Linéarisabilité des mouvements browniens unitaires

Bertrand Micaux

Septembre 2002

1 Mouvements browniens, bruits et représentations

1.1 Notion de mouvement brownien

On définit habituellement le mouvement brownien comme un processus stochastique à valeurs réelles, aux trajectoires continues, aux accroissements indépendants et stationnaires, issu de 0, et dont la loi à l'instant 1 est une loi normale centrée réduite. Le mouvement brownien d-dimensionnel, quant à lui, est formé de d mouvements browniens indépendants.

Cependant, les notions de continuité et d'accroissements, ainsi que leur indépendance et leur stationnarité, ont un sens sur des ensembles autres que $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$. Ainsi, on peut définir une notion de mouvement brownien sur tout groupe topologique, comme le fait Tsirelson dans [9] :

1.1 Définition *Soit G un groupe topologique. Un* mouvement brownien sur G *est un processus stochastique $(X(t))_{t\in\mathbf{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Les trajectoires $(t \in \mathbf{R} \longmapsto X(t))$ sont continues presque sûrement ;*
2. *Presque sûrement, $X(0) = e$, neutre du groupe G ;*
3. *Pour tous $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, les accroissements à gauche*
$$X(t_2)\,(X(t_1))^{-1}\,,\ \ldots\,,\ X(t_n)\,(X(t_{n-1}))^{-1}$$
sont indépendants ;
4. *Les accroissements à gauche sont stationnaires : la loi de $X(t)\,(X(s))^{-1}$ ne dépend que de $(t-s)$ pour tous $s \leqslant t$.*

Une telle généralisation de la notion de mouvement brownien n'apporte quasiment rien sur les groupes $(\mathbf{R},+)$ et $(\mathbf{R}^d,+)$: on montre que les seuls processus à vérifier cette définition en dimension d sont les $W(t) = m\,t + A\,W_0(t)$, $(W_0(t))_t$ étant un mouvement brownien classique sur $\mathbf{R}^d$, m et A un vecteur et une matrice déterministes fixés.

On peut construire des mouvements browniens sur des groupes de matrices au moyen d'équations différentielles stochastiques. On part d'un mouvement brownien « linéaire » W sur $(\mathcal{M}_d(\mathbf{R}),+)$ ou $(\mathcal{M}_d(\mathbf{C}),+)$ et on montre que la solution de l'équation différentielle stochastique de Stratanovitch

$$\mathrm{d}X(t) = \mathrm{d}W(t) \circ X(t), \quad X(0) = I$$

est un mouvement brownien multiplicatif sur $(\mathrm{GL}_d(\mathbf{R}),\,\cdot\,)$ ou $(\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}),\,\cdot\,)$. On rappelle que la composée de Stratanovitch est définie par

$$\mathrm{d}W(t) \circ X(t) = \mathrm{d}W(t) \cdot X(t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,\langle W,\,X\rangle\,(t).$$

De surcroît, si le mouvement brownien linéaire vit dans certaines sous-algèbres de Lie de l'ensemble des matrices (par exemple celui des matrices antihermitiennes), le mouvement brownien multiplicatif associé reste dans certains sous-groupes de Lie du groupe linéaire (ici celui des matrices unitaires). Inversement, tout mouvement brownien sur un groupe de Lie s'obtient à partir d'un mouvement brownien sur l'algèbre de Lie qui lui est tangente en l'identité au moyen d'une équation différentielle stochastique. C'est pour cela que l'on dit qu'en dimension finie, les mouvements browniens unitaires sont *linéarisables*. Tout l'objet de l'étude qui va suivre est de tenter de généraliser ce résultat si l'on remplace les opérateurs unitaires en dimension finie par des opérateurs unitaires agissant sur un Hilbert séparable, de dimension finie ou infinie.

1.2 Bruits et représentations

La généralisation de ce résultat se fera au sens suivant. Le fait qu'en dimension finie, mouvements browniens linéaires et unitaires soient reliés par une équation différentielle stochastique implique que leurs accroissements engendrent exactement les mêmes filtrations sur l'espace de probabilité. Afin de préciser tout cela, on introduit la notion de bruit.

1.2 Définition
On appelle bruit *la donnée d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, d'une famille $(\mathcal{F}_{s,t})_{-\infty<s\leqslant t<\infty}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et d'un groupe de bijections $(T_t)_{t\in\mathbf{R}}$ de Ω dans Ω préservant la mesure $\mathbf{P}$ tels que :*

1. $\forall\, t \in \mathbf{R},\ \forall\, r \leqslant s :\quad T_t$ *envoie* $\mathcal{F}_{r,s}$ *sur* $\mathcal{F}_{r+t,s+t}$ *;*
2. $\forall\, r \leqslant s \leqslant t :\quad \mathcal{F}_{r,s}$ *et* $\mathcal{F}_{s,t}$ *sont indépendantes ;*
3. $\forall\, r \leqslant s \leqslant t :\quad \mathcal{F}_{r,t} = \mathcal{F}_{r,s} \vee \mathcal{F}_{s,t}$.

De plus, on supposera que tous les espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_{s,t}, \mathbf{P})_{s\leqslant t}$ sont des espaces de Lebesgue.

Pour la définition des espaces de Lebesgue, on renvoie à [7]. Cette hypothèse permet notamment de garantir la séparabilité de tous les espaces $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$.

Tout mouvement brownien engendre un bruit de la manière suivante. Si X est un mouvement brownien sur le groupe topologique G, on peut supposer qu'il est défini sur son espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ où $\Omega = \mathcal{C}(\mathbf{R}, G)$, $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne pour la topologie de la convergence simple, et $X(t)(\omega) = \omega(t)$ pour tout élément $\omega \in \Omega$. On pose alors $X_{s,t} = X(t)\,(X(s))^{-1}$ pour tous $s \leqslant t$, $T_t(\omega) = \left(s \mapsto \omega(t+s)\,(\omega(t))^{-1}\right)$ pour tout $\omega \in \Omega$, et $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\left(X_{s,r},\ r \in [s,t]\right)$.

