Introduction au domaine de recherche:

Ensembles poissoniens de boucles markoviennes

Titus Lupu

Encadrant: Pr. Yves Le Jan

Ce texte fait suite à mon mémoire de M2 réalisé sous la direction de Pr. Yves Le Jan. J'y présente quelques propriétés remarquables d'une mesure sur les boucles, naturellement associée à un processus de Markov, ainsi que des processus ponctuels de Poisson d'intensité cette mesure. Les ensembles poissonniens correspondant sont connus dans la littérature sous l'appellation "loop soup". Pour un mouvement brownien plan cette mesure sur les boucles fut étudiée dans [4] et débouche dans [10] sur une construction des ensembles CLE (conformal loop ensembles). Dans [7] sont étudiées d'autres propriétés de cette mesure sur les boucles, notamment celles du champ d'occupation de ses ensembles poissoniens, en lien avec la théorie quantique des champs.

Je voudrais remercier Pr. Yves Le Jan pour avoir encadré mon mémoire de M2, pour ses indications et conseils. Je voudrais également remercier Pr. Wendelin Werner pour m'avoir conseillé ce sujet.

Table des matières

1 Définition et propriétés d'invariance de la mesure sur les boucles

Soit X un **graphe** fini non orienté sans arrêtes joignant un sommet avec lui-même. On adjoint à X un sommet particulier δ appelé **état puits**. Pour $x, y \in X$, on notera par $x \sim y$ le fait que les sommets x et y dans X sont reliés par une arrête. On notera par (x, y) l'arrête joignant x et y orienté de x vers y. On munit les arrêtes de X de **conductances** $C(x, y) = C(y, x) > 0$ pour $x \sim y$. Pour $x \in X$, on ajoute des conductances de x vers le puits δ, pouvant être nulles, notées $k(x)$. Enfin, pour $x \in X$, on introduit les quantités

$$\lambda(x) := k(x) + \sum_{y \sim x} C(x, y)$$

vues comme la "taille" du sommet x. On note Δ le **laplacien discret** sur X, agissant sur les fonctions de sommets :

$$(\Delta f)(x) = \sum_{y \sim x} C(x, y) f(y) \ - \lambda(x) f(x)$$

Δ est un opérateur auto-adjoint négatif :

$$\sum_{x \in X} (\Delta f)(x) g(x) = \sum_{x \in X} (\Delta g)(x) f(x) \ et \ \sum_{x \in X} (\Delta f)(x) f(x) \leq 0$$

Δ est défini négatif si et seulement si les conductances vers le puits, $(k(x))_{x \in X}$ ne sont pas uniformément nulles. Dans ce cas là on note $(G(x, y))_{x, y \in X}$ l'inverse de $(-\Delta)$, appelé **fonction de Green**. G est un opérateur positif et pour tout $x, y \in X$, $G(x, y) = G(y, x) \geq 0$.

On considère un champ de vitesses $v(x) > 0$ sur X et un **processus à sauts** $(x(t))_{t \geq 0}$ avec meurtre en δ, d'intensité de saut de x vers un y relié à x égale à $v(x) C(x, y)$ et d'intensité de saut de x vers δ égale à $v(x) k(x)$. Si on introduit la mesure $m(x) = \dfrac{1}{v(x)}$, alors le processus $(x(t))_{t \geq 0}$ est un **processus de Markov symétrique** par rapport à m, c.a.d. que

$$\forall\ x, y \in X, \mathbb{P}\left[x(t) = y | x_0 = x\right] m(x) = \mathbb{P}\left[x(t) = x | x(0) = y\right] m(y)$$

Notons $\mathbb{P}^T_{x,y}(\cdot)$ la loi du pont de $(x(t))_{t \geq 0}$ de x à y en temps T et $p_t(x, y)$ les densités de transition de $(x(t))_{t \geq 0}$ par rapport à m (on a par ce qui précède $p_t(x, y) = p_t(y, x)$).

Au processus $(x(t))_{t \geq 0}$ est "naturellement" associé une **mesure sur les boucles** ([7]) : un pont de x vers x en temps T peut être vu comme un boucle. On obtient une mesure μ sur les boucles avec des bonnes propriétés d'invariance en intégrant des probabilités de pont $\mathbb{P}^T_{x,x}(\cdot)$ de manière suivante :

$$\mu(\cdot) := \sum_{x \in X} m(x) \int_{T > 0} \frac{dT}{T} p_T(x, x) \mathbb{P}^T_{x,x}(\cdot)$$

Précisons que si $(\gamma(t))_{0 \leq t \leq T}$ est une boucle et le point $\gamma(0) = \gamma(T)$ sert de début et fin de boucle, alors pour $s \in]0, T[$ on peut reparamétrer γ en commençant au temps s, avec t parcourant d'abord $[s, T]$ puis $[0, s]$, avec cette fois le point $\gamma(s)$ comme début et fin de boucle. Dans toute la suite on considérera les boucles à "translation" de paramétrisation près.

La mesure μ est infinie, σ -finie. Dans ce mémoire on présentera quelques propriétés de la mesure μ, et particulièrement du **processus ponctuel de Poisson** d'intensité μ.

Dans la suite on va présenter deux propriétés d'invariance de la mesure sur les boucles μ : une propriété d'**invariance par changement de vitesse** et une propriété d'**invariance par restriction**.

