

# Un théorème de Patterson et Sullivan

Paul MERCAT      Encadrant : Yves BENOIST

27 novembre 2009

## Table des matières

1	Introduction	1
2	Mesures de Patterson-Sullivan	6
3	Le lemme de l'ombre	8
4	Dimension de Hausdorff de l'ensemble limite	10

## 1 Introduction

Considérons un réseau de points ordonnés de façon parfaitement régulière dans le disque de Poincaré (donné par l'orbite d'un point sous l'action d'un groupe discret). Ces points vont venir s'accumuler sur le bord du disque pour former un ensemble que l'on appellera ensemble limite. Que peut-on dire de cet ensemble limite ? et quel lien y a-t-il avec le groupe discret ? En 1979, Sullivan (voir [Sull]) a montré, avec l'aide des travaux de Patterson (voir [Patt]), que la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est simplement égale à la vitesse de croissance du groupe. Dans cet article, je me propose de démontrer partiellement ce résultat. Pour cela, je commencerai dans le chapitre 2 par construire une mesure intéressante sur l'ensemble limite, en suivant Patterson. Puis je montrerai dans le chapitre 3 le lemme de l'ombre, qui est une étape importante pour démontrer le théorème de Patterson-Sullivan. Et enfin, je verrai dans le chapitre 4 comment cela permet de lier la croissance du groupe à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite.

**Ensemble limite** Dans tout le document,  $\Gamma$  sera un sous-groupe discret de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Le groupe  $\Gamma$  agit alors naturellement par isométries sur le disque de Poincaré  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  (voir un peu plus loin les rappels sur le disque de Poincaré).

**Définition 1.1** *On appellera ensemble limite du groupe  $\Gamma$ , l'ensemble  $\Lambda_{\Gamma}$  des points d'accumulation de l'orbite  $\Gamma x$  d'un point  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  pour la métrique euclidienne.*

**Remarque 1.2** *L'ensemble limite ne dépend pas du point  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  choisi.*

*Preuve :* En effet, si  $y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est un autre point, alors la distance hyperbolique entre  $\gamma x$  et  $\gamma y$  est constante et donc leur distance euclidienne est majoré par

$cste \cdot e^{-d(x, \gamma x)}$ , qui tend vers 0 quand  $\gamma$  tend vers l'infini puisque le groupe est discret.  $\square$

### Exposant critique

**Définition 1.3** On appelle *exposant critique* du groupe  $\Gamma$  le réel  $\delta_\Gamma$  défini par :

$$\delta_\Gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B(x, n) \cap \Gamma y)}{n}$$

où  $x$  et  $y$  sont des points quelconques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et  $B(x, n)$  est la boule hyperbolique de centre  $x$  et de rayon  $n$ .

**Remarque 1.4** L'exposant critique donne la vitesse de croissance du groupe  $\Gamma$ , et ne dépend bien sûr pas des points  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  choisis.

Le résultat que l'on démontrera dans cet article est le suivant :

**Théorème 1.5 (Patterson et Sullivan)** Si le groupe discret  $\Gamma$  est de type fini, alors on a l'égalité

$$\dim_{Hausd}(\Lambda_\Gamma) = \delta_\Gamma$$

(ici  $\dim_{Hausd}(\Lambda_\Gamma)$  dénote la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$ )

Pour aboutir à ce résultat, nous commencerons par construire un ensemble de mesures de dimension  $\delta_\Gamma$  sur l'ensemble limite, ayant de bonnes propriétés. Mais tout d'abord, voici quelques rappels de géométrie hyperbolique :

