

---

**SÉPARATION D'ÉCHELLES  
ET DESCRIPTION EFFECTIVE  
DES ÉCOULEMENTS  
EN MÉCANIQUE DES FLUIDES**

---

**SÉPARATION D'ÉCHELLES  
ET DESCRIPTION EFFECTIVE  
DES ÉCOULEMENTS  
EN MÉCANIQUE DES FLUIDES**

La plupart des écoulements fluides physiques font intervenir de nombreuses échelles de temps et d'espace. L'objectif de ce cours est d'introduire des techniques d'analyse permettant d'étudier leur comportement qualitatif, en en réduisant la complexité.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>1. Modèles mathématiques pour la mécanique des fluides</b> .....	1
1.1. Les équations fondamentales.....	1
1.2. Propriétés formelles des écoulements incompressibles - EXERCICE.....	6
1.3. Cadre fonctionnel.....	7
1.4. Tourbillon associé à un écoulement incompressible bidimensionnel - EXERCICE.....	12
<b>2. Fluides en rotation</b> .....	15
2.1. Un problème de perturbation singulière.....	15
2.2. Colonnes de Taylor-Proudman et ondes de Poincaré.....	19
2.3. Ondes de Rossby - EXERCICE.....	22
<b>3. Interférences</b> .....	25
3.1. Problème modèle - EXERCICE.....	25
3.2. Couplage faible.....	26
3.3. Equations d'enveloppe pour les ondes de Poincaré.....	31
<b>4. Effets de bord</b> .....	35
4.1. Développements multi-échelles.....	35
4.2. Convergence faible.....	37
4.3. Analyse des couches limites oscillantes - EXERCICE.....	39
<b>A. Quelques résultats importants d'analyse fonctionnelle</b> .....	41
A.1. Topologie et calcul différentiel.....	41
A.2. Espaces hilbertiens.....	42
A.3. Espaces de Sobolev.....	42

**Index**..... 43

## CHAPITRE 1

# MODÈLES MATHÉMATIQUES POUR LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

### 1.1. Les équations fondamentales

Les fluides sont des systèmes physiques, gaz ou liquide, que l'on peut décrire comme des milieux continus. Compte tenu de la nature particulaire de la matière, ces modèles sont donc des approximations dont il convient de discuter la validité selon les régimes considérés.

Pour décrire l'évolution d'un fluide, on va considérer des macro-particules, i.e. des petits volumes de fluide contenant un très grand nombre de particules élémentaires (de sorte à pouvoir calculer des moyennes), et leur appliquer les principes fondamentaux de la mécanique.

**1.1.1. Point de vue eulérien, advection.** — On peut alors adopter deux points de vue différents. Soit on suit les trajectoires des macro-particules, ce qui revient à observer le mouvement d'un flotteur : cette description est dite *lagrangienne*. Soit on se place en un point fixe quelconque du domaine et on mesure l'écoulement en ce point à tous les temps : c'est cette seconde description, dite *eulérienne* que l'on adoptera dans toute la suite. Formellement ces deux descriptions sont équivalentes : on peut en principe retrouver les trajectoires lagrangiennes à partir du champ de vitesses  $u \equiv u(t, x)$  en calculant les solutions des équations différentielles ordinaires

$$\frac{dX(t)}{dt} = u(t, X(t)), \quad X(0) = x_0.$$

Du point de vue des mathématiques, cette intégration peut néanmoins poser de grandes difficultés, notamment si le champ de vitesses  $u$  a des singularités.

Les quantités fondamentales pour décrire l'état du fluide à un instant  $t$  et à une position  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  donnés sont donc

- son champ de vitesses  $u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ ;
- sa densité locale  $\rho(t, x) \in \mathbb{R}^+$ ;
- sa pression  $p(t, x) \in \mathbb{R}$  (qui traduit l'effet des macro-particules de fluide environnantes);
- sa température  $\theta(t, x)$  (qui mesure l'énergie interne du fluide liée à l'agitation des particules élémentaires qui le composent).

Dans le cas de fluides complexes, on peut avoir aussi des densités de charge et de courant (avec un champ électromagnétique auto-induit), d'autres sources d'énergie interne (spins, énergie de cohésion

des molécules ...), on a alors besoin de plus de paramètres pour caractériser l'état du fluide en chaque point (et on a évidemment une plus grande richesse de phénomènes à décrire).

L'évolution de ces quantités va être gouvernée par des *équations aux dérivées partielles*, i.e. des équations qui lient les dérivées par rapport au temps et les dérivées par rapport aux variables d'espace. Ces équations traduisent les lois de la physique, notamment la conservation de la matière, et de la quantité de mouvement. On obtient une version locale de ces conservations en écrivant des bilans de masse et de quantité de mouvement sur un volume élémentaire de fluide.

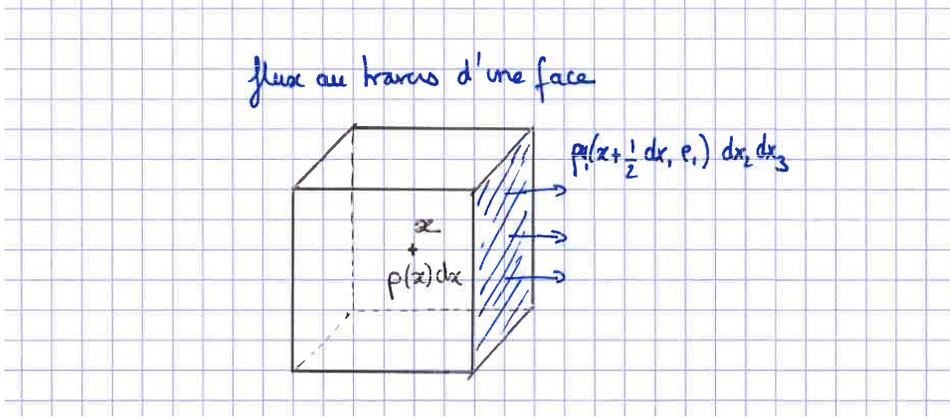


FIGURE 1. Transport et conservations

Le bilan de masse pour la macro-particule de fluide (cf figure 1) s'écrit

$$\begin{aligned} (\rho(t+dt, x) - \rho(t, x)) dx \sim & \left( \rho u_1(t, x - \frac{1}{2} dx_1 e_1) - \rho u_1(t, x + \frac{1}{2} dx_1 e_1) \right) dx_2 dx_3 dt \\ & + \left( \rho u_2(t, x - \frac{1}{2} dx_2 e_2) - \rho u_2(t, x + \frac{1}{2} dx_2 e_2) \right) dt dx_1 dx_3 \\ & + \left( \rho u_3(t, x - \frac{1}{2} dx_3 e_3) - \rho u_3(t, x + \frac{1}{2} dx_3 e_3) \right) dx_1 dx_2 dt, \end{aligned}$$

dont la version infinitésimale est

$$\partial_t \rho(t, x) = -\partial_{x_1}(\rho u_1)(t, x) - \partial_{x_2}(\rho u_2)(t, x) - \partial_{x_3}(\rho u_3)(t, x),$$

que l'on notera aussi de façon condensée

$$(1.1.1) \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0.$$

L'opérateur  $\nabla$  est l'opérateur vectoriel de différentiation  $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ . Quand on en prend le produit scalaire avec un champ de vecteurs, on obtient la *divergence* de ce champ de vecteurs, que l'on notera indifféremment  $\text{div } u = \nabla \cdot u$ .

Un argument simple de calcul différentiel montre alors que

$$\frac{d\rho(t, X(t))}{dt} = \partial_t \rho(t, X(t)) + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \rho(t, X(t)) \frac{dX_i(t)}{dt} = (\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho)(t, X(t)) = -\rho \text{div } u(t, X(t)).$$

Autrement dit, la variation de densité le long du flot s'exprime en fonction d'une caractéristique géométrique du champ de vitesses, qui code l'étirement et la compression des macro-particules.

**1.1.2. Bilan des forces, force de Coriolis.** — Le bilan de quantité de mouvement s'obtient de façon similaire, mais il fait intervenir en outre les forces agissant sur le fluide, selon le principe de Newton. Pour tout  $i = 1, 2, 3$ , on a donc

$$(1.1.2) \quad \partial_t(\rho u_i) + \nabla \cdot (\rho u_i u) = \sum_j F_i^{(j)}.$$

Les différentes forces usuellement prises en compte sont

- les forces internes dans le fluide, représentées par une pression scalaire en l'absence d'anisotropie forte et de frottement

$$F_i^{\text{pression}}(t, x) = -\partial_{x_i} p(t, x).$$

- les forces de frottement visqueux, dont on admet généralement qu'elles dépendent linéairement du tenseur de déformation

$$F_i^{\text{viscosité}}(t, x) = \nu \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} (\partial_{x_i} u_j + \partial_{x_j} u_i).$$

- les forces extérieures telles que la gravité

$$F^{\text{gravité}}(t, x) = \rho(t, x) g(x).$$

- les forces de type champ moyen auto-induites, en particulier les forces électromagnétiques dans les modèles de la MHD (magnéto-hydrodynamique)

$$F^{\text{électromagnétique}}(t, x) = q\rho E(t, x) + j \wedge B(t, x),$$

où  $j$  est la densité de courant, et  $(E, B)$  les champs électrique et magnétique.

Pour tous les écoulements de fluide sur la Terre, on cherche à décrire uniquement la fluctuation par rapport au mouvement de rotation solide. En d'autres termes, on se place dans le référentiel terrestre, référentiel qui n'est pas galiléen. Pour que le principe de Newton soit toujours vérifié, on doit alors ajouter des forces d'inertie, i.e. des forces fictives qui prennent en compte le mouvement de la Terre. Un calcul de changement de coordonnées (cf figure 2) montre que la force de Coriolis est donnée par

$$F^{\text{Coriolis}}(t, x) = -2\Omega \wedge \rho u(t, x),$$

où  $\Omega$  est le vecteur de rotation de la Terre.

**1.1.3. Equations de fermeture, incompressibilité.** — Le système (1.1.1)(1.1.2) ne suffit pas à prédire la dynamique, dans la mesure où il ne détermine pas la pression  $p(t, x)$ . Il manque une information sur la structure microscopique du fluide : en effet, les observables sont définies comme des moyennes sur les volumes infinitésimaux de fluide (supposés contenir un grand nombre de particules élémentaires) et ces moyennes ne sont reliées entre elles que dans certains régimes. Autrement dit, on doit prescrire une relation d'état qui dépend du régime considéré et qui traduit la thermodynamique du fluide.

Pour les gaz parfaits, l'hypothèse fondamentale est que la taille des particules est négligeable devant leur libre parcours moyen (on parle aussi de gaz raréfié). Il n'y a donc pas de terme de volume exclu dans la relation d'état, qui s'écrit simplement

$$(1.1.3) \quad p(t, x) = \rho(t, x)\theta(t, x)$$

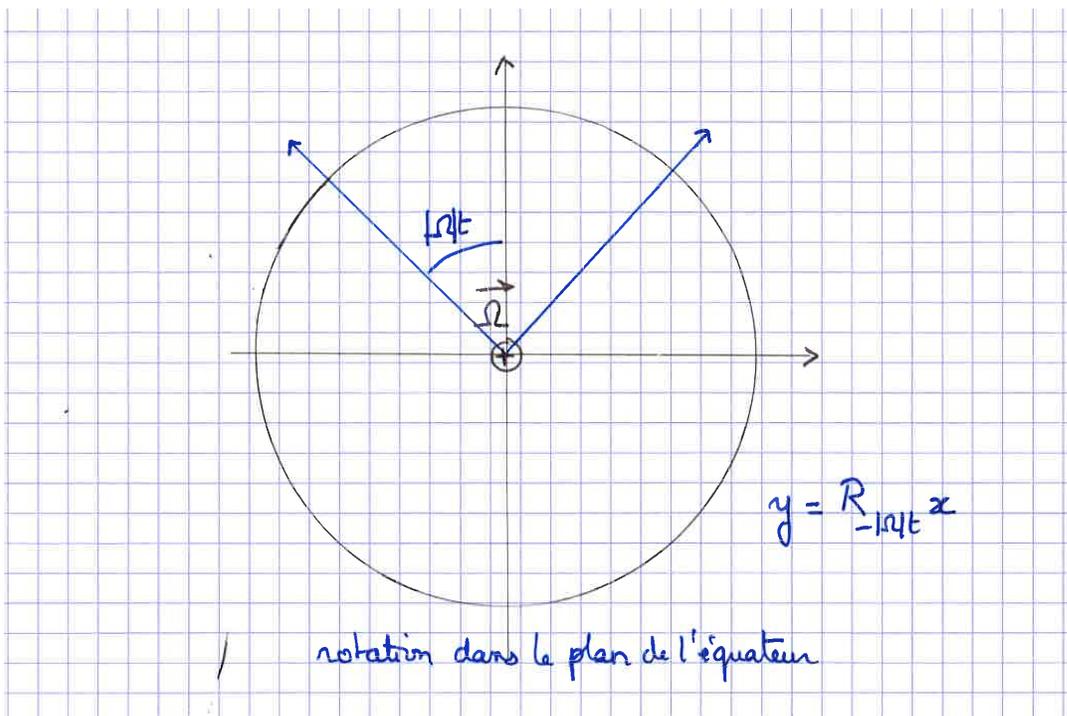


FIGURE 2. Référentiel terrestre et force de Coriolis

où  $\theta$  est la température du système.

Pour obtenir un système fermé, on doit alors écrire l'équation d'évolution pour la température  $\theta$ , équation qui provient de la conservation de l'énergie. L'hypothèse de gaz raréfié permet aussi de calculer le flux d'énergie en fonction des quantités  $\rho, u, \theta$ . Le modèle fondamental pour ces gaz raréfiés est donc le système des équations d'Euler compressibles :

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla (\rho \theta) &= 0, \\ \partial_t \frac{1}{2} (\rho |u|^2 + 3\rho \theta) + \nabla \cdot \frac{1}{2} (\rho |u|^2 u + 5\rho \theta u) &= 0. \end{aligned}$$

Ce système est encore très mal compris du point de vue mathématique, même quand il est posé dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On peut montrer qu'il admet des solutions régulières en temps court, mais génériquement ces solutions explosent en temps fini. En dimension 1 d'espace, on sait décrire plus précisément les solutions singulières et les prolonger de façon unique globalement en temps (au-delà du temps d'apparition de la singularité) : en particulier, on met en évidence la création et la propagation de chocs.

Dans ce cours, on se focalisera plutôt sur des fluides dont la densité est presque homogène. C'est une hypothèse qui est raisonnable par exemple si on considère un fluide comme l'eau. Les profils de densité dans l'océan montrent ainsi qu'en dehors d'une très fine couche localisée près de la surface, la densité

est essentiellement homogène (en espace) et donc constante (en temps)

$$(1.1.5) \quad \rho(t, x) = \rho_0.$$

Dans ce cas, l'équation de conservation de la masse donne une contrainte sur le champ de vitesses, qui doit être à divergence nulle. En combinant cette équation avec la conservation du moment, on obtient un système de 4 équations à 4 inconnues (en dimension  $d = 3$ ) : les *équations d'Euler incompressibles*

$$(1.1.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p &= 0, \end{aligned}$$

quand la viscosité est négligeable, et les *équations de Navier-Stokes incompressibles*

$$(1.1.7) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p &= \nu \Delta u, \end{aligned}$$

où le Laplacien est défini par  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_i \partial_{x_i x_i}$  si le fluide est visqueux.