D'abord l'invariance par changement de vitesse. Si au lieu du champ de vitesses v on avait pris un autre champ de vitesses $\tilde{v}$, on aurait obtenu un autre processus de Markov à sauts $(\tilde{x}(t))_{t\geq 0}$, une autre mesure $\tilde{m}(x) = \dfrac{1}{\tilde{v}(x)}$ par rapport à laquelle $(\tilde{x}(t))_{t\geq 0}$ est symétrique, et une autre mesure sur les boucles $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu}\left(\cdot\right) := \sum_{x\in X} \tilde{m}(x) \int_{T>0} \frac{dT}{T} \tilde{p}_T(x,x) \tilde{\mathbb{P}}^T_{x,x}\left(\cdot\right)$$

où l'on désigne par $\tilde{p}_T(x,y)$ les densités de transition de $(\tilde{x}_t)_{t\geq 0}$ par rapport à $\tilde{m}$, et par $\tilde{\mathbb{P}}^T_{x,y}\left(\cdot\right)$ ses probabilités de pont. On passe du processus $(x(t))_{t\geq 0}$ au processus $(\tilde{x}(t))_{t\geq 0}$ par un changement de temps aléatoire : $(\tilde{x}(s))_{s\geq 0}$ est égal en loi à $(x_{\theta_s})_{s\geq 0}$ où

$$\theta_s = \inf\{t \geq 0 | \int_0^t \frac{v(x_u)}{\tilde{v}(x_u)} du = s\}$$

Le même changement de temps permet de passer de μ à $\tilde{\mu}$:
Proposition 1
$\tilde{\mu}$ est mesure image de μ par la transformation

$$(\gamma(t), 0 \leq t \leq T) \longmapsto \left(\gamma(\theta_s), 0 \leq s \leq \int_0^T \frac{v(u)}{\tilde{v}(u)} du\right)$$

où $\theta_s = \inf\{t \geq 0 | \int_0^t \frac{v(\gamma(u))}{\tilde{v}(\gamma(u))} du = s\}$.

Soit F un sous-ensemble de X. Dans le cas limite où $\tilde{v}(x) = v(x)$ si $x \in F$ et $\tilde{v}(x) = +\infty$ si $x \in X \setminus F$, alors $(\tilde{x}(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Markov à sauts dans F obtenu comme trace dans F du chemin aléatoire $(x(t))_{t\geq 0}$. La mesure $\tilde{\mu}$ est alors obtenue comme mesure image de μ restreinte aux boucles passant par F, en effaçant les intervalles de temps qu'une boucles passe hors F(voir [7], chapitre 7, pour plus de détails).

On va maintenant présenter la propriété d'invariance par restriction. Soit D un sous-ensemble de X. Soit $(x^D_t)_{t\geq 0}$ le processus de Markov à sauts sur D obtenu en tuant $(x(t))_{t\geq 0}$ dès que celui-ci atteint $\{\delta\} \cup (X \setminus D)$. $(x^D_t)_{t\geq 0}$ est symétrique par rapport à la mesure $m_{|D}$. Soient $p^D_t(x,y)$ ses densités de transition et $\mathbb{P}^T_{x,y,D}\left(\cdot\right)$ ses probabilités de pont. Soit μ^D la mesure sur les boucles qui lui est associée :

$$\mu^D\left(\cdot\right) := \sum_{x\in D} m(x) \int_{T>0} \frac{dT}{T} p^D_T(x,x) \mathbb{P}^T_{x,x,D}\left(\cdot\right)$$

Alors :
Proposition 2
μ^D est la restriction de la mesure μ au boucles qui ne passent pas par $X \setminus D$ (voir [7], section 4.3).

2 Algorithme de Wilson. Lien entre l'ensemble poissonien de boucles et l'arbre couvrant uniforme

Notons pour $c > 0$ $\mathcal{B}_c$ l'**ensemble poissonien de boucles** d'intensité $c\mu$. On suppose que le graphe $X \cup \{\delta\}$, avec pour $x, y \in X$, $x \sim y$ si $C(x,y) > 0$, et pour $x \in X$, $x \sim \delta$ si $k(x) > 0$, est connexe. On va présenter le lien entre l'ensemble poissonien de boucles $\mathcal{B}_1$ ($c = 1$), et l'**arbre couvrant uniforme** de $X \cup \{\delta\}$.

L'arbre couvrant uniforme de $X \cup \{\delta\}$ est une variable aléatoire Υ à valeurs dans les arbres couvrants du graphe $X \cup \{\delta\}$, qu'on suppose arbitrairement enracinés en δ, et telle que si $\mathcal{T}$ est un arbre couvrant de $X \cup \{\delta\}$, alors la probabilité $\mathbb{P}[\Upsilon = \mathcal{T}]$ est proportionnelle au produit de conductances des arrêtes dans $\mathcal{T}$, c.a.d.

$$\prod_{\{x,y\} \in \mathcal{T}} C(x,y) \prod_{\{x,\delta\} \in \mathcal{T}} k(x).$$

Pour les propriétés remarquables de Υ, notamment pour la description des arrêtes de Υ comme **processus déterminantal** dans l'ensemble des arrêtes de $X \cup \{\delta\}$ consulter [5].