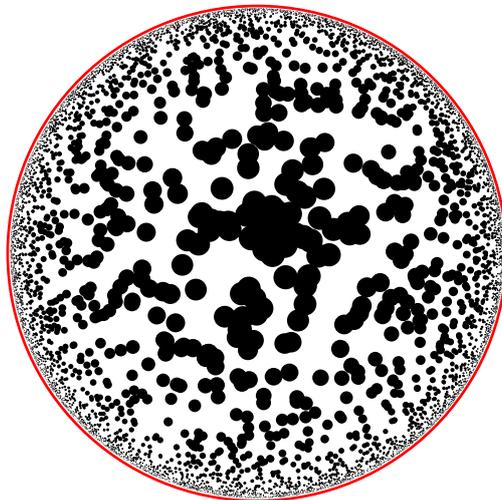


FIGURE 1 – Petits ronds de même taille hyperbolique tirés au hasard

**Disque de Poincaré** On peut identifier l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  au disque ouvert  $D(0, 1)$  du plan complexe que l'on munit de la métrique :

$$ds^2 = \frac{4dz^2}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Si l'on dessine un vecteur  $v$  de l'espace hyperbolique en un point du disque qui est à distance (euclidienne)  $r$  du centre, sa norme visible (euclidienne) vaut donc

$$\|v\|_{eucl} = \frac{1}{1-r^2} \|v\|_{hyp} \text{ (voir figure 1).}$$

**Notations** On notera  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  le plan hyperbolique.

On notera  $d(x, y)$  la distance hyperbolique entre deux points  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

On notera  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  le bord du plan hyperbolique. Pour le modèle du disque de Poincaré où l'on identifie  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  au disque  $D(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , il s'agit donc du cercle  $C(0, 1)$ .

Par exemple, un segment de longueur euclidienne  $r$  dont l'une des extrémités est au centre du disque aura pour longueur hyperbolique  $\int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{argth}(r)$ . Les géodésiques sont alors les arcs de cercles (et segments de droites) qui sont orthogonaux au bord du disque (voir figure 2).

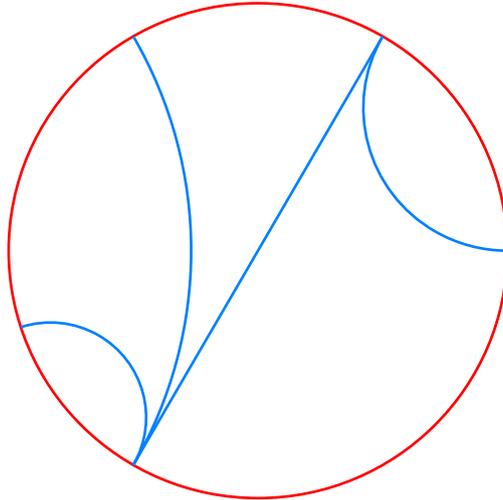


FIGURE 2 – Quatre géodésiques parallèles deux à deux dans le disque de Poincaré

Le groupe  $SU(1, 1)$  agit par isométries directes sur le disque de Poincaré, par homographie. Or, le groupe  $SU(1, 1)$  est isomorphe au groupe  $SL_2(\mathbb{R})$ , c'est pourquoi on considère l'action d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $SL_2(\mathbb{R})$  sur le disque de Poincaré. On peut également faire agir  $PGL_2(\mathbb{R})$  sur le disque de Poincaré, avec les applications  $z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  pour les matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de déterminant  $-1$ , ce qui ajoute les isométries indirectes.

Pour plus de détails sur le modèle du disque de Poincaré, voir par exemple [Ghys].

