

---

# Absence de percolation au point critique dans une tranche

---

par

Martin PÉPIN  
& Erkan NARMANLI

**Introduction :** Le but de cet exposé est de présenter la démonstration de l'absence de percolation au point critique dans une tranche du réseau cubique, de la forme  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$ . On présente la preuve de Duminil-Copin, Sidoravicius et Tassion parue dans leur article *Absence of infinite cluster for critical Bernoulli percolation on slabs* [DCST14].

Le modèle de percolation a été introduit par le mathématicien anglais John Hammersley en 1957 dans son article *Percolation Processes : Lower Bounds for the Critical Probability* [Ham57]. En 1960, T.E. Harris démontre dans [Har60] qu'il n'y a pas percolation dans le réseau  $\mathbb{Z}^2$  avec le paramètre  $1/2$ . Plus tard en 1980, Harry Kesten démontre dans [Kes80] que le point critique de ce même réseau est plus petit que  $1/2$  ce qui démontre alors  $p_c = 1/2$  et l'absence de percolation au point critique.

En 1994 les mathématiciens Takashi Hara et Gordon Slade démontrent dans [HS94] qu'il n'y a pas percolation au point critique dans  $\mathbb{Z}^n$  pour  $n \geq 19$ . Bien que l'on suspecte que le résultat soit vrai pour tout entier  $n$  plus grand que 2, le problème s'avère difficile, et montrer l'absence de percolation au point critique dans le réseau cubique  $\mathbb{Z}^3$  reste un enjeu majeur de la recherche actuelle.

Dans cet exposé, on s'intéresse aux *tranches* du réseau cubique, à savoir les réseaux de la forme  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$ . Par la suite, un tel réseau sera noté  $\mathbb{S}_k$ . Dans la suite, si  $p$  est un réel compris entre 0 et 1 on notera  $\mathbf{P}_p$  la probabilité associée au modèle de percolation sur  $\mathbb{S}_k$  obtenu à partir de la loi Bernoulli de paramètre  $p$  sur les arrêtes. Si  $B$  est une partie de  $\mathbb{Z}^2$ , on notera  $\bar{B}$  le cylindre de base  $B$  donné par  $\bar{B} = B \times \{0, \dots, k\}$ . Enfin, si  $B, X$  et  $Y$  sont trois sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^2$  tels que  $X, Y \subset B$ , alors on définit les deux événements suivants :

$X \xleftrightarrow{B} Y$  : « il existe un cluster ouvert dans  $\bar{B}$  reliant  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  »

$X \xleftrightarrow{!B!} Y$  : « il existe un *unique* cluster ouvert dans  $\bar{B}$  reliant  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  »

$\mathbb{S}_k$

$\mathbf{P}_p$

$\bar{B}$

$X \xleftrightarrow{B} Y$

$X \xleftrightarrow{!B!} Y$

## A Critère local de collage

Dans cette partie on montre l'existence de certains clusters avec une bonne probabilité pour relier des parties de  $\mathbb{S}_k$  en vue d'une renormalisation (partie B). Pour cela, on introduit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_n \leq n/3$  et

$$\mathbf{P}_p \left[ B_{u_n} \xleftrightarrow{!B_n!} \partial B_n \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (1)$$

$S_n$  Pour s'épargner une écriture trop lourde, on note  $S_n = B_{u_n}$  et on définit, pour  $\alpha, \beta$  des réels de  $[0, n]$ , l'événement  $\mathcal{E}_n(\alpha, \beta)$  par

$$\mathcal{E}_n = \{S_n \xleftrightarrow{B_n} \{n\} \times \llbracket \alpha; \beta \rrbracket\}.$$

$\alpha_n, y_n$

**Lemme A.1.** *Il existe deux suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $[0; n]$  telles que*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_p [\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \mathbf{P}_p \left[ \mathcal{E}_n \left( y_n - \frac{\alpha_n}{4}, y_n + \frac{\alpha_n}{4} \right) \right] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Ces deux événements sont illustrés dans la figure 1

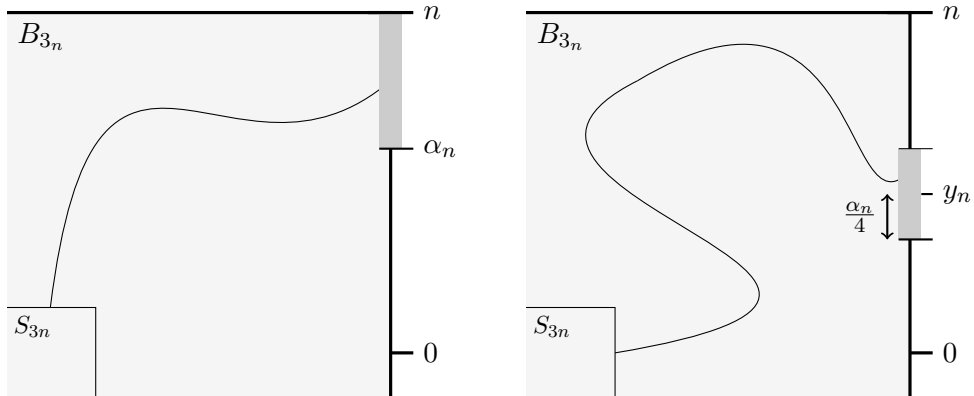


FIGURE 1 – Les événements  $\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)$  et  $\mathcal{E}_n(y_n - \frac{\alpha_n}{4}, y_n + \frac{\alpha_n}{4})$

Dans la preuve de ce lemme ainsi que dans la suite de l'article, on utilisera librement l'inégalité de Harris-FKG aussi bien sous sa forme classique que sous la forme suivante qui en est une conséquence immédiate. On en trouvera une preuve dans [Gri99].

