'action de $\{-\text{Id}_2, \text{Id}_2\}$ ne donne pas de point singulier.

Tout d'abord on considère u, v tel que $x := uv, y := v$. alors comme $g \cdot (x, y) = (\xi^{-1}x, \xi y)$ par l'action de G sur les fonctions, $g \cdot (u, v) = (\xi^{-2}u, \xi v)$. On introduit maintenant u', v' de sorte que $u' := u, v' := v^2$. Alors $g \cdot (u', v') = (\xi^{-2}u', \xi^2 v')$. Pour $g' \in G \setminus G_P$ on a $g' \cdot P \neq P$. On choisit un nombre fini de représentants g_1, \dots, g_l des classes à droite G_P/G , ils transportent tout U vers des ouverts distincts, et donc on peut choisir U de sorte à ce que ces ouverts soient tous disjoints et isomorphes (au sens analytique). Ainsi on peut fixer un voisinage ouvert V de $\tau'(P)$ qui est alors isomorphe (au sens analytique) au quotient de U par l'action du stabilisateur G_P .

Ainsi la forme de l'action de G_P sur U nous donne que $\tau'(P) \in S'$ possède une singularité du type A_{p-1} , en particulier si le stabilisateur est $\{\pm \text{Id}_2\}$ alors $\tau'(P)$ est un point lisse. On utilise alors le lemme 4.7 pour éclater les 3 singularités des trois orbites et obtenir le diagramme voulu. \square

5 Construction géométrique de La correspondance

5.1 Diviseurs

On renvoie, pour la plupart des définitions sur les schémas, à [7] et [9]. On rappelle tout de même qu'un schéma est la donnée (X, \mathcal{O}_X) d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X sur X dont les fibres sont des anneaux locaux. De plus, X admet un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est affine. On notera souvent X un schéma, et non (X, \mathcal{O}_X) .

Dans la suite on se trouvera dans un cas plus particulier :

Définition :

Soit X un schéma. On dit que X est noethérien s'il est réunion d'une famille finie $(\text{Spec}(A_i))_{i \in I}$ d'ouverts affines tels que A_i est noethérien pour tout $i \in I$.

Remarque: Un schéma noethérien sera en particulier quasi-compact. De plus l'espace topologique sous-jacent de X est noethérien au sens topologique, i.e. toute suite décroissante de fermés est stationnaire.

Définition :

Soit X un schéma noethérien. Un *cycle* de X est un fermé irréductible de X vu comme espace topologique. On note $\mathfrak{Z}(X)$ le groupe abélien libre sur les cycles de X , et $\mathfrak{Z}^1(X)$ le sous-groupe engendré par les cycles de codimension 1.

Ces cycles sont en fait en bijections avec les points de X . A tout cycle Z on associe son point générique i.e. l'unique point dense dans Z , et à tout point on associe le cycle $\overline{\{x\}}$.

Définition :

Soit X un schéma noethérien intègre. On appelle *diviseur de Weil*, ou simplement diviseur, tout élément de $\mathfrak{Z}^1(X)$.

On s'intéresse maintenant à une classe plus restreinte de schémas, les schémas noethérien *normaux*. On dit qu'un schéma X est normal si toute fibre est un anneau intègralement clos.

L'intérêt de cette classe réside dans le fait suivant : pour tout $x \in X$ de codimension 1 l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est local, noethérien, intègralement clos et de dimension 1 ; c'est par conséquent un anneau à valuation discrète. On notera v_x (où v_Y pour $Y = \overline{\{x\}}$) sa valuation normalisée.

En effet, $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de Dedekind et tout idéal I non-nul s'écrit donc de manière unique comme un produit d'idéaux premiers i.e. $I = \mathfrak{m}_x^r, r \in \mathbb{N}$. On peut donc définir $v_x(a)$ comme étant l'entier tel que $(a) = \mathfrak{m}_x^{v_x(a)}$, ce qui donne bien une valuation discrète normalisée non triviale.

On a alors la proposition :

Proposition 28. *Soit X un schéma intègre et ξ son point générique. Alors :*

1. $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est un corps, noté $K(X)$.
2. Si $X = \text{Spec}(A)$, $K(X) = \text{Frac}(A)$.
3. Pour tout $x \in X$, on a une injection $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ induite par les restrictions. De plus $\text{Frac}(\mathcal{O}_{X,x}) = K(X)$.

