REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS FINIS

sous la direction de Cédric Bonnafé

Olivier Dudas

Introduction

En 1955, Chevalley montre que l'on peut associer, à tout corps k et toute algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, un sous-groupe $G(k)$ du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui se trouve être simple dans la majorité des cas. Grâce à ses travaux, il est désormais possible de donner une construction générale des groupes finis dit « classiques », qui apparaissent dans la classification des groupes finis simples : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ ...

C'est au tour de Steinberg [St], en 1968, de s'intéresser à cette classe de groupes : il les étudie d'un point de vue différent, en les considérant comme les points rationnels de certains groupes algébriques réductifs. Il peut ainsi employer toute la puissance de la théorie des groupes algébriques, initiée par Borel [Bo], pour obtenir une classification de ces groupes ainsi que quelques unes de leurs remarquables propriétés.

En 1976 se produit un nouveau bond en avant, cette fois dans la compréhension des représentations de ces groupes : Lusztig rencontre Deligne, avec lequel il met au point des foncteurs d'induction R_T^G associés à la cohomologie ℓ-adique de certaines variétés sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ ([DeLu]). Dans les travaux qui suivent, Lusztig établit une classification complète des caractères irréductibles pour les groupes à centre connexe, en fonction d'objets combinatoires associés à leur groupe de Weyl. Les conséquences de cette classification sont nombreuses, ainsi que les conjectures qui les entourent.

On se propose ici de donner un aperçu de la théorie, de ses enjeux et ses problèmes.

I Groupes réductifs finis

1 Groupes algébriques réductifs

On considère un corps k algébriquement clos. Un **groupe algébrique linéaire** sur k est, par définition, un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ défini par des équations polynomiales. C'est le cas des groupes additif $\mathbb{G}_a = (k, +)$ et multiplicatif $\mathbb{G}_m = (k^\times, \times)$ mais aussi des groupes dits « classiques », comme par exemple :

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n(k) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \det A = 1\} \\ \mathrm{O}_n(k) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid {}^tAA = 1\} \end{aligned}$$

Il y a cependant beaucoup plus de groupes algébriques linéaires que de groupes classiques. Si l'on veut se limiter à des groupes proches de ces derniers, et disposer de théorèmes de structure généraux, on a besoin d'imposer quelques propriétés supplémentaires à ces groupes.

Puisque les groupes algébriques linéaires sont des groupes de matrices, leurs éléments peuvent être qualifiés de semi-simples s'ils sont diagonalisables dans $\mathrm{M}_n(k)$ ou unipotents s'ils sont de la forme $\mathrm{I}_n + N$, avec N une matrice nilpotente. Plus généralement, un groupe sera dit unipotent si tous ses éléments le sont.

Définition 1 *Soit G un groupe algébrique linéaire. On dit que G est **réductif** s'il ne contient pas de sous-groupe fermé connexe unipotent distingué autre que le groupe trivial.*

Dans cette définition on voit apparaître les mots « connexe » et « fermé » qui renvoient à une topologie de G. Il en existe bien une, appelée **topologie de Zariski**, qui définit les fermés comme les zéros d'une famille finie de polynômes. On renvoit à [Sp] pour plus de détails. Notons tout de même que dans le cas d'un groupe, connexe équivaut à irréductible.

La classe des groupes réductifs est celle qui va nous intéresser. Nous donnons les théorèmes de classification dans la section suivante.

2 Structure des groupes réductifs

Commençons par étudier la structure d'un des plus célèbres groupes algébriques réductifs non trivial, $\mathrm{GL}_n(k)$. Notons T le groupe des matrices inversibles diagonales, B le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles et U le sous-groupe de B constitué des matrices unipotentes (on dira que c'est le **radical unipotent** de B). Les conjugués de T (resp. de B), seront appelés **tores maximaux** (resp. **sous-groupes de Borel**). On a donc

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset B$$

Notons que U est un sous-groupe distingué de B et que l'on dispose même d'une décomposition $B = U \rtimes T$.