**Lemme A.2** (square root trick). *Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements croissants; alors*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbf{P}_p [A_i] \geq 1 - (1 - \mathbf{P}_p [A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n])^{1/n}.$$

*Démonstration* (du lemme A.1). En découpant le carré  $\partial B_n$  en ses 8 demi-côtés, on peut décomposer l'événement  $S_n \xleftrightarrow{B_n} \partial B_n$  en la réunion de 8 événements obtenus à partir de  $\mathcal{E}_n(0, n)$  en effectuant des rotations et des réflexions. L'invariance du modèle par lesdites réflexions et rotations permet d'affirmer que ces événements sont tous de même probabilité. On peut donc appliquer l'inégalité de Harris-FKG de la manière suivante

$$\mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(0, n)] \geq 1 - \left(1 - \mathbf{P}_p[S_n \xleftrightarrow{B_n} \partial B_n]\right)^{1/8}.$$

Ce qui donne,  $\mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(0, n)]$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Sachant cela, on peut décomposer  $\mathcal{E}_n(0, n)$  en  $\mathcal{E}_n(0, \alpha) \cup \mathcal{E}_n(\alpha + 1, n)$ . Il faut ensuite choisir pour chaque  $n$  un  $\alpha$  assez grand pour que la deuxième condition du lemme soit vérifiée mais suffisamment éloigné de  $n$  pour que la première condition reste vraie. En appliquant à nouveau Harris-FKG aux événements  $\mathcal{E}_n(0, 0)$  et  $\mathcal{E}_n(1, n)$ , on obtient

$$\max(\mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(0, 0)], \mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(1, n)]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Or la probabilité de l'événement  $\mathcal{E}_n(0, 0)$  est bornée uniformément par rapport à  $n$  par la constante  $1 - (1 - p)^{3(k+1)}$  donc à partir d'un certain rang, la probabilité de  $\mathcal{E}_n(0, 0)$  est inférieure à la probabilité de  $\mathcal{E}_n(1, n)$ . On obtient de la même manière que la probabilité de  $\mathcal{E}_n(0, n - 1)$  est inférieure à celle de  $\mathcal{E}_n(n, n)$  à partir d'un certain rang. Cela permet de poser

$$\alpha_n = \max\{\alpha \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket, \mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(0, \alpha - 1)] < \mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(\alpha, n)]\}.$$

Avec ce choix de  $\alpha_n$ , et en appliquant l'inégalité de Harris-FKG aux événements  $\mathcal{E}_n(0, \alpha_n)$  et  $\mathcal{E}_n(\alpha_n + 1, n)$  puis aux événements  $\mathcal{E}_n(0, \alpha_n - 1)$  et  $\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)$ , on peut minorer les probabilités des événements  $\mathcal{E}_n(0, \alpha_n)$  et  $\mathcal{E}_n(\alpha_n, n)$  par  $1 - \sqrt{1 - \mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(0, n)]}$ ; ce qui donne leur convergence vers 1.

On cherche maintenant à trouver  $y_n$ , pour cela on effectue d'abord la décomposition  $\mathcal{E}_n(0, \alpha_n) = \mathcal{E}_n(0, \alpha_n/2) \cup \mathcal{E}_n(\alpha_n/2, \alpha_n)$ . Et il suffit alors de choisir  $y_n$  égal à  $\alpha_n/4$  ou  $3\alpha_n/4$  de sorte à maximiser la probabilité de  $\mathcal{E}_n(y_n - \alpha_n/4, y_n + \alpha_n/4)$ . Par une dernière application de l'inégalité de Harris-FKG, on obtient enfin à partir d'un certain rang que

$$\mathbf{P}_p\left[\mathcal{E}_n\left(y_n - \frac{\alpha_n}{4}, y_n + \frac{\alpha_n}{4}\right)\right] \geq 1 - \sqrt{1 - \mathbf{P}_p[\mathcal{E}_n(0, \alpha_n)]}.$$

Ce qui permet de conclure que ces choix de  $y_n$  et  $\alpha_n$  conviennent.  $\blacklozenge$

Pour la suite, on pose  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites vérifiant les hypothèses du lemme A.1. On définit maintenant quelques ensembles utiles, qui seront illustrés dans la figure 2.

$$\begin{array}{ll} B'_n = (2n, y_{3n}) + B_n & B'_n \\ S'_n = (2n, y_{3n}) + S_n & S'_n \\ Y_n^+ = 3n \times [y_{3n} + \alpha_n; y_{3n} + n] & Y_n^+ \\ Y_n^- = 3n \times [y_{3n} - n; y_{3n} - \alpha_n] & Y_n^- \\ Z_n = 3n \times [y_{3n} - \alpha_n; y_{3n} + \alpha_n] & Z_n \end{array}$$

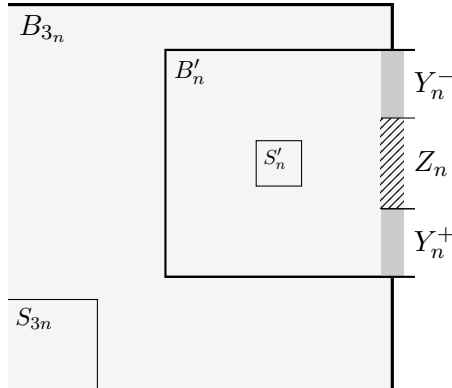


FIGURE 2 – Illustration des ensembles  $B'_n, S'_{3n}, Y_n^+, Y_n^-$  et  $Z_n$ .