Dans ces deux systèmes, on n'a pas d'équation d'évolution sur la pression  $p(t, x)$ . On s'attend à ce qu'elle soit déterminée par la contrainte d'incompressibilité, on dit que c'est un *multiplicateur de Lagrange*.

**1.1.4. Conditions de bord, interactions fluide/structure.** — Le domaine  $\Omega$  dans lequel s'écoule le fluide est physiquement une partie de  $\mathbb{R}^3$ . Néanmoins, s'il s'agit d'une couche très mince (ou s'il existe des invariances par translation), on considèrera parfois des modèles en dimension  $d = 2$ .

Dans de nombreuses situations, typiquement quand le fluide est au contact d'un autre fluide, l'interface  $\partial\Omega$  est libre, autrement dit le domaine est lui-même une fonction du temps  $\Omega = \Omega(t)$ . Il faut alors écrire une condition cinématique pour l'évolution de la *surface libre*  $\partial\Omega(t)$ . Même dans le cas des fluides incompressibles, les modèles ainsi obtenus sont très complexes (cf figure 3) :

- l'équation pour le transport de la surface est très similaire à l'équation de la densité pour un fluide compressible, on s'attend donc à observer des phénomènes plus singuliers de type choc;
- l'équation pour le transport de la surface a du sens tant que celle-ci n'a pas d'auto-intersection. Or on ne peut pas exclure la possibilité d'une telle singularité, notamment lors du déferlement (formation de splashes et de splats);
- on ne sait rien dire de la reconnection de la surface libre avec les parties rigides du bord (par exemple quand la hauteur d'eau dans un bassin s'annule en certains points à cause de la topographie du fond).

Pour simplifier, on supposera ici et dans toute la suite que le domaine  $\Omega$  est fixé, ce qui est une bonne approximation si on considère par exemple des écoulements océaniques à très grande échelle : les variations de la surface sont en effet négligeables au premier ordre, on parle de "toit rigide" .

Le nombre de conditions à prescrire sur le bord dépend de l'ordre du système, et de la nature de l'interaction avec le bord. Cette subtilité peut être illustrée très simplement dans le cas d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants et en dimension 1 d'espace.

Pour l'équation de transport

$$\partial_t \psi + a \partial_x \psi = 0 \text{ sur } [0, 1], \quad \psi|_{t=0} = \psi_0,$$

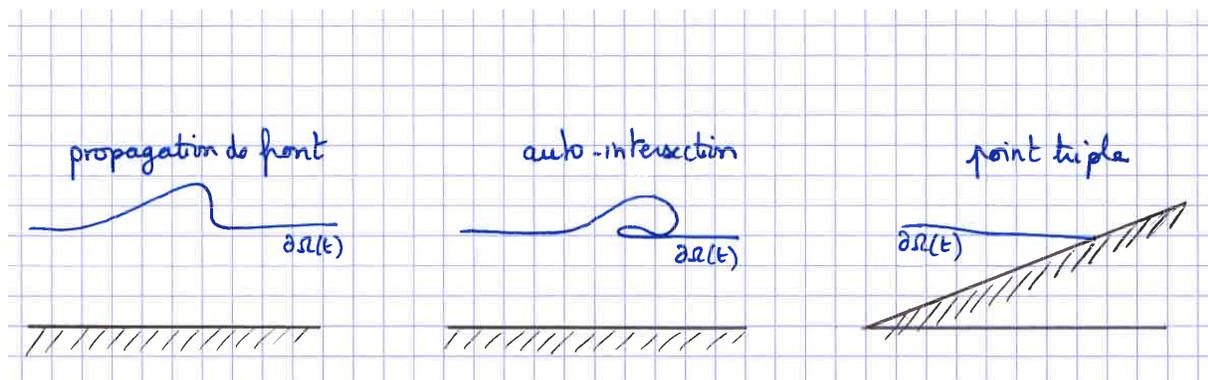


FIGURE 3. Quelques singularités de la surface libre

on a la solution explicite

$$\psi(t, x) = \psi_0(x - at) + g\left(t - \frac{1}{a}x\right)$$

où  $g$  est n'importe quelle fonction prescrite sur le bord  $x = 0$  (avec  $a > 0$ ). On a ici un prototype d'équation hyperbolique, et de façon générale pour ces systèmes, on doit prescrire une condition si et seulement si le flux est entrant.

L'équation de la chaleur

$$\partial_t \psi - \nu \partial_{xx} \psi = 0 \text{ sur } [0, 1], \quad \psi|_{t=0} = \psi_0$$

peut être résolue de façon semi-explicite en introduisant la transformée de Laplace par rapport à la variable de temps. On se ramène donc à résoudre une équation elliptique, ce qui nécessite de spécifier une condition sur l'ensemble du bord. Si on prescrit la valeur de  $\psi$ , on parle de *condition de Dirichlet*. Si on impose une condition sur sa dérivée  $\partial_x \psi$ , on parle de *condition de Neumann ou de Navier*. Cette situation est caractéristique des *équations paraboliques*.

Typiquement pour les équations d'Euler incompressibles, on considèrera la condition de flux nul

$$(1.1.8) \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, on prendra la condition de Dirichlet

$$(1.1.9) \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

## 1.2. Propriétés formelles des écoulements incompressibles - EXERCICE

**1.2.1. Définition de la pression.** — En mécanique des fluides incompressibles, la pression est définie comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité.

- Montrer que pour les systèmes (1.1.6) et (1.1.7) la pression  $p$  satisfait une équation de type Laplace :

$$-\Delta p = \sum_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} (u_i u_j).$$

- En déduire une équation fermée sur  $u$ . On introduira le projecteur de Leray  $P$  sur les champs de vecteurs à divergence nulle, que l'on exprimera en variables de Fourier.

$$\partial_t u + P \partial_j (u_j u) - \nu \Delta u = 0.$$

On s'attend à ce que ces systèmes donnent une bonne approximation de la dynamique à faible de nombre de Mach  $\varepsilon$ , c'est-à-dire quand la vitesse moyenne du fluide  $u$  est très faible comparée à la vitesse du son  $\sqrt{\theta}$ .

- Soit  $(\rho, u, \theta)$  une solution des équations d'Euler compressibles (1.1.4) du type

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon R), \quad u = \varepsilon U, \quad \theta = \theta_0(1 + \varepsilon \Theta).$$

Identifier les puissances de  $\varepsilon$  dans le développement formel des équations.

- En déduire formellement la consistance de l'approximation par les équations d'Euler incompressibles (1.1.6).

**1.2.2. Egalité d'énergie.** — Dans les systèmes (1.1.6) et (1.1.7), on n'a plus d'équation d'évolution pour la température ou la pression. On peut néanmoins démontrer que ces modèles héritent des propriétés de conservation de l'énergie.

- Montrer que les équations d'Euler incompressibles avec condition de flux nul au bord préservent l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int |u^0(x)|^2 dx.$$

- Dans le cas d'un fluide visqueux, une partie de l'énergie est dissipée par frottements. Montrer que les solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles avec condition de Dirichlet vérifient formellement

$$\frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int \sum_i |\partial_i u(s, x)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \int |u^0(x)|^2 dx.$$

### 1.3. Cadre fonctionnel

Comme pour les équations différentielles ordinaires, on n'a en général pas de solution explicite pour les équations aux dérivées partielles. L'objectif de l'étude mathématique est de décrire qualitativement le comportement de ces solutions, et la première question est de savoir si on a une bonne théorie d'existence et d'unicité (*problème de Cauchy*). La difficulté principale vient souvent de la présence des termes non linéaires.

Dans cette partie, on se propose de décrire quelques outils qui permettent de répondre (partiellement) à cette question pour les modèles de la mécanique des fluides incompressibles. On se réfère au cours d'analyse "Théorie des distributions et analyse de Fourier" de J.M. Bony (éditions de l'Ecole Polytechnique) pour une présentation plus détaillée et relativement auto-contenue de ces outils.

**1.3.1. Théorèmes de compacité.** — En dimension infinie, toutes les topologies ne sont pas équivalentes. Pour pouvoir poser convenablement le problème de Cauchy, il faut donc définir l'espace fonctionnel dans lequel on va travailler. Au vu de l'égalité d'énergie obtenue pour les équations de Navier-Stokes incompressibles par exemple, il est naturel d'introduire des espaces qui mesurent la régularité des fonctions dans  $L^2$ .

Les *espaces de Sobolev* constituent un outil fondamental pour l'étude des problèmes d'analyse non linéaire. Ils sont construits à partir des espaces de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  :

$$L^p(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega / \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Pour  $s \in \mathbb{N}$ ,

- l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  est le sous-espace de  $L^p(\Omega)$  constitué des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $s$  sont dans  $L^p(\Omega)$ ;
- l'espace  $W^{-s,p}(\Omega)$  est un espace de distributions d'ordre  $s$ , défini par dualité.

Ici on se limitera à l'étude des espaces de Sobolev  $H^s$  construits sur  $L^2$ , ce qui permet d'avoir une caractérisation très simple en termes de la transformée de Fourier sur le tore  $\mathbb{T}^d$  ou l'espace entier  $\mathbb{R}^d$  :

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

On peut vérifier que, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , et que le dual de  $H^s(\mathbb{R}^d)$  s'identifie avec  $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ .

Sous certaines conditions sur  $s$  (et  $p$ ), on peut définir des produits, et plus généralement des quantités non linéaires. Les espaces de Sobolev de régularité positive s'injectent en effet dans des espaces de Lebesgue d'exposant plus élevé : en quelque sorte on peut gagner de l'intégrabilité quitte à perdre de la régularité.

**Théorème 1.1 (Théorème d'injection de Sobolev).** — Si  $s > d/2$ , l'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)$  s'injecte continûment dans  $C^0(\mathbb{R}^d)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\psi\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Si  $s \leq d/2$ , l'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)$  s'injecte continûment dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  avec  $p = 2d/(d - 2s)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Ce résultat s'étend pour des domaines  $\Omega$  réguliers plus généraux. Pour comprendre ce qui se passe au voisinage des bords, on se ramène d'abord au cas où le bord est un hyperplan (en paramétrant le bord localement par des graphes). On montre alors que l'application trace

$$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto f|_{x_d=0} \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$$

se prolonge de manière unique en une application  $\gamma$  continue surjective de  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$  dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ , dont le noyau est  $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$  (adhérence des fonctions à support compact de  $\mathbb{R}_+^d$ ). On peut alors définir une application de prolongement et conclure en utilisant le résultat d'injection dans l'espace entier.

Pour montrer la stabilité des quantités non linéaires, comme on est en dimension infinie, les bornes ne suffisent pas en général. Le résultat suivant, qui est un corollaire du théorème d'Ascoli, montre que la régularité est un critère de compacité.

**Théorème 1.2 (Théorème de Rellich-Kondrachov).** — Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  (ou le tore  $\mathbb{T}^d$ ).

- si  $d > 2$  et  $1 \leq q < 2d/(d-2)$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$  est compacte.

- si  $d = 1$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$  est compacte.

**1.3.2. Opérateur de Stokes et approximation de Galerkin.** — Pour montrer l'existence de solutions, on procède par approximation. L'idée est de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires sur un espace de dimension finie, pour lequel on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Une façon naturelle d'obtenir un tel système est de se mettre dans une base  $(e_j)$  qui diagonalise l'opérateur de Stokes

$$-\Delta e_j = \lambda_j e_j, \quad \operatorname{div} e_j = 0, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

et de tronquer les grandes fréquences.

On introduit donc les *projecteurs spectraux* associés à l'opérateur de Stokes

$$P_k : \begin{cases} L^2 & \rightarrow L^2 \\ f & \mapsto \sum_{j \leq k} \langle f, e_j \rangle e_j \end{cases}.$$

Dans le cas du tore, cela correspond exactement à une troncature en Fourier. En particulier,  $P_k f \in C^\infty$ .

L'*approximation de Galerkin* est alors définie par

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} u_k &= \nu P_k \Delta u_k - P_k Q(u_k, u_k) \\ u_k(0) &= P_k u_0, \end{aligned}$$

où  $Q$  est l'application bilinéaire définie par

$$Q : \begin{cases} H^1 \times H^1 & \rightarrow H^{-1} \\ (u, v) & \mapsto \operatorname{div}(u \otimes v). \end{cases}$$

avec par définition  $\operatorname{div}(u \otimes v) = \sum_i \partial_{x_i}(uv_i)$ .

**Proposition 1.3.1.** — Soit  $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$  un champ de vecteurs à divergence nulle. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le système approché (1.3.1) des équations de Navier-Stokes incompressibles admet une unique solution globale  $u_k \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^d))$ . De plus, cette solution vérifie l'égalité d'énergie

$$\forall t \in [0, T_k[, \quad \frac{1}{2} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_k(0)\|_{L^2}^2$$

*Démonstration.* — L'existence et l'unicité locale sont obtenues par le théorème de Cauchy-Lipschitz. L'inégalité d'énergie permet ensuite de prolonger la solution pour tout temps.

• En combinant l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev, on obtient

$$\|u \otimes v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \leq C \|u\|_{H^{d/4}} \|v\|_{H^{d/4}},$$

d'où l'on déduit que

$$\|Q(u, v)\|_{H^{-1}} \leq C \|u\|_{H^1}^{\frac{d}{4}} \|v\|_{H^1}^{\frac{d}{4}} \|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}.$$

L'application

$$\begin{cases} \mathcal{H}_k & \longrightarrow \mathcal{H}_k \\ z & \longmapsto \nu P_k \Delta z - P_k Q(z, z) \end{cases}$$

est donc continue (avec une constante de continuité qui dépend de  $k$ ), et vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Cela entraîne l'existence d'une suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs et d'une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de solutions maximales de (1.3.1) appartenant à  $\mathcal{C}^1([0, T_k]; \mathcal{H}_k)$ .

• En prenant le produit scalaire  $L^2$  de (1.3.1) avec  $u_k(t)$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 = \nu \left( \Delta u_k(t) | u_k(t) \right)_{L^2} - \left( P_k Q(u_k(t), u_k(t)) | u_k(t) \right)_{L^2}$$

Comme  $P_k^2 = P_k = {}^t P_k$ ,

$$\left( P_k Q(u_k(t), u_k(t)) | u_k(t) \right)_{L^2} = \left( Q(u_k(t), u_k(t)), u_k(t) \right) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall t \in [0, T_k[, \quad \frac{1}{2} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_k(0)\|_{L^2}^2$$

Ceci implique en particulier que  $u_k$  reste borné pour tout temps dans  $\mathcal{H}_k$ , et donc que  $T_k = +\infty$ . De plus, la majoration en norme  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H^1)$  de  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est uniforme en  $k$ .  $\square$

**1.3.3. Solutions de Leray.** — Pour passer à la limite dans (1.3.1), on a besoin d'un peu de compacité. L'inégalité d'énergie donne une estimation de régularité uniforme par rapport aux variables spatiales. Pour obtenir de la compacité forte dans  $L^2$ , il faut alors contrôler la dépendance par rapport au temps.