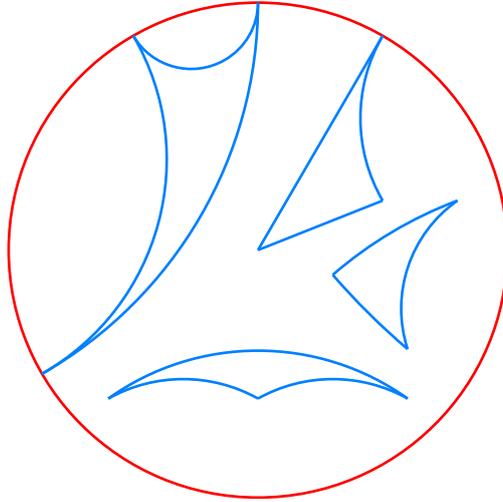


FIGURE 3 – Triangles hyperboliques

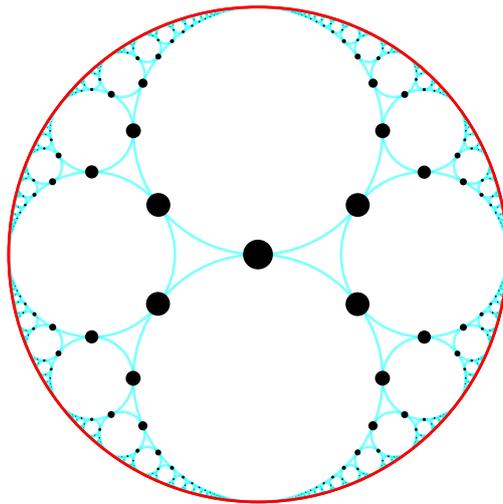


FIGURE 4 – Action de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sur le disque de Poincaré

### Fonction de Buseman

**Définition 1.6** On appelle horocycle un cercle du disque de Poincaré qui est tangent au bord du disque.

**Définition 1.7** La fonction de Buseman est la fonction notée  $b$  de trois paramètres définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, \forall \xi \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, b_{\xi}(x, y) := \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z) .$$

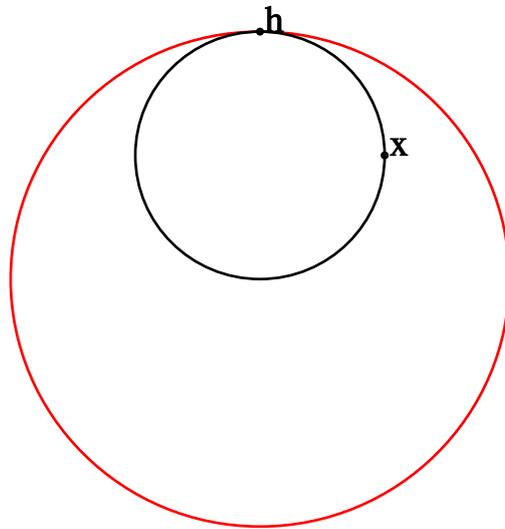


FIGURE 5 – Horocycle passant par  $x$  et tangent en  $h$

**Remarque 1.8** La limite  $\lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z)$  existe toujours et est finie : elle est égale (au signe près) à la distance hyperbolique entre les horocycles tangents en  $\xi$  et passant par  $x$  et par  $y$ .

Dans des espaces plus généraux que  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , il est nécessaire de définir la fonction de Buseman en prenant une limite radiale (c'est-à-dire en faisant tendre  $z$  vers  $\xi$  le long d'une géodésique).

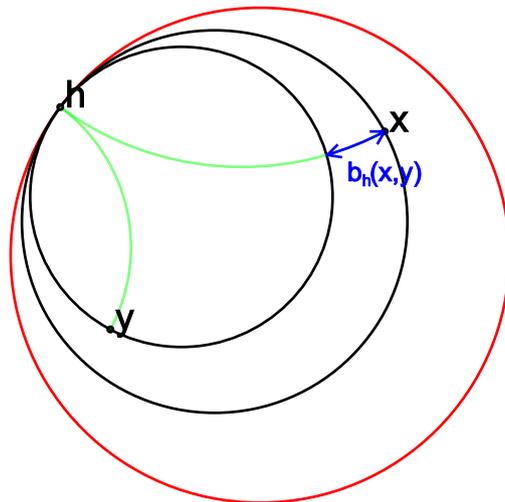


FIGURE 6 – Horocycles et fonction de Buseman

*Preuve de la remarque 1.8 :* Soit  $z$  un point de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Alors la quantité  $|d(x, z) - d(y, z)|$  est égale à la distance hyperbolique entre les cercles hyperboliques centrés en

$z$  et passant par  $x$  et par  $y$ . Or, quand  $z$  tend vers  $\xi$ , le cercle centré en  $z$  et passant par  $x$  tend (pour la métrique euclidienne) vers l'horocycle tangent au bord du disque en  $\xi$  et passant par  $x$ , et même chose pour  $y$  (voir figure 6). On obtient donc bien le résultat annoncé en passant à la limite.  $\square$

## 2 Mesures de Patterson-Sullivan

Voici une première propriété simple de l'exposant critique :

