Mémoire de magistère du DMA 12 Octobre 2011

Arrêt optimal et application à la valorisation des options américaines

Gary OGER

Encadré par Gérard BIAU

Table des matières

1 Introduction et motivation

De nombreuses méthodes faisant appel en particulier au calcul stochastique ont été développées depuis quelques dizaines d'années pour la valorisation d'actifs financiers. Les premiers travaux dans ce domaine sont dus à Louis Bachelier autour de 1900, qui a initié l'étude des marchés dans un cadre mathématique formel. Dans les années 1970, Black, Scholes et Merton, en développant des modèles probabilistes permettant de calculer explicitement des prix d'*options financières*, ont ouvert la voie à une nouvelle branche des mathématiques appliquées concernant l'évaluation et la couverture des options.
De façon générale, on peut définir une option commme un contrat offrant le droit (et non l'obligation) d'acquérir ou de vendre un *actif* (par exemple, une action) à un prix fixé et dans le futur (à une date fixée, appelée *maturité*, ou pendant un certain intervalle de temps). Pour fixer les idées, notons S_t le prix (fonction du temps) d'une action S, et considérons le cas classique du *call européen* : cette option donne le droit à son détenteur d'acheter l'action S, au prix K (appelé *strike* selon la terminologie anglaise) et au temps T (par exemple, dans un mois, dans un an, etc.).
Si, au temps T, l'action a une valeur d'échange supérieure à K, l'acheteur a intérêt à *exercer* son option (il réalise un profit $S_T - K$ en achetant l'action à prix K et en la revendant aux prix de marché). Dans le cas contraire, il ne l'exerce pas. Son gain est donc de $h(S_T) = (S_T - K)^+$. h est généralement appelée la fonction de *payoff*.
En fait, on voit que l'option peut être définie de manière plus synthétique par son payoff et sa date (ou ses dates) d'exercice. Le problème est de déterminer, en fonction de ces paramètres, à quel prix doit être vendue cette option. D'un point de vue mathématique, le prix *juste* (encore appelé prix d'arbitrage) est celui pour lequel le gain global de l'acheteur (c'est-à-dire le profit réalisé lors de l'exercice moins le prix d'achat de l'option) est en moyenne nul.
Parallèlement, le vendeur d'options, qui reçoit au temps initial la *prime d'option*, cherche à mettre en place avec cet apport une stratégie de couverture, sur le marché, qui lui garantisse au temps T d'être en mesure de payer à l'acheteur ce qu'il lui doit (c'est-à-dire le payoff).
On voit ici apparaître la première motivation pour le développement de modèles dans lesquels les actifs sont décrits par des processus stochastiques, et qui permettent d'exprimer les prix d'options sous la forme de calculs d'espérance. Dans ce document, on s'intéressera au problème de l'évaluation des options dites *américaines*.
Contrairement à l'exemple du call européen présenté ci-dessus, qui ne peut être exercé qu'à l'instant T (au sens où le payoff ne dépend que de la valeur de l'actif en T), une option américaine peut être exercée sur tout un intervalle de temps, généralement entre l'achat et une maturité T (on notera l'intervalle $[0, T]$). L'acheteur doit donc décider (en fonction de l'information présente sur le marché) à quel instant il a le plus intérêt à exercer son option.
Par conséquent, la valorisation des options américaines passe par l'étude des temps d'arrêt optimaux. Après avoir introduit un cadre probabiliste formel pour l'étude des marchés financiers et des options américaines, on présentera des résultats généraux de la théorie de l'arrêt optimal, puis on verra comment les appliquer au problème de l'évaluation de ces options.

2 Marché financier et options américaines

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continue à droite. Le *marché* est constitué de deux types d'actifs, qui sont représentés comme des processus aléatoires :

- l'actif dit *sans risque* : $S_t^0 = \exp \int_0^t r_s ds$ (où r_s est un taux d'intérêt continu, dit taux sans risque, qui peut être déterministe ou aléatoire). Il s'agit simplement de l'évolution de la valeur d'un investissement initial unitaire ($S_0 = 1$) rémunéré au taux r_s.
- les actifs risqués $\left(S_t^1, \ldots, S_t^d\right)_{t\geq 0}$, processus aléatoires adaptées à $\mathcal{F}_t$, et qui peuvent correspondre entre autres à des prix d'actions, des taux de change entre différentes monnaies, etc. On notera $S_t = (S_t^1, \ldots, S_t^d)$.

L'intervention sur le marché se fait selon une stratégie d'investissement (dans les deux types d'actifs) telle que le gain réalisé si l'on arrête la stratégie au temps t, noté h_t, est $\mathcal{F}_t$-mesurable. De plus, on peut s'arrêter selon une stratégie aléatoire (par exemple, on investit dans l'actif S^1 et l'on s'arrête dès qu'il atteint une valeur donnée). On définit donc simplement une stratégie d'arrêt comme un temps d'arrêt τ, c'est-à-dire tel que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

2.1 Notion d'options européennes et américaines

On se place à horizon fini $T \in \mathbb{R}_+^*$. On distingue deux types de stratégies d'investissement :

- une gestion quotidienne d'un portefeuille (achat/vente d'actifs risqués et investissement dans l'actif sans risque), dont la valeur à l'instant t, h_t, est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- l'achat d'options, évoquées dans l'introduction, produits synthétiques qui garantissent le versement d'un payoff h_t (fonction de la valeur d'actifs risqués) à une date $t \in [0, T]$. On distingue les options **européennes** dont le payoff est toujours versé à l'instant final : $h_T = \Phi(S_T) \geq 0$, $\mathcal{F}_T$-mesurable, des options **américaines**, qui peuvent être exercées, au choix de l'acheteur, à n'importe quel instant $t \in [0, T]$. Le payoff $h_t = \Phi(S_t) \geq 0$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Par exemple, pour l'option *call européen* évoquée dans l'introduction, on a $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$.