**Proposition 1.3.2.** — *Il existe un champ de vitesses  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^{-1}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H^1)$  tel que, à extraction près, pour tout  $T > 0$ , la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  : fortement dans  $\mathcal{C}([0, T]; H^{-1})$ , fortement dans  $L^p([0, T]; L^2)$  pour tout  $p \in [2, +\infty[$ , et faiblement dans  $L^2([0, T]; H^1)$ .*

*Démonstration.* — Vu que  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H^1)$ , la suite  $(-\Delta u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans l'espace  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H^{-1})$ , et

$$\|P_k Q(u_k, u_k)\|_{H^{-1}} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^2}^{\frac{d}{2}} \|u_k\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}}.$$

On en déduit que la suite  $(\partial_t u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans l'espace  $L_{loc}^{\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$ , et que

$$\|u_k(t) - u_k(t')\|_{H^{-1}} \leq \left\| \int_{t'}^t \partial_t u_k(s) ds \right\|_{H^{-1}} \leq |t - t'|^{1-\frac{d}{4}} \|\partial_t u_k\|_{L^{\frac{4}{d}}([t, t']; H^{-1})}.$$

La suite de la preuve peut être admise : on utilise des résultats classiques d'analyse fonctionnelle pour interpoler la régularité en temps et la régularité en espace. La suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est équicontinue sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $H^{-1}$ . D'autre part, cette suite est également bornée dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^2)$ . Or, d'après le théorème de Rellich-Kondrachov, l'inclusion de  $L^2$  dans  $H^{-1}$  est compacte. Le théorème d'Ascoli assure donc qu'il existe  $u \in \mathcal{C}([0, T]; H^{-1})$  tel qu'à une extraction près, la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tende vers  $u$  dans l'espace  $\mathcal{C}([0, T]; H^{-1})$ .

Par ailleurs, l'ensemble  $L^2([0, T]; H^1)$  est un espace de Hilbert. Quitte à extraire encore, on peut donc exiger en sus que la suite converge faiblement vers  $u$  dans  $L^2([0, T]; H^1)$ .

Ensuite, en faisant tendre  $T$  vers l'infini et en reprenant le procédé d'extraction diagonal utilisé dans la preuve du théorème d'Ascoli, on obtient finalement un champ  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^{-1}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H^1)$

tel qu'une sous-suite de  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (que l'on continuera à noter  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ) tende fortement vers  $u$  dans  $\mathcal{C}_{loc}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$  et faiblement dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H^1)$ .

Finalement, on a

$$\|u_k(t) - u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_k(t) - u(t)\|_{H^{-1}} (\|\nabla u_k\|_{L^2} + \|\nabla u(t)\|_{L^2}).$$

Une intégration en temps sur  $[0, T]$  combinée à l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir la convergence (forte) vers  $u$  de la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans l'espace  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$ . La convergence dans  $L^p_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$  pour tout  $p \in [2, +\infty[$  s'obtient à l'aide de l'inégalité de Hölder, et des bornes uniformes dans  $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$  pour  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . □

En passant à la limite, on obtient alors l'existence d'une solution faible globale pour les équations de Navier-Stokes incompressibles (1.1.7) :

**Théorème 1.1.** — *Soit  $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$  un champ de vecteurs à divergence nulle. Il existe une solution  $u$  de (1.1.7) au sens des distributions avec donnée initiale  $u_0$ , i.e. un champ  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^{-1}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H^1)$  à divergence nulle tel que pour tout  $\Psi$  appartenant à  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H^1)$ , on a*

$$\int_{\Omega} u(t, x) \cdot \Psi(t, x) dx + \int_{[0, t] \times \Omega} (\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \otimes u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi)(t, x) dx dt = \int_{\Omega} u_0(x) \cdot \Psi(0, x) dx$$

De plus, cette solution satisfait l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(t', x)|^2 dx dt' \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx$$

Soit  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H^1)$  un champ de vecteurs à divergence nulle. Comme  $u_k$  est une solution de (1.3.1), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_k(t), \Psi(t) \rangle &= \langle \partial_t u_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle \\ &= \langle P_k \Delta u_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle P_k Q(u_k(t), u_k(t)), \Psi(t) \rangle \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité. Or

$$\begin{aligned} \langle P_k \Delta u_k(t), \Psi(t) \rangle &= -\nu \sum_{i=1}^d \int \partial_{x_i} u_k(t, x) : \partial_{x_i} P_k \Psi(t, x) dx, \\ \langle P_k Q(u_k(t), u_k(t)), \Psi(t) \rangle &= \sum_{i=1}^d \int u_{k,i}(t, x) u_k(t, x) \cdot \partial_{x_i} P_k \Psi(t, x) dx, \\ \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle &= \int u_k(t, x) \cdot \partial_t \Psi(t, x) dx. \end{aligned}$$

Par intégration en temps entre 0 et  $t$ , on en déduit que

$$\int u_k(t, x) \Psi(t, x) dx + \int_0^t \int (\nu \nabla u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \otimes u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi)(t, x) dx dt = \int_{\Omega} u_k(0, x) \cdot \Psi(0, x) dx$$

Par le théorème de Lebesgue, la suite  $(\nabla P_k \Psi)_{k \in \mathbb{N}}$  tend fortement vers  $\nabla \Psi$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$ . La convergence faible de  $u_k$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H^1)$  assure que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int (\nu \nabla u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi)(t, x) dx dt = \int_0^t \int (\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi)(t, x) dx dt.$$

Le fait que la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^{-1})$  implique que, pour tout réel positif  $t$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k(t, x) \Psi(t, x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k(t), \Psi(t) \rangle = \langle u(t), \Psi(t) \rangle.$$

Comme  $u(t)$  appartient à  $L^2$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k(t, x) \Psi(t, x) dx = \langle u(t), \Psi(t) \rangle = \int u(t, x) \Psi(t, x) dx.$$

Le terme associé à la donnée initiale converge puisque  $P_k u_0$  tend vers  $u_0$  dans  $L^2$ .

Pour passer à la limite dans le terme non linéaire, on a besoin de la convergence forte. Par interpolation, on déduit de la Proposition 1.3.2 que la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend fortement vers  $u$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^4)$ . Comme la suite  $(\nabla P_k \Psi)_{k \in \mathbb{N}}$  tend fortement vers  $\nabla \Psi$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2)$  on obtient avec l'inégalité de Hölder que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int (u_k \otimes u_k : \nabla P_k \Psi)(t, x) dx dt = \int_0^t \int (u \otimes u : \nabla \Psi)(t, x) dx dt.$$

Cela conclut la démonstration du théorème 1.1.

#### 1.4. Tourbillon associé à un écoulement incompressible bidimensionnel - EXERCICE

**1.4.1. Transport de la vorticité.** — En dimension 2 d'espace, la *vorticité* (qui correspond à la partie antisymétrique de la matrice  $Du$ ) est scalaire. On a donc des propriétés géométriques particulières du flot.

- On définit le *tourbillon*  $\omega = \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2 = \nabla^\perp \cdot u$ . Montrer que, si  $u$  est une solution des équations d'Euler incompressibles,  $\omega$  est transport  le long du flot

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0.$$

- En déduire que les normes  $L^p$  du tourbillon sont conservées pour  $1 \leq p < +\infty$  :

$$\int |\omega(t, x)|^p dx = \int |\omega^0(x)|^p dx.$$

Que peut-on dire de la norme  $L^\infty$ ?

Ce contrôle de la vorticité permet d'obtenir des *bornes a priori* sur le champ de vitesses, i.e. des bornes satisfaites par toute solution régulière (approchée) du système et qui sont stables par passage à la limite. Pour simplifier, on supposera que le domaine est périodique  $\Omega = \mathbb{T}^2$ , et que la moyenne du champ de vitesses initial est nulle  $\int u^0(x) dx = 0$ .

- Montrer que la moyenne du champ de vitesses reste nulle pour tout temps  $\int u(t, x) dx = 0$ , et en déduire une expression du champ de vitesses en termes du tourbillon. Ceci est un cas particulier de la *décomposition de Helmholtz* qui permet de retrouver un champ de vecteurs à partir de sa divergence et de sa vorticité (sous de bonnes hypothèses sur le domaine  $\Omega$ ).

- Pour un tourbillon initial  $\omega^0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ , montrer que le champ de vitesses a toutes ses dérivées bornées

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{T}^2)).$$

**1.4.2. Existence globale et unicité des solutions.** — Les bornes a priori obtenues en utilisant le transport du tourbillon permettent d'améliorer la théorie de Cauchy pour (1.1.6) en 2 dimensions d'espace. Soit  $(u_n^0)$  une suite de champs de vecteurs à divergence nulle, de moyenne nulle, telle que la suite des vorticités  $(\omega_n^0)$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{T}^2)$

$$\omega_n^0 \rightharpoonup \omega^0 \text{ faiblement dans } L^2(\mathbb{T}^2).$$

- On suppose que pour tout  $n$ , on connaît une solution  $u_n$  des équations d'Euler incompressibles (1.1.6) avec donnée initiale  $u_n^0$ . Montrer que, à extraction près,  $u_n$  converge fortement dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^2)$ , vers un champ de vecteurs  $u$  à divergence nulle et moyenne nulle. On utilisera le contrôle de la dérivée temporelle, le théorème d'injection compacte de Rellich, et un argument d'interpolation.
- Montrer que la limite  $u$  est une solution des équations d'Euler incompressibles (1.1.6). On a ainsi établi la stabilité du système. Pour obtenir l'existence, il suffit alors de savoir construire de bonnes suites de solutions approchées, ce que l'on admet ici.
- En utilisant le transport du tourbillon et la décomposition de Helmholtz, montrer que la solution est unique.



## CHAPITRE 2

### FLUIDES EN ROTATION

#### 2.1. Un problème de perturbation singulière

On se propose dans la suite de ce cours d'identifier et d'étudier différents phénomènes à petites échelles observés dans les océans et liés à l'effet dominant de la force de Coriolis. Pour cela, on va partir du modèle mathématique le plus simple possible, les équations de Navier-Stokes-Coriolis

$$\begin{aligned}\operatorname{div} u &= 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + 2\Omega \wedge u + \nabla p &= \nu \Delta u,\end{aligned}$$

et quantifier les tailles respectives des différents termes.

**2.1.1. Ordres de grandeur, effets dominants.** — Pour comparer les effets respectifs des différentes forces, on doit introduire des paramètres sans dimension caractéristiques de l'écoulement considéré.

• Une mesure de la force de Coriolis, i.e. de l'importance de la rotation dans un système donné, est le *nombre de Rossby*, que l'on va définir maintenant.

Notons d'abord que, si le mouvement relatif par rapport à la rotation de la Terre a un petit rapport d'aspect (échelle verticale/échelle horizontale), ce qui est généralement le cas pour les courants et les vents, seule la composante verticale de la rotation de la Terre  $f = |\Omega| \sin \theta$  où  $\theta$  désigne la latitude, est significative dynamiquement (l'accélération de Coriolis horizontale due au mouvement vertical et l'accélération de Coriolis verticale due au mouvement horizontal sont des termes petits comparés aux gradients de pression dans leurs équations respectives).

Soit  $L$  l'échelle de longueur horizontale caractéristique de l'écoulement considéré, c'est-à-dire l'échelle spatiale qui caractérise les variations des grandeurs dynamiques (par exemple la distance entre un pic de pression et le minimum de pression le plus proche). De façon similaire, on note  $U$  l'échelle de vitesse horizontale de l'écoulement. Le temps que met le fluide à parcourir la distance  $L$  est  $L/U$ ; si cette période de temps est très inférieure à la période de rotation  $f^{-1}$ , le fluide ne ressent presque pas la rotation de la Terre sur l'échelle de temps du mouvement. Pour que la rotation soit importante, on s'attend alors à ce que  $\frac{L}{U} \geq f^{-1}$ , ou de façon équivalente à ce que le nombre de Rossby soit petit :

$$(2.1.1) \quad \varepsilon = \frac{U}{2fL} \ll 1.$$

Dans toute la suite de ce cours, on considèrera seulement des mouvements à grande échelle, c'est-à-dire des mouvements qui sont significativement influencés par la rotation de la Terre :

$$|\Omega| = 7.3 \times 10^{-5} s^{-1}.$$

On remarquera que  $L$  n'a pas nécessairement besoin d'être très grande si la vitesse caractéristique  $U$  est petite. Par exemple, le Gulf Stream a une vitesse typique  $U \sim 1ms^{-1}$ . Bien que son échelle spatiale horizontale soit seulement de l'ordre de  $L \sim 100km$ , le nombre de Rossby correspondant est  $\varepsilon = 0.07$ . Même si on doit doubler cette valeur à des latitudes de l'ordre de  $30^\circ$  (à cause de la projection du vecteur de rotation sur la verticale locale), il est clair que ce courant satisfait le critère de mouvement à grande échelle.

- La persistance sur plusieurs jours d'ondes à grande échelle dans les océans montrent que les forces de friction sont assez faibles presque partout, comparées à l'accélération de Coriolis et aux gradients de pression. La friction intervient rarement à l'ordre principal dans l'équilibre géostrophique.

Néanmoins la friction et le mécanisme de dissipation d'énergie qu'elle entraîne ne peuvent pas être négligés. En effet, sur des grandes échelles de temps, l'océan subit de nombreux forçages extérieurs, essentiellement stationnaires, tels que le chauffage solaire, qui apportent de l'énergie au système. Cet apport d'énergie produit une réponse mécanique sous forme d'énergie cinétique à grande échelle, qui doit être dissipée pour que l'état statistique moyen du fluide soit à peu près constant. Cela signifie que, même si la friction est faible par rapport aux autres forces, on doit la prendre en compte car sa nature dissipative est qualitativement distincte de celle des forces inertielles.

Le rapport entre la force de friction par unité de masse et l'accélération de Coriolis est un paramètre sans dimension, appelé *nombre d'Ekman*,  $E$  :

$$(2.1.2) \quad E = \frac{\nu U/L^2}{2\Omega U} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}.$$

Si  $\nu$  est la viscosité cinématique de l'eau  $\nu = 10^{-6}m^2s^{-1}$ , on estime que le nombre d'Ekman associé à un écoulement de longueur caractéristique  $L = 1000km$ , est de l'ordre de

$$E \sim 10^{-14},$$

ce qui est beaucoup trop petit pour expliquer les phénomènes observés.

Le plus souvent, on garde néanmoins la même représentation pour la force de friction, mais on remplace la viscosité cinématique  $\nu$  par une *viscosité turbulente*, beaucoup plus grande, qui est supposée traduire phénoménologiquement l'effet combiné des cascades d'énergie vers les petites échelles (mécanisme non linéaire de la turbulence) et de la dissipation à toute petite échelle. Cette viscosité turbulente est parfois modélisée de façon anisotrope pour prendre en compte la petitesse du rapport d'aspect. Mais ce concept empirique est très difficile à quantifier : on donnera au Chapitre 5 un calcul de diffusion effective pour expliquer les idées sous-jacentes en homogénéisation, mais ce calcul ne s'applique que dans un cas très particulier.