**Lemme 2.1**  $\delta_\Gamma \leq 1$

*Preuve* : Comme le groupe  $\Gamma$  est discret, il existe une distance minimale  $m$  entre les points de l'orbite  $\Gamma y$ . Le nombre de points de l'orbite  $\Gamma y$  qui sont à distance de  $x$  inférieure à un entier  $n$  est donc majoré par un certain nombre de fois le volume de la boule  $B(x, n)$  qui vaut  $(\pi/2)(\text{ch}(n) - 1)$ . Il existe donc une constante  $c > 0$  telle que  $\#B(x, n) \cap \Gamma y \leq ce^n$ .  $\square$

La construction de mesures que l'on va faire utilise les séries de Poincaré, qui fournissent une caractérisation simple de l'exposant critique  $\delta_\Gamma$  :

### Séries de Poincaré

Dans la suite, on notera

$$s_k := \#(B(x, k + 1/2) \setminus B(x, k - 1/2)) \cap \Gamma x ,$$

$$a_k := \#(B(x, k + 1/2) \cap \Gamma x) = \sum_{l=0}^k s_l .$$

**Définition 2.2** On appellera série de Poincaré du groupe  $\Gamma$  la série  $h_s(x)$  suivante :

$$h_s(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x)}$$

où  $x$  est un point de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et  $s \in \mathbb{R}$  est un paramètre réel. On appellera exposant critique de la série de Poincaré la borne inférieure des réels  $s$  pour lesquels la série  $h_s(x)$  converge (qui est également la borne supérieure des réels pour lesquels la série diverge).

**Remarque 2.3** La série de Poincaré  $h_s(x)$  est invariante par  $\Gamma$  :

$$\forall \gamma \in \Gamma, h_s(\gamma x) = h_s(x)$$

**Proposition 2.4** L'exposant critique de la série de Poincaré  $h_s(x)$  est  $\delta_\Gamma$ .

Pour démontrer cela, on dispose du lemme facile suivant :

**Lemme 2.5** Pour tout réel  $s$ , la série  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k e^{-sk}$  est de même nature que la série  $h_s(x)$ .

On a également une caractérisation de l'exposant critique :

**Lemme 2.6**

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_n)}{n} = \delta_\Gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s_n)}{n}$$

*Preuve* : Si  $\delta_\Gamma = 0$ , le résultat est clair. Supposons  $\delta_\Gamma > 0$ . Posons  $\delta_\Gamma > \epsilon > 0$  et montrons l'inégalité

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s_n)}{n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_n)}{n} - \epsilon$$

On pourra alors conclure en passant à la limite, les autres inégalités étant claires. Par définition de  $\delta_\Gamma$ , on peut choisir un entier  $n$  assez grand tel que  $a_n \geq e^{(\delta_\Gamma - \epsilon)n}$ . Or, d'après le lemme 2.1, il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout entier  $k$  on ait  $s_k \leq ce^{2k}$ . Donc, par le principe des tiroirs, il existe un entier  $k_n$  compris entre  $\frac{(\delta - \epsilon)n}{2}$  et  $n$  tel que l'on ait  $s_{k_n} \geq \frac{1}{n+1}e^{(\delta_\Gamma - \epsilon)n}$ . On a alors l'inégalité  $\frac{\log(s_{k_n})}{k_n} \geq \delta_\Gamma - \epsilon - \frac{\log(n+1)}{n}$ . Et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient finalement l'inégalité escomptée.  $\square$

*Preuve de la proposition 2.4* : Montrons que l'exposant critique de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k e^{-sk}$  est  $\delta_\Gamma$ . Soit  $s > \delta_\Gamma$ . Montrons que la série converge. D'après le lemme 2.6, on peut trouver un entier  $n$  assez grand pour avoir  $s_n = e^{s'n}$ , où  $s' < s$ , et  $\frac{\log s_k}{k} \leq \frac{\log s_n}{n} + \frac{s - s'}{2}$  pour tout  $k \geq n$ . On a alors pour tout entier  $k \geq n$ ,  $s_k e^{-sk} \leq e^{k(s' - s)/2}$ , d'où la convergence de la série. Pour  $s < \delta_\Gamma$ , le même raisonnement aboutit à la divergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k e^{-sk}$ . D'après le lemme 2.5, l'exposant critique de la série de Poincaré  $h_s(x)$  est donc bien  $\delta_\Gamma$ .  $\square$