Démonstration: Soit X intègre et $U \subseteq X$ un ouvert affine. On note A un anneau tel que $U \simeq \text{Spec}(A)$. Comme X est intègre, A est intègre, et par suite le point générique correspond à l'idéal (0) de A . On a alors $\mathcal{O}_{X,\xi} \simeq A_{(0)} = \text{Frac}(A)$. Ce qui prouve 1. et 2..

Enfin, pour $x \in X$, soit $U \simeq \text{Spec}(A)$ voisinage ouvert affine de x , on a $\xi \in U$ et donc les restrictions induisent le morphisme :

$$\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \text{Frac}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,\xi}$$

Ce qui conclut. □

Par suite, pour X noethérien normal, a fortiori intègre, et tout point $x \in X$ de codimension 1, la valuation v_x de $\mathcal{O}_{X,x}$ s'étend en une valuation de $K(X)$ notée mult_x . On peut donc maintenant définir le sous-groupe de $\mathfrak{Z}^1(X)$ des *diviseurs principaux*.

Proposition 29. Soit X noethérien normal. Pour tout $f \in K(X)^*$ on pose :

$$(f) := \sum_{x \in X, \dim \mathcal{O}_{X,x}=1} \text{mult}_x(f) [\overline{\{x\}}]$$

c'est un diviseur de Weil.

Démonstration: Soit U un ouvert affine de X . On a vu que $K(X) = \text{Frac}(\mathcal{O}_X(U))$ donc $f = \frac{a}{b}$ pour $a, b \in \mathcal{O}_X(U)$. Par conséquent $\text{mult}_x(f) = 0$ (i.e. f est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$) pour tout $x \notin Y := V(a) \cup V(b) \cup X \setminus U$. Y est comme X un espace topologique noethérien, de plus comme $Y \neq X$, est fermé et que X est irréductible on a $\text{codim}(Z, Y) < \text{codim}(Z, X)$ pour tout Z de codimension finie. Par conséquent, soit $x \in Y$ de codimension 1, x est de codimension 0 dans Y . Or $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$, où Y_i est un fermé irréductible pour $i \in \{1; \dots; n\}$, et $Z \subseteq Y$ irréductible. On remarque que $Z \subseteq Y_i$ pour un certain $i \in \{1; \dots; n\}$ et par codimension $Z = Y_i$. Ce qui conclut. \square

Un diviseur s'écrivant sous la forme précédente pour un certain $f \in K(X)$ sera dit principal. De plus, pour $f, g \in K(X)$, $(fg) = (f) + (g)$. Ce fait justifie la définition suivante :

Définition :

Pour X noethérien normal, on note $\text{Cl}(X)$ le quotient de $\mathfrak{Z}^1(X)$ par le groupe des diviseurs principaux. C'est le *groupe de classes*. De plus, on notera \sim la relation sur $\mathfrak{Z}^1(X)$ induite par le groupe des diviseurs principaux.

On cherche maintenant à montrer un premier résultat sur le lien entre les propriétés d'un schéma et son groupe de classes.

Proposition 30. Soit A un anneau noethérien intègre. Alors A est factoriel si et seulement si $X = \text{Spec}(A)$ est normal et $\text{Cl}(X) = 0$.

On aura besoin des lemmes admis suivants :

Lemme 11:

Soit un anneau intégralement clos et noethérien. Alors

$$\bigcap_{\text{ht } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}} = A$$

où \mathfrak{p} désigne toujours un idéal premier.

Lemme 12:

Un anneau noethérien intègre est factoriel si et seulement si tout idéal premier de hauteur 1 est principal.

On peut trouver une preuve de ces résultats dans [1]. On peut maintenant démontrer la proposition.

Démonstration:

\Rightarrow :

Un anneau factoriel est intégralement clos. De plus, soit $V(\mathfrak{p})$ un fermé irréductible de codimension 1, on peut prendre \mathfrak{p} premier, alors \mathfrak{p} est un idéal premier de hauteur 1 dans A . Par conséquent il existe $f \in A$ tel que $\mathfrak{p} = (f)$, et donc pour tout autre idéal premier \mathfrak{q} de hauteur 1, $f \in \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. On en déduit $(f) = [Y]$ et donc $\text{Cl}(X) = 0$.