**2.1.2. Equations adimensionnées.** — Si on choisit l'échelle de temps  $T$ , l'échelle de longueur  $L$  et l'échelle de vitesse  $U$  de sorte à ce que  $U = L/T$ , on s'attend à voir un effet macroscopique de la convection.

- Le point de départ ici sera donc le système de Navier-Stokes-Coriolis adimensionné avec viscosité turbulente anisotrope

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\varepsilon} f e_3 \wedge u - E_h \Delta_h u - E_3 \partial_{33} u + \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot u &= 0, \end{aligned}$$

sur le domaine  $\omega_h \times [0, 1]$ , qui est un modèle très grossier pour décrire les mouvements océaniques à grande échelle. Par souci de simplicité, on néglige ici l'effet des bords latéraux en supposant que  $\omega_h$  est le tore bidimensionnel.

Comme condition de bord à la surface  $\Sigma = \omega_h \times \{1\}$ , on impose

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} u_3|_{x_3=1} &= 0, \\ E_3 \partial_{x_3} u_h|_{x_3=1} &= \tau, \end{aligned}$$

où  $\tau$  est une contrainte donnée, décrivant le forçage par le vent.

Au fond  $B = \omega_h \times \{0\}$ , on utilise la condition de Dirichlet

$$(2.1.5) \quad u|_{x_3=0} = 0,$$

qui est une condition d'arrêt modélisant l'interaction fluide/structure.

- Comme l'accélération de Coriolis est orthogonale au champ de vitesse, elle ne crée pas de terme supplémentaire dans l'égalité d'énergie. Par contre, il y a un terme source qui provient du forçage extérieur par le vent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx + E_h \int_0^t \int \sum_i^2 |\partial_i u(s, x)|^2 dx ds + E_3 \int |\partial_3 u(s, x)|^2 dx ds \\ &= \frac{1}{2} \int |u^0(x)|^2 dx + E_3 \int_0^t \int_{x_3=1} u(s, x) \partial_{x_3} u(s, x) ds dx_h \\ &= \frac{1}{2} \int |u^0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{x_3=1} u(s, x) \tau(s, x) ds dx_h. \end{aligned}$$

A nombre d'Ekman  $E_3$  fixé, on peut utiliser l'estimation de trace pour contrôler le membre de droite par la norme  $H^{1/2}$  du champ de vitesses :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{x_3=1} u(s, x) \tau(s, x) ds dx_h \right| &\leq C \int_0^t \|\tau(s)\|_{L^2(\Sigma)} \|u(s)\|_{H^1}^{1/2} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} ds \\ &\leq \frac{E_3}{2} \int_0^t \int |\partial_3 u(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{C^2}{E_3} \int \|\tau(s)\|_{L^2(\Sigma)}^2 ds \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on en déduit une borne a priori

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx + E_h \int_0^t \int \sum_i^2 |\partial_i u(s, x)|^2 dx ds + \frac{E_3}{2} \int_0^t \int |\partial_3 u(s, x)|^2 dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int |u^0(x)|^2 dx e^t + \frac{C^2}{E_3} \int \|\tau(s)\|_{L^2(\Sigma)}^2 e^{t-s} ds. \end{aligned}$$

En particulier, on peut reprendre la construction de Leray et montrer que le système a (au moins) une solution faible globale. Par contre, cela ne suffit pas à obtenir de borne uniforme par rapport au paramètre  $E_3$  (sauf si  $\tau = O(\sqrt{E_3})$ ).

**2.1.3. Petites échelles, oscillations, concentrations.** — Dans le cas où le système n'est pas forcé, i.e.  $\tau = 0$ , l'inégalité d'énergie donne une borne indépendante du nombre de Rossby  $\varepsilon$  et du nombre d'Ekman  $E$ . Cela a donc du sens de chercher à décrire le comportement asymptotique de la solution quand ces paramètres tendent vers 0. (Physiquement les paramètres ne tendent évidemment pas vers 0, mais ils sont très petits et on peut donc espérer que la limite donne une bonne approximation!).

Le point est que la borne sur l'énergie cinétique va donner de la compacité faible dans  $L^2$ , mais que c'est une propriété beaucoup plus faible que la compacité forte nécessaire pour passer à la limite dans les équations. On peut montrer en fait que les défauts de convergence forte pour une suite  $(u_\varepsilon)$  faiblement convergente peuvent être caractérisés complètement et qu'ils sont dûs aux phénomènes d'oscillation, de concentration ou d'évanescence.

- Suite oscillante  $g_\varepsilon(x) = \sin(2\pi x/\varepsilon)$  définie sur  $]0, 1[$

$$g_\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ mais } \|g_\varepsilon\|_2 = \frac{1}{2}.$$

- Suite concentrante  $g_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\chi(x/\varepsilon)$  définie sur  $]0, 1[$ , avec  $\chi \in C_c^\infty([0, 1])$

$$g_\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ mais } \|g_\varepsilon\|_2 = \|\chi\|_2.$$

- Suite évanescente  $g_\varepsilon(x) = \chi(x - \frac{1}{\varepsilon})$  définie sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$g_\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ mais } \|g_\varepsilon\|_2 = \|\chi\|_2.$$

Dans un domaine borné, les défauts de compacité sont donc dûs uniquement à des phénomènes à petites échelles.

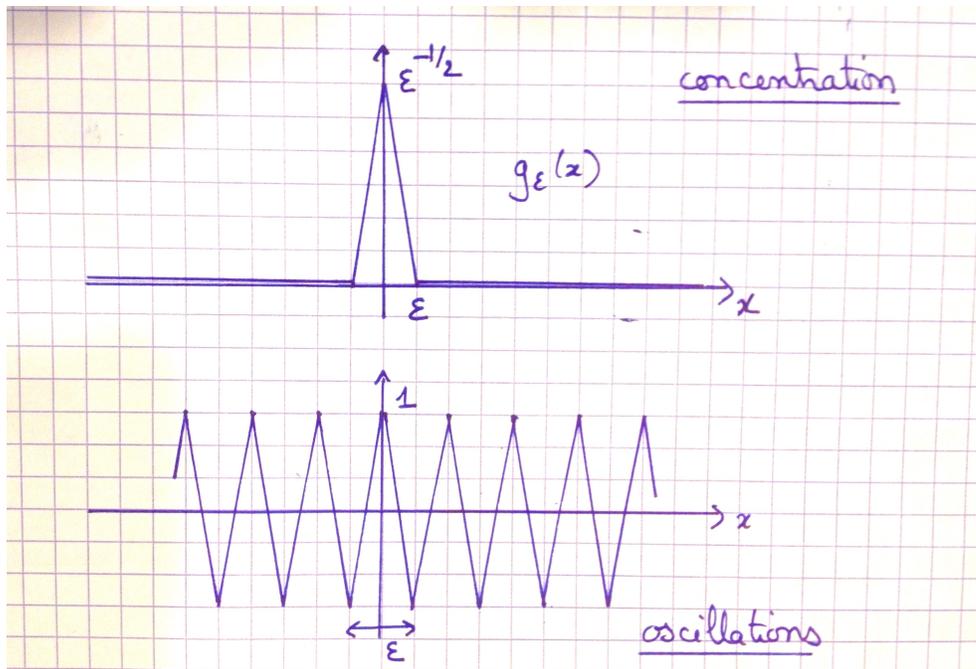


FIGURE 1. Défauts de compacité

Dans le problème qui nous intéresse, on s'attend à avoir

- des petites échelles en temps, typiquement de l'ordre de  $\varepsilon$ , à cause de la force de Coriolis qui pénalise la dérivée temporelle,
- des petites échelles en espace, typiquement de l'ordre de  $\sqrt{E}$  puisqu'on perd la régularité spatiale dans la limite de viscosité évanescence.

On va montrer que les petites échelles en temps correspondent à un phénomène d'oscillation : en étudiant l'opérateur de Coriolis contraint sur les champs à divergence nulle, on peut en effet décomposer le mouvement à l'ordre principal en une superposition d'ondes dites de Poincaré. C'est l'objet du présent chapitre. Une question naturelle est alors de savoir comment ces ondes sont couplées si on tient compte des effets non linéaires de la convection. L'étude des interférences et la dérivation de la dynamique lente des ondes fera l'objet du prochain cours (Chapitre 3).

On montrera ensuite que les petites échelles en espace correspondent à un phénomène de concentration : l'incompatibilité entre la structure des ondes générées par l'opérateur de Coriolis et les conditions de bord prescrites à la surface et au fond oblige en effet à avoir une distortion près des bords, avec des variations très rapides du champ de vitesses. Ce phénomène, dit de couche limite, sera étudié au Chapitre 4. Ici, on se placera dans un régime où il n'y a pas de couplage non linéaire dans la couche limite. On verra néanmoins qu'il y a une rétroaction sur l'ensemble du fluide : c'est évidemment crucial pour la physique puisque cela implique que le forçage en surface par le vent transmet une quantité macroscopique d'énergie à l'océan : c'est le pompage d'Ekman.

## 2.2. Colonnes de Taylor-Proudman et ondes de Poincaré

**2.2.1. Equilibre géostrophique.** — On suppose ici que l'on a des bornes uniformes sur les solutions  $(u_\varepsilon)$  de (3.2.1), donc de la compacité faible. C'est le cas par exemple en l'absence de forçage surfacique.

Les équations satisfaites par un point limite  $u$  quelconque vont alors dépendre fortement de la structure de la perturbation singulière

$$L : u \in \mathcal{H}(\Omega) \mapsto P(fe_3 \wedge u)$$

où  $P$  désigne le projecteur de Leray de  $L^2$  sur le sous-espace  $\mathcal{H}$  des champs de divergence nulle (à flux nul sur le bord). En particulier, on peut montrer que  $u$  appartient au noyau  $\text{Ker}(L)$  de  $L$ .

**Lemme 2.2.1.** — Soient  $(u_\varepsilon)$  une famille bornée dans  $\mathcal{H}$  de solutions faibles de (3.2.1)(4.1.2)(4.1.3), et  $u$  un point limite quelconque de  $(u_\varepsilon)$ . Alors,  $u$  appartient à  $\text{Ker } L$ .

En particulier, si  $f$  est constant,  $u$  est un champ bidimensionnel à divergence nulle sur  $\omega_h$  :

$$\begin{aligned} u_3 &\equiv 0, \\ \partial_3 u_h &= 0, \quad \nabla_h \cdot u_h = 0, \end{aligned}$$

*Démonstration.* — En multipliant (3.2.1) par  $\varepsilon\chi$  pour une fonction test à divergence nulle quelconque  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times ]0, 1[ \times \omega_h)$ , on obtient

$$\iint u_\varepsilon \cdot (\varepsilon \partial_t \chi + \varepsilon (u_\varepsilon \cdot \nabla) \chi + \varepsilon E_h \Delta_h \chi + \varepsilon E_3 \partial_{33} \chi + f \wedge \chi) dx dt = 0.$$

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on en déduit que

$$\iint u \cdot (fe_3 \wedge \chi) dx dt = 0$$

ce qui implique que, pour presque tout  $t \geq 0$ , il existe  $p$  telle que

$$(2.2.1) \quad fe_3 \wedge u(t) + \nabla p = 0.$$

Comme  $u_\varepsilon$  satisfait la contrainte d'incompressibilité pour tout  $\varepsilon > 0$ , il vient de plus

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Donc  $u(t) \in \text{Ker } L$  pour presque tout  $t \geq 0$ .

Si  $f$  est constant, on a

$$-u_2 + \partial_1 \frac{p}{f} = 0, \quad u_1 + \partial_2 \frac{p}{f} = 0, \quad \partial_3 \frac{p}{f} = 0.$$

La composante horizontale de  $u$  est divergence nulle, et ne dépend pas de la variable verticale  $x_3$ .

En utilisant la condition de divergence nulle, on obtient alors que

$$\partial_3 u_3 = 0$$

ce qui, combiné avec la condition de non pénétration sur  $u_3$ , donne  $u_3 \equiv 0$ .  $\square$

Ce résultat de caractérisation des écoulements géostrophiques est appelé *théorème de Taylor-Proudman*. L'écoulement est complètement bidimensionnel et peut donc être représenté par le mouvement de colonnes parallèles à l'axe de rotation, que l'on appelle colonnes de Taylor-Proudman.

**Remarque 2.2.2.** — *L'approximation géostrophique est très utile pour prédire le mouvement des fluides géophysiques : une fois qu'on connaît la pression, les vitesses horizontales, leur cisaillement vertical et la composante verticale de la vorticité sont déterminées immédiatement. Néanmoins*

- (i) *L'approximation est fautive au voisinage de l'équateur car  $f$  s'annule. Cela signifie que dans les régions équatoriales on doit utiliser un modèle plus fin.*
- (ii) *Même aux latitudes moyennes, la contrainte géostrophique ne permet pas de calculer le champ de pression, ni de prédire son évolution en temps. On doit donc étudier les fluctuations autour de l'équilibre géostrophique pour avoir une caractérisation complète du mouvement. Ces petites fluctuations sont régies soit par les termes d'accélération qui sont de l'ordre du nombre de Rossby, soit par les forces de friction.*

**2.2.2. Description des ondes aux latitudes moyennes.** — Sur l'orthogonal du noyau, le processus dominant est régi par la force de Coriolis

$$L : u \in \mathcal{H} \mapsto P(fe_3 \wedge u) \in \mathcal{H}.$$

L'équation

$$\varepsilon \partial_t u + Lu = 0$$

s'avère être une équation de propagation d'ondes.

Si  $f$  est constant, on peut utiliser la représentation de l'opérateur en Fourier pour calculer la *relation de dispersion* de ces ondes (i.e. la relation entre la pulsation  $\lambda_k$  et le vecteur d'onde  $k$ ).

**Lemme 2.2.3.** — *Si  $f$  est constant, l'opérateur de rotation incompressible  $L$  se diagonalise en base de Fourier. Les modes propres, appelés ondes de Poincaré, ont pour relation de dispersion*

$$\lambda_k = -\frac{fk_3}{|k|^2}.$$

*Démonstration.* — Si  $f$  est constant, on a un calcul explicite en base de Fourier.