L'**algorithme de Wilson**([6]) permet de construire l'arbre couvrant uniforme Υ en itérant des **marches aléatoires à boucles effacées** :

- **Étape 1** : On choisit arbitrairement un sommet x_1 dans X. On lance un processus à sauts $(x(t))_{t \geq 0}$ issu de x_1 et tué en δ. On note $t_1 := \sup\{t \geq 0 | x(t) = x_1\}$. Si $x(t_1+) \neq \delta$, on note $x_2 := x(t_1+)$. Puis de même que précédemment on introduit $t_2 := \sup\{t \geq t_1 | x(t) = x_2\}$. En continuant le processus on construit une suite de temps $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n_1}$ et une suite de sommets deux à deux distincts $(x_i = x(t_{i-1}+))_{1 \leq i \leq n_1}$ jusqu'à tomber sur $x(t_{n_1}+) = \delta$. La suite $(x_i = x(t_{i-1}+))_{1 \leq i \leq n_1}$ est appelé marche aléatoire à boucles effacée issue de x_1 et tuée en δ. En la construisant on a effacé de boucles $\gamma_i = (x(t))_{t_{i-1} < t \leq t_i}$ joignant x_i avec lui-même. Par construction, pour $i > 1$, une boucle γ_i ne passe par aucun des sommets $x_1, ..., x_{i-1}$. Par construction également $C(x_i, x_{i+1}) > 0$ et $k(x_{n_1}) > 0$. On adjoint les arrêtes $(\{x_1, x_2\}), ..., \{x_{n_1-1}, x_{n_1}\}, \{x_{n_1}, \delta\}$ comme première branche de l'arbre Υ Si la liste de sommets $(x_i = x(t_{i-1}+))_{1 \leq i \leq n_1}$ n'épuise pas X on passe à l'étape 2.
- **Étape j** : On choisit arbitrairement un sommet $x_{n_{j-1}+1}$ dans $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{n_{j-1}}\}$. On lance un processus à sauts $(x(t))_{t \geq 0}$ issu de $x_{n_{j-1}+1}$ et tué en $\{\delta\} \cup \{x_1, x_2, ..., x_{n_{j-1}}\}$. Soit δ_j l'élément (aléatoire) de $\{\delta\} \cup \{x_1, x_2, ..., x_{n_{j-1}}\}$ en le quel le processus $(x(t))_{t \geq 0}$ est tué. On note $(x_{n_{j-1}+1}, x_{n_{j-1}+2}, ..., x_{n_j})$ la marche aléatoire à boucles effacées obtenue à partir du processus précédent. Ce faisant on a effacé de boucles $\gamma_{n_{j-1}+i}$ joignant $x_{n_{j-1}+i}$ à lui-même. Par construction $x_{n_{j-1}+i}$ et $x_{n_{j-1}+i+1}$ sont reliés par une arrête, et x_{n_j} est relié par une arrête à δ_j. On adjoint la branche formée par les arrêtes $(\{x_{n_{j-1}+1}, x_{n_{j-1}+2}\}, ..., \{x_{n_j}, \delta_j\})$ au sous-arbre de Υ déjà construit. Si la liste $(x_1, x_2, ..., x_{n_j})$ n'épuise pas X, on passe à l'étape $j+1$.

A l'issue de l'algorithme de Wilson on obtient un arbre aléatoire Υ, couvrant le graphe $X \cup \{\delta\}$. De plus celui-ci est distribué comme un arbre couvrant uniforme. Mais on a également obtenu un ensemble aléatoire de boucles (les boucles effacées) $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{|X|})$, où γ_i joint x_i à lui même, et si $i > 1$, γ_i ne passe pas par $\{\gamma_1, ..., \gamma_{i-1}\}$. Les boucles aléatoires $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{|X|})$ sont reliées à l'ensemble poissonien de boucles $\mathcal{B}_1$ de manière suivante :

Étant donné deux boucles ϑ_1 et ϑ_2 passant toutes les deux par un même sommet x, on peut les joindre en une seule boucle en découpant chacune en un instant de passage par x est en "collant" chacune des extrémités de l'une avec une extrémité de l'autre. Si on a un ensemble dénombrable totalement ordonné $(\mathcal{J}, \preceq)$ ainsi qu'une famille de boucles $(\vartheta_j)_{j \in \mathcal{J}}$ indexée par $\mathcal{J}$, et où toutes les boucles ϑ_j passent par un même sommet x, on peut encore les joindre en une seule boucle en découpant chacune en un instant de passage par x et en recollant les extrémités de manière à préserver l'ordre sur les boucles induit par $(\mathcal{J}, \preceq)$, à condition que $\sum_{j \in \mathcal{J}} \textit{durée}(\vartheta_j) < +\infty$, où $\textit{durée}(\vartheta_j)$ désigne la longueur de l'intervalle de temps paramétrant la boucle ϑ_j. Cette dernière condition est vérifiée pour les boucles dans l'ensemble poissonien $\mathcal{B}_1$ passant par un sommet x. On a le résultat suivant :

Proposition 3

Soit $(x_1, x_2, ..., x_{|X|})$ une énumération des sommets dans X. Soit $\tilde{\gamma}_i$ la boucle obtenue en recollant toutes les boucles dans $\mathcal{B}_1$, passant par x_i et ne passant par aucun des $x_1, ..., x_{i-1}$ (si

$i>1$), dans l'ordre de leur apparition dans le processus ponctuel de poisson ($\mathcal{B}_c, 0<c\leq 1$), après avoir découpé chacune en un instant choisi uniformément sur l'union des intervalles de temps de passage par x_i et indépendamment du comportement de la boucle en dehors des temps de passage par x_i et du reste de l'ensemble poissonien. La famille $(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,...,\tilde{\gamma}_{|X|})$ des boucles obtenues par recollement est égale en loi à la famille $(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{|X|})$ des boucles effacées dans l'algorithme de Wilson, conditionnellement au fait que $(x_1,x_2,...,x_{|X|})$ soit la suite ordonnée des points visités par la marche aléatoire à boucles effacées itérée de l'algorithme de Wilson (voir [7], chapitre 8).