On obtient un bruit appelé *bruit engendré par le mouvement brownien X*. Il représente l'information probabiliste véhiculée par les accroissements du mouvement brownien X. On fait maintenant le cheminement inverse : partant de l'information probabiliste, on regarde les processus qui sont « mesurables » par rapport à cette information. Étant donné un bruit, on définit ses *représentations* :

1.3 Définition *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}$, $(T_t)_t$ un bruit, G un groupe topologique de neutre e.*
Soit $(X_{s,t})_{-\infty<s\leqslant t<\infty}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans G. On dira que $(X_{s,t})_{s\leqslant t}$ est une représentation *du bruit dans le groupe G si :*

1. $\forall\, s \leqslant t :\quad X_{s,t}$ *est* $\mathcal{F}_{s,t}$*-adapté ;*
2. $\forall\, r \leqslant s,\ \forall\, t \in \mathbf{R} :\quad X_{r,s} \circ T_t = X_{r+t,s+t}$ *;*
3. $\forall\, r \leqslant s \leqslant t :\quad X_{r,t} = X_{s,t}\, X_{r,s}$ *;*
4. *Pour tout voisinage U de e :* $\quad \mathbf{P}\left(X_{0,t} \notin U\right) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$

On dira de plus que cette représentation est fidèle *si*

$$\forall\, r \leqslant t : \quad \mathcal{F}_{r,t} = \sigma\left(X_{r,s},\ r \leqslant s \leqslant t\right).$$

En particulier, dans le cas où le bruit est engendré par un mouvement brownien, les accroissements de ce mouvement brownien en constituent une représentation fidèle. Dans le cas du mouvement brownien unitaire en dimension finie, le mouvement brownien linéaire dont il est issu en est une également. Ceci nous amène à poser la définition de la linéarisabilité d'un bruit :

1.4 Définition *Un bruit est dit* linéarisable *s'il admet une représentation fidèle continue dans un $(\mathbf{R}^d, +)$ ou dans $(l^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{N}), +)$. Un mouvement brownien est dit* linéarisable *si le bruit qu'il engendre est linéarisable.*

1.3 Partie linéarisable d'un bruit

Plus précisément, si l'on se restreint à une certaine classe de bruits, on peut définir la *partie linéarisable* d'un bruit : c'est la partie de l'information véhiculée qui est représentable sur un espace de Hilbert réel séparable.

1.5 Définition *Un bruit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}$, $(T_t)_t$ *est dit* prévisible *si pour tout* $t > 0$ *et pour toute fonction* f $\mathcal{F}_{0,t}$*-mesurable bornée,*

$$\mathbf{P}\text{ p.s.}(\omega): \quad [\, s \in]0,t[\ \longmapsto\ \mathbf{E}\,(f \mid \mathcal{F}_{0,s})\,(\omega) \in \mathbf{R}\,] \quad \textit{est uniformément continue.}$$

L'intérêt de travailler avec un bruit prévisible est que toutes ses représentations dans des groupes polonais (e.g. dans $\mathbf{R}$) sont continues (cf. [9]). Ceci permet notamment de définir une structure d'espace de Hilbert sur l'espace des représentations réelles de ce bruit :

1.6 Proposition *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}, (T_t)_t$ *un bruit prévisible. On note* Δ *l'ensemble de ses représentations* $(X_{s,t})_{s\leqslant t}$ *dans le groupe* $(\mathbf{R}, +)$*. Alors* Δ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel.*

1. *Si l'on pose, pour tout* $X, Y \in \Delta$,

$$(X,\, Y)_\Delta = \mathbf{E}\,(X_{0,1}\, Y_{0,1})\,,$$

alors $(\,\cdot\,,\ \cdot\,)_\Delta$ *est un produit scalaire sur* Δ *qui en fait un espace de Hilbert séparable.*

2. *Il existe une représentation du bruit dans* $\mathbf{R}^d$ *ou* $l^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{N})$ *telle que toute représentation du bruit dans* $\mathbf{R}$ *s'écrive comme combinaison linéaire (éventuellement infinie) de ses coordonnées.*

On peut alors définir la partie linéarisable du bruit :

1.7 Proposition-définition *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}, (T_t)_t$ *un bruit prévisible. On note, pour tous* $s \leqslant t$ *:*

$$\mathcal{F}^{\mathrm{lin}}_{r,t} = \bigvee_{X\in\Delta} \sigma\,(X_{r,s},\ s \in [r,t])$$

Alors $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (\mathcal{F}^{\mathrm{lin}}_{s,t})_{s\leqslant t}, (T_t)_t$ *forme un bruit, que l'on appellera* partie linéarisable *du bruit prévisible* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}, (T_t)_t$.

Il est clair qu'un bruit prévisible est linéarisable si et seulement si il est égal à sa partie linéarisable. C'est l'étude de la partie linéarisable du bruit engendré par un mouvement brownien unitaire en dimension infinie qui nous permettra de montrer sa linéarisabilité. Nous aurons besoin d'un outil fondamental pour ce faire : la décomposition spectrale des bruits.

2 Un outil fondamental : la décomposition spectrale des bruits

2.1 Point de vue de la théorie spectrale

Étant donné un bruit, plutôt que d'étudier directement les tribus $(\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}$, on va s'intéresser aux espaces de Hilbert qui leur sont associés, à savoir les $(\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t}))_{s\leqslant t}$. Ces espaces sont tous sous-espaces vectoriels fermés d'un seul et même espace de Hilbert. Pour étudier les relations qui les lient, on disposera des projections orthogonales qui leur sont associées. Ainsi, la projection orthogonale correspondant à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$ sera l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_{s,t}$, que l'on notera $E_{s,t}$.