On souhaite d'abord relier  $S_{3n}$  à  $Z_n$  ainsi que  $S'_{3n}$  à  $Y_n^+$  et  $Y_n^-$ . Le lemme gluant (lemme C.1) permettra ensuite de lier  $S_{3n}$  à  $S'_{3n}$ . On a pour tout  $n, \alpha_n \leq n$  donc il existe une infinité de  $n$  tels que  $\alpha_{3n} \leq 4\alpha_n$  car sinon, à partir d'un certain rang, la suite aurait une croissance sur-linéaire, ce qui est impossible. Quand  $\alpha_{3n} \leq 4\alpha_n$ , on a

$$\mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n \right] \geq \mathbf{P}_p \left[ \mathcal{E}_{3n} \left( y_{3n} - \frac{\alpha_{3n}}{4}, y_{3n} + \frac{\alpha_{3n}}{4} \right) \right].$$

Ainsi par la remarque précédente et le lemme A.1, la limite supérieure de la suite de probabilités  $\mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n \right]$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. Maintenant que nous avons relié  $S_{3n}$  à  $Z_n$ , ajoutons y  $Y_n^+$  et  $Y_n^-$ . On obtient à l'aide de Harris-FKG

$$\mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_{3n} \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+, S'_{3n} \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^- \right] \geq \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n \right] \mathbf{P}_p \left[ \mathcal{E}_n(0, \alpha_n) \right]^2.$$

On a donc enfin

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_{3n} \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+, S'_{3n} \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^- \right] = 1.$$

## B Renormalisation

Tout le travail effectué jusque là va trouver son intérêt en changeant d'échelle pour travailler dans le nouveau modèle de percolation suivant : on dit qu'une arête  $(z_1, z_2)$  de  $4n\mathbb{Z}^2$  est ouverte si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $z_1 + S_{3n} \xleftrightarrow{R_n} z_2 + S_{3n}$
  - (ii)  $z_1 + S_{3n} \xleftrightarrow{!z_1+B_{3n}!} z_1 + \partial B_{3n}$
  - (iii)  $z_2 + S_{3n} \xleftrightarrow{!z_2+B_{3n}!} z_2 + \partial B_{3n}$
- où  $R_n = \frac{z_1+z_2}{2} + B_{6n}$

Commençons par montrer qu'on peut rendre la probabilité qu'une arrête soit ouverte arbitrairement grande. Pour cela, on constate d'abord que si on peut relier  $S_{3n}$  à  $S'_n$  et  $S'_n$  à  $(4n, 0) + S_{3n}$  et supposant que  $S'_n$  soit connecté de manière unique à la frontière de  $B_n$ , alors on a un chemin qui va de  $S_{3n}$  à  $(4n, 0) + S_{3n}$ . Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{(2n,0)+B_{6n}} (4n, 0) + S_{3n} \right] \\
& \geq \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \cap S'_n \xleftrightarrow{(4n,0)+B_{4n}} (4n, 0) + S_{3n} \cap S'_n \xleftrightarrow{!B'_n!} \partial B'_n \right] \\
& \geq \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \cap S'_n \xleftrightarrow{(4n,0)+B_{4n}} (4n, 0) + S_{3n} \right] + \mathbf{P}_p \left[ S'_n \xleftrightarrow{!B'_n!} \partial B'_n \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

On applique ensuite une dernière fois l'inégalité de Harris-FKG dans le premier terme de l'équation 2 pour obtenir :

$$\mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{(2n,0)+B_{6n}} (4n, 0) + S_{3n} \right] \geq \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n \right]^2 + \mathbf{P}_p \left[ S'_n \xleftrightarrow{!B'_n!} \partial B'_n \right] - 1$$

On conclut enfin à l'aide du lemme gluant (lemme C.1) par le fait que la probabilité de  $S_{3n} \xleftrightarrow{B_{4n}} S'_n$  prend des valeurs arbitrairement proches de 1 et à l'aide de l'équation (1), qui donne la convergence vers 1 du second terme. On a ainsi :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{(2n,0)+B_{6n}} (4n, 0) + S_{3n} \right] = 1$$

Il est facile de vérifier que ce modèle de percolation est 4-dépendant. Ainsi, si la probabilité qu'une arrête soit ouverte est assez proche de 1 alors la percolation a lieu. Or d'après le résultat précédent, on peut rendre cette probabilité arbitrairement proche de 1. Fixons un  $n$  permettant la percolation, la probabilité de percolation ne dépendant que d'un nombre fini d'arrêtes, elle est polynomiale en  $p$  et donc, par continuité, on a encore percolation sur un voisinage de  $p$ .