3 Champ d'occupation de l'ensemble poissonien de boucles et Champ Libre Gaussien. Formule d'isomorphisme de Dynkin

Pour une boucle $(\gamma(t), 0\leq t\leq T)$ dans X et un sommet $x\in X$, on note $l^x(\gamma)$ le **temps local** cumulé de γ en x :

$$l^x(\gamma) := \frac{1}{m(x)}\int_0^T \mathbf{1}(\gamma(t)=x)dt$$

Etant donné un ensemble poissonien de boucles $\mathcal{B}_c$ d'intensité $c\mu$, et $x\in X$, on note

$$\mathcal{L}_c(x) := \sum_{\gamma\in\mathcal{B}_c} l^x(\gamma)$$

$(\mathcal{L}_c(x), x\in X)$ est appelé **champ d'occupation** de l'ensemble poissonien $\mathcal{B}_c$. On suppose que le graphe $X\cup\{\delta\}$ est connexe. Si le processus à sauts $(x_t)_{t\geq 0}$ est transient, c.a.d. si l'intensité de transition vers le puits, $k(x)$, n'est pas nulle en tout sommet $x\in X$, alors presque sûrement le champ d'occupation $(\mathcal{L}_c(x), x\in X)$ est fini en tout point. Dans le cas contraire il est presque sûrement infini en tout point. On se placera dans le premier cas. Notons que l'invariance par changement du temps de la mesure μ entraîne que la loi de $(\mathcal{L}_c(x), x\in X)$ est la même quelque soit le champs de vitesses v choisi pour le processus à sauts $(x_t)_{t\geq 0}$.

Vu comme un champ dépendant du paramètre c, $(\mathcal{L}_c(x), x\in X)$ est un **processus de Lévy**. A paramètre c fixé, le champ d'occupation $(\mathcal{L}_c(x), x\in X)$ est un **champ markovien**, c.a.d. que si D est un sous-ensemble de X, et $\partial D := \{x\in D|\exists y\in X\setminus D, x\sim y\}$, alors conditionnellement à $(\mathcal{L}_c(x), x\in\partial D)$, $(\mathcal{L}_c(x), x\in X\setminus D)$ est indépendant de $(\mathcal{L}_c(x), x\in D)$.

Dans [7], chapitre 4, sont calculées la transformée de Laplace et les moments du champ d'occupation :

Proposition 4

Soit χ une mesure positive sur X. Alors

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{x\in X}\mathcal{L}_c(x)\chi(x)\right)\right] = \left(\frac{\det G_\chi}{\det G}\right)^c$$

où $G_\chi := (-\Delta+\chi)^{-1}$. Si $x_1,...,x_n\in X$, alors

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{L}_c(x_1)...\mathcal{L}_c(x_n)\right] = Per_c\left(G(x_p,x_q), 1\leq p,q\leq n\right)$$

$$:= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} c^{\text{nombre cycles de } \sigma}\, G(x_1,x_{\sigma(1)})\cdot G(x_2,x_{\sigma(2)})...\cdot G(x_n,x_{\sigma(n)})$$

*où Per_c désigne le **c-permanent**. En particulier, $\mathcal{L}_c(x)$ est une **variable aléatoire Gamma** $\Gamma(c, G(x,x))$ et $\mathbb{E}[\mathcal{L}_c(x)] = cG(x,x)$.* Dans le cas où $c=\frac{1}{2}$, il y a un lien entre le champ d'occupation $\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}(x), x \in X\right)$ et le **champ libre gaussien** sur X. Un champ libre gaussien sur X associé au laplacien discret Δ et avec conditions nulles en δ est un **champ gaussien** centré $(\phi(x), x \in X)$ de fonction de variance-covariance :

$$\mathbb{E}\left[\phi(x)\phi(y)\right] = G(x, y)$$

Le champ libre gaussien est un champ markovien. Plus précisément : Soit D un sous-ensemble de X, $(\tilde{\phi}(x), x \in X \setminus D)$ un champ libre gaussien sur $X \setminus D$, avec conditions nulles en $D \cup \delta$, indépendant de ϕ. Pour une fonction f sur D, on note $\mathcal{H}(f)$ l'extension harmonique, pour le laplacien discret Δ, de f à X, avec conditions nulles en δ. Alors conditionnellement à la valeur de ϕ sur D, $(\phi(x), x \in X \setminus D)$ est égale en loi à $\tilde{\phi} + \mathcal{H}(\phi_{|D})$ (voir [12]).