2.1 Définition

1. *On notera* $\mathcal{F}_{-\infty,t} = \bigvee_{s\leqslant t} \mathcal{F}_{s,t}$, $\quad \mathcal{F}_{s,\infty} = \bigvee_{t\geqslant s} \mathcal{F}_{s,t}$, $\quad$ *et* $\quad \mathcal{F}_{-\infty,\infty} = \bigvee_{s\leqslant t} \mathcal{F}_{s,t}$.
2. *À chaque tribu* $\mathcal{F}_{s,t}$ *définie jusqu'alors (avec* $-\infty \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$*), on associe l'espace de Hilbert* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t}) = \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{s,t}, \mathbf{P})$.
3. *Chaque espace* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$ *étant un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$*, on lui associe la projection orthogonale de* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$ *sur* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$ *:* $E_{s,t} = \mathbf{E}\,(\,\cdot \mid \mathcal{F}_{s,t})\,.$

À chaque intervalle de temps $[s,t]$ correspondent l'espace de Hilbert des variables aléatoires sensibles aux accroissements du bruit sur cette période, et une projection orthogonale. On définit ces objets pour des périodes de temps un peu plus complexes :

2.2 Définition 1. *On appelle* ensemble élémentaire *toute réunion finie d'intervalles de* $\mathbf{R}$ *(on s'autorise toute partie connexe de* $\mathbf{R}$*). Les ensembles élémentaires sont stables par réunion, intersection et passage au complémentaire : c'est une sous-algèbre de Boole de* $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

2. *À chaque ensemble élémentaire A, on associe une tribu de la manière suivante. On écrit A comme réunion disjointe de ses composantes connexes, que l'on range dans l'ordre croissant : on a*

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

où A_i est un intervalle dont les bornes sont s_i et t_i, et $-\infty \leqslant s_1 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t_n \leqslant \infty$.
On définit alors $\mathcal{F}_A = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{s_i,t_i}$ et le projecteur orthogonal de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$ sur $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_A)$: $E_A = \mathbf{E}\left(\,\cdot\, | \mathcal{F}_A \right)$.

On montre (cf. [4], propr. 2.7) que pour tous éléments élémentaires A et B, on a $E_{A\cap B} = E_A\, E_B$, donc en particulier que toutes les projections définies jusqu'alors commutent. L'objectif de la décomposition spectrale du bruit est de donner une décomposition de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$ qui permette de diagonaliser simultanément *toutes* ces projections.

On sait déjà le faire pour tout ensemble fini de projections : on peut décomposer $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$ en une somme directe orthogonale $\bigoplus_{i\in I} H_i$ de sous-espaces vectoriels telle que sur chaque H_i, chacune de ces projections soit l'identité ou l'application nulle.

La décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriel n'est pas un outil assez puissant pour parvenir à diagonaliser toutes les projections E_A. Nous aurons recours à une généralisation de la notion de somme directe qu'est *l'intégrale hilbertienne d'un champ d'espaces de Hilbert.*

2.2 Intégrales hilbertiennes

Nous en rappelons succintement la définition ; pour plus de détails, on renvoie à [5] et [2].

2.3 Définition *Soit $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *On appelle* champ d'espaces de Hilbert *toute application $(\zeta \in Z \ \mapsto\ H(\zeta))$ où pour tout $\zeta \in Z$, $H(\zeta)$ est un espace de Hilbert. Tout élément du produit cartésien $\prod_{\zeta\in Z} H(\zeta)$ sera appelé* champ de vecteurs.
2. *On appelle* champ mesurable d'espaces de Hilbert *la donnée d'un champ d'espaces de Hilbert $(\zeta \mapsto H(\zeta))$ et d'un espace vectoriel $\mathfrak{F}$ de champs de vecteurs vérifiant :*
   (a) $\forall\, x \in \mathfrak{F}$: $[\ \zeta \ \longmapsto\ \|\, x(\zeta) \,\|\ ]$ *est $\mathcal{A}$-mesurable ;*
   (b) *Si x est un champ de vecteurs tel que $\forall y \in \mathfrak{F}$: $[\ \zeta \ \longmapsto\ (x(\zeta),\, y(\zeta))\ ]$ est mesurable, alors $x \in \mathfrak{F}$;*
   (c) *Il existe une suite $(x_n)_n$ de $\mathfrak{F}$ tel que pour tout $\zeta \in Z$, la suite $(x_n(\zeta))_n$ soit totale dans $H(\zeta)$.*

   Dans ces conditions, les éléments de $\mathfrak{F}$ seront appelés champs mesurables de vecteurs.
3. *Soit $((\zeta \mapsto H(\zeta)), \mathfrak{F})$ un champ mesurable d'espaces de Hilbert. Son* intégrale hilbertienne, *notée*

$$\int_Z^{\oplus} H(\zeta)\, \mathrm{d}\mu(\zeta),$$

est l'ensemble des champs mesurables $x \in \mathfrak{F}$ de carré sommable, i.e. tels que $\int_Z \|\, x(\zeta) \,\|^2 \ \mathrm{d}\mu(\zeta) < \infty$, où l'on identifie les champs de vecteurs égaux μ presque partout. Muni du produit hermitien $(x,\, y) = \int_Z (x(\zeta),\, y(\zeta))\ \mathrm{d}\mu(\zeta)$, cet espace forme un espace de Hilbert.

L'intégrale hilbertienne est une généralisation de la notion de somme directe hilbertienne car, si l'on prend pour Z un ensemble discret muni de la mesure de comptage, $\int_Z^{\oplus} H(\zeta)\,\mathrm{d}\mu(\zeta) = \bigoplus_{\zeta\in Z} H(\zeta)$. La notion d'endomorphisme diagonal se généralise de la manière suivante :

2.4 Définition *Soit une intégrale hilbertienne* $\int_Z^{\oplus} H(\zeta)\,\mathrm{d}\mu(\zeta)$*, et* $[\ \zeta \in Z \ \longmapsto\ \lambda(\zeta) \in \mathbf{C}\ ]$ *une application mesurable bornée. Alors l'application*

$$\int_Z^{\oplus} \lambda(\zeta)\,\mathrm{d}\mu(\zeta) : \quad \begin{array}{ccc} \displaystyle\int_Z^{\oplus} H(\zeta)\,\mathrm{d}\mu(\zeta) & \longrightarrow & \displaystyle\int_Z^{\oplus} H(\zeta)\,\mathrm{d}\mu(\zeta) \\ x & \longmapsto & [\ \zeta \in Z \ \longmapsto\ \lambda(\zeta)\,x(\zeta)\ ] \end{array}$$

est bien définie. C'est un opérateur linéaire continu sur l'intégrale hilbertienne que l'on appelle opérateur diagonal *associé à* λ*.*

2.3 Décomposition spectrale des bruits

Nous pouvons maintenant citer le théorème fondamental de décomposition spectrale des bruits (cf. [9], qui renvoie à [3]).