Ainsi,  $p$  est différente de  $p_c$  et il n'y a pas percolation au point critique, ce qui était le résultat attendu.

## C Le lemme gluant

### C.1 Énoncé

On démontre à présent le *lemme gluant*, dont le nom est une traduction très approximative du *gluing lemma*, le lemme de collage. C'est ce lemme qui permet de faire le passage de  $\mathbb{Z}^2$  à  $\mathbb{S}_k$ . Il permet de recoller des chemins qui se croisaient dans le plan mais qui peuvent s'éviter dans une tranche d'épaisseur au moins 1. Ce recollement nécessite que les chemins concernés aient une bonne probabilité d'existence. La figure 3 fournit une illustration dudit lemme.

**Lemme C.1** (dit gluant). Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif; alors il existe un réel  $\delta$  strictement positif tel que pour tout entier naturel  $n$  on ait :

$$\mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right] \geq 1 - \delta$$

implique

$$\mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right] \geq 1 - \varepsilon.$$

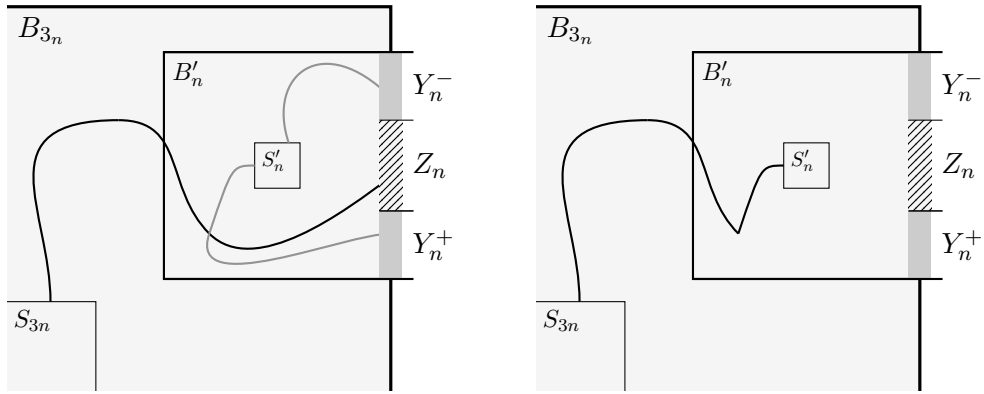


FIGURE 3 – Le lemme gluant affirme que si l'événement représenté à gauche a une probabilité supérieure à  $1 - \delta$  alors on peut avoir événement de droite avec une probabilité  $1 - \varepsilon$ .

Le résultat est trivial pour  $k = 0$ , on peut dès lors supposer que  $k$  est un entier strictement positif. Pour démontrer le lemme gluant on a d'abord besoin démontrer le lemme C.2.

## C.2 Lemme intermédiaire

Le résultat intermédiaire suivant nous permet d'obtenir une estimation sur les probabilités de deux événements  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sous réserve que l'on dispose d'une application entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$  qui vérifie de bonnes propriétés.

**Lemme C.2.** Soient  $s, t$  deux entiers naturels strictement positifs, soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux événements dans la tribu  $\mathcal{P}(B_n)$  pour un certain cylindre  $B_n$ , et  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$  une application telle que :

- pour tout  $\omega$  dans  $\mathcal{A}$ , on ait  $\#\Phi(\omega) \geq t$ ;
- pour tout  $\omega'$  dans  $\mathcal{B}$ , il existe un sous-ensemble fini  $S$  de  $\mathbb{S}_k$  qui soit de cardinal au plus  $s$  et tel que l'on ait l'inclusion  $\{\omega \in \mathcal{A}, \omega' \in \Phi(\omega)\} \subset \{\omega \in \mathcal{A}, \omega|_S = \omega'|_S\}$ .

Alors ; on a la majoration :

$$\mathbf{P}_p[\mathcal{A}] \leq \frac{1}{t} \left( \frac{2}{\min(p, 1-p)} \right)^s \mathbf{P}_p[\mathcal{B}].$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, et comme on est dans la tribu discrète, on peut écrire la décomposition suivante :

$$\sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbf{P}_p[\Phi(\omega)] = \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \sum_{\omega' \in \Phi(\omega)} \mathbf{P}_p[\omega']. \quad (3)$$

Dans la seconde somme du terme de droite, on a  $\omega'$  dans  $\Phi(\omega)$ , donc par la condition (a) du lemme on a  $\omega|_{S^c} = \omega'|_{S^c}$ , où  $S$  est un sous ensemble fini de  $\mathbb{S}_k$ , de cardinal au plus  $s$ . Dès lors, on peut écrire  $\mathbf{P}_p[\omega'] = \mathbf{P}_p[\omega|_{S^c}] \cdot \mathbf{P}_p[\omega'|_S]$ , puisque la configuration sur  $S^c$  et  $S$  sont indépendantes. Et comme  $\mathbf{P}_p[\omega'|_S]$  est un produit d'au plus  $s$  facteurs  $p$  ou  $1-p$ , on a la majoration  $\mathbf{P}_p[\omega'] \geq \mathbf{P}_p[\omega] \min(p, 1-p)^s$ ; en combinant cette majoration à l'équation (3), on obtient :

$$\sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbf{P}_p[\Phi(\omega)] \geq \min(p, 1-p)^s \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \sum_{\omega' \in \Phi(\omega)} \mathbf{P}_p[\omega] \geq t \cdot \min(p, 1-p)^s \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbf{P}_p[\omega]. \quad (4)$$