On s'intéresse ici aux options américaines, dont on voit, contrairement aux européennes, qu'elles impliquent une stratégie d'arrêt de la part de l'investisseur. Deux questions se posent : quelle est la valeur (fonction du payoff) d'une telle option et y a-t-il un instant τ optimal pour l'investisseur (au sens où il maximise son espérance de gain) pour exercer son option ?
Considérons l'approche intuitive suivante qui nous guidera pour la suite. Si l'acheteur s'arrête selon une stratégie (*ie* un temps d'arrêt) τ, il reçoit h_τ. Vu de la date 0, ce versement a une valeur $\mathbb{E}\left[\left.\frac{h_\tau}{S_\tau^0}\right| \mathcal{F}_0\right]$, où l'on rappelle que S^0 est l'actif sans risque. En effet tout flux futur doit être *actualisé* via le facteur $\frac{1}{S_\tau^0}$ car c'est la quantité qu'il suffit d'avoir aujourd'hui pour s'assurer (en investissant au taux sans risque) de posséder 1 en τ (en d'autre termes, la valeur d'un versement de valeur 1 à un temps futur τ n'est que de $\frac{1}{S_\tau^0}$ au temps 0).
Dès lors, il apparaît que le prix de l'option au temps 0 devrait être :

$$V_0 = \sup\left\{\mathbb{E}\left[\left.\frac{h_\tau}{S_\tau^0}\right| \mathcal{F}_0\right]; \tau \text{ t.a. à valeurs dans } [0, T]\right\}$$

et plus généralement :

$$V_t = \sup\left\{\mathbb{E}\left[\left.\frac{h_\tau}{S_\tau^0}\right| \mathcal{F}_t\right]; \tau \text{ t.a. à valeurs dans } [t, T]\right\} \tag{2.1}$$

En effet, s'il est moindre, cela signifie qu'il existe une stratégie avec laquelle le détenteur de l'option gagne plus (en moyenne) que le prix d'achat, donc il n'y a pas d'intérêt pour le vendeur. Et vice-versa si le prix est supérieur. Il s'agit donc intuitivement du prix *juste*.
Notre but est d'étudier plus précisément la valeur exprimée dans l'équation 2.1 (on peut s'intéresser au processus V_t du prix, et pas seulement à sa valeur au temps 0.). Malheureusement, V_t n'est, a priori, pas une variable aléatoire. Dans la suite, on verra comment contourner ce problème via l'enveloppe de Snell, comment caractériser un ou des éventuel(s) temps d'arrêt optimaux (c'est-à-dire qui permettent de réaliser effectivement un profit égal en moyenne au prix de l'option), et comment dans ce cadre définir des méthodes pratiques de calcul du prix.

3 Enveloppe de Snell et arrêt optimal

3.1 Enveloppe de Snell : définition et propriétés

On considère une famille de variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Proposition 3.1. *Il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, unique à indistingabilité près, telle que :*

- $\forall i \in I,\ (X_i \leq Y \ ps)$

- *si Y' est telle que ($\forall i \in I$, ($X_i \leq Y$ ps)), alors $Y \leq Y'$ ps*

On appelle Y le supremum essentiel de la famille $(X_i)_{i\in I}$, et on note $Y = \mathbb{P} - \underset{i\in I}{supess}\ Y_i$

Cette notion de supremum essentiel sera centrale dans la théorie de l'arrêt optimal, et dans la suite pour définir correctement les objets nécessaires à l'étude de l'équation 2.1. Rappelons d'abord quelques définitions.

Définition 3.2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté (typiquement une surmartingale dans la suite) continu à droite. On dit qu'il est régulier si :

$$\forall \tau_n \uparrow \tau,\ \tau_n\ \mathcal{F}_t - t.a. \text{ tq } \tau < \infty \text{ ps et } X_\tau \in L^1, \text{ alors :}$$

$$X_{\tau_n} \in L^1 \text{ apcr et } \mathbb{E}[X_{\tau_n}] \to \mathbb{E}[X_\tau]$$

Définition 3.3. $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t$-adapté et continu à droite est de la classe (D) si $\{X_\tau;\ \tau\ \mathcal{F}_t{-}t.a. \text{ tq } \tau < \infty \text{ ps}\}$ est uniformément intégrable.

Passons maintenant à l'enveloppe de Snell, qui va donner un sens probabiliste à l'expression 2.1. Dans toute la suite, on considère un processus (Z_t) adapté, tel que :

i) $t \mapsto Z_t$ est continue à droite ps.

ii) $\forall t \geq 0,\ Z_t \geq 0$ ps

iii) $\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} Z_t\right] < \infty$

Dans le cadre des options américaines, Z_t représentera le processus de *payoff*, ou le processus *obstacle* (au sens où c'est la valeur de ce payoff à l'instant t qui détermine s'il est optimal d'exercer l'option). Notons que l'on peut travailler à horizon fini $T \in \mathbb{R}_+^*$ en posant $Z_t = Z_T$ pour $t \geq T$.