2.5 Théorème *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (\mathcal{F}_{s,t})_{s \leqslant t}, (T_t)_t$ *un bruit. On se donne* $s < t$ *simultanément finis ou infinis. On note* $\mathcal{C}_{s,t}$ *l'ensemble des compacts de* $\mathbf{R}$ *inclus dans* $]s,t[$*, que l'on munit de la distance de Hausdorff et de la tribu borélienne associée.*

Alors sur l'espace mesurable $(\mathcal{C}_{s,t}, \Sigma_{s,t})$*, il existe une mesure finie* $\mu_{s,t}$ *vérifiant*

$$\forall\, r \in \mathbf{R} : \quad \mu_{s,t}\left(\{C \in \mathcal{C}_{s,t} :\ r \in C\}\right) = 0,$$

un champ mesurable d'espaces de Hilbert $((C \mapsto \hat{L}_{s,t}(C)), \mathfrak{F})$ *et un isomorphisme d'espaces de Hilbert :*

$$\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t}) = \int_{\mathcal{C}_{s,t}}^{\oplus} \hat{L}_{s,t}(C)\,\mathrm{d}\mu_{s,t}(C)$$

par lequel le projecteur E_A *associé à un élément élémentaire quelconque* $A \subseteq\ ]s,t[$ *devienne*

$$E_A = \int_{\mathcal{C}_{s,t}}^{\oplus} \mathbf{1}_{e(A)}\,\mathrm{d}\mu_{s,t}(C) \qquad \text{où} \qquad e(A) = \{C \in \mathcal{C}_{s,t} :\ C \subseteq A\}\,.$$

Une telle décomposition de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$ *est appelée* décomposition spectrale*, et on dit que la mesure* $\mu_{s,t}$ *est une* mesure spectrale *associée au bruit sur* $]s,t[$*.*

$\mu_{-\infty,\infty}$ *et* $\hat{L}_{-\infty,\infty}(C)$ *seront également notés plus simplement* μ *et* $\hat{L}(C)$*.*

De surcroît, la décomposition spectrale d'un bruit est essentiellement unique : les mesures spectrales sont déterminées à équivalence près, et la dimension des espaces de Hilbert $\hat{L}_{s,t}$ est une fonction mesurable uniquement déterminée si l'on identifie les fonctions égales presque partout.

La décomposition spectrale du bruit permet d' « agrandir » la famille des projections E_A en lui ajoutant l'ensemble des autres projections diagonalisables. Ces projections seront appelées *projections spectrales*.

2.6 Définition *Soit* $s < t$*,* E *un événement de* $\Sigma_{s,t}$*. On appelle* projection spectrale associée à E *le projecteur* Q_E *agissant sur* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$ *défini par*

$$Q_E = \int_{\mathcal{C}_{s,t}}^{\oplus} \mathbf{1}_E(C)\,\mathrm{d}\mu_{s,t}(C).$$

Notamment, on a pour tout élément élémentaire $A \subseteq \mathbf{R}$ *:* $Q_{e(A)} = E_A$*.*

En outre, la décomposition spectrale permet d'associer à chaque fontion $f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$ une mesure sur $\mathcal{C}$ étroitement liée à sa décomposition spectrale.

2.7 Définition *Pour toute fonction* $f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$, *il existe une unique mesure finie* μ_f *sur* $(\mathcal{C}, \Sigma)$ *vérifiant pour tout* $E \in \Sigma$ *et pour tout élément élémentaire* A

$$\mu_f(E) = \| Q_E(f) \|^2 \qquad \text{et en particulier} \qquad \mu_f(e(A)) = \| \mathbf{E}\,(f \,|\, \mathcal{F}_A) \|^2 .$$

On peut la construire grâce à la décomposition spectrale de f *:*

$$\mu_f = \left(C \mapsto \| \hat{f}(C) \|^2 \right) \cdot \mu$$

Cette mesure est appelée mesure spectrale associée à f.

Dans le cas où le bruit étudié est engendré par un mouvement brownien classique d dimensionnel, on sait déterminer sa décomposition spectrale grâce à la décomposition en chaos de Wiener des variables de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{-\infty,\infty})$ (décomposition évoquée dans [9], présentée dans [5] et reprise dans [4], paragraphe 2.2). On aboutit au résultat suivant :

2.8 Théorème *Considérons le bruit engendré par le mouvement brownien standard sur* $\mathbf{R}^d$, *et notons* $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$ *la famille des ensembles de* $\mathbf{R}$ *à* n *éléments. Alors la mesure spectrale de ce bruit se concentre sur les ensembles finis. En identifiant* $\mathcal{C}_n$ *à l'ensemble* $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 < \ldots < x_n\}$, *la restriction de la mesure spectrale à* $\mathcal{C}_n$ *est équivalente à la restriction de la mesure de Lebesgue* n*-dimensionnelle à* D_n. *Enfin, on a*

$$\mu \,\text{p.p.}(C),\ \forall n \geqslant 0 : \quad [\, C \in \mathcal{C}_n \,] \ \Rightarrow \ \left[\dim \hat{L}(C) = d^n \right].$$

On notera en particulier que dans le cas des bruits engendrés par des mouvements browniens linéaires, tout se concentre sur les compacts particuliers de $\mathbf{R}$ que sont les ensembles finis. Une propriété remarquable de la décomposition spectrale des bruits est que cette propriété est caractéristique des bruits linéarisables. Plus précisément, on dispose du théorème suivant, dont la preuve est détaillée dans [9] :

2.9 Théorème *On considère un bruit prévisible, et on note*

$$\hat{L}_{\text{fini}} = \int_{\mathcal{C}_{\text{fini}}}^{\oplus} \hat{L}(C)\, \mathrm{d}\mu(C)$$

le sous-espace vectoriel des champs de vecteurs nuls hors de la partie de $\mathcal{C}$ *formée par les ensembles finis. Alors* $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}^{\text{lin}}_{-\infty,\infty}) = \hat{L}_{\text{fini}}$.