En écrivant le système d'équations

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u + f e_3 \wedge u + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned}$$

en variables de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ u_{k,2} \\ u_{k,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f u_{k,2} \\ f u_{k,1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i k_1 \\ i k_2 \\ i k_3 \end{pmatrix} p &= 0, \\ i k_1 u_{k,1} + i k_2 u_{k,2} + i k_3 u_{k,3} &= 0 \end{aligned}$$

En particulier, on peut éliminer la pression

$$|k|^2 p = -i k_1 f u_{k,2} + i k_2 f u_{k,1}$$

et obtenir une expression simple pour l'opérateur de rotation incompressible

$$\varepsilon \partial_t \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ u_{k,2} \\ u_{k,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f u_{k,2} + f \frac{k_1^2 u_{k,2} - k_1 k_2 u_{k,1}}{|k|^2} \\ f u_{k,1} + f \frac{k_1 k_2 u_{k,2} - k_2^2 u_{k,1}}{|k|^2} \\ \frac{k_3 k_1 f u_{k,2} - k_2 k_3 f u_{k,1}}{|k|^2} \end{pmatrix} = 0.$$

A vecteur d'ondes  $k$  fixé ( $k_3 \neq 0$ ), les oscillations sont donc régies par une matrice antisymétrique  $2 \times 2$

$$L_k = f \begin{pmatrix} -\frac{k_1 k_2}{|k|^2} & -1 + \frac{k_1^2}{|k|^2} \\ 1 - \frac{k_2^2}{|k|^2} & \frac{k_1 k_2}{|k|^2} \end{pmatrix}$$

qui agit sur la vitesse horizontale. On retrouve ensuite la vitesse verticale avec la condition de divergence nulle

$$u_{k,3} = -\frac{1}{k_3} (k_1 u_{k,1} + k_2 u_{k,2}).$$

Le polynôme caractéristique de  $L_k$  est donné par

$$\lambda^2 - \left( \frac{k_1 k_2}{|k|^2} \right)^2 - \left( -1 + \frac{k_1^2}{|k|^2} \right) \left( 1 - \frac{k_2^2}{|k|^2} \right) = 0$$

dont les racines sont

$$\lambda = \pm i \frac{k_3}{|k|}.$$

Pour obtenir une description complète des ondes de Poincaré, il suffit alors de calculer les projecteurs spectraux. Les vecteurs propres sont

$$e_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}|k||k_h|} \begin{pmatrix} k_1 k_3 \mp i k_2 |k| \\ k_2 k_3 \pm i k_1 |k| \\ -|k_h|^2 \end{pmatrix}.$$

□

A l'ordre dominant, on s'attend donc à ce que la composante tridimensionnelle de la donnée initiale génère des ondes qui se propagent très rapidement dans le domaine (avec une vitesse de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$ ). La moyenne temporelle de ces ondes s'annule, comme leur limite faible, mais elles portent une énergie finie.

### 2.3. Ondes de Rossby - EXERCICE

A l'équateur,  $f$  s'annule donc on utilise généralement une approximation affine (dite approximation  $\beta$ -plan) :  $f(x) = \beta x_2$ .

On se propose ici d'étudier les ondes créées par la rotation rapide et la gravité dans le cas d'un modèle simplifié 2D à surface libre, dit modèle de Saint-Venant :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\varepsilon} \beta x_2 u^\perp + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \eta = 0, \end{cases}$$

où  $\eta$  est la fluctuation de hauteur de la surface  $h = H(1 + \varepsilon \eta)$ . (On a supposé que le nombre de Froude  $U^2/gH$  qui mesure l'effet de la gravité est du même ordre de grandeur que le nombre de Rossby).

On va montrer qu'on observe dans ce cas un effet de *guide d'ondes*, ainsi qu'une nouvelle famille d'ondes se propageant beaucoup plus lentement, appelées ondes de Rossby (ou ondes quasigéostrophiques).

#### 2.3.1. Diagonalisation de l'opérateur d'ondes. —

On commence par chercher les modes propres de l'opérateur

$$L : \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{div} u \\ \beta x_2 u^\perp + \nabla \eta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on va utiliser une décomposition en modes de Fourier par rapport à la variable  $x_1$  et sur la base d'Hermite  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par rapport à  $x_2$ .

On rappelle que  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la base orthonormée de  $L^2$  qui diagonalise l'oscillateur harmonique

$$-\psi_n'' + \beta^2 x_1^2 \psi_n = \beta(2n + 1)\psi_n.$$

On peut montrer que

$$\psi_n(x_2) = e^{-\frac{\beta x_2^2}{2}} P_n(\sqrt{\beta} x_2),$$

où  $P_n$  est un polynôme d'ordre  $n$ , et que

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} \psi_n'(x_1) + \beta x_1 \psi_n(x_1) &= \sqrt{2\beta n} \psi_{n-1}(x_1), \\ \psi_n'(x_1) - \beta x_1 \psi_n(x_1) &= -\sqrt{2\beta(n+1)} \psi_{n+1}(x_1). \end{aligned}$$

avec par convention  $\psi_n = 0$  si  $n < 0$ .

• Montrer qu'en écrivant le système

$$i\tau \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$$

en Fourier en  $x_1$ , on trouve l'équation différentielle suivante sur  $u_{k,1}$

$$\partial_{22} u_{k,1} + \left( \tau^2 - k^2 + \frac{\beta k}{\tau} - \beta^2 x_2^2 \right) u_{k,1} = 0$$

- En projetant sur la base d'Hermite, en déduire qu'on a une solution non triviale si et seulement si  $\tau$  vérifie l'équation

$$\tau^3 - (k^2 + \beta(2n + 1))\tau + \beta k = 0.$$

On admettra que ce polynôme a trois racines réelles distinctes pour  $n \neq 0$ , et qu'on peut reconstruire ainsi une base de vecteurs propres de l'opérateur  $L$  sur  $L^2$ .

- Conclure que les ondes sont piégées au voisinage de l'équateur.

### 2.3.2. Ondes de gravité et ondes de Rossby. —

Les ondes décrites par l'opérateur  $\mathcal{L}$  peuvent être classifiées en deux familles.

- Montrer que

$$\tau(n, k, \pm 1) \sim \sqrt{k^2 + \beta(2n + 1)} \text{ quand } |k| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

En déduire que l'effet dominant pour ces modes est la gravité.

- Montrer que les autres ondes, dites *ondes de Rossby* se propagent beaucoup plus lentement, et toujours vers l'Est

$$\tau(n, k, \pm 0) \sim \frac{\beta k}{k^2 + \beta(2n + 1)}.$$

On parle de mouvement quasi-géostrophique.



## CHAPITRE 3

### INTERFÉRENCES

#### 3.1. Problème modèle - EXERCICE

Pour comprendre la dynamique lente d'un système rapidement oscillant, il faut décrire l'interaction des ondes via les couplages non linéaires. Selon la structure algébrique du terme de couplage, et la structure des ondes, on peut avoir différentes situations, qu'on se propose de décrire d'abord sur un exemple simple.

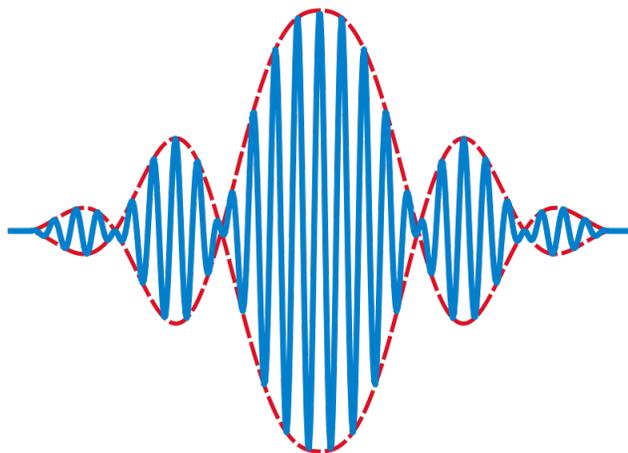


FIGURE 1. Dynamique lente des ondes

**3.1.1. Technique de filtrage.** — Le modèle de départ est un système de deux équations différentielles ordinaires pénalisées par une rotation complexe :

$$\partial_t \begin{pmatrix} v_{\varepsilon,1} \\ v_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} i\lambda_1 & 0 \\ 0 & i\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\varepsilon,1} \\ v_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{\varepsilon,1}^2 v_{\varepsilon,2}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(v_{\varepsilon,1}, v_{\varepsilon,2})|_{t=0} = (v_1^0, v_2^0),$$

où  $v_{\varepsilon,1}, v_{\varepsilon,2}$  ne sont des fonctions que du temps.

• Montrer qu'il existe un intervalle  $[0, T]$  sur lequel les fonctions  $v_{\varepsilon,1}$ ,  $v_{\varepsilon,2}$  sont définies pour tout  $\varepsilon$ . On pourra multiplier l'équation par le vecteur complexe conjugué  $(\bar{v}_{\varepsilon,1}, \bar{v}_{\varepsilon,2})$  pour obtenir une borne uniforme.

• Pour isoler la dynamique lente, on doit filtrer les oscillations. On définit alors

$$\begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1}(t) \\ w_{\varepsilon,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\frac{i}{\varepsilon}\lambda_1 t)v_{\varepsilon,1}(t) \\ \exp(\frac{i}{\varepsilon}\lambda_2 t)v_{\varepsilon,2}(t) \end{pmatrix},$$

de sorte qu'en l'absence de couplage non linéaire, le vecteur  $w_\varepsilon$  serait constant.

Ecrire les équations satisfaites par  $w_\varepsilon$  et en déduire que  $w_\varepsilon$  décrit les amplitudes (lentement variables) des oscillations.

**3.1.2. Condition de résonance.** — On veut maintenant déterminer les équations codant la dynamique lente, appelées *équations d'enveloppe*. En d'autres termes, on veut passer à la limite dans l'équation sur  $w_\varepsilon$ .

• Soit  $w$  la limite de  $w_\varepsilon$ . Montrer que pour tout  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ , et pour  $\mu \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\int \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\mu t\right) w_{\varepsilon,1}^{n_1}(t) w_{\varepsilon,2}^{n_2}(t) dt \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

• En déduire l'équation d'enveloppe sur  $w$ . On traitera séparément les cas  $\lambda_1 + 2\lambda_2 \neq 0$  et  $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ . Dans le deuxième cas, on dit que le système est *résonnant*, c'est-à-dire que les ondes ont des interférences constructives.

## 3.2. Couplage faible

On revient maintenant au système de Navier-Stokes-Coriolis.

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\varepsilon} f e_3 \wedge u - E_h \Delta_h u - E_3 \partial_{33} u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

Pour séparer les problèmes, on suppose que  $f$  est constant, que les nombres d'Ekman  $E_h, E_3$  sont fixés et on se limite au cas du tore, ou de façon équivalente au domaine  $[0, 1] \times \omega_h$  avec condition de glissement au fond et à la surface

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} u_3|_{x_3=0} = u_3|_{x_3=1} = 0, \\ \partial_3 u_h|_{x_3=0} = \partial_3 u_h|_{x_3=1} = 0, \end{cases}$$

On peut utiliser de la même façon la décomposition en base de Fourier en  $x_3$ , il suffit de se limiter à la partie en sinus sur chaque mode.

D'après ce qui précède, on sait que

– la famille  $(u_\varepsilon)$  est uniformément bornée dans l'espace d'énergie, donc à extraction près

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2;$$

– la limite faible  $u$  satisfait la contrainte géostrophique, c'est donc un champ bidimensionnel à divergence nulle;

- la convergence en général ne peut pas être forte, car la partie tridimensionnelle de la donnée initiale donne lieu à des oscillations rapides en temps.

On note qu'il y a ici une simplification importante car la forme du champ de vitesses limite est compatible avec la condition de bord, ce qui ne serait pas le cas si on avait imposé (4.1.2) ou (4.1.3).

La question maintenant est de déterminer l'équation d'évolution pour  $u$ . Comme dans le modèle simplifié étudié au paragraphe précédent, la difficulté vient du couplage non linéaire : a priori la convergence faible ne suffit pas pour passer à la limite. En général, on doit décrire les oscillations de façon assez précise et déterminer comment elles interfèrent. Ici on va voir qu'on a une structure intéressante de *transparence* qui fait que l'équation sur la partie non oscillante se découple des autres ondes.

### 3.2.1. Compacité pour le mode non oscillant. —

On commence par montrer que la partie non oscillante, i.e. la projection  $v_\varepsilon$  de  $u_\varepsilon$  sur le noyau de  $L$ , n'a plus de petites échelles (ni en temps, ni en espace), et que la suite  $(v_\varepsilon)$  est donc compacte.

**Proposition 3.2.1.** — *Soit  $u_0 \in \mathcal{H}$  un champ de vecteurs ( $L^2$  à divergence nulle) de moyenne nulle sur  $\omega_h \times [0, 1]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère une solution faible  $u_\varepsilon$  de (3.2.1) avec condition de glissement, et on définit*

$$v_\varepsilon(x_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 u_\varepsilon(x) dx_3$$

Alors la suite  $(v_\varepsilon)$  est fortement compacte dans  $L^2([0, T] \times \omega_h)$ , pour tout  $T > 0$ .

*Démonstration.* — Le point de départ est de projeter l'équation (3.2.1) sur le noyau de  $L$ , c'est-à-dire de prendre la moyenne verticale. L'intérêt est de se débarrasser du terme de rotation (qui est dans l'orthogonal du noyau de  $L$ ).

On a donc

$$(3.2.3) \quad \partial_t v_\varepsilon - E_h \Delta_h v_\varepsilon + P_h \nabla_h \cdot \int_0^1 u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon dx_3 = 0,$$

où  $P_h$  désigne le projecteur de Leray sur les champs de vecteur bidimensionnels à divergence nulle.

La régularité par rapport aux variables d'espace (horizontales) vient de l'estimation d'énergie puisque  $\nabla_h u_\varepsilon$  est uniformément borné dans  $L^2([0, T], L^2)$  pour tout temps  $T$ .

La régularité par rapport au temps est obtenue (comme dans la preuve d'existence de Leray) en trouvant une borne a priori pour  $\partial_t v_\varepsilon$ . On vérifie en effet que  $\nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^{-5/2})$ , et que  $\Delta_h u_\varepsilon$  est borné dans  $L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{-1}) \subset L^2(\mathbb{R}^+; H^{-5/2})$ , donc  $\partial_t v_\varepsilon$  est uniformément borné dans  $L^2([0, T]; H^{-5/2})$ .

Par interpolation (en utilisant par exemple le théorème d'Ascoli comme au Chapitre 1), on trouve finalement que  $(v_\varepsilon)$  est fortement compacte dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_h))$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

Ce résultat montre que le seul obstacle à la convergence est la présence éventuelle d'oscillations en  $x_3$ , créant de petites échelles en  $t$ .

**3.2.2. Compacité par compensation.** — On peut néanmoins démontrer que la structure algébrique particulière du terme de couplage ne permet pas que les interférences des modes oscillants influent sur l'évolution de  $u$ . On va d'abord donner le calcul formel qui donne cette propriété et on verra ensuite comment on peut le rendre rigoureux.

Le but est de montrer que la limite du terme non linéaire de convection ne fait intervenir que l'interaction non linéaire de la limite faible. Plus précisément, on veut montrer qu'on a

$$P_h \nabla \cdot \int_0^1 u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon dx_3 \rightarrow P_h \nabla \cdot (u \otimes u).$$

Bien entendu, il faudra préciser dans quel espace fonctionnel cette convergence a lieu. Mais pour l'instant, on ne se soucie pas des problèmes éventuels liés à la régularité (ou à l'absence de régularité) spatiale des fonctions.

- La première étape consiste à réécrire les équations de propagation dans une formulation adéquate, c'est-à-dire sans le gradient de pression et sans le projecteur de Leray (qui est un opérateur non local). On va donc prendre le rotationnel de l'équation (3.2.1). On note  $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$  la partie oscillante du champ de vitesses et on définit

$$\tilde{\omega}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1 \tilde{u}_{\varepsilon,2} - \partial_2 \tilde{u}_{\varepsilon,1}$$

et

$$\partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla \wedge \tilde{u}_\varepsilon)_h = \nabla_h^\perp \tilde{u}_{\varepsilon,3} - \partial_3 \tilde{u}_{\varepsilon,h}^\perp \quad \text{avec} \quad \int_0^1 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}(x) dx_3 = 0.$$

Ici et dans toute la suite, on note  $y^\perp = (y_2, -y_1, 0)$ .