**Construction de la mesure** Supposons dans un premier temps que la série de Poincaré  $h_s(x)$  diverge en  $s = \delta_\Gamma$ . Pour un point  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et pour un réel  $s > \delta_\Gamma$ , on définit des mesures de probabilités  $\mu_s(x)$  sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  par :

$$\mu_s(x) := \frac{1}{h_s(x)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x)} \delta_{\gamma x}$$

où  $\delta_{\gamma y}$  est la masse de Dirac en  $\gamma y$ .

On peut alors trouver une suite de réels  $s_n > \delta_\Gamma$ , avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \delta_\Gamma$ , telle que la suite de mesures  $\mu_{s_n}(x)$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu_x$ .

**Remarque 2.7** Les mesures  $\mu_x$  sont portées par l'ensemble limite.

En effet, si un point  $y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  n'est pas dans l'ensemble limite, alors il existe un voisinage du point  $y$  ne contenant qu'un nombre fini de points de l'orbite  $\Gamma x$ , et comme la série diverge en  $s = \delta_\Gamma$ , les masses de Dirac correspondantes sont affectées d'un poids nul.

Voici deux propriétés importantes des mesures que l'on a construit :

**Propriétés 2.8** La famille de mesures  $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$  est  $\Gamma$ -équivariante, c'est-à-dire que l'on a :

$$\gamma * \mu_x = \mu_{\gamma x}$$

pour tout  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  et pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .

La famille de mesures  $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$  est de dimension  $\delta_{\Gamma}$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_z}(\xi) = e^{-\delta_{\Gamma} b_{\xi}(x,z)}$$

pour tous points  $x, z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  et  $\xi \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

**Si la série de Poincaré  $h_s(x, y)$  converge en  $s = \delta_{\Gamma}$**  On utilise le lemme suivant pour se ramener à une série divergente pour  $s \leq \delta_{\Gamma}$  et convergente pour  $s > \delta_{\Gamma}$  :

**Lemme 2.9** Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^{-s}$  est une série de réels positifs qui a pour abscisse de convergence  $s_0$ , alors il existe une fonction croissante  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(a_n) a_n^{-s}$  a aussi pour abscisse de convergence  $s_0$ , et diverge en  $s = s_0$ .

On vérifie que la famille de mesures obtenue avec cette série vérifie encore les propriétés annoncées.

### 3 Le lemme de l'ombre

Soit  $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$  une famille de mesures de probabilités  $\Gamma$ -équivariante de dimension  $\delta \geq 0$  sur l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}$ . On a donc les relations suivantes, pour tout  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  et  $\gamma \in \Gamma$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) &= e^{-\delta b_{\xi}(x,y)} \\ \gamma * \mu_x &= \mu_{\gamma x} . \end{aligned}$$

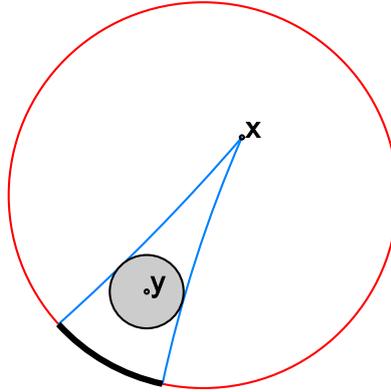


FIGURE 7 – Ombre d'une boule centrée en  $y$ , vue de  $x$

On va construire, pour chaque point  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  et pour chaque  $\gamma \in \Gamma$  une boule centrée au point  $\xi$  du bord donné par le rayon allant de  $x$  à  $\gamma x$ , et telle que sa mesure soit proche de son diamètre à la puissance  $\delta$ .

Pour cela, nous allons utiliser des ombres.