2.10 Corollaire *Pour tout bruit prévisible, si* $s < t$ *simultanément finis ou infinis et* $f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{s,t})$, *sont équivalentes :*

1. f *est linéarisable, i.e.* $f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}^{\text{lin}}_{s,t})$ *;*
2. *La mesure spectrale associée à* f *se concentre sur les ensembles finis :* $\mu_f(\mathcal{C}_{s,t} \setminus \mathcal{C}_{\text{fini}} = 0)$.

C'est ce dernier corollaire qui permet de montrer que les mouvements browniens sur le groupe unitaire d'un espace de Hilbert séparable sont linéarisables.

3 Les mouvements browniens unitaires sont linéarisables

Nous passons maintenant à l'étude d'un mouvement brownien X sur $U(H)$, groupe des opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert séparable H que l'on munit de la topologie forte des opérateurs. On supposera que ce mouvement brownien est défini sur son espace canonique. On démontre que le bruit engendré est prévisible, donc qu'on peut parler de sa partie linéarisable. Nous allons construire un processus de Markov appelé *processus stochastique quantique* étroitement relié à la décomposition spectrale de ce bruit.

3.1 Notion d'instrument

Avant cela, il nous faut introduire un objet issus de la mécanique quantique : la notion d'instrument. Introduisons des espaces et objets qui nous seront utiles (on renvoie à [8] pour les preuves de ces résultats de base) :

3.1 Proposition-définition *On notera $(B(H), \|\cdot\|)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H munie de la norme uniforme habituelle. À tous vecteurs $h_1, h_2 \in H$, on associe l'*opérateur élémentaire *$h_1 \otimes \overline{h_2} = [\, h \in H \ \longmapsto \ (h,\, h_2)\, h_1 \in H \,]$. On notera également $\rho_h = h \otimes \overline{h}$. On dit que $T \in B(H)$ est un* opérateur à trace *si $\|T\|_1 = \sum_n (|T|\, h_n,\, h_n) < \infty$ où $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de H quelconque. Leur ensemble $\mathbf{L}^1(H)$, muni de $\|\cdot\|_1$, est un espace de Banach séparable. On peut y définir la trace $\operatorname{tr} T = \sum_n (T\, h_n,\, h_n)$, qui ne dépend pas de la base choisie. Parmi les opérateurs à trace, on note V l'ensemble de ceux qui sont hermitiens. Étant compacts, ils se diagonalisent sur une base hilbertienne : $T = \sum_n \lambda_n\, h_n \otimes \overline{h_n}$. L'ensemble des opérateurs hermitiens à trace positifs est noté V^+, celui des opérateurs hermitiens positifs de trace 1, encore appelés* états quantiques, *V_1^+.*

Pour tout $h \in H$, l'opérateur ρ_h est un élément de V_1^+. Il représente un état pur d'un système physique. Les autres états quantiques sont des « mélanges » de ces états purs, comme on peut le voir en les écrivant sous forme diagonale.

3.2 Définition *Soit $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré. On appelle* instrument *sur l'espace $(X, \mathcal{A}, \nu)$ toute fonction $\mathcal{E} : \mathcal{A} \longrightarrow B(V)$ vérifiant les axiomes suivants :*

1. *Si E est un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\nu(E) = 0$, alors $\mathcal{E}(E) = 0$.*
2. *Si $(E_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, alors*

$$\mathcal{E}\Big(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i\Big) = \sum_{i \geqslant 1} \mathcal{E}(E_i)$$

   au sens de la topologie forte des opérateurs sur $B(V)$, c'est-à-dire :

$$\forall\, \rho \in V : \quad \mathcal{E}\Big(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i\Big)\, \rho = \sum_{i \geqslant 1} \mathcal{E}(E_i)\, \rho,$$

   la série convergeant cette fois-ci dans l'espace de Banach réel $(V, \|\cdot\|_1)$.
3. *Si $\rho \in V^+$ et $E \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{E}(E)\, \rho \in V^+$.*
4. *Pour tout $\rho \in V$, on a $\operatorname{tr}(\mathcal{E}(\mathcal{A})\, \rho) = \operatorname{tr} \rho$.*

Un instrument est une mesure à valeurs dans les endomorphismes agissant sur V. On peut aussi le voir comme un objet effectuant une transition aléatoire sur un état quantique, en produisant un élément de X « marquant » cette transition.

3.3 Proposition *Soit $\mathcal{E}$ un instrument sur $(X, \mathcal{A}, \nu)$. Alors*

1. *Pour tout $\rho \in V_1^+$, $\mu(\rho, \cdot) : [\, E \in \mathcal{A} \ \longmapsto \ \operatorname{tr}(\mathcal{E}(E)\, \rho) \in [0,1] \,]$ est une mesure de probabilités.*
2. *Pour tout $\rho \in V_1^+$, $\Pi(\rho, \cdot) : [\, E \in \mathcal{A} \ \longmapsto \ (\mathcal{E}(E)\, \rho) \,]$ est une mesure vectorielle absolument continue par rapport à $\mu(\rho, \cdot)$. On peut choisir une version de sa densité de Radon-Nikodym $p(\rho, \cdot) : [\, x \in X \ \longmapsto \ (\mathrm{d}\Pi(\rho, \cdot)/\mathrm{d}\mu(\rho, \cdot))\,(x) \in V \,]$ qui soit à valeurs dans V_1^+.*

Partant d'un état quantique $\rho \in V_1^+$, la mesure de probabilité $\mu(\rho, \cdot)$ permet de définir un élément x de X aléatoire ainsi qu'un nouvel état quantique $p(\rho, x)$.

3.2 Construction du processus stochastique quantique

Nous allons maintenant construire une famille d'instruments à partir de notre mouvement brownien unitaire, qui nous permettra de définir le processus stochastique quantique.

Le mouvement brownien sur $U(H)$ permet de définir deux semi-groupes : celui de la moyenne de son action sur H et celui de la moyenne de son action par conjugaison sur V.