\Leftarrow :

Réciproquement, soit \mathfrak{p} un idéal premier de hauteur 1 et $D := [V(\mathfrak{p})]$. Par hypothèse il existe $f \in K(X)$ tel que $(f) = D$. On a donc $\text{mult}_{\mathfrak{p}}(f) = 1$ d'où $f \in A_{\mathfrak{p}}$ et $(f) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. De plus, pour tout $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ de hauteur 1 $\text{mult}_{\mathfrak{q}}(f) = 0$ et donc en particulier $f \in A_{\mathfrak{q}}$. Par le premier lemme on a $f \in \bigcap_{\text{ht } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}} = A$. D'où $f \in A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Soit maintenant $g \in \mathfrak{p}$ quelconque, en appliquant à nouveau le premier lemme à $g \cdot f^{-1}$ on déduit $g \cdot f^{-1} \in A$ et donc f engendre \mathfrak{p} . \square

5.2 Singularités isolées de surfaces

Définition :

Une *surface* est une variété algébrique de dimension 2. On les considèrera soit lisses, soit avec une singularité isolée.

Remarque 6. Notons bien que les diviseurs sur les surfaces sont des combinaisons formelles de courbes.

Définition :

Soit C et D deux courbes sur une surface X . On dit que C et D se coupent transversalement en un point $P \in C \cap D$ si pour f et g des équations locales de C et D , f et g engendrent l'idéal maximal \mathfrak{m}_P de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$.

Théorème 8. *Soit X une surface. Il existe un unique accouplement bilinéaire symétrique $\mathfrak{Z}^1(X) \times \mathfrak{Z}^1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, noté $D \cdot C$ pour tous diviseurs C et D sur X , tel que*

- (1) *Si C et D sont deux courbes non-singulières qui se coupent transversalement en chaque $P \in C \cap D$ alors $C \cdot D = \#(C \cap D)$.*
- (2) *Si $C_1 \sim C_2$ alors $C_1 \cdot D = C_2 \cdot D$, c'est à dire que l'accouplement se factorise sur $\text{Cl}(X)$.*

Premières propriétés

Lemme 6 (Zariski). *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme projectif birationnel entre variétés projectives tel que Y est normal. Alors $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ est connexe.*

Démonstration. [7, p.280] \square

Théorème 9 (Mumford). *Soit X une surface normale avec une singularité isolée en $x \in X$. Soit $f: Y \rightarrow X$ une résolution. On note $f^{-1}(x) = \sum_{i=1}^r E_i$ le diviseur exceptionnel (les E_i correspondent aux composantes irréductibles de $f^{-1}(x)$), alors la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ est définie négative.*

Démonstration. Soit h une application régulière sur X tel que $h(x) = 0$. On considère le diviseur principal tiré en arrière $\text{div}(f^*h) = D + f^{-1}(x) = D + \sum_{i=1}^r m_i E_i$ (avec D ne contient pas de E_i) sur Y . Comme f^*h s'annule sur les E_i on a $m_i > 0$ pour tout i . Il suffit de montrer que la matrice $(m_i m_j E_i \cdot E_j)_{i,j}$ est définie négative. On notera $e_{ij} := m_i m_j E_i \cdot E_j$. Soit j fixé, on a $\text{div}(f^*h) \cdot E_j = 0$ et donc

$$0 = D \cdot E_j + \left(\sum_i m_i E_i \right) \cdot E_j.$$

Comme $D \cdot E_j \geq 0$ on a $(\sum_i m_i E_i) \cdot E_j \leq 0$, et donc $\sum_{i=1}^r e_{ij} \leq 0$ et ceci pour tout j , avec une inégalité stricte si $D \cdot E_j > 0$.