On peut encore décomposer la somme dans le terme de gauche sur  $\Phi(\omega)$ , comme précédemment, puis inverser les deux sommes pour obtenir :

$$\sum_{\omega' \in \mathcal{B}} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{A} \\ \omega' \in \Phi(\omega)}} \mathbf{P}_p[\Phi(\omega')] \geq t \cdot \min(p, 1-p)^s \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbf{P}_p[\omega] \quad (5)$$

On peut maintenant majorer le nombre d'éléments dans la deuxième somme à gauche grâce à la condition (b) du lemme. La somme contient moins d'éléments qu'il n'y a de configurations qui coïncident avec  $\omega$  sur  $S^c$ , à savoir  $2^s$ ; il suffit ensuite de reporter cette majoration dans l'équation (5) pour obtenir le résultat souhaité.  $\blacklozenge$

### C.3 Preuve du lemme gluant

On va maintenant donner la démonstration du lemme gluant (lemme C.1).

**Relation d'ordre sur les chemins** Soit  $\omega$  une configuration, on va définir une relation d'ordre totale  $\leq$  sur l'ensemble des chemins auto-évitant qui vont de  $\bar{S}_{3n}$  à  $\bar{Z}_n$ . Pour ce faire, on définit déjà deux relations d'ordre comme suit :

- pour tout sommet de  $\mathbb{Z}^2$ , on définit une relation d'ordre totale  $\preceq$  sur les arêtes qui partent dudit sommet, de telle sorte que la relation soit invariante par translation de  $\mathbb{Z}^2$ ;  $\preceq$
- on prend  $\ll$  une relation d'ordre totale sur les arêtes de  $\mathbb{S}_k$ .  $\ll$

Par la suite, si  $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq r}$  et  $\gamma' = (\gamma'_i)_{1 \leq i \leq r'}$  sont deux chemins auto-évitants qui vont de  $\bar{S}_{3n}$  à  $\bar{Z}_n$  alors on notera  $\gamma < \gamma'$  lorsqu'au moins l'une des conditions suivantes sont satisfaites :  $\ll$

- le chemin  $\gamma$  est un sous chemin strict de  $\gamma'$ , c'est à dire que  $r < r'$  et que  $\gamma = (\gamma'_i)_{1 \leq i \leq r}$ , cela traite le cas où les chemins ne se séparent qu'une fois arrivés à  $\overline{Z}_n$  ;
- on peut comparer strictement les premiers sommets des deux chemins avec  $\gamma_0 \ll \gamma'_0$ , ce qui traite le cas où les deux chemins sont différents dès la sortie de  $\overline{S}_{3n}$  ;
- il existe un entier  $k$  strictement plus petit que  $r$  et  $r'$  tel que  $\gamma_i = \gamma'_i$  pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $k$  et tel que  $(\gamma_k, \gamma_{k+1}) \prec (\gamma'_k, \gamma'_{k+1})$ , c'est à dire que les chemins coïncident jusqu'à la  $k$ -ième arête et que l'on peut comparer les arêtes issues de  $\gamma_k$ .

$\gamma_{\min}(\omega)$   
 $U(\omega)$

**Chemin minimal** Soit  $\omega$  une configuration, comme  $\leq$  est une relation totale sur l'ensemble fini des chemins auto-évitant entre  $\overline{S}_{3n}$  et  $\overline{Z}_n$ , on peut définir  $\gamma_{\min}(\omega)$  comme étant l'élément minimal pour cette relation dans  $\omega$ . Dès lors, on définit  $U(\omega)$  comme étant l'ensemble des éléments de  $B'_n$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

**P1.** Le segment  $\overline{\{z\}}$  et le support de  $\gamma_{\min}(\omega)$  sont d'intersection non vide.

**P2.** Il existe un chemin  $\pi$  qui relie les cylindres  $z + \overline{B}_1$  et  $\overline{S}'_n$  ; et tel que la distance entre les projections canoniques de  $\pi$  et de  $\gamma_{\min}(\omega)$  dans  $\mathbb{Z}^2$  soit exactement 1.

Dans cette définition, la propriété P1 signifie que tout élément  $z$  de  $U(\omega)$  doit être sur la projection du chemin minimal  $\gamma_{\min}(\omega)$  alors que la propriété P2 demande qu'il existe au moins un point au dessus de  $z$  qui soit presque relié ou presque à  $\overline{S}'_n$  par un chemin qui ne passe jamais au dessus ou au dessous de  $\gamma_{\min}(\omega)$ .