On peut montrer que les sous-groupes unipotents non triviaux normalisés par T minimaux sont de la forme $U_{i,j} = \{\mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j} \,|\, \lambda \in k\}$ avec $i \neq j$, où $(E_{k,l})$ désigne la base canonique de $\mathrm{M}_n(k)$. Ce sont donc des groupes isomorphes au groupe additif $\mathbb{G}_a$. L'action d'un élément $(t_1, \dots, t_n)$ de T sur un tel groupe s'écrit :

$$t(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j})t^{-1} = \mathrm{I}_n + \frac{t_i}{t_j} \lambda E_{i,j}$$

et définit ainsi un morphisme de T vers $\mathbb{G}_m$: $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i/t_j$. On notera $\alpha_{i,j}$ ce morphisme et Φ l'ensemble des $\alpha_{i,j}$ pour $i \neq j$, appelé ensemble des **racines** de G par rapport à T.

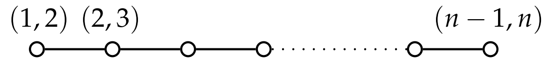
Le groupe $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ est un groupe abélien, appelé **groupe des caractères** de T. Si on note additivement sa loi de groupe, on peut former l'espace vectoriel réel $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, muni du produit scalaire rendant la base formée par les fonctions coordonnées $(t \mapsto t_i)_i$ orthogonale. Dans cet espace, l'ensemble Φ vérifie :

- Φ engendre V ;
- pour tout $\alpha \in \Phi$, la réflexion s_α stabilise Φ ;
- pour tous α et $\beta \in \Phi$, la quantité $2\dfrac{(\alpha \mid \beta)}{(\alpha \mid \alpha)}$ est un entier relatif.

où s_α désigne la réflexion orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}\alpha$. Un tel ensemble sera appelé **système de racines**. Le groupe engendré par les réflexions s_α sera appelé le **groupe de Weyl** du système. Ici, il est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par l'intermédiaire de l'application $(i,j) \mapsto s_{\alpha_{i,j}}$.

Par ailleurs, le normalisateur N de T dans G a une forme très simple, c'est l'ensemble des matrices monomiales, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui ont un unique coefficient non nul sur chaque ligne et chaque colonne. Le groupe quotient $W = N/T$ s'identifie donc aussi au groupe symétrique (les matrices de permutation forme un système complet de représentants).

Remarquons pour finir que U se décompose en produit des groupes $U_{i,j}$ pour $i < j$, le produit étant pris dans n'importe quel ordre (c'est une conséquence de la méthode du pivot de Gauss). En fait, le groupe B définit un ensemble de racines dites « positives » (les $\alpha_{i,j}$ pour $i < j$) qui s'obtiennent comme combinaison linaires à coefficients positifs d'un ensemble de racines dites « simples » (les $\alpha_{i,i+1}$). À ces racines simples correspondent les transpositions $s_i = (i, i+1)$ du groupe symétrique qui vérifient le diagramme de présentation suivante :



Dans ce diagramme, l'ordre du produit de deux éléments est donné par la valuation de l'arête qui les relie : 2 s'il n'y a pas d'arête, 3 sinon. Ici, le diagramme (et le groupe de Weyl associé) est dit de type A_n. Il existe deux autres familles infinies, notées B_n et D_n ainsi que quelques groupes exceptionnels, de type E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Le problème de classification des groupes de Weyl a ainsi été entièrement résolu (voir [Bou]).

Retournons maintenant au cas d'un groupe réductif connexe quelconque G. Donnons quelques définitions :

Définition 2 *Un **tore** T de rang r est un sous-groupe de G isomorphe à $(\mathbb{G}_m)^r$. Il est dit maximal quand son rang l'est, ou, de façon équivalente, lorsqu'il est maximal pour la relation d'inclusion.*

Définition 3 *Un **sous-groupe de Borel** B de G est un sous-groupe connexe résoluble maximal.*

Fixons un tore maximal T et un sous-groupe de Borel B le contenant. Comme précédemment, le point de départ est la détermination des sous-groupes unipotents minimaux normalisés par T :

Proposition 1 *Tout sous-groupe non trivial de G, qui est connexe, unipotent, normalisé par T et qui est minimal pour ces propriétés est isomorphe à $\mathbb{G}_a$.*

Si U est un tel sous-groupe, alors l'action de T par conjugaison définit un automorphisme de $\mathbb{G}_a$, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{G}_m$. Autrement dit, il existe un unique caractère $\alpha \in X(T)$ tel que

$$\forall\, t \in T \quad \forall\, x \in \mathbb{G}_a \qquad tU(x)t^{-1} = U(\alpha(t)x)$$

On notera alors U_α un tel sous-groupe. Comme précédemment, ceci définit le sous-ensemble $\Phi = \Phi(T,G)$ de $X(T)$ constitué des racines de G par rapport à T. Si l'on fixe un sous-groupe de Borel B contenant T, alors on peut montrer qu'il existe un unique autre sous-groupe de Borel B^- contenant ce tore tel que $B \cap B^- = T$. Ceci permet de partitionner Φ en deux ensembles

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid U_\alpha \subset B\} \quad \text{et} \quad \Phi^- = \{\alpha \in \Phi \mid U_\alpha \subset B^-\} = -\Phi^+$$

appelés respectivement l'ensemble des racines positives et négatives.