### Ombres

**Définition 3.1** Soient  $x, y$  deux points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et soit  $r > 0$  un réel. On définit l'ombre  $O_x B(y, r)$  de la boule  $B(y, r)$  vue du point  $x$  comme étant l'ensemble des points  $\xi \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  tels que l'arc de géodésique entre les points  $x$  et  $\xi$  coupent la boule  $B(y, r)$ . (voir figure 7)

Pour la suite, nous aurons besoin de quelques lemmes. Le lemme suivant donne un encadrement de la fonction de Buseman quand le point du bord est dans l'ombre :

**Lemme 3.2** Pour tous points  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , pour tout réel  $r > 0$  et pour tout point  $\xi$  de l'ombre  $O_x B(y, r)$ , on a l'encadrement :

$$d(x, y) - r \leq b_{\xi}(x, y) \leq d(x, y)$$

Le lemme qui suit permet d'obtenir une ombre  $O_y B(x, r)$  aussi proche que l'on veut du bord tout entier, et uniformément en  $y$ .

**Lemme 3.3** Pour tout point  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} \text{diam}(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \setminus O_y B(x, r)) = 0$$

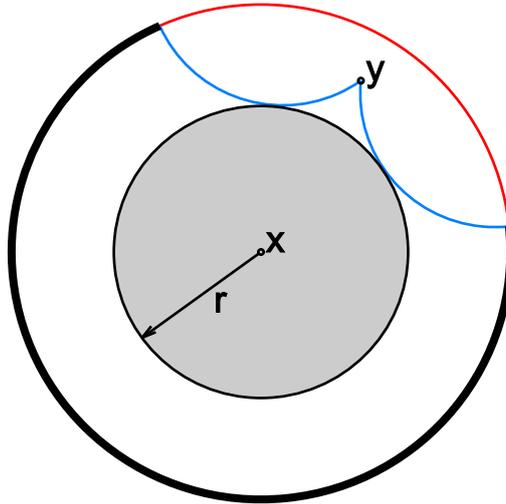


FIGURE 8 – Grande ombre, où que soit le point  $y$

**Construction de boules** Soit  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  un point. On souhaite montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  et un réel  $r > 0$  tels que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , la boule  $B = O_x B(\gamma x, r)$  vérifie les inégalités :

$$\frac{1}{C}(\text{diam } B)^\delta \leq \mu_x(B) \leq C(\text{diam } B)^\delta$$

Pour cela, nous allons montrer le lemme suivant :

**Lemme 3.4 (Lemme de l'ombre)** *Il existe un réel  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $r \geq r_0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on ait :*

$$\frac{1}{C}e^{-\delta d(x, \gamma x)} \leq \mu_x(O_x B(\gamma x, r)) \leq Ce^{-\delta d(x, \gamma x)}$$

*Preuve du lemme de l'ombre :* On peut supposer que la mesure  $\mu_x$  n'est pas une mesure de Dirac, puisque sinon le groupe est élémentaire. On peut donc trouver un réel  $\epsilon > 0$  tel que pour tout point  $\xi$  du bord  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  on ait  $\mu_x(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \setminus B(\xi, \epsilon)) > \epsilon$ . Choisissons alors un réel  $r_0 > 0$  suffisamment grand grâce au lemme 3.3, pour avoir  $\text{diam}(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \setminus O_{\gamma^{-1}x} B(x, r)) < \epsilon$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $r \geq r_0$ . Pour  $\gamma \in \Gamma$  et  $r \geq r_0$ , calculons  $\mu_x(O_x B(\gamma x, r))$  :

$$\mu_x(O_x B(\gamma x, r)) = \mu_x(\gamma^{-1} O_{\gamma^{-1}x} B(x, r)) \quad (1)$$

$$= \mu_{\gamma x}(O_{\gamma^{-1}x} B(x, r)) \quad (2)$$

$$= \int_{O_{\gamma^{-1}x} B(x, r)} e^{-\delta b_\xi(x, \gamma x)} d\mu_x . \quad (3)$$

Le lemme 3.2 permet alors d'obtenir l'encadrement

$$\epsilon e^{-\delta d(x, \gamma x)} \leq \mu_x(O_x B(\gamma x, r)) \leq e^r e^{-\delta d(x, \gamma x)} .$$

□

## 4 Dimension de Hausdorff de l'ensemble limite

Comme dans le chapitre précédent, on supposera que l'on dispose d'une famille de mesures de probabilités  $\mu_x$   $\Gamma$ -équivariante, et de dimension  $\delta$ .