Soit $\vec{x} = {}^t(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, r}} x_i x_j e_{ij} &= \sum_{i=1}^r e_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} e_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{j=1}^r e_{jj} x_j^2 + \left(\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} e_{ij} x_j^2 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} e_{ij} x_i^2 \right) e_{ij} + 2 \sum_{i < j} e_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r e_{ij} \right) x_j^2 - \sum_{i < j} e_{ij} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^r e_{ij} \leq 0, e_{ij} \geq 0$, et $e_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$ la somme considérée est négative, ce qui établit le fait que la matrice d'intersection est négative. Pour montrer qu'elle est définie négative supposons que la somme soit nulle. Soit k tel que $D \cap E_k \neq \emptyset$ on a $\sum_{i=1}^r e_{ik} < 0$, et donc $x_k = 0$. Pour k' différent de k tel que $E_k \cap E_{k'} \neq \emptyset$ on a $e_{kk'} > 0$ et donc comme $(x_k - x_{k'})^2 = 0$ on obtient $x_{k'} = 0$. Comme le théorème de Zariski nous assure que $\bigcup_i E_i$ est connexe on peut appliquer ce procédé récursivement pour obtenir que $\vec{x} = \vec{0}$, ce qui implique le caractère défini de la matrice d'intersection et termine la démonstration. \square

Définition :

Une résolution $f: Y \rightarrow X$ d'une singularité de X est appelé *résolution minimale* si pour toute résolution $g: Y' \rightarrow X$ il existe un unique morphisme $\varphi: Y' \rightarrow Y$ tel que $g = f \circ \varphi$.

Remarque 7. Pour les surfaces le *critère de Castelnuovo*, que l'on peut trouver dans [7] et [8], nous donne l'existence pour les surfaces d'une résolution minimale. La question en général est plus délicate.

Point double rationnel**Définition :**

Soit X une surface avec une singularité isolée en $x \in X$. On dit que x est un *point double rationnel* s'il existe une résolution minimale $f: Y \rightarrow X$ tel que le diviseur exceptionnel $f^{-1}(x) = \sum_i E_i$ vérifie pour tout i :

- (a) $E_i \cong \mathbb{P}^1$
- (b) $E_i^2 = -2$

Théorème 10. *Soit X une surface et $x \in X$ un point double rationnel. Alors le diagramme de la résolution minimale $f: Y \rightarrow X$ est un diagramme de Dynkin du type ADE.*

Démonstration. En effet le fait d'être un point double nous indique que la matrice d'intersection du diviseur exceptionnel est l'opposée de la matrice de Cartan d'un graphe. Par le théorème 9 cette première matrice est définie négative et donc le graphe de la résolution est bien du type ADE par la proposition 4 \square

5.3 Correspondance géométrique de McKay

Le groupe de classes Soit $X = \mathbb{C}^2/G$ une surface tel que $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe fini. On considère une résolution minimale $\tilde{X} \rightarrow X$, et le diviseur exceptionnel $E = \sum_{i=1}^r m_i E_i$

Théorème 11. *Alors $\mathrm{Cl}(X)$ est isomorphe au groupe des caractères linéaires de G . En particulier $\mathrm{Cl}(X) \cong G^{\mathrm{ab}}$ l'abélianisé de G .*

Démonstration. On va construire un morphisme qui associe à tout diviseur un caractère, puis on va montrer qu'il est injectif et surjectif. On considère l'application quotient $\tau: \mathbb{C}^2 \rightarrow X$, elle induit une application $\tau^*: \mathrm{Div}(X) \rightarrow \mathrm{Div}(\mathbb{C}^2)$. Or $\mathbb{C}[x, y]$ est factoriel et donc tout diviseur sur \mathbb{C}^2 est principal. Ainsi pour tout diviseur D de X , le diviseur $\tau^*(D)$ est principal et donc donné par une fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}(x, y)$. Or le diviseur de f consiste en des orbites de G , et donc il existe un caractère linéaire χ_f tel que pour tout $g \in G$ on ait $g \cdot f = \chi_f(g)f$. Ainsi comme on obtient le caractère trivial pour un diviseur principal, on a défini une application par passage au quotient :

$$\begin{aligned} \phi: \mathrm{Cl}(X) &\rightarrow (G^{\mathrm{ab}})^\vee \\ D &\mapsto \chi_f, \end{aligned}$$

où $(G^{\mathrm{ab}})^\vee$ désigne le dual de G^{ab} , qui correspond bien au caractères linéaires de G . Cette application est clairement injective, car si le caractère est trivial la fonction rationnelle obtenue est invariante sous l'action de G et donc elle définit bien une fonction sur X qui donne le diviseur. Il nous reste à montrer la surjectivité.