Définition 3.4 (Enveloppe de Snell)**.** Pour $t \geq 0$, posons :

$$U_t = \mathbb{P} - supess \left\{\mathbb{E}\left[\, Z_\tau \middle| \mathcal{F}_t\right],\ \tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}\right\}$$

où $\mathcal{T}_{t,\infty}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t, \infty[$. Ceci définit un processus $(U_t)_{t\geq 0}$ qu'on appelle l'enveloppe de Snell de (Z_t) et que l'on note parfois $Snell(Z)$. Il est facile de voir d'après l'hypothèse iii) ci-dessus que U_t existe bien dans L^1.

En gardant en tête notre objectif de valorisation des options américaines, on voit déjà apparaître l'enveloppe de Snell comme le bon objet d'étude. Donnons-en quelques caractérisations :

Proposition 3.5. i) *$(U_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-surmartingale (positive).*

ii) $\mathbb{E}[U_t] = \sup\{\mathbb{E}[Z_\tau],\ \tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}\}$

iii) *$t \mapsto \mathbb{E}[U_t]$ est continue à droite, et on peut en déduire (propriétés des surmartingales) qu'elle admet une version continue à droite.*

En particulier, ceci implique que $(U_t)_{t\geq 0}$ est de la classe (D). La proposition suivante donne la caractérisation intéressante de l'enveloppe de Snell.

Proposition 3.6. *L'enveloppe de Snell est la plus petite surmartingale continue à droite majorant l'obstacle (Z_t), c'est-à-dire :*

i) *On a ps : $U_t \geq Z_t$ $\forall t$ et (U_t) est une surmartingale càd.*

ii) *Si, ps, $V_t \geq Z_t$ $\forall t$ et (V_t) est une surmartingale càd, alors ps, $\forall t$, $V_t \geq U_t$.*

Preuve. *On a $\mathbb{P}-ps$ $(\forall s \geq 0, V_s \geq Z_s)$, d'où pour $\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}$, $V_\tau \geq Z_\tau$ $\mathbb{P}-ps$. Comme (V_t) est une surmartingale positive, elle est fermée, donc $V_t \geq \mathbb{E}[V_\tau|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_t]$ ps.*
Ainsi $V_t \geq \underset{\mathcal{T}_{t,\infty}}{supess}\{\mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_t]\} = U_t$.

On a de plus la propriété suivante :

Proposition 3.7.

$$\lim_{t\to\infty} U_t = \limsup_{t\to\infty} Z_t. \tag{3.1}$$

Notons que tous les résultats s'étendent à horizon fini en remplaçant $\mathcal{T}_{t,\infty}$ par $\mathcal{T}_{t,T}$.

3.2 Quelques résultats en temps discret

Dans cette section, on présente une approche discrète du cadre de travail défini ci-dessus, qui permettra de donner une méthode concrète de calcul de l'enveloppe de Snell, et donc de la valeur des options américaines.
On suppose désormais que $t \in \{t_0, \dots, t_n, \dots\}$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots$, et on pose $Z_{t_k} = Z_k$, $\mathcal{F}_{t_k} = \mathcal{F}_k$. On note $\mathcal{T}_{n,\infty}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans $\{n, n+1, \dots\}$ et l'on suppose que $\mathbb{E}[\sup_n Z_n] < \infty$ (ce qui implique en particulier que (Z_k) est de la classe (D)). On définit l'enveloppe de Snell à temps discret :

$$U_n = supess\{\mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_n],\ \tau \in \mathcal{T}_{n,\infty}\}$$

On a la même caractérisation qu'en temps continu, à savoir :

i) (U_n) est la plus petite surmartingale majorant (Z_n).

ii) $\mathbb{E}[U_n] = \sup\{\mathbb{E}[Z_\tau],\ \tau \in \mathcal{T}_{n,\infty}\}$

L'intérêt de cette description discrète réside dans le principe de programmation dynamique suivant.

Proposition 3.8 (Programmation dynamique)**.**

$$U_k = \max(Z_k, \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k]) \tag{3.2}$$

Eléments de preuve. *Par définition de U, on a $U_k \geq Z_k$ ps (considérer le temps d'arrêt constant égal à k), et $U_k \geq \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k]$ (prendre le temps d'arrêt égal à $k+1$). Ainsi $U_k \geq \max(Z_k, \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k])$.*
D'autre part, en écrivant $\tau \in \mathcal{T}_{k,\infty}$ comme $\tau = k1_{\tau=k} + \tau \vee (k+1)1_{\tau \geq k+1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_k] &= Z_k 1_{\tau=k} + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[Z_{\tau\vee(k+1)}|\mathcal{F}_{k+1}]}_{\leq U_{k+1}}|\mathcal{F}_k]1_{\tau\geq k+1} \\
&\leq Z_k 1_{\tau=k} + \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k]1_{\tau\geq k+1} \\
&\leq \max(Z_k, \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k])
\end{aligned}$$

En pratique, on utilise le principe de programmation dynamique à horizon fini n. On connaît la valeur de l'enveloppe de Snell au temps final : $U_n = \sup_{\mathcal{T}_{n,n}} \mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_n] = Z_n$, et l'équation 3.2 permet d'évaluer $U_{n-1}, U_{n-2}, \dots$ par une récurrence rétrograde.
Dans le cadre des options américaines, Z_k est la valeur d'exercice (c'est-à-dire le payoff que l'on reçoit si l'on exerce à l'instant t_k), et U_k est a priori (on le verra dans la suite) la valeur de l'option elle-même.
Le principe de programmation dynamique prend alors un sens clair : si la valeur d'exercice à l'instant t_k est plus grande que la valeur *temps* (c'est-à-dire ce que l'on peut espérer gagner en n'exerçant pas tout de suite, *ie* $\mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k]$), il est préférable d'exercer, sinon il est préférable de conserver l'option. La valeur de cette dernière est donc le maximum de ces deux grandeurs.
Avant de donner plus de précisions sur ces points, voyons ce que l'on peut dire de manière général sur les temps d'arrêt optimaux.