De façon duale, on peut déterminer un ensemble de « coracines » $\Phi^\vee$ vivant dans le groupe abélien des **cocaractères** $X^\vee(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Ce dernier groupe est d'ailleurs en dualité avec $X(T)$: si χ est un caractère et η un cocaractère, alors $\eta \circ \chi$ est un automorphisme de $\mathbb{G}_m$. On dispose donc d'un couplage

$$(\,|\,) \;:\; X(T) \times X^\vee(T) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_m) \;\simeq\; \mathbb{Z}$$

Le quadruplet $(X(T), X^\vee(T), \Phi, \Phi^\vee)$ est alors une **donnée radicielle**, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :

- $X(T)$ et $X^\vee(T)$ sont deux $\mathbb{Z}$-modules libre de même rang, en dualité par $(\,|\,)$;
- Φ et $\Phi^\vee$ sont deux parties de $X(T)$ et $X^\vee(T)$ en bijection par une application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$, stables par les réflexions suivantes :

$$\begin{aligned} s_\alpha \;&:\; \chi \longmapsto \chi - (\chi \,|\, \alpha^\vee)\,\alpha \\ s_{\alpha^\vee} \;&:\; \eta \longmapsto \eta - (\alpha \,|\, \eta)\,\alpha^\vee \end{aligned}$$

  et telles que $(\alpha, \alpha^\vee) = 2$.

Plus précisément, on peut montrer le théorème de classification suivant :

Théorème 1 (classification) *Si G est un groupe réductif connexe et si T est un tore maximal alors $(X(T), X^\vee(T), \Phi, \Phi^\vee)$ est une donnée radicielle qui caractérise G à isomorphisme près. Le groupe $N(T)/T$ s'identifie au groupe de Weyl du système de racines Φ défini dans $V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$. Réciproquement, toute donnée radicielle correspond à un certain groupe algébrique affine réductif connexe.*

De plus, l'ensemble des racines Φ caractérise de manière agréable la structure de G :

Théorème 2 *Si B est un sous-groupe de Borel définissant Φ^+, et U son radical unipotent, alors*

- $B = UT = TU$ *et* $U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha$;
- $G = \coprod_{w \in W} BwB$ *(décomposition de Bruhat)* ;

3 Rationalité

Fixons un nombre premier p, et notons q une de ses puissances. Comment obtient-on le groupe fini $\mathrm{GL}_n(q)$ à partir du groupe algébrique $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$? Une des façons de procéder est de considérer l'automorphisme de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ élevant chaque composante à la puissance q, appelé **endomorphisme de Frobenius standard**. On le notera $F : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$. On a alors

$$\mathrm{GL}_n(q) \;=\; \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)^F$$

Si on « tord » le morphisme F en $F'(A) = {}^tF(A)^{-1}$, on obtient un nouveau groupe de points fixes qui s'identifie au groupe unitaire sur $\mathbb{F}_{q^2}$ (associé à l'involution $x \mapsto x^q$) :

$$\mathrm{U}_n(q^2) \;=\; \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)^{F'}$$

Donnons maintenant le cadre général de cette construction. Considérons un groupe réductif G sur $\overline{\mathbb{F}}_q$; on appelle **endomorphisme de Frobenius** de G tout endomorphisme de G (en tant que groupe algébrique) dont une puissance est la restriction à G d'un endomorphisme de Frobenius standard.