Proposition 5

([7], chapitre 5) Le champ d'occupation $\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}(x), x \in X\right)$ *est égal en loi à* $\left(\frac{1}{2}\phi(x)^2, x \in X\right)$

Le résultat précédent montre entre autre que le carré du champ libre gaussien est **infiniment divisible**. Ce fait était déjà connu auparavant (voir [1]et [9]). L'identité en loi précédente est reliée à la **formule d'isomorphisme de Dynkin**. Pour simplifier supposons que les conductances vers δ, $k(x)$, sont non nulles en tout sommet de X. Notons $\nu_{x,y}(\cdot)$ la mesure de probabilité sur le processus à sauts $(x(t))_{t\geq 0}$ issu de x et conditionné d'être en y juste avant la transition vers le puits δ. La formule d'isomorphisme de Dynkin (voir [3]) affirme que pour toute famille paire de sommets $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ dans X et toute fonction positive ou bornée F de $\mathbb{R}_+^{|X|} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}_\phi\left[\left(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)\right) F\left(\frac{1}{2}\phi(x)^2, x \in X\right)\right] =$$

$$\sum_{\substack{\text{partitions en paires} \\ \Pi \text{ de } \{1,2,...,2n\}}} \left(\int F\left(\frac{1}{2}\phi(x)^2 + \sum_{j=1}^{n} l^x(\gamma_j)\right) d\mathbb{P}_\phi \otimes \bigotimes_{paires\{x_j,y_j\}\in\Pi} G(x_j, y_j)\nu_{x_j,y_j}(d\gamma_j)\right)$$

où dans le membre de droite la sommation porte sur les $\frac{1}{2^n}C_{2n}^n$ partitions en paires de $\{1, 2, ..., 2n\}$, les γ_j sont des chemins tirés selon les probabilités ν_{x_j,y_j} indépendamment les uns des autres et indépendamment du champ libre gaussien ϕ, et où $l^x(\gamma)$ désigne le temps local en x cumulé par le chemin γ.

Dans la formule d'isomorphisme de Dynkin on additionne le champ libre gaussien et des temps locaux. La proposition 5 montre que les deux objets sont de même nature. De plus, à partir de la proposition 5, on peut déduire la formule de Dynkin dans le cas particulier où $x_1 = x_2, x_3 = x_4, ..., x_{2n-1} = x_{2n}$, en appliquant la **formule de Palm** pour les ensembles poissoniens. Cette dérivation repose sur le lien existant entre la mesure sur les boucles μ et la probabilité sur les chemins indépendants $\nu_{z_1,z_2} \otimes ... \otimes \nu_{z_{p-1},z_p} \otimes \nu_{z_p,z_1}$ et qui sera présentée ici :

Pour une boucle $(\gamma(t), 0 \leq t \leq T)$ dans X et une famille ordonée de sommets $(z_1, z_2, ..., z_p)$ on peut définir le **temps local multiple** $l^{z_1,z_2,...,z_p}(\gamma)$:

$$l^{z_1,z_2,...,z_p}(\gamma) :=$$

$$\frac{1}{m(z_1)m(z_2)...m(z_p)} \sum_{\sigma \text{ permutation cyclique de } \{1,2,...,p\}} \int_{0<t_1<t_2<...<t_p<T} \mathbf{1}_{\gamma(t_1)=z_{\sigma(1)},\gamma(t_2)=z_{\sigma(2)},...,\gamma(t_k)=z_{\sigma(p)}} dt_1 dt_2 ... dt_p$$

Par définition, si σ est une permutation cyclique de $\{1, 2, ..., p\}$, alors $l^{z_1,z_2,...,z_p} = l^{z_{\sigma(1)},z_{\sigma(2)},...,z_{\sigma(p)}}$

Considérons maintenant k chemins indépendants $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)$ tirés suivant $\nu_{z_1,z_2} \otimes ... \otimes \nu_{z_{p-1},z_p} \otimes \nu_{z_p,z_1}$. Comme le point final de γ_j est égal au point initial de $\gamma_{(j+1) mod n}$, on peut concaténer dans l'ordre $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)$, puis recoller les deux extrêmités, pour obtenir une boucle γ. Notons $\nu_{z_1,z_2} \triangleleft ... \triangleleft \nu_{z_{p-1},z_p} \triangleleft \nu_{z_p,z_1}$ la loi de cette boucle. Alors

Proposition 6

La probabilité $\nu_{z_1,z_2} \triangleleft ... \triangleleft \nu_{z_{p-1},z_p} \triangleleft \nu_{z_p,z_1}$ est absolument continue par rapport à la mesure μ. Plus précisément

$$\nu_{z_1,z_2} \triangleleft ... \triangleleft \nu_{z_{p-1},z_p} \triangleleft \nu_{z_p,z_1}(d\gamma) = \frac{l^{z_1,z_2,...,z_k}(\gamma)}{G(x_1,x_2)...G(x_{p-1},x_p)G(x_p,x_1)}\mu(d\gamma)$$

Les propriétés des temps locaux multiples ainsi que l'identité précédente entre mesures dans le cas où $p = 1$ figurent dans [7], chapitre 2. L'identité entre les mesures pour p quelconque est une observation de l'auteur de ce mémoire.