3.3 Temps d'arrêt optimal

3.3.1 Définition et caractérisation

Définition 3.9. **i)** On dit que τ^* est un temps d'arrêt optimal, vu de $t = 0$, pour le problème d'arrêt $((Z_t)_{t\geq 0}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ si $\mathbb{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbb{E}[U_0] = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}[Z_\tau]$.

ii) Vu de $t \geq 0$, on a la même caractérisation : $\mathbb{E}[Z_{\tau_t^*}] = \mathbb{E}[U_t] = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbb{E}[Z_\tau]$.

Du point de vue des options américaines, un temps d'arrêt optimal sera donc un temps d'arrêt qui permet effectivement de réaliser la valeur initiale de l'option au moment de l'exercice. On a la caractérisation suivante.

Proposition 3.10. *τ^* est optimal vu de 0 si et seulement si :*

i) $U^{\tau^*} = (U_{t\wedge\tau^*})_{t\geq 0}$ *est une martingale.*

ii) $U_{\tau^*} = Z_{\tau^*}$

Avant de s'intéresser à l'existence de temps optimaux, on donne un point de vue déterministe qui éclaire la proposition ci-dessus et le lien entre (U_t) et (Z_t). Supposons donc que tous les processus sont déterministes (ce qui revient à postuler $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ $\forall t$). $Z = (z_s)_{s\geq 0}$ et $U = (u_t)_{t\geq 0}$ sont donc des fonctions et on a $u_t = \sup_{s\geq t} z_s$.

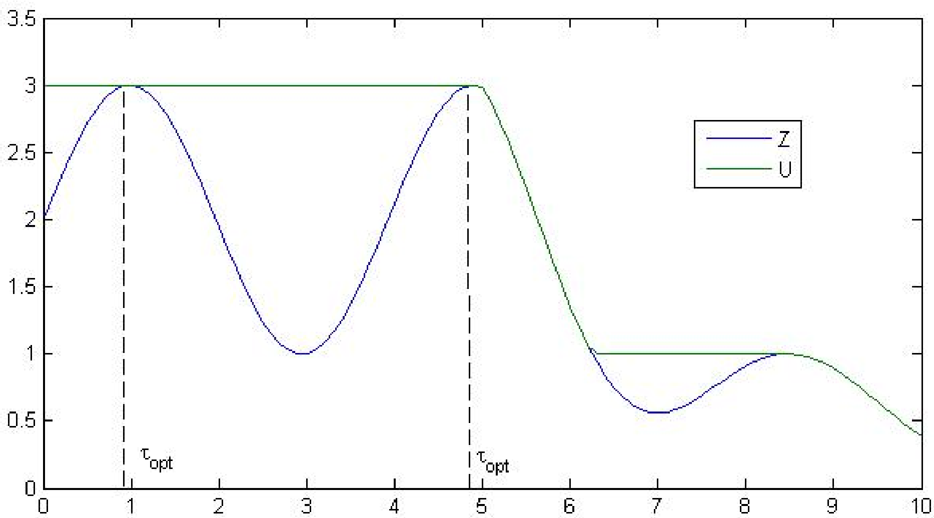

Figure 3.1 – Processus obstacle (Z), enveloppe de Snell (U), et temps d'arrêt optimaux

Sur la figure 3.1, on représente les deux processus Z et U. Ici, il y a deux temps d'arrêt optimaux, et l'on voit que, jusqu'au plus grand temps d'arrêt optimal, U est martingale (c'est-à-dire constante ici). Notons qu'entre les deux temps d'arrêt optimaux, il n'y en a aucun autre. Par ailleurs, il peut ne pas exister de temps d'arrêt optimal (par exemple si Z est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). A horizon fini, si $Z_t \leq Z_T$ $\forall t \leq T$, alors le plus grand temps d'arrêt optimal est toujours T. On verra (et c'est naturel) que l'équivalent aléatoire de cette condition est $Z_t \leq \mathbb{E}[Z_T|\mathcal{F}_t]$.