De l'équation (3.2.3) obtenue au paragraphe précédent, on déduit que

$$\varepsilon \partial_t \tilde{\omega}_\varepsilon - f \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} = \varepsilon (\partial_1 \tilde{F}_{\varepsilon,2} - \partial_2 \tilde{F}_{\varepsilon,1})$$

où  $F_\varepsilon$  est le terme de flux défini par

$$F_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_h u_\varepsilon - P \nabla_h (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon).$$

de sorte que  $(\partial_1 F_{\varepsilon,2} - \partial_2 F_{\varepsilon,1})$  est borné dans  $L^2([0, T]; H^{-7/2})$ . On a donc

$$\varepsilon \partial_t \tilde{\omega}_\varepsilon - f \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} = \varepsilon \tilde{r}_\varepsilon, \quad \text{où } \tilde{r}_\varepsilon \text{ uniformément borné dans } L^2([0, T]; H^{-7/2}(\Omega)).$$

Pour les autres composantes de la vorticité, les calculs sont similaires : puisque  $\nabla \wedge u_\varepsilon^\perp = \partial_3 u_\varepsilon$ , on trouve après intégration par rapport à la variable verticale

$$\varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} + f \tilde{u}_{\varepsilon,h} = \varepsilon \tilde{R}_\varepsilon, \quad \text{où } \tilde{R}_\varepsilon \text{ uniformément borné dans } L^2([0, T]; H^{-7/2}(\Omega)).$$

- La condition de transparence résulte alors de la structure algébrique du terme non linéaire.

Comme  $u_\varepsilon$  est à divergence nulle, on a

$$(3.2.4) \quad u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) = \nabla \frac{|u_\varepsilon|^2}{2} - u_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge u_\varepsilon),$$

donc il suffit de considérer  $u_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge u_\varepsilon)$ .

On a bien sûr

$$(3.2.5) \quad \int_0^1 u_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge u_\varepsilon) dx_3 = v_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge v_\varepsilon) + \int_0^1 \tilde{u}_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge \tilde{u}_\varepsilon) dx_3.$$

Commençons par regarder le premier terme dans le membre de droite de (3.2.5). Comme on a de la compacité forte sur  $(v_\varepsilon)$ , on s'attend à pouvoir passer à la limite dans ce terme

$$v_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge v_\varepsilon) \rightarrow \omega u^\perp \text{ au sens des distributions.}$$

Pour calculer le second terme dans le membre de droite de (3.2.5), on va utiliser les équations de propagation. Pour l'instant on ne se soucie pas des questions de régularité ou d'intégrabilité. On a donc

$$(3.2.6) \quad \tilde{u}_\varepsilon \wedge (\nabla \wedge \tilde{u}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\varepsilon,h}^\perp \tilde{\omega}_\varepsilon - \partial_3(\tilde{u}_{\varepsilon,3} \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp) - \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp \\ -\tilde{u}_{\varepsilon,h}^\perp \cdot \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} \end{pmatrix}.$$

On commence par étudier les composantes horizontales de (3.2.6):

$$\tilde{u}_{\varepsilon,h}^\perp \tilde{\omega}_\varepsilon - \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp = \frac{1}{f} (-\varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp + \varepsilon R_\varepsilon^\perp) \tilde{\omega}_\varepsilon - \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp.$$

Mais on a aussi que

$$-\operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} = \frac{1}{f} (-\varepsilon \partial_t \tilde{\omega}_\varepsilon + \varepsilon \tilde{r}_\varepsilon),$$

de sorte que

$$\int_0^1 \left( \tilde{u}_{\varepsilon,h}^\perp \tilde{\omega}_\varepsilon - \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h} \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp \right) dx_3 = \frac{1}{f} \left( -\varepsilon \partial_t \int_0^1 (\tilde{\Omega}_{\varepsilon,h})^\perp \tilde{\omega}_\varepsilon dx_3 + \varepsilon \int_0^1 \left( R_\varepsilon^\perp \tilde{\omega}_\varepsilon + \tilde{r}_\varepsilon \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp \right) dx_3 \right),$$

qui devrait converger vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Il reste à traiter le dernier terme dans (3.2.6), qui est la troisième composante: on a

$$f \tilde{u}_{\varepsilon,h} = -\varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} + \varepsilon \tilde{R}_\varepsilon,$$

de sorte que

$$\tilde{u}_{\varepsilon,h}^\perp \cdot \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} = \frac{1}{f} \left( -\varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp \cdot \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} + \varepsilon \tilde{R}_\varepsilon \cdot \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} \right).$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp \cdot \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} = -\frac{1}{2} \varepsilon \partial_t \left( \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} \cdot \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\perp \right) + \frac{1}{2} \partial_3 \left( \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h} \cdot (\varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h})^\perp \right).$$

Après intégration par rapport à la variable verticale, on s'attend alors à ce que ce terme converge aussi vers 0.

• Pour pouvoir justifier ces calculs, il faut néanmoins montrer qu'ils ont du sens, ce qui n'est pas le cas si les restes ne sont contrôlés que dans des espaces de distributions peu régulières.

Comme toutes les relations de propagation sont linéaires, on peut tout régulariser par convolution. Il suffit pour cela d'introduire un noyau  $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^+)$  tel que  $\kappa(x) = 0$  si  $|x| \geq 1$  et  $\int_\Omega \kappa dx = 1$ , et de convoler par

$$(3.2.7) \quad \kappa_\delta : x \mapsto \frac{1}{\delta^3} \kappa \left( \frac{\cdot}{\delta} \right)$$

On obtient alors la description suivante des ondes régularisées :

**Lemme 3.2.1.** — *Soit  $u_0 \in \mathcal{H}$  un champ de vecteurs à moyenne nulle. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère une solution faible  $u_\varepsilon$  de (3.2.1) avec condition de glissement.*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une famille  $(u_\varepsilon^\delta)_{\delta > 0}$  de champs de vecteurs réguliers, appartenant à  $L^2([0, T]; \cap_s H^s)$*

– qui donnent une bonne approximation (uniforme en  $\varepsilon$ ) de  $u_\varepsilon$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_\varepsilon \|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^p(\Omega))} = 0 \quad \text{pour tout } p \in [2, 6[$$

– et qui vérifient la formulation en vorticité des équations de propagation

$$\varepsilon \partial_t \tilde{\omega}_\varepsilon^\delta - f \operatorname{div}_h \tilde{u}_{\varepsilon,h}^\delta = \varepsilon \tilde{r}_\varepsilon^\delta,$$

$$\text{et } \varepsilon \partial_t \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\delta + f \tilde{u}_{\varepsilon,h}^\delta = \varepsilon \tilde{R}_{\varepsilon,h}^\delta$$

où

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon^\delta &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_1 v_{\varepsilon,2}^\delta - \partial_2 v_{\varepsilon,1}^\delta, & \tilde{\omega}_\varepsilon^\delta &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_1 \tilde{u}_{\varepsilon,2}^\delta - \partial_2 \tilde{u}_{\varepsilon,1}^\delta \\ \partial_3 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\delta &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla_h^\perp \tilde{u}_{\varepsilon,3}^\delta - \partial_3 (\tilde{u}_{\varepsilon,h}^\delta)^\perp & \text{avec } &\int_0^1 \tilde{\Omega}_{\varepsilon,h}^\delta(x) dx_3 = 0. \end{aligned}$$

et pour tout  $\delta > 0$ , les fonctions  $\tilde{r}_\varepsilon^\delta$ , ainsi que les champ de vecteurs  $\tilde{R}_{\varepsilon,h}^\delta$  sont uniformément bornés en  $\varepsilon$  dans  $L^2([0,T];L^2)$ .

Cela permet de justifier le calcul formel donné précédemment. En effet, les termes de reste convergent vers 0 dans  $L^1$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, et ce pour tout  $\delta > 0$ . On fait alors tendre le paramètre  $\delta$  vers 0 à la fin de la preuve (quand les termes de reste ont disparu).

### 3.2.3. Convergence vers les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. —

**Théorème 3.1.** — Soit  $u_0 \in \mathcal{H}$  un champ de vecteurs à moyenne nulle. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère une solution faible  $u_\varepsilon$  de (3.2.1) avec condition de glissement.

Alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(u_\varepsilon)$  converge faiblement dans  $L^2([0,T],L^2)$  vers la solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles.

*Démonstration.* — La preuve du théorème 3.1 est une conséquence des différents résultats démontrés précédemment : on a vu qu'à extraction près la suite  $u_\varepsilon$  converge faiblement dans  $L^2([0,T] \times \Omega)$  vers un équilibre géostrophique, i.e. vers un champ de vecteurs solénoïdal  $u$  horizontal et ne dépendant que des variables horizontales.

Ensuite on a montré que la suite  $(v_\varepsilon)$  définie par  $v_\varepsilon = \int_0^1 u_\varepsilon dx_3$  est fortement compacte, et donc converge fortement vers  $u$  dans  $L^2([0,T] \times \omega_h)$  (puisque  $u = \int_0^1 u dx_3$ ).

Pour trouver l'équation satisfaite par  $u$ , on doit donc calculer la limite de l'équation (3.2.3). Les termes linéaires convergent bien sûr au sens des distributions, et pour trouver la limite des termes non linéaires, on utilise le calcul du paragraphe précédent avec la décomposition

$$\nabla \cdot (\tilde{u}_\varepsilon \otimes \tilde{u}_\varepsilon) = \nabla \cdot (\tilde{u}_\varepsilon^\delta \otimes \tilde{u}_\varepsilon^\delta) + \nabla \cdot (\tilde{u}_\varepsilon^\delta \otimes (\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)) + \nabla \cdot ((\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta) \otimes \tilde{u}_\varepsilon)$$

Les deux derniers termes convergent vers 0 quand  $\delta \rightarrow 0$  uniformément en  $\varepsilon$ . Et pour le premier terme, on a

$$P_h \nabla \cdot \int_0^1 (\tilde{u}_\varepsilon^\delta \otimes \tilde{u}_\varepsilon^\delta) \rightarrow 0$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  puis  $\delta \rightarrow 0$ . Finalement on obtient que tout point limite  $u$  satisfait les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

$$\partial_t u - E_h \Delta_h u + \mathbf{P} \nabla_h \cdot (u \otimes u) = 0.$$

Comme ces équations ont une unique solution en dimension 2, toute la suite  $(u_\varepsilon)$  converge.  $\square$

### 3.3. Equations d'enveloppe pour les ondes de Poincaré

Si on veut un résultat de convergence plus précis (qui indique notamment comment l'énergie est répartie dans le système), on doit décrire plus précisément les oscillations de  $u_\varepsilon$ . En d'autres termes, on doit trouver les équations d'enveloppe pour tous les modes oscillants.

**3.3.1. Filtrage.** — On commence par déterminer les équations d'enveloppe. Soit  $\mathcal{L}$  le groupe d'évolution associé à l'opérateur de rotation incompressible  $L$  : le champ de vecteurs  $\mathcal{L}(t)v_0$  est par définition la solution au temps  $t$  de l'équation

$$\partial_t v + Lv = 0, \quad v|_{t=0} = v_0.$$

Comme  $L$  est antisymétrique dans tous les espaces  $H^s$  (il commute avec toutes les dérivées), l'opérateur  $\mathcal{L}(t)$  est unitaire pour tout temps  $t$ . On peut donc définir la solution filtrée

$$w_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon,$$

qui est uniformément bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$ , et qui satisfait le système :

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} \partial_t w_\varepsilon + \mathcal{Q}_\varepsilon(w_\varepsilon, w_\varepsilon) - E_h \Delta_h w_\varepsilon - E_3 \partial_{33} w_h &= 0 \\ w_\varepsilon|_{t=0} &= u_0, \end{aligned}$$

où l'on note

$$\begin{aligned} Q(a, b) &= P\nabla \cdot (a \otimes b), \\ \mathcal{Q}_\varepsilon(a, b) &= \mathcal{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) Q\left(\mathcal{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) a, \mathcal{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) b\right) \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple du premier paragraphe, on voit que le filtrage permet de se ramener à une famille  $(w_\varepsilon)$  dont les dérivées en temps sont uniformément bornées (ici dans un espace de distributions à régularité négative en espace). Les petites échelles ont donc disparu et on peut espérer passer à la limite dans le système.

Pour dériver formellement la limite de  $\mathcal{Q}_\varepsilon$ , on doit calculer de façon plus explicite les opérateurs  $L$  et  $\mathcal{L}$ . On rappelle que si on projette sur le mode de Fourier  $k$ , les valeurs propres de  $L_k$  sont  $ik_3/|k|$ , et  $-ik_3/|k|$ , et on note  $\pi_k^\pm$  les projecteurs spectraux associés (cf Chapitre 2). Avec ces notations, on a

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(a, b) = \sum_{k=l+m} \sum_{\sigma \in \{+, -\}^3} \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon}(\lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3})\right) \pi_k^{\sigma_1} Q(\pi_l^{\sigma_2} a, \pi_m^{\sigma_3} b).$$

On s'attend alors à ce que la limite de  $\mathcal{Q}_\varepsilon$  soit donnée par

$$\mathcal{Q}(a, b) = \sum_{k=l+m} \sum_{\substack{\sigma \in \{+, -\}^3 \\ \lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3} = 0}} \pi_k^{\sigma_1} Q(\pi_l^{\sigma_2} a, \pi_m^{\sigma_3} b).$$

L'ensemble résonnant est ici caractérisé par la relation

$$\sigma_1 \frac{k_3}{|k|} - \sigma_2 \frac{l_3}{|l|} - \sigma_3 \frac{k_3 - l_3}{|k - l|} = 0.$$

Une simple intégration par parties, combinée avec la borne uniforme sur  $(\partial_t w_\varepsilon)$ , montre que les termes non résonnants convergent faiblement vers 0. Le système limite est donc

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} \partial_t w + \mathcal{Q}(w, w) - E_h \Delta w - E_3 \partial_{33} w = 0 \\ w|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

On admettra ici que, pour tout  $k, l_1, l_2$  fixés, il n'y a qu'un nombre fini de  $k_3$  pour lesquels l'ensemble résonnant est non vide. Cela signifie que le système limite a un comportement beaucoup plus proche de celui du système de Navier-Stokes 2D que du système 3D. En particulier, on peut montrer que le système limite a une unique solution faible globale et qu'il propage la régularité.

Par ailleurs, l'argument de compacité par compensation développé au paragraphe précédent montre que, si on note  $\Pi$  la projection sur le noyau de  $L$ , i.e. sur les modes tels que  $k_3 = 0$ , on a

$$\Pi Q(a, b) = \Pi Q(\Pi a, \Pi b)$$

de sorte que l'équation sur  $\Pi w$  se découple du reste du système.

**3.3.2. Construction de solutions approchées.** — La convergence décrite (formellement) au paragraphe précédent est une convergence faible. On s'attend en effet à ce que

$$\partial_t w + \mathcal{Q}_\varepsilon(w, w) - E_h \Delta w - E_3 \partial_{33} w = \mathcal{Q}_\varepsilon(w, w) - \mathcal{Q}(w, w)$$

soit un champ de vecteurs fortement oscillant mais d'amplitude  $O(1)$ . Cette estimation de *consistance* n'est donc pas très bonne. Si on veut montrer de la convergence forte, on doit introduire des correcteurs.