3.4 Définition *On notera, pour tout $t \geqslant 0$:*

$$x_t = \mathbf{E}\,(X(t)) \in B(H) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_t : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \rho & \longmapsto & \mathbf{E}\,(X(t)\,\rho\,X(t)^*) \end{array}.$$

À chaque période de temps $[s,t]$, on associe un instrument $\mathcal{E}_{s,t}$ sur l'espace des compacts inclus dans $]s,t[$ $(\mathcal{C}_{s,t}, \Sigma_{s,t}, \mu_{s,t})$ où $\mu_{s,t}$ est la mesure spectrale du bruit sur $]s,t[$. $\mathcal{E}_{s,t}(E)$ sera l'analogue de $\mathcal{T}_t$ où l'on remplace $X(t)$ par la projection spectrale Q_E de l'accroissement $X_{s,t} = X(t)\,(X(s))^{-1}$. Plus précisément :

3.5 Définition *Il existe une unique famille $(\mathcal{E}_{s,t})_{-\infty<s<t<\infty}$ d'instruments telle que*

1. *Pour tous $s<t$, $\mathcal{E}_{s,t}$ est un instrument sur l'espace mesuré $(\mathcal{C}_{s,t}, \Sigma_{s,t}, \mu_{s,t})_{s<t}$;*
2. *Pour tous $s<t$, pour tout $E \in \Sigma_{s,t}$, l'instrument $\mathcal{E}_{s,t}$ associe à l'événement E un endomorphisme sur V défini par la relation*

$$\forall\, h, h_1, h_2 \in H : \quad (\mathcal{E}_{s,t}(E)(\rho_h)\, h_2,\, h_1) = (Q_E\,((X_{s,t}\, h,\, h_1))\,,\, Q_E\,((X_{s,t}\, h,\, h_2)))\,,$$

où $X_{s,t}$ est l'accroissement du mouvement brownien $X(t)(X(s))^{-1}$.

Cette famille d'instruments hérite de nombreuses propriétés du fait de ses liens avec le mouvement brownien (cf. [4], th. 4.16) :

3.6 Théorème 1. *Pour tous $s<t$, pour tout $\rho \in V$,*

$$\mathcal{E}_{s,t}(\{\varnothing\})\,\rho = x_{t-s}\,\rho\, x_{t-s}^* \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_{s,t}(\mathcal{C}_{s,t})\,\rho = \mathcal{T}_{t-s}(\rho).$$

2. *Pour tous $t>0$, pour tous $h_1, h_2 \in H$, si on pose $f = (X(t)h_2,\, h_1)$, la mesure spectrale associée à f s'écrit :*

$$\forall E \in \Sigma_{0,t} : \quad \mu_f(E) = (\mathcal{E}_{0,t}(E)\,\rho_{h_2},\, \rho_{h_1})_{\mathrm{HS}}$$

où $(\cdot\,,\,\cdot)_{\mathrm{HS}}$ est le produit scalaire de Hilbert-Schmidt défini par

$$\forall \rho_1, \rho_2 \in V : \quad (\rho_1,\, \rho_2)_{\mathrm{HS}} = \mathrm{tr}\,(\rho_1\,\rho_2^*) = \mathrm{tr}\,(\rho_1\,\rho_2)\,.$$

3. *Pour tous $r<s<t$, pour tous $E_1 \in \Sigma_{r,s}$, $E_2 \in \Sigma_{s,t}$, on a*

$$\mathcal{E}_{r,t}(E_1 \times E_2) = \mathcal{E}_{s,t}(E_2)\,\mathcal{E}_{r,s}(E_1),$$
$$\text{où} \qquad E_1 \times E_2 = \{C \in \mathcal{C}_{r,t} : C \cap\,]r,s[\, \in E_1,\, C \cap\,]s,t[\, \in E_2\} \in \Sigma_{r,t}.$$

4. *Pour tous $r<s$, pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $E \in \Sigma_{r,s}$, $\mathcal{E}_{r+t,s+t}(E+t) = \mathcal{E}_{r,s}(E)$.*
5. *Pour tout $\rho \in V$, $\mathcal{E}_{0,t}(\mathcal{C}_{0,t})\,\rho \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \rho$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.*

À chaque instrument $\mathcal{E}_{s,t}$ sont associés des mesures de probabilités $\mu_{s,t}(\rho,\,\cdot)$ sur $(\mathcal{C}_{s,t}, \Sigma_{s,t})$ et des fonctions de transition $p_{s,t}(\rho,\,\cdot)$ comme en 3.3. Émerge l'idée du processus stochastique quantique : c'est un processus stochastique défini pour des temps rationnels et dont les états sont des couples formés par un compact de $\mathbf{R}$ et un état quantique. L'évolution entre l'instant s et t est gouvernée par l'instrument $\mathcal{E}_{s,t}$: partant de (C_s, ρ_s), on tire au sort un compact C' de l'intervalle $]s,t[$ suivant la probabilité $\mu_{s,t}(\rho,\,\cdot)$, et on calcule $\rho' = p_{s,t}(\rho_s, C')$. L'état à l'instant t est alors donné par $(C_t, \rho_t) = (C_s \cup C', \rho')$. Grâce aux multiples propriétés de la famille d'instruments associée au mouvement brownien unitaire, on peut effectivement définir un processus de Markov fonctionnant ainsi pour tout temps $t \in \mathbf{Q}^+$:

3.7 Théorème *On définit la famille de noyaux de transitions* $(P_{s,t})_{s<t}$ *sur* $\mathcal{C} \times V_1^+$ *par*

$$\forall A \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(V): \quad P_{s,t}((C,\rho),A) = \mu_{s,t}\left(\rho, \{C' \in \mathcal{C}_{s,t} : (C \cup C', p_{s,t}(\rho,C')) \in A\}\right).$$

1. $(P_{s,t})_{s<t}$ *vérifie la propriété de Kolmogorov*

$$\forall y \in \mathcal{C} \times V_1^+, \ \forall A \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(V): \qquad P_{r,t}(y_0, A) = \int_{\mathcal{C}\times V_1^+} P_{r,s}(y, \mathrm{d}y')\, P_{s,t}(y', A).$$