**L'évènement  $\mathcal{X}$**  Pour la suite de la démonstration, on définit l'évènement suivant :

$$\mathcal{X} = \left\{ S_{3n} \xleftarrow{B_{3n}} Z_n, S'_n \xleftarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftarrow{B'_n} Y_n^+ \right\} \cup \left\{ S_{3n} \xleftarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right\}^c$$

Dans les hypothèses du lemme gluant, on suppose que le premier évènement dans la définition de  $\mathcal{X}$  a une probabilité d'au moins  $1 - \delta$  ; on veut montrer que complémentaire du second évènement a une probabilité d'au moins  $1 - \varepsilon$ . Pour démontrer le lemme gluant (lemme C.1), on est donc ramené à montrer que la probabilité  $\mathbf{P}_p(\mathcal{X})$  est très petite lorsque la probabilité du premier terme dans son expression est proche de 1. Pour ce faire, on va séparer le problème en deux, en fonction de la taille de  $U(\omega)$ . On dispose pour cela des proposition C.3 et C.4.

**Proposition C.3.** Soient  $t$  un entier naturel non nul et  $\varepsilon$  un réel strictement positif ; alors il existe un réel  $\delta$  strictement positif tel que :

$$\mathbf{P}_p \left[ S'_n \xleftarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftarrow{B'_n} Y_n^+ \right] > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_p [\mathcal{X} \cap \{\#U < t\}] \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $\omega$  une configuration dans  $\mathcal{X} \cap \{\#U < t\}$ , on définit la configuration  $\omega'$  à partir de  $\omega$  de la façon suivante : on y retire les arêtes de la forme  $\{u, v\}$  avec  $u$  dans la droite  $\overline{\{z\}}$  pour un certain  $z$  dans  $U(\omega)$  et  $v$  relié à  $\overline{S}'_n$ . On a donc construit  $\omega'$  de telle sorte qu'il ne puisse pas contenir dans  $\overline{B}'_n$  à la fois un chemin reliant  $\overline{S}'_n$  et  $Y_n^-$



et un chemin reliant  $\overline{S}'_n$  et  $Y_n^+$  ; car sinon  $\omega$  contiendrait un chemin qui relierait  $S_{3n}$  à  $S'_n$  dans  $B_{3n} \cup B'_n$ , ce qui contredirait  $\omega \in \mathcal{X}$ .

La construction que nous venons de présenter nous permet de définir l'application  $\Phi$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{X} \cup \{\#U < t\} &\longrightarrow \mathcal{P} \left( \left\{ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right\}^c \right) & \Phi \\ \omega &\longmapsto \{\omega'\} \end{aligned}$$

Les propriétés P1 et P2 nous assurent que l'on n'a retiré aucune arête de  $\gamma_{\min}(\omega)$ , on a donc  $\gamma_{\min}(\omega') = \gamma_{\min}(\omega)$ . Comme on ne retire des arêtes que dans des cylindres de la forme  $z + \overline{B}_1$  et que le projeté des chemins  $\pi$  de la propriété P2 sont tous à distance au moins 1 de la projection de  $\gamma_{\min}(\omega)$ , on a aussi  $U(\omega) = U(\omega')$ .

De plus  $\Phi^{-1}(\omega')$  contient seulement des configurations qui sont égales à  $\omega'$  sauf peut être en des arêtes adjacentes à  $U(\omega)$ . Comme  $U(\omega)$  contient au plus  $t$  éléments, il y a au plus  $(5k+1)t$  arêtes adjacentes à  $U(\omega)$ . On peut alors appliquer le lemme C.2 à  $\Phi$  avec  $t' = 1$  et  $s = (5k+1)t$  qui nous donne la majoration :

$$\mathbf{P}_p[\mathcal{X} \cup \{\#U < t\}] \leq \left( \frac{2}{\min(p, 1-p)} \right)^{(5k+1)t} \left( 1 - \mathbf{P}_p \left[ S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-, S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+ \right] \right).$$

Il suffit alors de prendre  $\delta$  assez petit pour achever la démonstration.  $\blacklozenge$

**Proposition C.4.** *Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif ; alors il existe un entier  $t$  strictement positif tel que l'on ait la majoration :*

$$\mathbf{P}_p[\mathcal{X} \cap \{\#U \geq t\}] \leq \varepsilon \cdot \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right].$$

*Remarque.* Si  $z = (x_1, x_2, x_3)$  est un point de  $\mathbb{S}_k$  et si  $R$  est un entier naturel, on notera  $\overline{B}_R(z)$  à la place de  $(x_1, x_2) + B_R$ . Supposons maintenant  $R = 2$ , si  $u, v, w$  sont des voisins de  $z$  distincts deux à deux et si  $u', v', w'$  sont trois points distincts sur la frontière  $\partial \overline{B}_2(z)$ , alors il existe trois chemins auto-évitant disjoints dans  $\overline{B}_2(z) \setminus \{z\}$  qui relie respectivement  $u, v, w$  à  $u', v', w'$ , puisque que l'on a supposé plus tôt que  $k$  est non nul.  $\overline{B}_R(z)$

*Démonstration* (de la proposition C.4). Soient  $\omega$  une configuration dans  $\mathcal{X} \cap \{\#U \geq t\}$  et  $z$  un sommet dans  $U(\omega)$ , on va construire la configuration  $\omega^{(z)}$  comme suit, on pourra trouver une illustration de cette construction sur la figure 4.  $\omega^{(z)}$