Pour la surjectivité il suffit de considérer $\chi \in (G^{\mathrm{ab}})^\vee$ un caractère linéaire sur G qui correspond à une représentation irréductible. Comme ces derniers engendrent $(G^{\mathrm{ab}})^\vee$,

on veut construire un $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que pour tout $g \in G$ on ait $g \cdot f = \chi_f(g)f$. Comme la représentation standard de G sur \mathbb{C}^2 est fidèle, il existe par la proposition 5 un entier r tel que ce caractère provient d'une sous représentation de $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ que l'on note V . Comme son caractère est linéaire, V est de dimension 1. Or par la classification des représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (voir [11]), en notant $\mathbb{C}[x, y]_d$ les polynômes de degré d , on a un isomorphisme

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \cong \bigoplus_d \mathbb{C}[x, y]_d^{m(d)},$$

pour des entiers $m(d)$. Ainsi $V \cong f \cdot \mathbb{C}$ pour un certain f qui est le polynôme recherché. Le diviseur associé donne un diviseur D sur X tel que $\phi(D) = \chi$, ce qui prouve la surjectivité et termine la démonstration de la preuve. \square

Corollaire 13:

L'anneau $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^5 + Y^3 + Z^2)$ est factoriel.

TABLE 1 – Voici un récapitulatif de la correspondance établie

Type	$\pi(G) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$	\mathbb{C}^2/G	$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^2/G)$	Diagramme de Dynkin
A_n	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	$XY - Z^{n+1} = 0$	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	
D_n	\mathbf{D}_n	$X^{n+1} - XY^2 + Z^2$	$\begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ pair} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	
E_6	\mathfrak{A}_4	$X^4 + Y^3 + Z^2$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	
E_7	\mathfrak{S}_4	$X^3Y + Y^3 + Z^2$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	
E_8	\mathfrak{A}_5	$X^5 + Y^3 + Z^2$	$\{0\}$	

Groupes de Picard et de Grothendieck Tout d'abord, on définit les objets nécessaires pour énoncer la correspondance.

Définition :

Soit X un schéma noethérien.

1. On appelle \mathcal{O}_X -module tout faisceau \mathcal{F} tel que pour tout ouvert U , $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$ module, et les restrictions de \mathcal{F} et de \mathcal{O}_X sont compatibles.
2. on appelle \mathcal{O}_X -module cohérent (sur X) tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} vérifiant les propriétés suivantes :
 - (i) Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U tel que $\mathcal{F}|_U$ est le quotient de $\mathcal{O}_X|_U$ -modules libres de type fini.
 - (ii) Pour tout ouvert $U \subseteq X$, entier n , et morphisme $\phi : \mathcal{O}_X(U)^n \rightarrow \mathcal{F}(U)$ le noyau de ϕ est de type fini
3. On définit un \mathcal{O}_X -module inversible comme étant un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} tel que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U$.
4. Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est a support dans $Y \subseteq X$ si : $\forall x \in X, \mathcal{F}_x \neq 0 \Rightarrow x \in Y$.

On fait alors les deux constructions suivantes :

Définition :

Soit X un schéma noethérien, on définit le groupe de Groethendieck $K(X)$ comme le quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphismes de faisceaux cohérents sur X , quotienté par les relations $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}_1] + [\mathcal{F}_2]$ pour tous faisceaux cohérents tels qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow 0$$

.

De plus, pour $Y \subseteq X$ on notera $K_Y(X)$ le sous-groupe engendré par les classes des \mathcal{O}_X -modules cohérents à support dans Y .

Remarque: Pour que cette définition soit complètement rigoureuse il faudrait prouver que tous les objets sont biens définis.

Définition :

Soit X un schéma noethérien. On pose $\text{Pic}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X . On appelle groupe de Picard le groupe $(\text{Pic}(X), \otimes)$.

De même que précédemment, pour $Y \subseteq X$ on notera $\text{Pic}_Y(X)$ le sous-groupe engendré par les classes des \mathcal{O}_X -modules cohérents à support dans Y .

Remarque: On ne vérifie pas ici que le couple $(\text{Pic}(X), \otimes)$ est un groupe. Cependant, soit un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , on peut remarquer que le \mathcal{O}_X -module dual \mathcal{F}' tel que $\mathcal{F}'(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{O}_X(U))$ est bien son inverse.