Définition 4 *Un **groupe réductif fini** est un couple (G, F), où G est un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ et F un endomorphisme de Frobenius de G. On dira souvent que G^F est un groupe réductif fini.*

Considérons un tore maximal T **rationnel**, c'est-à-dire stable par F ; on peut faire agir l'endomorphisme de Frobenius sur les groupes de caractères et de cocaractères de la façon suivante :

$$\forall\,\chi \in X(T) \quad F(\chi) = \chi \circ F \qquad\qquad \forall\,\eta \in X^{\vee}(T) \quad F(\eta) = F \circ \eta$$

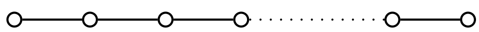
et il est clair que F est auto-adjoint pour le couplage défini plus haut. Son action sur le groupe de Weyl W en tant que sous groupe de $\mathrm{Aut}(X(T))$ est alors donné par $F(w) = F \circ w \circ F^{-1}$.

Considérons maintenant une racine α et son groupe associé U_α. Alors $F(U_\alpha)$ et $(F^{-1}(U_\alpha))^0$ sont des groupes unipotents connexes, non triviaux, normalisées par T et minimaux pour cette propriété. On en déduit qu'il existe une permutation σ telle que $F(U_{\sigma(\alpha)}) = U_\alpha$. De plus, si B est un sous-groupe de Borel stable par F, alors σ conserve le signe des racines défini par ce Borel. Plus précisément, on peut montrer que l'action de F sur les racines s'écrit

$$\forall\,\alpha \in \Phi \qquad F(\alpha) = q(\alpha)\,\sigma(\alpha)$$

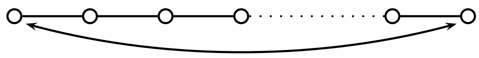
Cette permutation caractérise l'action de F sur W, puisque si α est une racine simple et s_α est la réflexion simple associée, on a $F(s_\alpha) = s_{\sigma(\alpha)}$. On en déduit que F induit un automorphisme de diagramme de W. En fait il se trouve que la fonction q est en générale constante, sauf dans certains cas « tordus » où σ échange racines courtes et longues. Donnons deux exemples de diagrammes :

Type $\mathbf{A_n}$:



C'est le cas par exemple du groupe $\mathrm{GL}_n(q)$: si T représente l'ensemble des matrice diagonales, alors F agit par multiplication par q sur le groupe des caractères.

Type $\mathbf{{}^2A_n}$:



C'est le cas du groupe $\mathrm{U}_n(q^2)$. Le Frobenius F' agit sur $X(T)$ par $-q\mathrm{id}$; σ est donc un automorphisme d'ordre 2. Après un choix correct du couple $T' \subset B'$, on se retrouve dans la situation du diagramme.

Les types possibles pour des groupes quasi-simples sont A_n, ${}^2A_n$, B_n, D_n, ${}^2D_n$, ${}^3D_4$, E_6, ${}^2E_6$, E_7, E_8, F_4, G_2, ${}^2B_2$, ${}^2G_2$ et ${}^2F_4$. L'exposant de gauche représente l'ordre de la permutation σ ; les trois derniers types correspondent aux trois types de groupes dits « tordus ».

Si on se restreint aux groupes « non tordus », on dispose d'un théorème de classification pour les groupes réductifs finis. Il est à noter que d'après ce théorème, F est entièrement défini par son action sur le groupe des caractères.

Théorème 3 (Classification) *Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, non tordu, et F l'endomorphisme de Frobenius associé. Alors le couple (G,F) est caractérisé, à isomorphisme près par :*

- la donnée radicielle $(X(T), X(T)^{\vee}, \Phi, \Phi^{\vee})$,

- le nombre q,

- l'automorphisme σ de $X(T)$, d'ordre fini, stabilisant Φ et tel que son adjoint stabilise $\Phi^{\vee}$.

II Représentations des groupes réductifs finis

Fixons un groupe réductif G^F. On s'intéresse dans cette partie aux représentations de ce groupe, c'est-à-dire à la façon dont il agit sur un espace vectoriel. Plus précisément, on appellera **représentation** de G^F sur un corps K tout K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire de G^F.