La construction de boules que l'on a fait dans le chapitre précédent semble montrer que l'ensemble limite se comporte comme un ensemble de dimension  $\delta$ . Mais ce n'est pas suffisant pour démontrer que la dimension de Hausdorff est  $\delta$ , cela permet seulement d'avoir le résultat pour l'ensemble limite radial :

**Définition 4.1** *Soit  $y$  un point de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . On appellera ensemble limite radial, que l'on notera  $\Lambda_r$ , l'ensemble des points  $\xi$  du bord  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  pour lesquels il existe un réel  $\epsilon > 0$  et une géodésique arrivant en  $\xi$  tels qu'il y ait une infinité de points de l'orbite  $\Gamma y$  à distance au plus  $\epsilon$  de la géodésique.*

**Remarque 4.2** *L'ensemble limite radial  $\Lambda_r$  est un sous-ensemble  $\Gamma$ -invariant de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$ , et ne dépend pas du point  $y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  choisi.*

**Proposition 4.3** *Si l'on a  $\mu_x(\Lambda_r) > 0$ , alors*

$$\dim_{\text{Hausd}}(\Lambda_r) = \delta$$

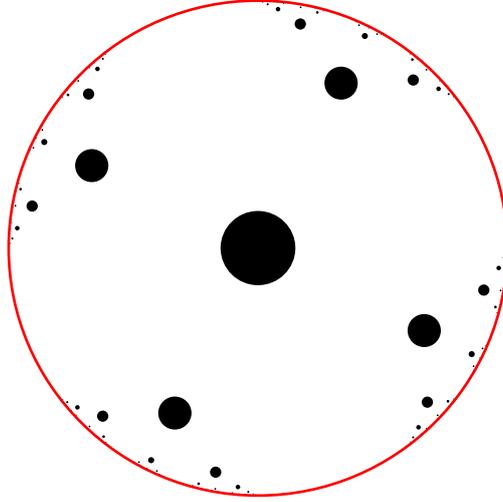


FIGURE 9 – Action du groupe de Schottky engendré par les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur le disque de Poincaré

Pour cela, on utilisera les lemmes :

**Lemme 4.4** *Soit  $y$  un point de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout point  $\xi \in \Lambda_r$ , il existe un géodésique arrivant en  $\xi$  telle qu'il y ait une infinité de points de l'orbite  $\Gamma y$  à distance au plus  $c$  de la géodésique.*

**Lemme 4.5** *Si une partie  $A \subseteq \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est recouverte par des segments, alors il existe un sous-recouvrement tel que chaque point de  $A$  est recouvert par au plus deux segments.*

**Lemme 4.6** *Il existe une constante  $C > 0$  telle qu'en tout point  $\xi$  de l'ensemble limite radial  $\Lambda_r$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une boule  $B$  centrée en  $\xi$ , de rayon inférieur à  $\epsilon$ , telle que l'on ait l'inégalité :*

$$\mu_x(B) \leq C(\text{diam } B)^\delta$$

et même chose avec l'inégalité :

$$\frac{1}{C}(\text{diam } B)^\delta \leq \mu_x(B)$$

*Preuve :* Choisissons un réel  $r$  supérieur à la fois au réel  $r_0$  du lemme de l'ombre, et au double de la constante  $c$  donnée par le lemme 4.4. Soit maintenant  $\xi$  un point de l'ensemble limite radial  $\Lambda_r$ , et  $g$  une géodésique arrivant en  $\xi$ , telle qu'il y ait une infinité de points de l'orbite  $\Gamma y$  à distance au plus  $c$  de la géodésique  $g$ . Alors les boules  $B_\gamma$  de rayons  $r_\gamma$  que donnent le lemme de l'ombre vont contenir  $\xi$ . Donc la boule de centre  $\xi$  et de rayon  $10r_\gamma$  contiendra  $B_\gamma$  et donc vérifiera la deuxième inégalité du lemme 4.6, avec une constante  $C$  égale à