Pour G un groupe, soit $X(G)$ l'ensemble des représentations à isomorphisme près. Il est naturellement muni d'une addition induite par la somme directe et d'une multiplication induite par le produit tensoriel sur \mathbb{C} . Soit maintenant $Y(G) = X(G) \times X(G)$, on définit sur $Y(G)$ la relation \sim donnée par :

$$([A], [B]) \sim ([C], [D]) \Leftrightarrow [A \oplus D] = [C \oplus B]$$

On a alors :

Définition :

L'anneau des représentations $R(G)$ est défini comme l'ensemble $Y(G)/\sim$ muni des opérations induites par la somme directe et le produit tensoriel.

Soit S la surface associée à un sous-groupe fini G de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, et $\tilde{S} \rightarrow S$ une désingularisation minimale. On notera $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles non triviales de G et $\mathrm{Irr}(D)$, où D est le diviseur exceptionnel de la désingularisation, l'ensemble des composantes irréductibles de D . Enfin, on pose c la classe dans $R(G)$ de la représentation de G donnée par l'inclusion dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On a alors un premier résultat :

Proposition 14:

On a un isomorphisme : $K(\tilde{S}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\tilde{S})$.

On peut maintenant énoncer le théorème de [6] :

Théorème 12. *On dispose d'un morphisme de \mathbb{Z} -module $\pi : R(G) \rightarrow K(\tilde{S})$ tel que :*

- (i) *Pour tout $\rho \in \mathrm{Irr}(G)$ il existe $d_\rho \in \mathrm{Irr}(D)$ tel que $\pi((c-2)\rho) = [d_\rho]$ où $[d_\rho]$ désigne la classe du \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} défini par $\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}_X(U \cap d_\rho)$ pour tout ouvert U .*
- (ii) *L'application induite $\rho \mapsto d_\rho$ est bijective et $d_{\rho_i} \cdot d_{\rho_j} = m_{ij}$ pour $i \neq j$ en reprenant les notations de la section sur les représentations.*
- (iii) *π est un isomorphisme.*
- (iv) *$\pi((2-c)R(G)) = \mathrm{Pic}_D(\tilde{S})$.*
- (v) *π induit par passage au quotient un isomorphisme : $R(G)/(2-c)R(G) \xrightarrow{\sim} K(\tilde{S})/K_D(\tilde{S})$.*

Remarque: Si on voit $R(G)$ simplement avec sa structure de groupe abélien, c'est le groupe abélien libre sur $\mathrm{Irr}(G)$. On remarque alors que l'application ;

$$\begin{aligned} R(G) &\longrightarrow R(G) \\ x &\mapsto (2-c)x \end{aligned}$$

a pour matrice dans la base naturelle la matrice de Cartan du groupe associée dans la partie 2.

Références

- [1] M. Atiyah. *Introduction To Commutative Algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, 1994.
- [2] D. Bättig and H. Knoerr. *Singularitäten*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 2012.
- [3] I. Burban. *duval singularities*. <http://www.mi.uni-koeln.de/burban/singul.pdf>.
- [4] A. Dimca. Topics on real and complex singularities. *Advanced Lectures in Mathematics*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987. An introduction.

- [5] *K. Fritzsche and H. Grauert.* From holomorphic functions to complex manifolds, volume 213 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [6] *G. Gonzalez-Sprinberg and J.-L. Verdier.* Construction géométrique de la correspondance de McKay. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 16(3) :409–449 (1984), 1983.
- [7] *R. Hartshorne.* Algebraic geometry. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [8] *S. Ishii.* Introduction to singularities. Springer, Tokyo, 2014.
- [9] *Q. Liu and R. Erne.* Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford Graduate Texts in Mathematics (0-19-961947-6). Oxford University Press, 2006.
- [10] *P. Slodowy.* Platonic solids, Kleinian singularities, and Lie groups. In Algebraic geometry (Ann Arbor, Mich., 1981), volume 1008 of Lecture Notes in Math., pages 102–138. Springer, Berlin, 1983.
- [11] *T. A. Springer.* Invariant theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [12] *T. Stacks Project Authors.* stacks project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2016.
- [13] *R. Steinberg.* Finite subgroups of su_2 , dynkin diagrams and affine coxeter elements. Pacific J. Math., 118(2) :587–598, 1985.