1 Foncteurs d'Harish-Chandra

On suppose dans un premier temps que $K = \mathbb{C}$ (en fait tout corps algébriquement clos de caractéristique 0 conviendrait). On ne considère donc que les représentations complexes de G^F. Chacune de ces représentations se décompose, par le théorème de Mashcke ([Se]), en représentations dites irréductibles, qui sont les plus petites sous-représentations non nulles qu'elle contient. Ce sont ces représentations que l'on cherche à déterminer, ou du moins à paramétrer. Une des méthodes générales consiste à « induire » des représentations à partir d'un sous-groupe de G^F, de structure beaucoup plus simple. Prenons par exemple le cas d'un tore maximal T, stable par F, inclus dans un sous-groupe de Borel B lui aussi stable par F. En notant U le radical unipotent de B, on peut alors définir les deux foncteurs d'induction et de restriction suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{R}_T^G \ : \ \mathbb{C}[T^F]\text{-mod} & \longrightarrow & \mathbb{C}[G^F]\text{-mod} \\ V & \longmapsto & \mathbb{C}[G^F/U^F] \otimes_{\mathbb{C}[T^F]} V \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} {}^*\mathsf{R}_T^G \ : \ \mathbb{C}[G^F]\text{-mod} & \longrightarrow & \mathbb{C}[T^F]\text{-mod} \\ V & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{G^F}(\mathbb{C}[G^F/U^F], V) \end{array}$$

Il est à noter que ces foncteurs sont adjoints.

Proposition 2 *Les foncteurs R_T^G et ${}^*\mathsf{R}_T^G$ ne dépendent pas du sous-groupe de Borel stable par F qui contient T, ce qui justifie les notations employées.*

Une des notions importantes dans la théorie des représentations des groupes finis est la notion de caractère. Le **caractère** χ d'une représentation V est une fonction sur G^F à valeurs complexes représentant la trace des éléments de G^F sur V ; autrement dit $\chi(g) = \mathrm{Tr}\,(g \mid V)$. Un des résultats fondamentaux de la théorie assure que les caractères caractérisent les représentations à isomorphisme près. Pour un groupe fini H, on notera $\mathrm{Irr}\, H$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de H. On pourra donc parler de foncteurs d'induction entre les caractères sans restreindre le problème.

Pour pouvoir utiliser ces foncteurs, il nous faut des moyens permettant de les calculer. Introduisons pour cela quelques notations : si $\chi \in \mathrm{Irr}\, T$, on note $W(T,\chi)$ le groupe de Weyl relatif défini par

$$W(T,\chi) \ = \ \left\{ g \in G^F \mid gTg^{-1} = T \ \text{ et } \ g\cdot\chi = \chi \right\} / T^F$$

où G^F agit sur χ par conjugaison à la source. On peut voir facilement $W(T,\chi)$ comme sous-groupe du groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$, mais il n'est vrai qu'il soit un groupe de Weyl lui aussi. Cependant,

Théorème 4 (Lusztig) *Le groupe $W(T,\chi)$ est un groupe de Coxeter, et il existe une indexation des caractères irréductibles intervenant dans $\mathsf{R}_T^G(\chi)$ telle que*

$$\mathsf{R}_T^G(\chi) \ = \sum_{\eta \in \mathrm{Irr}\, W(T,\chi)} (\dim \eta)\, \rho_\eta$$

2 Théorie de Deligne-Lusztig

Lorsque le tore T n'est pas inclus dans un sous-groupe de Borel stable par F, la construction précédente ne fonctionne plus. L'idée de Deligne et Lusztig est de donner une construction plus géométrique de ces foncteurs qui s'appliquera dans des cas plus généraux. Supposons donc que le tore maximal T est seulement stable par F, et choisissons un sous-groupe de Borel B le contenant ; on définit la variété de Deligne-Lusztig

$$\mathrm{Y}_U = \{gU \in G/B \mid g^{-1}F(g) \in U \cdot F(U)\}$$

C'est en fait une partie localement fermée de la variété algébrique sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ G/U, sur laquelle G^F agit à gauche, et T^F à droite (puisqu'il normalise U^F).

Il reste à associer des modules à cette variété. Pour cela, on admet ([DiMi], chapitre 10) qu'il existe une suite finie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie sur lesquels G^F agit à gauche et L^F à droite (avec ℓ un nombre premier différent de p). On les appelle les **groupes de cohomologie ℓ-adique à support compact** de Y_U et on les note $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{Y}_U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. La somme alternée de ces modules est un module virtuel noté $\mathrm{H}^\bullet_c(\mathrm{Y}_U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, vivant dans le groupe de Grothendieck des G^F-modules. On pose alors

$$\mathsf{R}^G_T(V) = \mathrm{H}^\bullet_c(\mathrm{Y}_U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbb{C}[T^F]} V$$

et
$$^*\mathsf{R}^G_T(V) = \mathrm{Hom}_{G^F}(\mathrm{H}^\bullet_c(\mathrm{Y}_U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), V)$$