10 fois la constante donnée par le lemme de l'ombre. On a même que la boule de centre  $\xi$  et de rayon le dixième du rayon de  $B_\gamma$  sera incluse dans la boule  $B_\gamma$ , ce qui nous donne une boule vérifiant la première inégalité, pour la même constante  $C$ . En prenant  $\gamma \in \Gamma$  suffisamment grand, les boules ainsi construites sont de rayons arbitrairement petits, et donc conviennent.  $\square$

**Rappel 4.7** La  $\delta$ -mesure de Hausdorff d'un ensemble  $A$  est défini comme la limite quand  $\epsilon > 0$  tend vers 0 de la borne inférieure des sommes

$$\sum_{B \in E} (\text{diam}(B))^\delta$$

sur les ensembles  $E$  de boules de rayons  $\leq \epsilon$  recouvrant  $A$ .

La dimension de Hausdorff d'un ensemble  $A$  est par définition la borne inférieure des réels  $\delta$  pour lesquels la  $\delta$ -mesure de Hausdorff est finie.

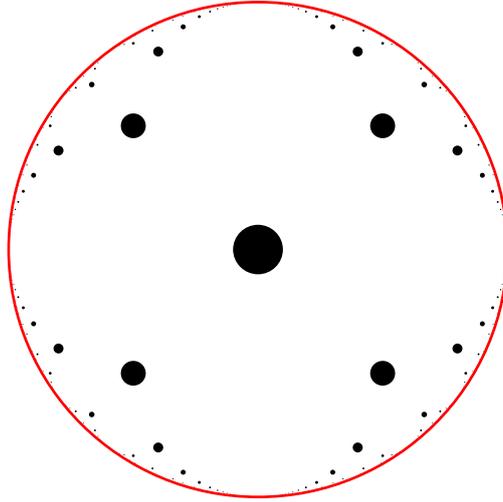


FIGURE 10 – Quasi-groupe de Schottky

*Preuve de la proposition 4.3 :* Les lemmes 4.6 et 4.5 permettent d'obtenir un recouvrement  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de l'ensemble limite radial  $\Lambda_r$  par des boules arbitrairement petites, et tel que chaque point soit recouvert par au plus deux boules. On obtient alors la majoration :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(B_i))^\delta \leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_x(B_i) \leq 2C$$

Donc la  $\delta$ -mesure de Hausdorff de l'ensemble limite radial est majorée. On en déduit l'inégalité  $\dim_{\text{Hausd}}(\Lambda_r) \leq \delta$ .

Pour obtenir l'autre inégalité, on démontre que toute boule  $B(\xi, r)$  vérifie les inégalités :

$$\frac{1}{C} (\text{diam}(B(\xi, r)))^\delta \leq \mu_x(B(\xi, r)) \leq C (\text{diam}(B(\xi, r)))^\delta$$

pour tout point  $\xi$  de l'ensemble limite radial  $\Lambda_r$  et tout réel  $r > 0$ .

Pour démontrer le théorème 1.5, il reste ensuite à démontrer que l'ensemble limite radial est proche de l'ensemble limite pour les sous-groupes discrets de type fini de  $SL_2(\mathbb{R})$ .

## Références

- [Sull] D. Sullivan *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publications mathématiques de l'IHES **50** p. 171-202, 1979
- [Patt] S. J. Patterson *The limit set of a fuchsian group*, Acta Mathematica, vol. 136, num. 1, p. 241-273, dec. 1976
- [Quint] J.-F. Quint *An overview of Patterson-Sullivan theory*, cours Zurich, <http://www-math.univ-paris13.fr/~quint/publications/courszurich.pdf>
- [Ghys] É. Ghys *Poincaré et son disque*, cours Zurich, article, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/articles/disque-poincare.pdf>
- [HJ] C. Houdayer et O. Jaulent *Groupes fuchsians*, exposé proposé par F. Paulin, juin 2002, <http://www.math.univ-paris13.fr/~jaulent/recherche/travaux/Fuchsians.ps.gz>