4 Mesure sur les boucles des diffusions unidimensionnelles. Processus de branchement avec immigration

De la même manière que pour les processus à sauts sur un graphe, on peut associer à un **processus de diffusion** continue une mesure sur les boucles. Ici on va considérer le **mouvement brownien unidimensionnel** standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur le demi-droite $]0, +\infty[$, tué lorsqu'il atteint 0, et avec une fonction de **taux de meurtre** k, continue de $]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$, c'est à dire qu'en plus de tuer le mouvement brownien en temps d'atteinte de zero, on le tue à l'instant t où $\int_{s=0}^{t} k(B_s)ds$ atteint un temps exponentiel de paramètre 1 indépendant de la trajectoire de $(B_t)_{t\geq 0}$. Notons ξ le temps où le mouvement brownien est tué. Le générateur de cette diffusion est $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - k$ et sa fonction de Green $G(x, y)$ s'obtient de manière suivante : Soit u_1 une solution croissante strictement positive de l'EDO :

$$(E) \quad \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x) - k(x)u(x) = 0$$

, u_2 une solution décroissante strictement positive de (E) et $W(u_1, u_2) := \frac{du_1}{dx}u_2 - \frac{du_2}{dx}u_1$ le wronskien de u_1 et u_2 qui est une constante. Alors $G(x, y) = G(y, x)$ et si $x \leq y$,

$$G(x, y) = 2\frac{u_1(x)u_2(y)}{w}$$

Si on note $p_t(x, y)$ le noyau de transition de cette diffusion, qui est symétrique, et $\mathbb{P}_{x,y}^{T}(\cdot)$ ses probabilités de pont, alors

$$\mu(\cdot) := \int_{x\in]0,+\infty[} dx \int_{T>0} \frac{dT}{T} p_T(x, x)\mathbb{P}_{x,x}^{T}(\cdot)$$

définit une mesure μ sur les boucles continues dans $]0, +\infty[$.

La **mesure d'occupation** du mouvement brownien est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue : Il existe un processus $(L_t^x(B), x \in]0, +\infty[, t \geq 0)$ continu en le couple (x, t), progressif en t par rapport à la filtration brownienne, telle que pour toute fonction mesurable positive ou bornée f sur $]0, +\infty[$,

$$\left(\int_{s=0}^{t} f(B_s)ds\right)_{0\leq t\leq \xi} = \left(\int_{x\in]0,+\infty[} f(x)L_t^x(B)dx\right)_{0\leq t\leq \xi}$$

où l'égalité précédente est une égalité entre processus. $L_t^x(B)$ est un **temps local** en x (voir [2], chapitre VI). On a $G(x,y) = \mathbb{E}\left[L_\xi^y(B)|B_0 = x\right]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit

$$\Omega_{exc}^{>x} := \cup_{T>0}\{f de [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue t.q. } f(0) = f(T) = x \text{ et } \forall t \in]0,T[, f(t) > x\}$$

$\Omega_{exc}^{>x}$ est l'espace des **excursions** au-dessus de x. Soit η la mesure de Lévy-Ito sur $\Omega_{exc}^{>0}$ décrite dans [2], chapitre XII. On note abusivement $(\eta + x)$ la mesure sur $\Omega_{exc}^{>x}$ image de η par ajout de $+x$ aux excursions. Si $k \equiv 0$, alors le comportement au-dessus de x du mouvement brownien issue de x est donné par un processus ponctuel de poisson à valeurs dans $\Omega_{exc}^{>x}$, d'intensité $(\eta + x)$, paramétré par le temps local en x (voir [2], chapitre XII). Si $k \neq 0$, alors on a toujours un processus ponctuel de poisson dans $\Omega_{exc}^{>x}$ avec une intensité η_k^x absolument continue par rapport à $(\eta+x)$, mais pour $y \neq x$, η_k^y n'est en général pas l'image de η_k^x par une simple translation. Ces mesures sur les excursions permettent de décrire le comportement au-dessus de leur minimum des boucles browniennes sous μ. Le résultat suivant est une observation de l'auteur de ce mémoire.

Proposition 7

La mesure μ se désintègre de manière suivante :

$$\mu(\cdot) = 2\int_{x>0} \eta_k^x(\cdot)\, dx$$

En particulier si $k \equiv 0$, μ est mesure image de $2\mathbf{1}_{x>0}dx \otimes \eta$ par $(x, f : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[) \longmapsto x + f$.

De la même manière que le mouvement brownien, les boucles browniennes sous μ possèdent des temps locaux continus. Pour une boucle $(\gamma(t))_{0\leq t\leq T}$, et $x \in]0,+\infty[$, on note $l^x(\gamma)$ l'éventuelle limite quand $\epsilon \to 0$ de $\dfrac{1}{2\epsilon}\int_{t=0}^{T} \mathbf{1}_{|\gamma(t)-x|\leq\epsilon}dt$. Cette limite existe μ-p.p. et μ-p.p. est continue en x. Si $\mathcal{B}_c$ est l'ensemble poissonien de boucles d'intensité $c\mu$, on introduit comme dans la section 3 son champ d'occupation $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$:

$$\mathcal{L}_c(x) := \sum_{\gamma\in\mathcal{B}_c} l^x(\gamma)$$

On considère dans la suite $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ comme un processus stochastique paramétré par $x > 0$ où x évolue dans le sens croissant. Voici quelques résultats sur le champ d'occupation :