Ici et dans toute la suite, on suppose que la solution  $w$  de l'équation limite a un nombre fini de modes. Si ce n'est pas le cas, on la tronque en fréquences et on utilise la borne  $H^1$  pour mesurer la taille de l'erreur.

On définit alors le correcteur

$$w^{(1)} = \sum_{k=l+m} \sum_{\substack{\sigma \in \{+, -\}^3 \\ \lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3} \neq 0}} \frac{i \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon}(\lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3})\right)}{\lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3}} \pi_k^{\sigma_1} Q(\pi_l^{\sigma_2} w, \pi_m^{\sigma_3} w),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t w^{(1)} &= -(\mathcal{Q}_\varepsilon - \mathcal{Q})(w, w) + \varepsilon \sum_{k=l+m} \sum_{\substack{\sigma \in \{+, -\}^3 \\ \lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3} \neq 0}} \frac{i \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon}(\lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3})\right)}{\lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3}} \pi_k^{\sigma_1} \partial_t Q(\pi_l^{\sigma_2} w, \pi_m^{\sigma_3} w) \\ &= (\mathcal{Q}_\varepsilon - \mathcal{Q})(w, w) + r_{\varepsilon,1}. \end{aligned}$$

On obtient finalement que  $u_{app} = w + \varepsilon w^{(1)}$  vérifie l'équation approchée

$$\begin{aligned} \partial_t(w + \varepsilon w^{(1)}) + \mathcal{Q}_\varepsilon(w + \varepsilon w^{(1)}, w + \varepsilon w^{(1)}) - E_h \Delta_h(w + \varepsilon w^{(1)}) - E_3 \partial_{33}(w + \varepsilon w^{(1)}) &\stackrel{\text{def}}{=} r_{app} \\ &= \left(\partial_t w + \mathcal{Q}(w, w) - E_h \Delta_h w - E_3 \partial_{33} w\right) + \left(\varepsilon \partial_t w^{(1)} + (\mathcal{Q}_\varepsilon - \mathcal{Q})(w, w)\right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\mathcal{Q}_\varepsilon(w + \varepsilon w^{(1)}, w^{(1)}) + \mathcal{Q}_\varepsilon(w^{(1)}, w) - E_h \Delta_h w^{(1)} - E_3 \partial_{33} w^{(1)}\right) \end{aligned}$$

Le reste  $r_{app}$  tend vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mais il dépend fortement de la troncature en fréquences de  $w$  : en effet, la définition de  $w^{(1)}$  fait intervenir une dérivée, un produit, et les petits diviseurs

$$\lambda_k^{\sigma_1} - \lambda_l^{\sigma_2} - \lambda_m^{\sigma_3}.$$

Pour obtenir une dépendance précise par rapport au paramètre de troncature en fréquences, on a alors besoin de résultats fins de théorie des nombres.

**3.3.3. Méthode d'énergie et vitesse de convergence.** — Le résultat de convergence repose alors sur une *inégalité de stabilité fort-faible* pour les solutions des équations de Navier-Stokes.

**Théorème 3.2.** — *Soit  $u_0 \in \mathcal{H}$  un champ à divergence nulle et à moyenne nulle. Pour tout  $\varepsilon$ , on considère une solution de Leray  $u_\varepsilon$  des équations de Navier-Stokes-Coriolis (3.2.1) de donnée initiale  $u_0$ . On note  $w$  la solution du système filtré limite (3.3.2) avec donnée initiale  $u_0$ .*

Alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\left\| u_\varepsilon - \mathcal{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)w \right\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \rightarrow 0.$$

De plus, on a une estimation du taux de convergence en fonction de la régularité de  $u_0$  et d'une estimation de petits diviseurs.

*Démonstration.* — Considérons la différence  $\delta_\varepsilon = u_\varepsilon - u_{app}$ , où  $u_{app}$  est la solution approchée construite au paragraphe précédent. Le champ  $\delta_\varepsilon$  est une solution du système

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} \partial_t \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon \cdot \nabla \delta_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon \cdot \nabla u_{app} + \nabla p^\varepsilon - E_h \Delta_h \delta_\varepsilon - E_3 \partial_{33} \delta_\varepsilon = -r_{app}, & \operatorname{div} \delta_\varepsilon = 0, \\ \delta_{\varepsilon,3}|_{x_3=0} = \delta_{\varepsilon,3}|_{x_3=1} = 0, & \partial_3 \delta_{\varepsilon,h}|_{x_3=0} = \partial_3 \delta_{\varepsilon,h}|_{x_3=1} = 0. \end{cases}$$

Faisons le produit scalaire dans  $L^2$  de  $\delta_\varepsilon$  avec les deux membres de la première équation de (3.3.3). Notons que cette manipulation formelle peut être justifiée rigoureusement, en partant directement de l'inégalité d'énergie sous forme intégrale satisfaite par les solutions de Leray  $u_\varepsilon$ .

Après intégration par parties, on aboutit à l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\delta_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + E_h \int_0^t \|\nabla_h \delta_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + E_3 \int_0^t \|\partial_3 \delta_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\delta_\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int |\delta_\varepsilon(s,x)|^2 |\nabla u_{app}(s,x)| dx ds + \int_0^t \|r_{app}(s)\|_{L^2} \|\delta_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \end{aligned}$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

On conclut par un lemme de Gronwall que

$$\|\delta_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}^2 \leq \|\delta_\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(2 \int_0^t \|\nabla u_{app}(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma\right) + C \int_0^t \|r_{app}(s)\|_{L^2}^2 \exp\left(2 \int_s^t \|\nabla u_{app}(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma\right) ds,$$

ce qui montre la convergence de  $\delta_\varepsilon$  vers 0  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$  avec une vitesse qui dépend uniquement de la solution approchée  $u_{app}$ , donc de  $w$ .  $\square$



## CHAPITRE 4

### EFFETS DE BORD

#### 4.1. Développements multi-échelles

On cherche maintenant à comprendre l'effet des bords sur l'écoulement. Comme aux chapitres précédents, on va isoler le problème, et ici on va simplifier le modèle en se débarrassant des termes non linéaires. On considère donc le système de Stokes-Coriolis avec viscosité verticale évanescence

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} \partial_t u + \frac{1}{\varepsilon} f e_3 \wedge u - \nu_h \Delta_h u - \varepsilon \partial_{zz} u + \nabla p &= 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \end{aligned}$$

sur le domaine  $\omega_h \times [0, 1]$ .

Comme condition de bord à la surface, on impose

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} u_3|_{z=1} &= 0, \\ \varepsilon \partial_z u_h|_{z=1} &= \tau, \end{aligned}$$

où  $\tau$  est une contrainte donnée, décrivant le forçage par le vent.

Au fond, on utilise la condition de Dirichlet

$$(4.1.3) \quad u|_{z=0} = 0,$$

qui est une condition d'arrêt modélisant l'interaction fluide/structure.

Les équations de Stokes 2D que l'on a obtenu à la limite dans le cas sans bord ne sont pas compatibles avec les **conditions de bord horizontales**

$$(4.1.4) \quad u_h|_B = 0 \text{ et } \varepsilon \partial_z u_h|_\Sigma = \tau.$$

On s'attend alors à ce que ces conditions soient relevées par des *couches limites*, dont la taille est déterminée par l'équilibre entre le terme visqueux (qui est compatible avec les conditions de non glissement et les conditions de forçage) et le terme de rotation

$$\frac{1}{\varepsilon} (f e_3 \wedge w_\varepsilon)_h - \varepsilon \partial_{zz} w_{\varepsilon,h} \sim 0.$$

**4.1.1. Variables adimensionnées et équation de profil.** — L'idée est donc d'introduire un développement asymptotique double échelle du champ de vitesses, sous la forme

$$(4.1.5) \quad u_\varepsilon(t, x) \approx \bar{u}(t, x_h) + u_1^B(t, x_h, z/\varepsilon) + u_1^\Sigma(t, x_h, (1-z)/\varepsilon),$$

Selon ce développement, le champ de vitesses se décompose en

- une partie régulière  $\bar{u}$ , solution des équations de Stokes 2D,
- une partie singulière, décrite par  $u_1^B(t, x_h, z/\varepsilon)$  et  $u_1^\Sigma(t, x_h, (1-z)/\varepsilon)$  dont les variations sont localisées respectivement près du fond et de la surface, sur une épaisseur  $\varepsilon$ .

Cette équation se réécrit en variables adimensionnées  $Z = z/\varepsilon$  ou  $Z = (1-z)/\varepsilon$

$$\partial_{ZZ} w_h - f w_h^\perp = 0,$$

avec la contrainte supplémentaire que la correction doit restée localisée au voisinage du bord

$$w_h(Z) \rightarrow 0 \text{ quand } Z \rightarrow \infty.$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} w_1 + iw_2 &= (w_1 + iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{f}Z\right), \\ w_1 - iw_2 &= (w_1 - iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{f}Z\right), \end{aligned}$$

où  $w_1|_{Z=0}$  et  $w_2|_{Z=0}$  sont définis en fonction de  $\tau$  et  $\bar{u}_h$ .

En particulier, on a les estimations suivantes pour le terme de couche limite au fond

$$\begin{cases} \|w_h^B\|_{L^2([0,1], H^s(\omega_h))} \leq C\|\bar{u}_h\|_{H^s(\omega_h)}\varepsilon^{1/2}, \\ \|\partial_z w_h^B\|_{L^2([0,1], H^s(\omega_h))} \leq C\|\bar{u}_h\|_{H^s(\omega_h)}\varepsilon^{-1/2}, \end{cases}$$

et de façon similaire des estimations pour le terme de couche limite de surface

$$\begin{cases} \|w_h^\Sigma\|_{L^2([0,1], H^s(\omega_h))} \leq C\|\tau\|_{H^s(\omega_h)}\varepsilon^{1/2}, \\ \|\partial_z w_h^\Sigma\|_{L^2([0,1], H^s(\omega_h))} \leq C\|\tau\|_{H^s(\omega_h)}\varepsilon^{-1/2}, \end{cases}$$

La formule explicite de  $w_h$  donne aussi des estimations  $L^p$ .

**4.1.2. Construction des correcteurs.** — Par construction, si  $\tau$  et  $\bar{u}$  sont réguliers,  $\bar{u} + w_\varepsilon^\Sigma + w_\varepsilon^B$  satisfait l'équation d'évolution approchée

$$\partial_t u + \nabla p = \nu_h \Delta_h u + \varepsilon \partial_{zz} u - \frac{1}{\varepsilon} f e_3 \wedge u + o(1),$$

ainsi que les conditions de bord

$$u|_B = 0, \quad u_3|_\Sigma = 0 \text{ et } \varepsilon \partial_z u_h|_\Sigma = \tau.$$

Par contre, la **contrainte d'incompressibilité** est en général violée

$$\begin{aligned} \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 &= \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)(w_1 + iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{f}Z\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)(w_1 - iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{f}Z\right) \end{aligned}$$

On introduit alors une correction verticale  $w_3$  telle que  $\partial_Z w_3 = \pm \varepsilon \partial_z w_3 = \mp \varepsilon (\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2)$

$$\begin{aligned} w_3 &= \mp \frac{\varepsilon}{(1-i)\sqrt{2f}} (\nabla_h \cdot w_h|_{Z=0} - i \nabla_h^\perp \cdot w_h|_{Z=0}) \exp\left(\sqrt{\frac{f}{2}}(i-1)Z\right) \\ &\quad \mp \frac{\varepsilon}{(1+i)\sqrt{2f}} (\nabla_h \cdot w_h|_{Z=0} + i \nabla_h^\perp \cdot w_h|_{Z=0}) \exp\left(-\sqrt{\frac{f}{2}}(i+1)Z\right). \end{aligned}$$

Le champ de vecteurs  $w$  ainsi construit est à divergence nulle, mais il ne satisfait plus la **condition de non pénétration**.

$$\begin{aligned} w_{3|Z=0}^B &\sim -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2f}} \left( \frac{(\partial_1 - i\partial_2)(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2)}{1+i} + \frac{(\partial_1 + i\partial_2)(\bar{u}_1 - i\bar{u}_2)}{1-i} \right) \\ w_{3|Z=0}^\Sigma &\sim \frac{\varepsilon}{2f} (i(\partial_1 - i\partial_2)(\tau_1 + i\tau_2) - i(\partial_1 + i\partial_2)(\tau_1 - i\tau_2)) \end{aligned}$$

modulo des termes exponentiellement petits dûs aux traces  $w_{3|Z=1/\varepsilon}^B$  et  $w_{3|Z=1/\varepsilon}^\Sigma$ .

**4.1.3. Pompage d'Ekman.** — Pour relever la condition de non pénétration, on doit alors ajouter un correcteur supplémentaire  $\delta w$  défini par

$$\begin{aligned} \delta w_3 &= -w_{3|z=0}P(1-z) - w_{3|z=1}P(z), \\ \delta w_h &= \nabla_h \Delta_h^{-1} \nabla_h \cdot (-w_{3|z=0}P'(1-z) + w_{3|z=1}P'(z)) \end{aligned}$$

où  $P$  est une fonction régulière quelconque telle que  $P(0) = 0$  et  $P(1) = 1$ .

Le flux vertical  $\delta w_3$  est responsable d'une circulation sur le domaine entier, il est de taille petite mais non localisé près des bords. Ce mécanisme, appelé pompage ou succion d'Ekman, a un rôle déterminant dans les échanges d'énergie.

**Remarque 4.1.1.** — *En général, la solution approchée  $\bar{u} + w_\varepsilon^\Sigma + w_\varepsilon^B + \delta w_\varepsilon$  ne satisfait pas exactement les conditions de bord horizontales (4.1.4), mais l'erreur est beaucoup plus petite que pour  $\bar{u}$ . Un relèvement ne prenant pas en compte la structure de l'équation (mais préservant les contraintes de divergence nulle et de flux nul) permet de conclure sans itérer la construction.*

## 4.2. Convergence faible

Dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'au mouvement moyen, il n'est pas nécessaire de décrire les oscillations dues au terme de rotation, et on peut donc utiliser des méthodes de compacité faible pour étudier l'asymptotique.