Lorsque U est stable par F, on peut montrer que $\mathrm{H}^\bullet_c(\mathrm{Y}_U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathrm{H}^0_c(\mathrm{Y}_U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[G^F/U^F]$ et on retrouve bien la construction précédente. De plus,

Proposition 3 *Les foncteurs de Deligne-Lusztig R^G_T et $^*\mathsf{R}^G_T$ ne dépendent pas du sous-groupe de Borel qui contient T, ce qui justifie les notations employées.*

Ces foncteurs permettent d'obtenir toutes les représentations de G^F. Détaillons ce fait : la **représentation régulière** d'un groupe fini H correspond, par définition, au H-module $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[H]$ (où H agit par translation à gauche) ; l'intérêt de cette représentation est que chaque représentation irréductible de H y apparaît un nombre de fois égal à sa dimension. On notera reg_G le caractère de la représentation régulière de G^F. Alors on a la formule

$$\mathrm{reg}_G = \frac{1}{|G^F|_p} \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T \, \mathsf{R}^G_T(\mathrm{reg}_T)$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des tores maximaux F-stables de G, et ε vaut 1 ou -1. Reste donc le problème de calculer ces foncteurs, problème qui se révèle très difficile. Le théorème suivant permet toutefois de calculer les produits scalaires de deux induits :

Théorème 5 *Soient T et T' deux tores maximaux rationnels, $\chi \in \mathrm{Irr}\, T^F$ et $\eta \in \mathrm{Irr}\, T'^F$. Alors*

$$\langle \mathsf{R}^G_T(\chi) \mid \mathsf{R}^G_{T'}(\eta) \rangle_{G^F} = \frac{1}{|T^F|} \left| \{g \in G^F \mid T' = gTg^{-1} \;\; et \;\; \chi = g \cdot \eta\} \right|$$

En particulier, si T et T' ne sont pas conjugués sous G^F, les induits ont un produit scalaire nul. Attention cependant, puisque ce sont des caractères virtuels, cela ne signifie pas qu'il sont disjoints.

3 Séries géométriques

Soit G^* un groupe algébrique affine réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ et F^* un endomorphisme de Frobenius généralisé associé à cette structure.

Définition 5 *Le groupe (G^*, F^*) est un* ***groupe dual*** *de (G, F) s'il existe un tore maximal rationnel T de G, un tore maximal rationnel T^* de G^* et un isomorphisme de $X(T)$ vers $X^\vee(T^*)$ compatible avec les morphismes F et F^* qui envoie les racines de G sur les coracines de G^*.*

Remarquons qu'en vertu du théorème 3, il existe toujours un groupe dual à (G, F). Supposons que G^* est un tel groupe et notons T et T^* les tores maximaux rationnels associés à cette dualité. Donnons quelques conséquences de la définition précédente :

– Puisqu'on dispose d'un couplage $(\,|\,)$ pour lequel $X(T)$ et $X^\vee(T)$ sont en dualité, il existe un isomorphisme de $X^\vee(T)$ sur $X(T^*)$ compatible avec F et F^*, qui envoie les coracines de G sur les racines de G^*.
– Le tore T^* est un groupe dual de T.
– Si f est un automorphisme de $X(T)$, il induit par dualité un automorphisme f^* de $X^\vee(T) \simeq X(T^*)$. Puisque ce dernier isomorphisme envoit l'ensemble des coracines $\Phi^\vee$ de G sur celui des racines Φ^* de G^*, on en déduit que $(s_\alpha)^*$ s'identifie à la réflexion s_{α^*}. D'où l'anti-isomorphisme entre les groupes de Weyl :

$$\begin{array}{ccc} W(T) & \xrightarrow{\sim} & W(T^*) \\ w & \longmapsto & w^* \end{array}$$

Par cet isomorphisme, l'action de F^* sur $W(T^*)$ s'identifie à celle de F^{-1} sur $W(T)$.

Donnons quelques exemples de dualité pour les groupes classiques : le groupe GL_n est son propre dual, tout comme SO_{2n}. Le groupe SL_n est un groupe dual de PGL_n, et le groupe Sp_{2n} de SO_{2n+1}.