3.3.2 Existence de temps d'arrêt optimaux

Au vu de ce qui précède, $\tau_* = \inf\{t \geq 0 \text{ tq } U_t = Z_t\}$ est un candidat naturel pour un temps d'arrêt optimal. On s'intéresse d'abord aux temps d'arrêt ϵ-optimaux. On pose, pour $\epsilon > 0$, $D_t^\epsilon = \inf\{s \geq$

$t; U_s < Z_s + \epsilon\}$. La proposition 3.7 implique alors que pour $t \geq 0$, $\epsilon > 0$, $D_t^\epsilon < \infty$. Et c'est un temps d'arrêt comme temps d'entrée d'un processus càd $\mathcal{F}_t$-adapté dans l'ouvert $]-\infty, \epsilon[$.
On a la proposition suivante :

Proposition 3.11. *Pour $\epsilon > 0$ et $t \geq 0$, D_t^ϵ est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt et :*

$$\mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[U_{D_t^\epsilon}] \text{ et } \mathbb{E}[U_{D_t^\epsilon}] \leq E[Z_{D_t^\epsilon}] + \epsilon$$

Eléments de preuve. *(U_t) est une surmartingale positive de la classe (D), donc par le théorème de Doob-Mayer on peut écrire $U = M - A$ où :*

i) *M est une martingale de la classe (D).*

ii) *A est un processus prévisible, croissant, et $A_0 = 0$.*

On peut alors montrer que (A_t) et $A_{D_t^\epsilon}$ sont indistinguables (c'est la partie « difficile »de la preuve qu'on ne détaille pas ici, l'intérêt est d'introduire le processus (A_t) qui sera utile dans la suite). On a donc facilement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_t] &= \mathbb{E}[M_t] - \mathbb{E}[A_t] \\ &= \mathbb{E}[M_{D_t^\epsilon}] - \mathbb{E}[A_{D_t^\epsilon}] \\ &= \mathbb{E}[U_{D_t^\epsilon}]\end{aligned}$$

De plus $D_t^\epsilon < \infty$ et U et Z sont continues à droite donc $U_{D_t^\epsilon} \leq Z_{D_t^\epsilon} + \epsilon$, et ainsi :

$$\mathbb{E}[U_{D_t^\epsilon}] \leq \mathbb{E}[Z_{D_t^\epsilon}] + \epsilon$$

Cette approximation via les temps d'arrêt ϵ-optimaux permet de prouver l'existence d'un temps d'arrêt optimal dans le cas d'un obstacle (Z_t) régulier.

Théorème 3.12. *On suppose que (Z_t) est régulier, c'est-à-dire qu'il est continu et vérifie $\mathbb{E}[\sup_{\mathbb{R}_+} Z_s] < \infty$. On a :*

i) *$(U_t) = Snell(\{Z_t\})$ est lui aussi régulier.*

ii) *Si l'on pose $\tau_0 = \inf\{s \geq 0 \text{ tq } U_s = Z_s\}$, alors il existe un temps d'arrêt optimal si et seulement si $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1$, et alors τ_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal.*

On voit de plus qu'en se plaçant à horizon fini $T > 0$, on a $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = \mathbb{P}(\tau_0 \leq T) = 1$, donc sous les hypothèses de régularité l'existence d'un temps d'arrêt optimal est garantie. Si l'on se place de plus dans un cadre discret, l'hypothèse de régularité devient superflue, et il y a ainsi toujours un temps d'arrêt optimal au problème.
On peut enfin s'intéresser au plus grand (s'il existe) temps d'arrêt optimal. On a la proposition suivante :

Proposition 3.13. *On suppose toujours que (Z_t) est un obstacle régulier. Alors :*

i) *Si τ^* est un temps d'arrêt optimal, alors $\tau^* \leq \tau_{max} = \inf\{s; A_s > 0\}$.*

ii) *Si $\mathbb{P}(\tau_{max} < \infty) = 1$, alors τ_{max} est optimal.*

On peut en déduire, à horizon fini, un résultat déjà évoqué plus haut (dans le cas déterministe), à savoir que, si ps, $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}[Z_T | \mathcal{F}_t \geq Z_t]$, alors $\tau_{max} = T$.
Avant de passer à la théorie de la valorisation des options américaines et l'application de la théorie ci-dessus, résumons ce que nous avons montré. Guidés par l'équation 2.1 qui décrit a priori (on le détaille dans la section suivante) le prix d'une option américaine, on a défini l'enveloppe de Snell qui permet de donner un sens probabiliste à cette équation. Nous avons fait le lien entre le processus *obstacle* et son enveloppe de Snell, en particulir via le principe de programmation dynamique, et nous avons vu comment on pouvait définir des temps d'arrêt optimaux au problème en considérant ces deux processus.

4 Application à la valorisation et à la couverture d'options américaines

On commence par décrire le cadre de travail qui permet de définir correctement le prix d'options financières, ce qui fera le lien avec la section 2 et nous permettra de comprendre la formule 2.1. Puis on verra comment utiliser les résultats de la section 3 dans ce cadre.

4.1 Cadre discret

On commence par un calcul simple à temps discret et horizon fini qui fournit une intuition pour les formules de valorisation d'options. On considère comme dans la section 2 des actifs $S = (S^1, \dots, S^d)$, définis entre 0 et n, $(S_k)_{0 \le k \le n}$, et une option qui verse un payoff $h(S_n)$ au temps n (il s'agit donc d'une option européenne).
On suppose en outre que le taux d'intérêt est nul, ainsi il n'y a pas de facteur d'actualisation pour la valorisation. Pour le vendeur de l'option, la question est de savoir s'il peut mettre en place une stratégie d'investissement dans les actifs S qui lui permette de payer $h(S_n)$ à l'acheteur à maturité.
On définit $\mathcal{F}_k = \sigma(S_t; t = 0, \dots, k)$
On définit ici une stratégie d'investissement comme un processus $(\phi_k)_{0 \le k \le n}$ tel que ϕ_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, et pour $k = 1, \dots, n$, ϕ_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable, et qui représente les quantités de chaque actif détenus dans le portefeuille, c'est-à-dire que la valeur du portefeuille à l'instant k est $\sum_{i=0}^{d} \phi_k^i S_k^i = \phi_k \cdot S_k$.
Le portefeuille de couverture doit être autofinançant au sens où l'investissement initial est simplement rebalancé à chaque pas de temps entre les différents actifs, sans nouvel apport, ce qui se traduit par la condition $\phi_{k-1} \cdot S_{k-1} = \phi_k \cdot S_{k-1}$. Le portefeuille permet alors de couvrir le payoff si $h(S_n) = \phi_n \cdot S_n$. On a :