- a. On prend  $u, v, w$  trois points distincts qui sont à distance 1 de  $z$  et telle que l'on puisse comparer les arêtes avec  $(z, v) \prec (z, w)$ .  $u, v, w$
- b. On définit ensuite nos trois points  $u', v', w'$  sur le cylindre  $\partial \overline{B}_2(z)$  de la façon suivante : dès lors que  $\gamma_{\min}(\omega)$  traverse le cylindre  $\overline{B}_2(z)$  on peut prendre  $u'$  le sommet par lequel il rentre dans  $\overline{B}_2(z)$  et  $v'$  le sommet par lequel il en ressort. Ces sommets sont distincts puisque  $\gamma_{\min}(\omega)$  est auto-évitant.  $u'$   
 $v'$

$w'$   
 $\pi$  Puisque  $z$  est dans  $U(\omega)$ , par P1, il existe  $\pi'$  un chemin auto-évitant qui relie  $\overline{z + B_1}$  à  $S'_n$ ; on pose alors  $w'$  le sommet de  $\partial\overline{B_2}(z)$  par lequel  $\pi'$  sort pour la dernière fois de  $\overline{B_2}(z)$  et  $\pi$  le chemin qui relie alors  $w'$  à  $S'_n$  et qui ne rencontre  $\overline{B_2}(z)$  qu'en  $w'$ . On a alors  $w'$  distinct de  $u'$  et  $v'$  car sinon on aurait  $S'_n$  qui serait relié à  $S_{3n}$ , en passant par  $\gamma_{\min}(\omega)$  jusqu'à  $w'$  puis ensuite par  $\pi$ .

c. On retire toutes les arêtes de  $\omega$  qui sont dans  $\overline{B_3}(z)$  à l'exception de celles sur la frontière  $\partial\overline{B_3}(z)$  et qui sont dans les chemins  $\gamma_{\min}(\omega)$  ou  $\pi$ . ; de telle sorte que la seule façon d'entrer dans  $\overline{B_2}(z)$  soit de passer par  $u', v'$  ou  $w'$

d. Enfin, puisque  $u', v', w'$  sont trois sommets distincts de  $\partial\overline{B_2}(z)$ , on peut appliquer la remarque précédente qui nous assure l'existence de trois chemins auto-évitant disjoints  $\gamma_u, \gamma_v$  et  $\gamma_w$  qui relient respectivement  $u, v, w$  à  $u', v', w'$  dans  $\overline{B_2}(z) \setminus \{z\}$ . On ouvre alors les arêtes  $(z, u), (z, v)$  et  $(z, w)$  ainsi que les chemins  $\gamma_u, \gamma_v$  et  $\gamma_w$ .

$\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w$

On a construit  $\omega^{(z)}$  de telle sorte que  $S_{3n}$  et  $S'_n$  y soient reliés dans  $B_{3n} \cup B'_n$ , ce qui nous permet de définir l'application suivante :

$\Psi$

$$\Psi : \mathcal{X} \cup \{\#U \geq t\} \longrightarrow \mathcal{P} \left( S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right)$$

$$\omega \longmapsto \left\{ \omega^{(z)}, z \in U(\omega) \right\}.$$

On veut à présent utiliser le lemme C.2. Soit donc  $\omega^{(z)}$  une configuration à l'arrivée, on se rend compte dans un premier temps, par minimalité, que  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  et  $\gamma_{\min}(\omega)$  coïncident au moins jusqu'à  $u'$ . Ensuite, et grâce au point c de la construction précédente, on a  $u'$  de degré exactement 2 dans  $\omega$ , et puisque l'on a vidé  $\overline{B_2}(z)$ , cela force  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  à passer ensuite par  $\gamma_u$ . Une fois arrivé en  $z$ , on a deux possibilités : passer par  $v$  ou  $w$ ; mais puisque l'on a pris les sommets de telle sorte que  $(z, v) \prec (z, w)$  alors  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  est forcé de passer par  $v$  et ensuite par  $\gamma_v$ . Dès lors, la minimalité de  $\gamma_{\min}(\omega)$  oblige  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  à prendre le même chemin à la sortie de  $\overline{B_2}(z)$ .

Pour résumer on a  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  qui empreinte  $\gamma_{\min}(\omega)$  à l'extérieur de  $\overline{B_2}(z)$ ; alors que dans  $\overline{B_2}(z)$  il empreinte  $\gamma_u$  de  $u'$  jusqu'à  $z$ , puis  $\gamma_v$  de  $z$  jusqu'à  $v'$ , où il rejoint  $\gamma_{\min}(\omega)$ . Aussi  $z$  est le seul sommet de  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$  qui soit relié à  $S'_n$  sans utiliser aucune arête du chemin minimal  $\gamma_{\min}(\omega^{(z)})$ . Cela nous donne alors que les  $\omega^{(z)}$  sont tous distincts à  $\omega$  fixé. Dès lors, toutes les images  $\Psi(\omega)$  sont de cardinal au moins  $t$ . Il nous reste maintenant à déterminer  $s$  tel que quelque soit l'image  $\omega^{(z)}$  que l'on prenne alors il existe un sous ensemble fini  $S$  de  $\mathbb{S}_k$  qui soit de cardinal au plus  $s$  et tel que l'on ait l'inclusion  $\{\omega \in \mathcal{X} \cup \{\#U \geq t\}, \omega' \in \Psi(\omega)\} \subset \{\omega \in \mathcal{X} \cup \{\#U \geq t\}, \omega|_{S^c} = \omega'|_{S^c}\}$ . On prend  $s = 84(k+1) + 49k$ , le nombre d'arêtes dans  $\overline{B_3}(z)$ , seul endroit de  $\omega^{(z)}$  qui diffère de  $\omega$ . On peut enfin appliquer le lemme C.2 qui nous donne la majoration :

$$\mathbf{P}_p [\mathcal{X} \cap \{\#U \geq t\}] \leq \frac{1}{t} \left( \frac{2}{\min(p, 1-p)} \right)^s \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right].$$