L'intérêt de l'introduction de ce groupe réside dans les deux résultats suivants :

Proposition 4 *Supposons (G, F) et (G^*, F^*) en dualité. Il existe une bijection naturelle entre les deux ensembles suivants :*
– *les classes de G^F-conjugaison des couples (T, χ), où T est un tore maximal rationnel, et χ un caractère irréductible de T^F ;*
– *les classes de ${G^*}^{F^*}$-conjugaison des couples (T^*, s), où T^* est un tore maximal rationnel et s un élément de ${T^*}^{F^*}$.*

Soit s un élément semi-simple de G^* et (s) sa classe de conjugaison dans G^F, supposée stable par F^* ; on définit l'ensemble $\mathcal{E}(G^F, (s))$ comme l'ensemble des caractères irréductibles de G^F qui on un produit scalaire non nul avec un certain $\mathrm{R}_T^G(\chi)$, pour $(T, \chi) \leftrightarrow (T^*, s)$. Avec ces notations on peut énoncer le théorème suivant, prouvé dans [DeLu] :

Théorème 6 *Sous les hypothèses de la proposition précédente :*

$$\operatorname{Irr} G^F = \coprod \mathcal{E}(G^F, (s))$$

où (s) parcourt l'ensemble des classes de conjugaisons stables par F^* d'éléments semi-simples de G^*.

4 Décomposition de Jordan

Reprenons les notations précédentes ; pour $s = 1$, la série $\mathcal{E}(G^F, (s))$ n'est rien d'autre que l'ensemble des caractères irréductibles de G^F qui interviennent dans un certain $\mathrm{R}_T^G(\mathrm{id}_T)$. On les appellera **caractères unipotents**. Nous allons voir que ces caractères jouent en quelque sorte un rôle de modèle pour les autres.

Lemme 1 *Soit G un groupe réductif connexe. Si s est un élément semi-simple, alors la composante neutre $C_G(s)^0$ du centralisateur de s est un groupe réductif connexe. De plus, si G est le dual d'un groupe réductif à centre connexe, alors $C_G(s)$ est connexe (donc égal à sa composante neutre).*

Considérons un groupe réductif fini (G, F) et (G^*, F^*) un groupe dual. Si G est à centre connexe et s est un élément semi-simple de ${G^*}^{F^*}$, alors $(C_G^*(s), F^*)$ est lui aussi un groupe réductif fini, et on peut donc parler de ses caractères unipotents :

Théorème 7 (Décomposition de Jordan) *Supposons toujours que $Z(G)$ est connexe ; pour tout élément semi-simple de ${G^*}^{F^*}$, il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G^F, (s)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}(C_{G^*}(s)^{F^*}, 1) \\ \chi & \longmapsto & \widehat{\chi} \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *pour tout tore maximal rationnel T^* de $C_{G^*}(s)$ contenant s , on a*

$$\varepsilon_G \langle \chi \mid \mathsf{R}_T^G(\chi)\rangle \;=\; \varepsilon_{C_{G^*}(s)} \langle \widehat{\chi} \mid \mathsf{R}_{T^*}^{C_{G^*}(s)}(\mathrm{id}_{T^*})\rangle$$

pour $(T^*, s) \leftrightarrow (T, \chi)$ *;*

(ii) *la dimension de $\widehat{\chi}$ est donné par :* $\dim \widehat{\chi} \;=\; \dfrac{|C_{G^*}(s)^{F^*}|_{p'}}{|G^F|_{p'}} \dim \chi.$

Dans certains cas, la bijection du théorème précédent est donné par un foncteur d'induction de Deligne-Lusztig. C'est le cas par exemple pour le groupe $\mathrm{GL}_n(q)$.

5 Paramétrage de Lusztig

Dans cette section, on supposera pour simplifier les notations que (G, T, F) est déployé, c'est-à-dire que la permutation sur les racines induite par F est triviale ; autrement dit, F agit trivialement sur le groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$. Par des méthodes d'induction dans les groupes de Weyl, Lusztig définit des **familles** de caractères. Il définit aussi, pour tout caractère $\chi \in \operatorname{Irr} W$, le **caractère fantôme**

$$\mathrm{R}_\chi \;=\; \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \chi(w)\, \mathsf{R}_{T_w}^G(\mathrm{id}_{T_w})$$

où T_w est un tore de la forme gTg^{-1} avec $g^{-1}F(g) = w$ (il existe toujours un tel élément g). Le résultat surprenant est que l'on peut relier les familles aux caractères fantômes :

Théorème 8 *Deux caractères fantômes R_χ et R_η sont disjoints si et seulement si χ et η ne sont pas dans la même famille.*

Si on définit $\mathcal{E}(1, \mathcal{F})$ comme l'ensemble des caractères unipotents de G qui interviennent dans un certain R_χ pour $\chi \in \mathcal{F}$, alors le théorème précédent permet de partitionner l'ensemble des caractères unipotents en :

$$\mathcal{E}(G^F, 1) \;=\; \coprod_{\mathcal{F}} \mathcal{E}(1, \mathcal{F})$$

où $\mathcal{F}$ parcourt l'ensemble des familles de $\operatorname{Irr} W$.