2. *Pour tout état quantique initial* $\rho_0 \in V_1^+$*, on peut donc construire un processus de Markov* $(C_t,\rho_t)_{t\in\mathbf{Q}^+}$ *sur l'espace d'états* $\mathcal{C} \times V_1^+$ *vérifiant*

$$(C_0,\rho_0) = (\varnothing, \rho_0) \qquad \text{pour } \rho_0 \in V_1^+ \text{ fixé, et}$$
$$\forall\, 0 \leqslant s < t: \quad \mathbf{P}\left((C_t,\rho_t) \in A \mid C_s, \rho_s\right) = P_{s,t}((C_s,\rho_s),A).$$

Un tel processus sera appelé processus stochastique quantique *associé au mouvement brownien unitaire.*

La composante quantique $(\rho_t)_t$ est markovienne, ce qui n'est pas le cas de la composante compacte $(C_t)_t$ dont l'évolution à partir de l'instant s dépend très fortement de ρ_s. Nous allons montrer que la composante compacte est en fait presque sûrement un ensemble fini, ce qui prouvera au final que le mouvement brownien étudié est linéarisable.

3.3 Le compact aléatoire reste fini

Le fait suivant est une simple conséquence de la définition du processus stochastique quantique :

$$\mathbf{P}\left(C_t \cap]s,t[= \varnothing \mid C_s, \rho_s\right) = \operatorname{tr}\left(x_{t-s}\, \rho_s\, x_{t-s}^*\right).$$

Nous avons donc l'expression de la probabilité que le compact aléatoire du processus reste constant entre les instants s et t en fonction de l'état quantique de départ ρ_s.

La continuité forte du semi-groupe $(x_t)_t$ permet de montrer que cette probabilité conditionnelle tend presque sûrement vers 1 quand t tend vers s. Cependant, le rythme de convergence dépend *a priori* de l'état quantique ρ_s. À partir de là, il s'agit de rendre cette convergence « uniforme » afin de montrer que les compacts aléatoires restent des ensembles finis.

Pour cela, on utilisera un argument de compacité : il se trouve que l'état quantique peut être cantonné dans des compacts de V_1^+ avec une probabilité arbitrairement grande et pour un temps arbitrairement grand. Les démonstrations sont données dans [9] et reprises dans [4], paragraphe 5.3.2.

3.8 Théorème *Soit* $\alpha > 0$, $t \in \mathbf{Q}_+^*$*. Alors il existe un compact* K *de* V *tel que*

$$\mathbf{P}\left(\forall\, s \in [0,t] \cap \mathbf{Q}: \ \rho_s \in K\right) \geqslant 1 - \alpha.$$

On peut donc considérer une suite croissante $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ de compacts de V_1^+ telle que pour tout $n \geqslant 1$, , $\mathbf{P}\left(\forall\, t \in [0,n] \cap \mathbf{Q}: \ \rho_t \in K_N\right) \geqslant 1 - 2^{-n}$, et introduire les premiers temps de sortie de ces compacts $\tau_n = \inf\{t \in \mathbf{Q}^+ : \ \rho_t \notin K_n\}$. On se convainc facilement que

$$\mathbf{P}\text{ p.s. :} \quad \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots, \qquad \tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \qquad \text{et} \qquad [\,t < \tau_n\,] \Rightarrow [\,\rho_t \in K_n\,].$$

Tant que l'état quantique reste dans le compact K_n, on est capable de minorer la probabilité que le compact aléatoire n'évolue pas pendant une durée indépendante de l'évolution de l'état quantique : c'est là l'argument d'« uniformité » de la convergence évoqué plus haut.

3.9 Lemme *Il existe une suite* $(r_n)_{n\geqslant 1}$ *de rationnels strictement positifs telle que*

$$\forall\, n \geqslant 1: \quad \mathbf{P}\left(C_{t+r_n} = C_t \mid C_t, \rho_t\right) \mathbf{1}_{\{t<\tau_n\}} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{t<\tau_n\}}.$$

Un raisonnement combinatoire permet alors de démontrer le résultat fondamental sur le processus stochastique quantique :

3.10 Théorème *Le compact aléatoire du processus stochastique quantique associé à un mouvement brownien unitaire reste presque sûrement un ensemble fini :*

$$\mathbf{P}\left(\forall\, t \in \mathbf{Q}^+ :\ C_t \in \mathcal{C}_{\text{fini}}\right) = 1.$$

3.4 Les mouvements browniens unitaires sont linéarisables

Le résultat obtenu sur les trajectoires du processus stochastique quantique associé à un mouvement brownien unitaire permet de démontrer facilement la linéarisabilité du bruit engendré. En effet, la probabilité que C_t appartienne à un événement E est étroitement liée à la valeur sur E des mesures spectrales associées aux composantes $(X(t)\, h_2,\, h_1)$ par construction du processus. Ainsi, on montre que ces mesures spectrales sont concentrées sur les ensembles finis, ce qui revient à montrer que le bruit est linéarisable.

Fixons un instant $t \in \mathbf{Q}_+^*$. Le compact aléatoire du processus stochastique quantique associé au mouvement brownien unitaire reste fini, quel que soit l'état quantique de départ :

$$\forall\, \rho_0 \in V_1^+ : \quad \mathbf{P}\left(C_t \in \mathcal{C}_{\text{fini}}\right) = 1.$$

L'expression du noyau de transition $P_{0,t}$ (cf. 3.7) conduit à

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\mathcal{E}_{0,t}(\mathcal{C}_{\text{fini}})\, \rho_0\right) &= 1 \\ \operatorname{tr}\left(\mathcal{E}_{0,t}(\mathcal{C}_{0,t} \setminus \mathcal{C}_{\text{fini}})\, \rho_0\right) &= 0. \end{aligned}$$

La positivité de l'instrument $\mathcal{E}_{0,t}$ implique

$$\begin{aligned} \forall\, \rho_0 \in V_1^+ : \quad \mathcal{E}_{0,t}(\mathcal{C}_{0,t} \setminus \mathcal{C}_{\text{fini}})\, \rho_0 &= 0 \qquad \text{donc} \\ \mathcal{E}_{0,t}(\mathcal{C}_{0,t} \setminus \mathcal{C}_{\text{fini}}) &= 0. \end{aligned}$$

Posons $f = (X(t)\, h_2,\, h_1)$ pour $h_1, h_2 \in H$. D'après le théorème 3.6, la mesure spectrale associée à f vérifie $\mu_f(\mathcal{C}_{0,t} \setminus \mathcal{C}_{\text{fini}}) = 0$ ce qui montre d'après le corollaire 2.10 que $f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{0,t}^{\text{lin}})$.