$$\begin{aligned}
\phi_n \cdot S_n &= \phi_n \cdot S_n - \phi_0 \cdot S_0 + \underbrace{\phi_0 \cdot S_0}_{=V_0 \text{ : investissement initial}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\phi_k \cdot S_k - \phi_{k-1} \cdot S_{k-1}) + V_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot (S_k - S_{k-1}) + V_0
\end{aligned}$$

Pour que le portefeuille couvre effectivement l'option, on doit donc avoir $h(S_n) = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \Delta S_k$.
On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ qui rende tous les actifs $(S^1, \dots, S^d)$ martingales. Alors on a, d'après ce qui précède :

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[h(S_n)|\mathcal{F}_0]$$

Cette espérance, calculée sous une mesure qui rend les actifs martingales, est le prix à payer au temps 0 pour couvrir le payoff au temps n, et en ce sens, c'est le prix de l'option de payoff h. Ceci donne une première justification aux formules de la section 2. L'idée générale à retenir est que le prix de l'option est le prix de sa couverture via une stratégie d'investissement dans les actifs du marché. On parle aussi de *réplication* du payoff.

4.2 Cadre continu : portefeuilles et stratégies de couverture

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t) = \sigma(B_s; s \le t)$, à horizon fini T, où (B_s) est un mouvement brownien standard d-dimensionnel. On se donne toujours un actif non risqué $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_s ds)$ (parfois appelé *numéraire*), où r_s est progressivement mesurable et uniformément borné sur $[0, T] \times \Omega$.

On se donne d actifs risqués $(S^1, \dots, S^d) > 0$ (dont on suppose pour simplifier qu'ils ne versent pas de dividendes), et qui vérifient une équation stochastique de type Black-Scholes :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dB_t^j,\ i = 1, \dots, d \tag{4.1}$$

où μ_t (parfois appelé *drift*) et σ_t (volatilité) sont progressivement mesurables et uniformément bornées. On suppose en outre que pour tout $t \in [0,T]$, $\sigma_t \in GL_d(\mathbb{R})$, et que $t \mapsto \sigma_t^{-1}$ est bornée de $[0,T]$ dans $GL_d(\mathbb{R})$. Ceci implique en particulier, puisque $A \mapsto A^{-1}$ est une application continue, que $t \mapsto \sigma_t^{-1}$ est progressivement mesurable.
Il est plus intéressant de travailler avec la valuer *actualisée* des actifs car on va voir que ce sont ces processus qui peuvent être rendus martingales. On définit donc $\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0} = \exp(-\int_0^t r_s ds) S_t^i$.

Proposition 4.1. *Il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$, équivalente à $\mathbb{P}$, telle que $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale.*

Définition 4.2. i) De façon analogue au cas discret, on définit une stratégie comme un processus $H_t = (H_t^0, \dots, H_t^d)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable.

ii) La valeur du portefeuille associé est $V_t = H_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d H_t^i S_t^i$.

iii) On définit la valeur actualisée comme $\tilde{V}_t = H_t \cdot \tilde{S}_t$.

Définition 4.3. La condition d'autofinancement s'écrit de façon la plus générale possible :

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_s^0 dS_s^0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i dS_s^i - C_t \tag{4.2}$$

où C_t est un processus continu et adapté (processus de *consommation*). C'est ce que le détenteur *retire* du portefeuille.

Il est facile de voir que cette définition est équivalente à la conditition suivante sur le portefeuille actualisé :

$$\tilde{V}_t = V_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i d\tilde{S}_s^i - \tilde{C}_t \tag{4.3}$$

où $\tilde{C}_t$ est continu et adapté (a posteriori $C_t \exp(-\int_0^t r_s ds)$).
On a la propriété suivante concernant les portefeuilles auto-financés et qui nous servira à justifier la formule de valorisation d'une option américaine.

Proposition 4.4. *Sous $\mathbb{P}^*$, la valeur actualisée d'un portefeuille auto-financé est une surmartingale locale. Si, de plus, $(H_t)_{t\in[0,T]}$ est telle que, ps, $\forall t \in [0,T], V_t \geq 0$ (condition d'admissibilité), alors $(\tilde{V}_t)_{t\in[0,T]}$ est une surmartingale continue et positive.*

4.3 Application aux options américaines

On se place toujours sur le même espace de probabilitié muni de sa filtration brownienne et on considère un processus dit de *payoff américain*, $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, adapté et positif, qui vérifie les mêmes conditions que le processus obstacle dans la section 3 :

i) $\mathbb{P}$-ps, $t \mapsto Z_t$ est continue.

ii) $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} Z_t] < \infty$.