Or  $s$  est indépendant de  $t$ , il suffit alors de prendre  $t$  assez grand pour conclure la démonstration de la proposition.  $\blacklozenge$

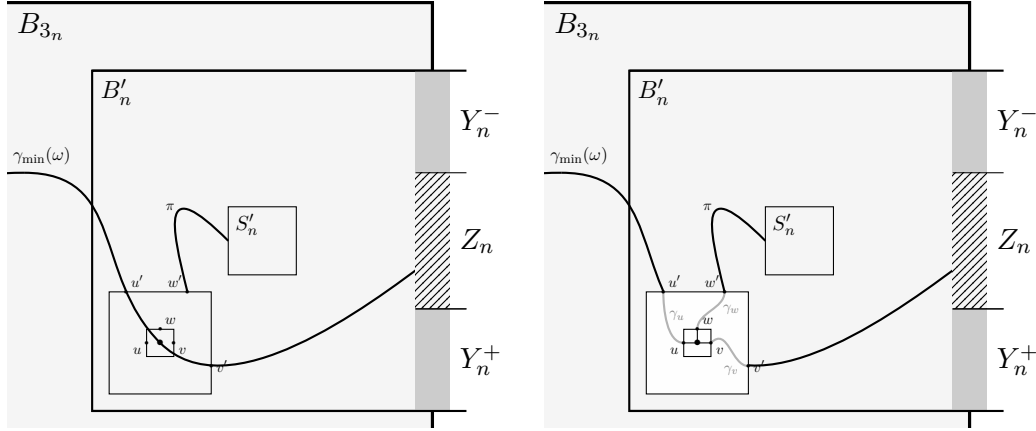


FIGURE 4 – La construction de  $\omega(z)$ .

On peut maintenant achever la démonstration du lemme gluant (lemme C.1). Fixons  $\varepsilon$  un réel strictement positif, alors d'après la proposition C.4, il existe  $t$  un entier naturel non nul tel que :

$$\mathbf{P}_p[\mathcal{X} \cap \{\#U \geq t\}] \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{P}_p \left[ S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n \right]. \quad (6)$$

On peut ensuite appliquer la proposition C.3 à  $\varepsilon/2$  et  $t$  : il existe un réel  $\delta$  strictement positif tel que lorsque la probabilité de l'événement  $\{S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-\} \cap \{S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+\}$  est plus grande que  $1 - \delta$  on ait :

$$\mathbf{P}_p[\mathcal{X} \cap \{\#U < t\}] \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7)$$

Dès lors, lorsque la probabilité de  $\{S_{3n} \xleftrightarrow{B_{3n} \cup B'_n} S'_n\} \cap \{S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^-\} \cap \{S'_n \xleftrightarrow{B'_n} Y_n^+\}$  est plus grande que  $1 - \delta$ , on peut utiliser les équations (6) et (7) et la décomposition de  $\mathcal{X}$  en  $(\mathcal{X} \cap \{\#U \geq t\}) \cup (\mathcal{X} \cap \{\#U < t\})$  pour obtenir  $\mathbf{P}_p(\mathcal{X}) \leq \varepsilon$ ; ce qui achève la démonstration du lemme gluant.

## Conclusion

L'étude de la percolation dans les tranches  $\mathbb{S}_k$  apporte une piste supplémentaire dans les recherches sur le réseau cubique : on sait désormais montrer l'absence de percolation au point critique dans des réseaux plus « proches » de  $\mathbb{Z}^3$ . Mais malheureusement, cela n'a pas encore permis le passage du cas fini au cas infini sur la troisième dimension, ce qui laisse à penser qu'un nouvel argument reste à trouver.

## Bibliographie

- [DCST14] Hugo DUMINIL-COPIN, Vldas SIDORAVICIUS et Vincent TASSION – « Absence of infinite cluster for critical bernouilli percolation on slabs », *The American Mathematical Monthly* (2014).
- [Gri99] Geoffrey GRIMMETT – *Percolation theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [Ham57] J. M. HAMMERSLEY – « Percolation processes : Lower bounds for the critical probability », *Ann. Math. Statist.* **28** (1957), no. 3, p. 790–795.
- [Har60] Theodore Edward HARRIS – « A lower bound for the critical probability in a certain percolation process », *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 56, Cambridge Univ Press, 1960, p. 13–20.
- [HS94] Takashi HARA et Gordon SLADE – « Mean-field behaviour and the lace expansion », *Probability and phase transition*, Springer, 1994, p. 87–122.
- [Kes80] Harry KESTEN – « The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$  », *Communications in mathematical physics* **74** (1980), no. 1, p. 41–59.