Proposition 8

$(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ admet une version finie en tout point, continue en x, avec $\lim_{x\to 0+} \mathcal{L}_c(x) = 0$. $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ est un processus de Markov non homogène vérifiant l'EDS :

$$d\Lambda_x = 2\sqrt{\Lambda_x}d\beta_x + \left(2\frac{d\log(u_2)}{dx}(x)\Lambda_x + 2c\right)dx$$

où β_x désigne un mouvement brownien "spatial". Pour $c = 1$, $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ est le carré d'un processus gaussien à accroissements indépendants, en général non stationnaires si $\neq 0$ (résultat analogue à celui de la proposition 5). Si $k \equiv 0$, alors u_2 est constant et $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ est un processus carré de Bessel de paramètre $2c$, issu de 0 en $x = 0$. Quelque soit la valeur de k, $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ si $c \geq 1$. Si $c \in]0,1[$, $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ s'annule presque sûrement une infinité de fois sur $]0,+\infty[$.

Étant donné un mouvement brownien issu de $x_0 > 0$, $\left(L_\xi^x(B), x \geq x_0\right)$ est un **processus de branchement**. Si $k \equiv 0$, il est homogène, et si $k \neq 0$ il ne l'est en général pas. Pour

$k \equiv 0$ ce fait est connu comme le théorème de Ray-Knight (voir [2],chapitre XI). Le champ d'occupation $(\mathcal{L}_c(x), x > 0)$ est un **processus de branchement avec immigration** (voir [8]), avec le même mécanisme de branchement que pour $\left(L^x_\xi(B), x \geq x_0\right)$, et avec pour **mesure d'immigration** $2cdx$. Étant donné deux niveaux $0 < x_1 < x_2$, le branchement entre x_1 et x_2 correspond au boucles de $\mathcal{B}_c$ passant par x_1, et l'immigration entre x_1 et x_2 aux boucles de $\mathcal{B}_c$ dont le minimum est dans $]x_1, x_2[$. Il est remarquable que, bien qu'il n'y ait qu'un nombre dénombrable de boucles dans l'ensemble poissonien $\mathcal{B}_c$, et donc un nombre dénombrable de minima de boucles, correspondant aux instants d'immigration, la mesure d'immigration est une mesure continue.

5 Ensemble poissonien de boucles du mouvement brownien en dimension deux. Construction des ensembles CLE

Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$. Soit μ la mesure sur les boucles du mouvement brownien standard dans D, tué au temps d'atteinte de ∂D et $(\mathcal{B}_c, c > 0)$ le processus ponctuel de poisson correspondant. Si ϕ est une transformation conforme de D dans D, alors l'image du mouvement brownien dans D par ϕ est égale en loi à un mouvement brownien dans D changé de temps. En particulier si on ne s'intéresse pas à la paramétrisation par le temps mais seulement à la trajectoire du mouvement brownien, sa loi est invariante pas les transformation conformes. Par la propriété d'invariance par changement de vitesse (proposition 1), l'image par ϕ de $\mathcal{B}_c$ est encore un ensemble poissonien de boucles de même loi que $\mathcal{B}_c$ modulo un changement de temps dans la paramétrisation des boucles. En particulier la loi "trajectoire" des boucles est invariante par transformations conformes. Si U est un ouvert de D, par la proposition 2, l'ensemble des boucles de $\mathcal{B}_c$ contenues entièrement dans U est un ensemble poissonien de boucles $\mathcal{B}^U_c$ d'intensité $c\mu^U$ où μ^U est la mesure sur les boucles associée au mouvement brownien dans U tué au temps d'atteinte de ∂U. Si ψ est une transformation conforme de U dans D, alors l'image par ψ de la "trajectoire" des boucles dans $\mathcal{B}^U_c$ (en ignorant la paramétrisation par le temps) est égale en loi à la "trajectoire" des boucles dans $\mathcal{B}_c$. Ces propriétés d'invariance par transformations conformes de l'ensemble poissonien des boucles browniennes en dimension 2 permettent de faire le lien avec les **ensembles CLE** :

On considère les ensembles aléatoires $\mathcal{E}$ de boucles, vues géométriquement comme une trajectoire qui se referme, donc à changement de paramétrisation près, et non orientées, dans un domaine simplement connexe stricte D de $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- Chaque boucle est simple.
- Les boucles sont deux à deux disjointes.
- L'intérieur délimité par une boucle ne contient aucune autre boucle.
- $\forall \epsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de boucles de diamètre plus grand que ϵ
- (**propriété d'invariance conforme**) La loi de l'ensemble de boucles est invariante par transformations conformes de D dans D
- (**propriété de restriction**) Si F est un fermé de D tel que $D \setminus F$ est simplement connexe, si $\mathcal{E}_F$ est l'ensemble des boucles dans $\mathcal{E}$ intersectant F et

$$\tilde{F} := F \cup \bigcup_{\gamma \in \mathcal{E}_F} (\textit{intrieur delimite par } \gamma)$$

alors en toute généralité $D \setminus \tilde{F}$ est un ouvert et ses composantes connexes sont simplement connexes. Si $\mathcal{C}$ et une telle composante connexe, on exige que la loi de l'ensemble des boucles dans $\mathcal{E}$ contenues dans $\mathcal{C}$, conditionnellement à $\mathcal{E}_F$, soit l'image de la loi de $\mathcal{E}$ par une transformation conforme de D dans $\mathcal{C}$.