La dernière étape consiste à paramétrer les caractères unipotents de $\mathcal{E}(1, \mathcal{F})$ en associant à chaque famille un petit groupe fini $\Gamma_{\mathcal{F}}$ et d'autres quantités dépendant uniquement de $\mathcal{F}$ (et de l'action de F sur cette famille dans le cas non déployé). Dans [Lu], Lusztig détermine explicitement les groupes $\Gamma_{\mathcal{F}}$ et leur associe les ensembles $\mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ formé des couples (x, θ) où $x \in \Gamma_{\mathcal{F}}$ et θ est un caractère irréductible de $C_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(x)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ modulo la relation $(x, \theta) \sim ({}^g x, g \cdot \theta)$. Par exemple, dans le cas où $\Gamma_{\mathcal{F}}$ est abélien, $\mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ s'identifie à $\Gamma_{\mathcal{F}} \times \Gamma_{\mathcal{F}}^\vee$, où $\Gamma_{\mathcal{F}}^\vee$ désigne le groupe abélien $\mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$. Dans le cas général, on peut définir un couplage $\{\,,\,\}$ de $\mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}}) \times \mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par

$$\{(x, \theta), (y, \eta)\} \;=\; \frac{1}{|C_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(x)|\,|C_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(y)|} \sum_{\substack{g \,\in\, \Gamma_{\mathcal{F}} \\ x^g y \,=\, {}^g y x}} \theta(g^{-1}xg)\, \overline{\eta(gyg^{-1})}$$

La matrice de ce couplage est clairement hermitienne et on peut montrer qu'elle est aussi unitaire (voir [Lu], 4). Lusztig a explicité cette matrice dans le cas où $\Gamma = \mathfrak{S}_2$ et partiellement dans le cas des groupes $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$. Il définit de plus un plongement de $\mathcal{F}$ dans l'ensemble $\mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ et une fonction $\Delta \,:\, \mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \{\pm 1\}$ valant identiquement 1 sauf pour certaines familles de groupes de Weyl de type E_7 et E_8. Toutes ces constructions sont effectuées au cas par cas, pour les groupes de Weyl irréductibles, puis étendues aux groupes de Weyl quelconques. Par exemple, pour un groupe de Weyl de type A_n et un Frobenius standard, les groupes $\Gamma_{\mathcal{F}}$ sont triviaux.

Avec ces notations, on peut maintenant énoncer la formule des multiplicités donnant le produit scalaire d'un caractère unipotent avec un caractère fantôme :

Théorème 9 *Soit $\mathcal{F} \subset \operatorname{Irr} W$ une famille. Il existe une bijection de $\mathcal{E}(1, \mathcal{F})$ sur $\mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ associant x_ρ à tout caractère unipotent $\rho \in \mathcal{E}(1, \mathcal{F})$ tel que, pour tout caractère $\chi \in \mathcal{F}$, on a*

$$\langle \rho \,|\, \mathrm{R}_\chi \rangle_{G^F} \; = \; \Delta(\overline{x}_\rho) \, \{x_\rho, x_\chi\}$$

où x_χ est l'image de χ par le plongement $\mathcal{F} \longrightarrow \mathscr{M}(\Gamma_{\mathcal{F}})$.

Références

[Bo] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, GTM 126, Springer Verlag, 1991.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6*, Masson, 1981.

[DeLu] P. Deligne et G. Lusztig, *Representations of Reductive Groups over Finite Fields*, Annals of Math. **103** (1976).

[DiMi] F. Digne et J. Michel, *Representations of Finite Groups of Lie Type*, Cambridge University Press, 1991.

[Lu] G. Lusztig, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, Princeton University Press, 1984.

[Ser] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998.

[Sp] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups, Second Edition*, Birkhaüser, 1998.

[St] R. Steinberg, *Endomorphisms of Linear Algebraic Groups*, Memoirs of the American Mathematical Society **80** (1969).