Par exemple, pour le *call américain* sur l'actif S^1, de *strike* K, on a $Z_t = (S_t^1 - K)^+$, qui représente la valeur d'exercice de l'option à l'instant t. On peut aussi considérer des options faisant intervenir plusieurs actifs, par exemple $Z_t = (S_t^1 - S_t^2 - K)^+$.
Il est clair que le processus de payoff actualisé $\tilde{Z}_t = \frac{Z_t}{S_t^0}$ vérifie les mêmes conditions, si l'on suppose que le taux d'intérêt (r_s) est uniformément borné sur $\Omega \times [0,T]$. C'est aussi un obstacle au sens de la théorie de l'arrêt optimal et il est de plus régulier. On souhaite établir le prix de l'option américaine relative à ce payoff.
Comme énoncé plusieurs fois dans les sections précédentes, l'enveloppe de Snell du payoff actualisé est un candidat naturel pour ce prix, au sens où . On définit :

$$\left(\frac{U_t}{S_t^0}\right)_{t\in[0,T]} := \mathbb{P}^* - Snell\left(\frac{Z_t}{S_t^0}\right) \tag{4.4}$$

Ceci peut encore s'écrire, pour $t \in [0,T]$:

$$U_t = \underset{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}{supess}\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\exp(-\int_t^\tau r_u du) Z_\tau|\mathcal{F}_t] \tag{4.5}$$

Il nous reste à justifier que 4.5 est effectivement le prix de l'option, du point de vue de la valeur du portefeuille de couverture. Par analogie avec le cas discret présenté plus haut, on a la définition suivante :

Définition 4.5. Un portefeuille auto-financé et admissible $(H_t)_{t\in[0,T]}$ est un portefeuille de couverture pour le payoff (Z_t) si on a ps :

$$\forall t \in [0,T], V_t \geq Z_t, \text{ ou encore } \forall t \in [0,T], \tilde{V}_t \geq \tilde{Z}_t.$$

Cette définition est intuitive et énonce le fait que le vendeur de l'option met en place une stratégie qui lui permet de couvrir (au minimum) le payoff de l'option à tout instant (puisque pour l'option américaine l'acheteur peut exercer à tout instant). Pour enfin justifier que 4.5 est le prix de l'option, il faut montrer que U_t est effectivement un portefeuille de couverture, et de plus que c'est le meilleur. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 4.6. *Si (H_t) est un portefeuille de couverture de (Z_t), alors on a ps :*

$$\forall t \in [0,T], V_t^H \geq U_t$$

Preuve. *On sait que $(\tilde{V}_t)$ est une $\mathbb{P}^*$-surmartingale positive (et continue) qui majore $(\tilde{Z}_t)$. Or par la proposition 3.6, $(\tilde{U}_t)$ est la plus petite surmartingale ayant ces propriétés, d'où le résultat.*

Théorème 4.7. *(U_t) est la valeur d'une stratégie autofinancée.*

On peut maintenant appliquer les résultats de la section 3 concernant l'existence d'arrêt optimaux.

Proposition 4.8. **i)** *$\tau_0 = \inf\{t; U_t = Z_t\}$ est le plus petit temps d'arrêt optimal pour exercer l'option.*

ii) *$\tau^* = \inf\{t; C_t \geq 0\}$ (où C est la stratégie de consommation associée au portefeuille autofinançant U_t) est le plus grand temps d'arrêt optimal pour exercer l'option.*

Si le détenteur de l'option se comporte rationnellement, il exercera à un temps θ_* optimal avec $\theta_* \leq \tau^*$, donc $C_{\theta_*} = 0$ et V^{θ_*} est martingale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de gain en moyenne pour le vendeur.
On donne une deuxième application, en reprenant un résultat évoqué à la fin de la section 3.

Proposition 4.9. *Si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\tilde{Z}_T|\mathcal{F}_t] \geq \tilde{Z}_t$ ps, pour tout $t \in [0,T]$, alors $\tau^* = T$ est le plus grand temps d'arrêt optimal (vu de tout $t \in [0,T]$).*

En particulier, il est facile de voir via l'inégalité de Jensen que cette condition est vérifiée pour le *call*, c'est-à-dire pour $Z_t = (S_t^1 - K)^+$. Et ceci implique qu'il est toujours optimal d'exercer l'option à maturité T (bien qu'il puisse aussi l'être avant). En particulier le call américain a la même valeur que le call européen (pour lequel il n'est permis d'exercer qu'à maturité). Ce résultat peut sembler contre-intuitif au sens où l'option américaine offre plus de choix à son détenteur et par conséquent semble avoir une valeur supérieure.

4.4 Méthodes numériques

Pour finir, on cite quelques méthodes permettant de calculer explicitement le prix d'options américaines selon la formule 4.5. On s'intéresse au principe de programmation dynamique déjà évoqué. On suppose pour simplifier que le taux d'intérêt est constant égal à r. On considère toujours un processus de payoff $Z_t = f(t, S_t)$. On définit la fonction de valeur F de la façon suivante :

Définition 4.10. Pour $t \in [0,T]$, $x > 0$, $F(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} E[e^{-r(\tau - t)} f(\tau, S_\tau^{t,x})]$ où $S^{t,x}$ est l'unique solution de 4.1 issue de x à l'instant t.