**Théorème 4.1.** — *Soient  $u_0 \in \mathcal{H}$  un champ de vecteurs solénoïdal, et  $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\omega_h))$  un forçage de surface. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère une solution faible  $u_\varepsilon$  du système (4.1.1)(4.1.2)(4.1.3).*

*Alors  $(u_\varepsilon)$  converge faiblement dans  $L^2_{loc}$  vers la solution du système de Stokes bidimensionnel avec pompage d'Ekman*

$$\begin{cases} \partial_t u_h - \nu_h \Delta_h u_h + \sqrt{\frac{f}{2}} u_h + \nabla_h p = \tau, & \nabla_h \cdot u_h = 0, \\ u_h|_{t=0} = \int_0^1 u_{0,h} dz. \end{cases}$$

### 4.2.1. Estimations a priori. —

A cause du terme de forçage en surface, l'inégalité d'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2} \int |u_\varepsilon|^2 dx + \int_0^t \int (|\nabla_h u_\varepsilon|^2 + \varepsilon |\partial_z u_\varepsilon|^2) dx ds \leq \frac{1}{2} \int |u_0|^2 dx + \int_0^t \int u_{\varepsilon,h}|_{z=1} \tau dx_h ds.$$

L'estimation de trace

$$\varepsilon^{1/2} \|u_{\varepsilon,h}|_{z=1}\|_{L^2(\omega_h)}^2 \leq C \varepsilon^{1/2} \|u_{\varepsilon,h}\|_{L^2([0,1] \times \omega_h)} \|\partial_z u_{\varepsilon,h}\|_{L^2([0,1] \times \omega_h)},$$

conduit alors à l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int |u_\varepsilon|^2 dx + \int_0^t \int (|\nabla_h u_\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\partial_z u_\varepsilon|^2) dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int |u_0|^2 dx \exp(Ct) + \varepsilon^{-1/4} \int_0^t \|\tau\|_{L^2(\omega_h)} \exp(C(t-s)) ds. \end{aligned}$$

En particulier, si  $\|\tau\|_{L^2(\omega_h)}$  est d'ordre 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0, cette inégalité ne permet pas d'obtenir un contrôle uniforme sur  $(u_\varepsilon)$ . On doit alors considérer une inégalité d'énergie modulée pour  $u_\varepsilon - \tilde{w}_\varepsilon$ , où  $\tilde{w}_\varepsilon = w_\varepsilon^\Sigma + \delta w_\varepsilon^\Sigma$  est le terme de couche limite associé au forçage  $\tau$  (défini dans la section précédente).

Par définition de  $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \tilde{w}_\varepsilon$ , on a la contrainte d'incompressibilité

$$\nabla \cdot v_\varepsilon = \nabla \cdot u_\varepsilon - \nabla \cdot (w_\varepsilon^\Sigma + \delta w_\varepsilon^\Sigma) = 0,$$

l'équation du mouvement

$$\partial_t v_\varepsilon + \frac{f}{\varepsilon} v_\varepsilon^\perp + \nabla p_\varepsilon - \nu_h \Delta_h v_\varepsilon - \varepsilon \partial_{zz} v_\varepsilon = -\partial_t \tilde{w}_\varepsilon + \Delta_h \tilde{w}_\varepsilon + \varepsilon \partial_{zz} \delta w_\varepsilon^\Sigma - \frac{f}{\varepsilon} \delta w_\varepsilon^{\Sigma, \perp}$$

où le dernier terme correspond à la succion d'Ekman. Par ailleurs, on a les conditions de bord

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon, 3|\Sigma} &= v_{\varepsilon, 3|B} = 0, \\ v_{\varepsilon, h|B} &= 0 \text{ pourvu que } P'(0) = P'(1) = 0, \\ \varepsilon \partial_z v_{\varepsilon, h|\Sigma} &= \tau \text{ en choisissant } P \text{ tel que } P''(0) = P''(1) = 0. \end{aligned}$$

L'inégalité d'énergie pour  $v_\varepsilon$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\nabla_h v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\partial_z v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\frac{f}{\varepsilon} \delta w_\varepsilon^\perp(s)\|_{L^2} ds + o(1). \end{aligned}$$

Si  $\tau$  est régulier en  $t$  et  $x_h$ , on en déduit des bornes uniformes sur  $v_\varepsilon$  par le lemme de Gronwall :

$$(4.2.1) \quad \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\nabla_h v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\partial_z v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2) ds \leq C(t).$$

#### 4.2.2. Formulation faible des équations de Stokes avec conditions de bord. —

A extraction près d'une sous-suite, on a alors

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u} \text{ faiblement dans } L^2([0, T] \times \omega_h), \\ (ii) \quad & \bar{u} \in \text{Ker } L \Leftrightarrow \bar{u} = (\bar{u}_h(x_h), 0) \text{ avec } \nabla_h \cdot \bar{u}_h = 0. \end{aligned}$$

Le point de départ pour étudier la limite de rotation rapide est alors la forme faible des équations de Stokes-Coriolis, et plus précisément leur projection sur le noyau de l'opérateur de perturbation singulière :  $\forall \varphi_h \in C_c^\infty$  telle que  $\nabla_h \cdot \varphi_h = 0$ ,

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} & \int u_0 \varphi_h dx + \int_0^t \int (u_{\varepsilon, h} \partial_t \varphi_h - \nabla_h u_{\varepsilon, h} \cdot \nabla_h \varphi_h) dx ds \\ & = \varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon, h})|_{z=0} \varphi_h dx_h ds - \int_0^t \int \tau \varphi_h dx_h ds \end{aligned}$$

Remarquons que la trace  $(\partial_z u_{\varepsilon, h})|_{z=0}$  n'a pas de sens pour un champ de vecteurs quelconque  $u_\varepsilon \in L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(\dot{H}_x^1)$ . Elle est en fait définie (dans un sens très faible) par l'équation.

Pour relier la trace  $(\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0}$  au champ  $u_\varepsilon$  et à sa trace  $u_{\varepsilon,h}|_{z=0}$ , l'idée est d'utiliser la forme faible des équations de Stokes-Coriolis avec des fonctions régulières  $\psi$  telles que  $\nabla \cdot \psi = 0$  et  $\psi|_B = \psi|_\Sigma = 0$  bien choisies :

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} & \int u_0 \psi dx + \int_0^t \int (u_\varepsilon \cdot \partial_t \psi - \nabla_h u_\varepsilon \cdot \nabla_h \psi) dx ds + \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} f \wedge \psi + \varepsilon \partial_{zz} \psi \right) dx ds \\ &= \varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} \psi|_{z=0} dx_h ds - \int_0^t \int \tau \psi|_{z=1} dx_h ds + \varepsilon \int_0^t \int u_{\varepsilon,h}|_{z=1} \partial_z \psi|_{z=1} dx_h ds \end{aligned}$$

#### 4.2.3. L'équation de trace en $z = 0$ . —

Pour capturer les effets - quand  $\varepsilon$  tend vers 0 - de la condition de Dirichlet imposée au fond, on utilise dans l'identité précédente une famille de solutions du problème de couche limite, et plus précisément du problème adjoint (obtenu en changeant  $f$  en  $-f$ , ou de façon équivalente  $i$  en  $-i$ ), avec  $\varphi_h$  comme donnée au bord. Ce procédé est très similaire aux outils d'analyse double-échelle introduits par N'Guetseng et Allaire.

Par construction de  $w_\varepsilon^B$  et  $\delta w_\varepsilon^B$  (le correcteur obtenu en l'absence de couche limite à la surface, cf paragraphe 4.1), on s'attend à ce que tous les termes dans la formulation faible des équations de Stokes-Coriolis (4.2.2) soient petits à l'exception de

$$\varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} w_{\varepsilon,h}|_{z=0} dx_h ds \quad \text{et} \quad \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} f \wedge \delta w_{\varepsilon,h} \right) dx ds.$$

En effet, comme la norme  $L^2([0,1], H^s(\omega_h))$  de  $\tilde{w}_\varepsilon$  et la norme  $H^s([0,1] \times \omega_h)$  de  $\delta w_\varepsilon$  convergent vers 0 dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (pour tout  $s \geq 0$  fixé), on a

$$\begin{aligned} & \int u_0 \tilde{w}_\varepsilon dx + \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \left( \partial_t \tilde{w}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f \delta w_\varepsilon^\perp + \varepsilon \partial_{zz} \delta w_\varepsilon + \Delta_h \tilde{w}_\varepsilon \right) dx ds \\ & \sim \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} (f \delta w_\varepsilon^\perp) dx ds \sim - \int_0^t \int f \bar{u}_h \cdot \nabla_h^\perp \Delta_h^{-1} w_{3|B} dx ds \\ & \sim \int_0^t \int \sqrt{2} f u_h \cdot \varphi_h dx ds \end{aligned}$$

On peut alors identifier les deux limites. Comme  $w_h|_{z=0}$  peut être une fonction quelconque de  $x_h$  et  $t$ , on peut ainsi caractériser le terme de bord qui apparaît dans l'équation du mouvement moyen.

$$(4.2.4) \quad \varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} w_{\varepsilon,h}|_{z=0} dx_h ds \rightarrow -\sqrt{\frac{f}{2}} \int_0^t \int \bar{u}_h \varphi_h dx ds.$$

En insérant cette identité dans la formulation faible obtenue au paragraphe précédent, on caractérise complètement la limite faible, ce qui achève la preuve du Théorème 4.1.

### 4.3. Analyse des couches limites oscillantes - EXERCICE

Si on veut obtenir un résultat de convergence forte, il faut décrire toutes les oscillations, i.e. écrire une équation d'enveloppe pour chacun des modes propres de l'opérateur  $L$ . A chacun de ces modes sont associés des correcteurs de couches limites et un processus de pompage.

**4.3.1. Equations de couche limite.** — On suppose que le forçage est lui-même oscillant (de fréquence  $\mu$ ).

- Montrer que l'équation de couche limite en surface s'écrit

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} i\mu\varphi_1 + \lambda^2\varphi_1 - \varepsilon k_h^2\varphi_1 - f\varphi_2 + \varepsilon^2 \frac{k_1 k_2 \varphi_1 - k_1^2 \varphi_2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} &= 0, \\ i\mu\varphi_2 + \lambda^2\varphi_2 - \varepsilon k_h^2\varphi_2 + f\varphi_1 + \varepsilon^2 \frac{-k_1 k_2 \varphi_2 + k_2^2 \varphi_1}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} &= 0, \\ \varepsilon(i k_1 \varphi_1 + i k_2 \varphi_2) - \lambda \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

- En déduire que les profils de couche limite sont donnés par les complexes  $\lambda$  tels que la matrice

$$A_\lambda(\mu, k_h) = \begin{pmatrix} i\mu + \lambda^2 - \varepsilon k_h^2 + \frac{\varepsilon^2 k_1 k_2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} & -f - \frac{\varepsilon^2 k_1^2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} \\ f + \frac{\varepsilon^2 k_2^2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} & i\mu + \lambda^2 - \varepsilon k_h^2 - \frac{\varepsilon^2 k_1 k_2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} \end{pmatrix}.$$

admet 0 comme valeur propre.

**4.3.2. Couches limites dégénérées.** — On cherche maintenant à obtenir de bonnes approximations explicites des profils de couche limite.

- Si  $|\mu| \neq f$ , montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu & if \\ -if & \mu \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres de parties réelles non nulles, et que cette propriété est stable par petite perturbation. En déduire qu'on peut négliger la pression et la viscosité horizontale pour le calcul des correcteurs de couche limite.

- Si  $|\mu| = f$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu & if \\ -if & \mu \end{pmatrix}$$

admet 0 comme valeur propre, et son comportement est beaucoup plus sensible aux perturbations. Montrer que si  $k_h \neq (0, 0)$ , on peut quand même relever les conditions de bord par des termes de couches limites, mais que ces couches sont beaucoup plus grandes, de taille  $O(\varepsilon^{1/2})$ .

## APPENDICE A

### QUELQUES RÉSULTATS IMPORTANTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

#### A.1. Topologie et calcul différentiel

**Théorème A.1 (Théorème d'Ascoli).** — Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , et  $S$  une partie de  $C_b(\Omega)$ . Si

–  $S$  est bornée

$$M = \sup_{u \in S} \|u\|_\infty < +\infty$$

–  $S$  est uniformément équicontinue, i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall u \in S, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon,$$

alors  $S$  est précompacte.

**Théorème A.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).** — Soient  $\omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On considère une fonction  $F$  mesurable de  $I \times \omega$  dans  $E$  telle que

$$\forall x \in \omega, \quad \|F(t, x)\| \in L^1_{loc}(I)$$

et telle que

$$\forall (x, y) \in \omega^2, \quad \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\| \quad \text{avec} \quad L \in L^1_{loc}(I).$$

Alors, pour tout point  $(t_0, x_0)$  de  $I \times \omega$ , il existe un intervalle ouvert maximal  $J$  contenant  $t_0$  et une unique fonction  $x \in C_b(J; \omega)$  telle que

$$(EDO) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x(t')) dt'.$$

De plus, s'il existe une fonction localement bornée  $M$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  et une fonction localement intégrable  $\beta$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telles que

$$\|F(t, u)\| \leq \beta(t)M(\|u\|).$$

on a :

$$\inf J > -\infty \implies \limsup_{t \nearrow \inf J} \|x(t)\| = \infty \quad \text{et} \quad \sup J < +\infty \implies \limsup_{t \nearrow \sup J} \|x(t)\| = \infty.$$

## A.2. Espaces hilbertiens

**Théorème A.3 (Théorème de Lax-Milgram).** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue coercive.

Pour tout  $\varphi \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  tel que

$$(A.2.1) \quad \forall v \in H, \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle.$$

De plus, si  $a$  est symétrique,  $u$  est caractérisé par la propriété

$$(A.2.2) \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left( \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right)$$

**Théorème A.4 (Théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts)**

Soient  $H$  un espace de Hilbert séparable, et  $T \in \mathcal{K}(H)$  un opérateur autoadjoint compact.

Alors il existe une suite  $(\lambda_n)$  tendant vers 0, et une base hilbertienne  $(e_n)$  de  $H$  telles que

$$Te_n = \lambda_n e_n.$$

## A.3. Espaces de Sobolev

**Théorème A.5 (Inégalité de Poincaré).** — Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $\Omega$  et  $p \in [1, +\infty[$ ) telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

**Théorème A.6 (Théorème d'injection de Sobolev).** — Si  $s > d/2$ , l'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)$  s'injecte continûment dans  $C(\mathbb{R}^d)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\psi\|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Si  $s < d/2$ , l'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)$  s'injecte continûment dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  avec  $p = 2d/(d - 2s)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

**Théorème A.7 (Théorème de Rellich-Kondrakov).** — Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  (ou le produit de  $N$  intervalles ouverts bornés).

- si  $d \geq 2$  et  $1 \leq q < 2d/(d - 2)$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$  est compacte.

- si  $d = 1$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$  est compacte.

## INDEX

- équation hyperbolique, 6
- équation parabolique, 6
- équations aux dérivées partielles, 2
- équations d'Euler incompressibles, 5
- équations d'enveloppe, 25
- équations de Navier-Stokes incompressibles, 5
- approximation de Galerkin, 9
- approximation de toit rigide, 5
- bornes a priori, 12
- colonnes de Taylor-Proudman, 20
- compacité par compensation, 27
- condition de Dirichlet, 6
- condition de Neumann ou de Navier, 6
- couches limites, 33
- décomposition de Helmholtz, 12
- description eulérienne, 1
- description lagrangienne, 1
- divergence, 2
- espaces de Sobolev, 8
- guide d'ondes, 22
- inégalité de stabilité fort-faible, 32
- injections de Sobolev, 8
- multiplicateur de Lagrange, 5
- nombre d'Ekman, 16
- nombre de Rossby, 15
- ondes de gravité, 23
- ondes de Poincaré, 20
- ondes de Rossby, 23
- problème de Cauchy, 7
- projecteurs spectraux, 9
- résonance, 26
- relation de dispersion, 20
- surface libre, 5
- théorème de Rellich-Kondrachov, 9
- tourbillon, 12
- transparence, 26
- viscosité turbulente, 16
- vorticité, 12