Dans [11] sont classifiés tous les ensembles aléatoires de boucles satisfaisant les propriétés ci-dessus : ce sont les ensembles CLE_κ pour $\kappa \in \left]\frac{8}{3}, 4\right]$. Dans [10] est présentée une construction des ensembles CLE utilisant les ensembles poissoniens de boucles browniennes, qu'on va exposée ici.

Dans les ensembles poissoniens de boucles $(\mathcal{B}_c, c > 0)$ dans un ouvert simplement connexe D, presque sûrement aucune boucle n'est simple et chaque boucle en intersecte une autre. On peut définir une relation d'équivalence sur les boucles dans $\mathcal{B}_c$: $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ s'il existe une suite $(\gamma_0, ..., \gamma_n)$ de boucles dans $\mathcal{B}_c$ tel que $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_n = \tilde{\gamma}$ et γ_i intersecte γ_{i+1} (existence d'une chaîne de boucles qui s'intersectent joignant γ et $\tilde{\gamma}$). On appelle **amas** une classe d'équivalence pour la relation précédente. Deux amas distincts sont par définition disjoints. On dit qu'un amas C_1 entoure un amas C_2 si C_2 est contenu dans une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus C_1$. On dit qu'un amas est extérieur s'il n'est entouré par aucun autre amas. On appelle bord extérieur d'un amas C le bord de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus C$. Dans [10] le résultat suivant est démontré :

Proposition 9

Si $c > 1$, il n'y a presque sûrement qu'un seul amas et il est dense dans D. Si $c \in]0, 1]$, alors :

- *Il y a p.s. une infinité d'amas.*
- *P.s. chaque amas est extérieur ou entouré par un amas extérieur.*
- *P.s. les adhérences de deux amas disjoints sont disjointes.*
- *P.s. les adhérences d'aucun amas ne touchent le bord de D.*
- *P.s. la frontière extérieure de chaque amas est un lacet de Jordan.*
- *L'ensemble des bords extérieurs des amas extérieurs est égal en loi à un ensemble CLE_κ avec $c = \dfrac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$*

Ainsi il y a une correspondance bijective entre les ensembles CLE_κ pour $\kappa \in]\frac{8}{3}, 4]$ et les ensembles poissoniens $\mathcal{B}_c$ pour $c \in]0, 1]$. La propriété d'invariance conforme des bords extérieurs des amas extérieurs est essentiellement une conséquence de la propriété d'invariance par changement de vitesse de la mesure μ, et la propriété de restriction pour les bords extérieurs est conséquence de la propriété de restriction pour la mesure μ. Consulter également [13] pour une présentation des ensembles CLE et de cette construction.

La construction à travers les ensembles poissoniens de boucles permet de montrer la propriété suivante des ensembles CLE : Étant donné deux ensembles CLE_κ et $CLE_{\tilde{\kappa}}$ indépendants dans D, en les superposant on obtient des amas deux à deux disjoints constitués de chaînes de boucles qui s'intersectent. Si $\dfrac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} + \dfrac{(3\tilde{\kappa} - 8)(6 - \tilde{\kappa})}{2\tilde{\kappa}} \leq 1$, alors les bords extérieurs des amas extérieurs ainsi formés sont encore un ensemble $CLE_{\hat{\kappa}}$ avec $\dfrac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} + \dfrac{(3\tilde{\kappa} - 8)(6 - \tilde{\kappa})}{2\tilde{\kappa}} = \dfrac{(3\hat{\kappa} - 8)(6 - \hat{\kappa})}{2\hat{\kappa}}$.

Références

[1] R. B. Bapat. Infinite divisibility of multivariate gamma distribution and m-matrices. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics*, 1989.

[2] Marc Yor Daniel Revuz. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 1999.

[3] Eugene B. Dynkin. Local times ans quantum fields. In *Seminar on Stochastic processes, Gainesville 1982.*

[4] Wendelin Werner Gregory Lawler. The brownian loop soup. *Probability Theory and Related Fields*, 2004.

[5] Yuval Peres Oded Schramm Itai Benjamini, Russell Lyons. Uniform spanning forests. *Annals of Probability*, 2001.

[6] David B. Wilson James G. Propp. How to get a perfectly random sample from a generic markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph. *Journal of Algorithms*, 1998.

[7] Yves Le Jan. *Markov paths, loops and fields.* à paraître, 2011.

[8] Shinzo Watanabe Kiyoshi Kawazu. Branching processes with immigration and related limit theorems. *Theory of Probability and its Applications*, 1971.

[9] Haya Kaspi Nathalie Eisenbaum. A characterization of the infinitely divisible squared gaussian processes. *Annals of Probability*, 2006.

[10] Wendelin Werner Scott Sheffield. Conformal loop ensembles : Construction via loop-soups. *ArXiv math10062373*.

[11] Wendelin Werner Scott Sheffield. Conformal loop ensembles : The markovian characterization. *ArXiv math10062374*.

[12] Scott Sheffield. Gaussian free fields for mathematicians. *Probability Theory and Related Fields*, 2007.

[13] Wendelin Werner. Poisson point processes, excursions and stable processes in two-dimensional structures. *Stochastic processes and their application*, 2010.