On peut en fait montrer, comme on se trouve dans un cadre markovien (voir équation 4.1), que :

$$e^{-rt} F(t, S_t) = \left(Snell(\{e^{-ru} F(u, S_u)\}_{u \in [0,T]})\right)_t$$

Ainsi il est légitime de s'intéresser immédiatement à cette fonction de valeur lorsque l'on considère le prix de l'option américaine. Pour espérer pouvoir la calculer effectivement, l'idée est de discrétiser en temps et donc de restreindre les instants d'exercice.
On fixe donc un entier n et on s'intéresse à toutes les grandeurs uniquement aux instants $t_k^n = \frac{kT}{n}$, $k = 0, \ldots, n$. On note $\mathcal{T}_{k,n}$ l'ensemble des temps d'arrêt prenant uniquement ces valeurs discrètes et l'on travaille avec la filtration $(\mathcal{F}_{t_k^n})_{0 \le k \le n}$ (lorsque l'on parle par exemple d'enveloppe de Snell dans la suite, c'est vis-à-vis de cette filtration). On note, pour $k = 0, \ldots, n$, et $x \in (\mathbb{R}_+)^d$ $F_n(t_k^n, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{k,n}} (e^{-r(\tau - t_k^n)} f(\tau, S_\tau^{t_k^n, x}))$ la fonction de valeur approchée.
On peut alors montrer qu'on a encore à temps discret :

$$(e^{-rt_k^n} F(t_k^n, S_{t_k^n}))_{0 \le k \le n} = Snell(\{e^{-rt_k^n} f(t_k^n, S_{t_k^n})\}_{0 \le k \le n})$$

Et on a, dans ce contexte,le principe de la programmation dynamique, sous la forme suivante :

Proposition 4.11. *La fonction de valeur approchée vérifie :*

i) $F_n(T, S_T) = f(T, S_T)$

ii) $F_n(t_k^n, S_{t_k^n}) = \max(f(t_k^n, S_{t_k^n}), e^{-\frac{rT}{n}} \mathbb{E}[F_n(t_{k+1}^n, S_{t_{k+1}^n}) | S_{t_k^n}])$

On a de plus la propriété de convergence suivante, qui garantit qu'il est légitime de travailler avec ces processus approchés :

Proposition 4.12. *Si f est lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^d$, uniformément en $t \in [0,T]$, alors on a la majoration dans $\mathbb{L}^p$:*

$$|| \max_{0 \le k \le n} |F(T_k^n, S_{t_k^n}) - F_n(t_k^n, S_{t_k^n})| ||_p \le \frac{c}{\sqrt{n}}$$

Dans la pratique, pour calculer le prix à l'instant 0 d'une options américaine via cette récurrence rétrograde, on voit qu'il est nécéssaire d'estimer des espérances conditionnelles liées au payoff et à la valeur des actifs à plusieurs dates dans le futur. On donne ainsi pour finir, dans les grandes lignes seulement, une méthode possible (introduite dans [1]) pour réaliser ce calcul.
L'idée est de remplacer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[F_n(t_{k+1}^n, S_{t_{k+1}^n}) | S_{t_k^n}]$ par une régression linéaire, en utilisant comme fonctions de régression une sous-partie finie d'une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\Omega, \sigma(S_{t_k^n}), \mathbb{P})$. Ceci est naturel puisque l'espérance conditionnelle minimise la distance $\mathbb{L}^2$, tout comme la régression linéaire. On peut par exemple choisir des polynômes de $S_{t_k^n}$ comme base de régression. Numériquement, il est souvent intéressant d'inclure le payoff lui-même f dans les fonctions de régression.
Le calcul se fait alors en deux temps. Premièrement, on réalise une simulation de Monte Carlo des trajectoires de S. Si le modèle stochastique est plus compliqué que celui de Black Scholes (voir équation 4.1), cela nécéssite de remplacer l'équation par son schéma d'Euler par exemple. Cela fournit des réalisations de la valeur de S à chaque pas de temps. Ces réalisations seront nécéssaires à la régression linéaire.
On passe alors à la deuxième étape qui consiste à appliquer la formule de récurrence rétrograde. On calcule la valeur de l'option américaine à tous les instants et pour toutes les trajectoires simulées de la façon suivante. La valeur à maturité est toujours égale au payoff :

$$F_n(T, S_T^{(i)}) = f(T, S_T^{(i)}), i = 1, \dots, M$$

où M est le nombre de trajectoires simulées, qui sont indicées par i. On peut alors calculer la valeur de l'option à l'instant précédent, pour chaque trajectoire. Pour cela, on estime les coefficients de chaque fonction de base de la régression, ce qui permet de calculer $\mathbb{E}[F_n(T, S_T)|S_{t^n_{n-1}} = S^{(i)}_{t^n_{n-1}}]$ pour toute trajectoire i. La valeur de l'option pour la trajectoire i à cet instant est alors donnée par le maximum entre cette valeur (actualisée avec le facteur $e^{-\frac{rT}{n}}$) et le payoff $f(t^n_{n-1}, S_{t^n_{n-1}})$. A l'instant initial, toutes les trajectoires se regroupent puisque la valeur initiale des actifs S_0 est connue, et cette procédure fournit le prix de l'option à l'instant 0.
De plus, on a sans plus de travail une estimation simple du plus petit temps d'arrêt optimal. Il s'agit, sur chaque trajectoire, du premier instant où l'espérance conditionnelle est inférieure à la valeur du payoff.

Références

[1] F. Longstaff and E. Schwartz, "Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach," *The Review of Financial Studies*, vol. 14, no. 1, pp. 113–147, 2001.

[2] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 2000.

[3] I. Karatzas and E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*. Springer, 1998.

[4] G. Pagès, "Options américaines." Notes de cours.