Ceci implique que $X(t)$ est une variable mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{0,t}^{\text{lin}}$, donc *a fortiori* $\mathcal{F}_{-\infty,\infty}^{\text{lin}}$ pour tout t rationnel. La continuité des trajectoires permet de démontrer ce fait pour tout t réel positif, puis pour tout t réel en utilisant les opérateurs de translation T_t. Finalement, on a prouvé que $\mathcal{F}_{-\infty,\infty} \subseteq \mathcal{F}_{-\infty,\infty}^{\text{lin}}$, et que le bruit est confondu avec sa partie linéarisable.

Nous arrivons ainsi au résultat central de l'article [9] :

3.11 Théorème *On considère un mouvement brownien sur le groupe des opérateurs unitaires $U(H)$, H étant un espace de Hilbert complexe séparable, groupe que l'on munit de la topologie forte des opérateurs. Alors le bruit engendré par ce mouvement brownien est linéarisable.*

4 Quelques pistes pour poursuivre la réflexion

4.1 Retour en dimension finie

Pour comprendre plus en détail le fonctionnement du processus stochastique quantique, on peut être tenté d'étudier son comportement dans le cas de la dimension finie : certes, le résultat de linéarisabilité du mouvement brownien y était déjà connu, mais on peut y calculer explicitement les semi-groupes et la décomposition spectrale y est mieux maîtrisée.

Partons d'un mouvement brownien hermitien $W(t) = B(t) + M\, t$, où B est un mouvement brownien linéaire sur les matrices hermitiennes $d \times d$, et M une matrice $d \times d$ hermitienne déterministe. Le mouvement brownien unitaire correspondant est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X(t) = i\, \mathrm{d}W(t) \circ X(t), \qquad X(0) = I.$$

On définit la matrice de covariance du mouvement brownien linéaire par $C_{j\,l}^{i\,k} = \mathrm{Cov}\left(W(1)_j^i, W(1)_l^k\right)$ et on note $(A_j^i)_{i,j}$ la matrice $d \times d$ définie par $A_j^i = \sum_{k=1}^n C_{k\,j}^{i\,k}$. Enfin, on note $\mathcal{D}$ l'opérateur agissant sur $B(H) = \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}: & \mathcal{M}_d(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_d(\mathbf{C}) \\ & T & \longmapsto & \left(\sum_{k,l} C_{k\,j}^{i\,l}\, T_l^k\right)_{i,j} \end{array}.$$

Alors on montre que

$$\forall\, t \geqslant 0 : \quad x_t = \exp\left(\left(i\,M - \tfrac{A}{2}\right) t\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_t = \exp\left(t\,\mathcal{L}\right) \qquad \text{si l'on définit } \mathcal{L} \text{ par}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathcal{M}_d(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_d(\mathbf{C}) \\ & T & \longmapsto & \left(i\,M - \frac{A}{2}\right) T + T^* \left(i\,M - \frac{A}{2}\right)^* + \mathcal{D}(T) \end{array}.$$

Dans le cas de la dimension 1, les choses deviennent extrêmement simples : l'espace des états quantiques V_1^+ se réduit à un élément et la composante compacte du processus devient markovienne. On montre sans difficulté que, si l'on considère les points apparaissant comme les sauts d'un processus ponctuel, on obtient un processus de Poisson de paramètre $\frac{A}{2}$.

Dans le cas de la dimension d, les calculs ne sont pas achevés mais ne devraient pas poser de difficulté. En effet, on dispose de la décomposition en chaos de Wiener de $X(t)$

$$X(t) = x_t + \sum_{n \geqslant 1} i^n \int \cdots \int_{\{0 < t_1 < \cdots < t_n < t\}} x_{t-t_n}\, \mathrm{d}B(t_n)\, x_{t_n - t_{n-1}}\, \mathrm{d}B(t_{n-1})\, \ldots\, x_{t_2 - t_1}\, \mathrm{d}B(t_1)\, x_{t_1}$$

qui permet de permet de calculer les projections spectrales Q_E.

4.2 Plus loin en dimension infinie

On a démontré qu'en dimension infinie, les mouvements browniens unitaires engendraient le même bruit qu'une collection dénombrable de mouvements browniens réels indépendants. Dans le cas de la dimension finie, nous avions un résultat plus fort : le mouvement brownien sur le groupe de Lie était couplé à un mouvement brownien sur son espace tangent en l'identité par une équation différentielle stochastique.

On pourrait chercher à établir un analogue de cette équation différentielle stochastique dans le cas de la dimension finie. On dispose d'un espace linéaire qui pourrait jouer le rôle de l'espace tangent : l'espace Δ des représentations réelles du bruit engendré par le mouvement brownien. La question, pour l'instant, reste ouverte.

Références

[1] P. Baxendale, *Brownian motions in the diffeomorphism group I*, Compositio Mathematica, **53** (1984), pp. 19-50.

[2] J. Dixmier, *Algèbres de von Neumann*, Gauthier-Villars, 1957.

[3] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres*, Gauthier-Villars, 1964.

[4] B. Micaux, *Linéarisabilité des mouvements browniens unitaires*, Mémoire de D.E.A. de Modélisation Stochastique et Statistique, Université de Paris-Sud, 2002.

[5] J. Neveu, *Processus aléatoires gaussiens*, Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[6] J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.

[7] T. de la Rue, *Espaces de Lebesgue*, Lect. Notes Math., Springer, **1557** (1993), pp. 15-21.

[8] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Springer, 1960.

[9] B. Tsirelon, *Unitary Brownian Motions are Linearizable*, `arXiv:math.PRM/9806112`, prépublication, 1998.