Mes premiers (φ, Γ)-modules (mod p, rang 1)

Aliaksandr Minets, Lizao Ye

sous la direction de Tony Ly

Table des matières

Introduction

Un (φ, Γ)-module est un espace vectoriel de dimension finie d sur $k((\pi))$ (le corps des séries de Laurent sur k de caractéristique p en indeterminante π), muni d'actions semi-linéaires continues et commutant entre elles d'un operateur φ et du groupe des unités $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ des entiers p-adiques ; aussi l'action de φ doit être dans $GL_d(k((\pi)))$ dans une certaine base. Ils jouent un rôle essentiel dans la correspondance de Langlands modulo p.

Dans cet mémoire, on se concentre sur le cas particulier de (φ, Γ)-modules de dimension 1. On classifie les (φ, Γ)-modules de dimension 1, introduit les mécanismes nécessaires pour obtenir les représentations de $B_2(\mathbb{Q}_p)$ à partir des (φ, Γ)-modules, et idéntifie les représentations irréductibles obtenu à partir des (φ, Γ)-modules de dimension 1.

On aussi calcule l'espace des extensions $Ext^1(D_1, D_2)$, où D_1, D_2 sont (φ, Γ)-modules de dimension 1.

Chapitre 1

Notions de base sur les nombres p-adiques

Définition 1.0.1. *Soit $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ un ensemble de groupes topologiques muni des homomorphismes $f_k : G_{k+1} \to G_k$. On définit la limite projective $G = \varprojlim G_k$ par*

$$G = \left\{ (g_k)_k \in \prod_k G_k \mid f_k(g_{k+1}) = g_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

. C'est un groupe topologique en tant que sous-groupe de $\prod_k G_k$.

Soit p un nombre premier. On définit :

$$\begin{array}{rcl} \nu_p : \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ a & \mapsto & \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid a \in p^j \mathbb{Z}_{(p)}\}. \end{array}$$

On note $|a|_p$ pour $p^{-\nu_p(a)}$. On fait de $\mathbb{Q}$ un espace métrique en définissant une distance par $d_p(x, y) = |x - y|_p, \forall x, y \in \mathbb{Q}$. Le corps $\mathbb{Q}_p$ est défini comme la complétion de $(\mathbb{Q}, d_p)$, dont une base de voisinages ouverts de 0 est $p^j\mathbb{Z}_p(= \{x \in \mathbb{Q}_p \| x|_p < p^{1-j}\}), j \in \mathbb{N}$. L'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$ est notée $\mathbb{Z}_p$; c'est un anneau local dont l'idéal maximal est $p\mathbb{Z}_p$.

Comme on a les isomorphismes canoniques suivants :

$$\Phi : \mathbb{Z}_p/p^j\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N},$$

on obtient un morphisme d'anneaux topologiques :

$$\mathbb{Z}_p \to \varprojlim \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}.$$

Il est facile de voir que Φ est une bijection. De plus, Φ est un homéomorphisme en remarquant que pour tout $i \in \mathbb{N}$ l'élément $p^i\mathbb{Z}_p$ est envoyé sur le noyau de l'application canonique $\varprojlim \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ qui est ouvert. S'ensuit donc la compacité de $\mathbb{Z}_p$ par le théorème de Tychonov.

Soit maintenant $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ un polynôme unitaire dont la réduction est séparable sur $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On peut considérer P comme une application continue de $\mathbb{Z}_p$ sur lui-même. On note $A_i = P^{-1}(p^i\mathbb{Z}_p)$ pour tout $i \in \mathbb{N}_+$. Comme $p^i\mathbb{Z}_p$ est à la fois ouvert et fermé, A_i est aussi. Les A_i sont liés les uns aux autres par la propriété suivante :

Lemme 1.0.1. *Pour tout entier $i > 0$, on a $A_i = p^i\mathbb{Z}_p + A_{i+1}$.*

Remarque. Ici $p^i\mathbb{Z}_p + A_{i+1}$ dénote l'ensemble $\{x+y \mid x \in p^i\mathbb{Z}_p, y \in A_{i+1}\}$.

Démonstration. L'inclusion $p^i\mathbb{Z}_p + A_{i+1} \subseteq A_i$ est évidente. Pour l'autre sens, soit $i \in \mathbb{N}_+, a \in A_i$, on a alors $P(a) \in p^i\mathbb{Z}_p$. Par l'hypothèse sur P, on a $P'(a) \notin p\mathbb{Z}_p$. On cherche $b \in \mathbb{Z}_p$ tel que $P(a+p^ib) \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p$. L'existence d'un tel b est assuré en remarquant que $P(a+p^ib) \equiv P(a) + p^ibP'(a) \pmod{p^{i+1}\mathbb{Z}_p}$. □

Pour $a \in A_1$, on note $A_i^{(a)}$ pour $A_i \cap (a+p\mathbb{Z}_p)$ qui est à la fois ouvert et fermé parce que A_i l'est. Par le lemme 1.0.1, on a $A_i^{(a)} = (p^i\mathbb{Z}_p + A_{i+1}) \cap (a+p\mathbb{Z}_p) = p^i\mathbb{Z}_p + A_{i+1}^{(a)}, \forall i \in \mathbb{N}_+$. On en déduit par récurrence sur i que $A_i^{(a)} \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}_+$ puisque $A_1^{(a)}(\ni a) \neq \emptyset$. On obtient ainsi une suite décroissante $A_1^{(a)} \supseteq A_2^{(a)} \supseteq \cdots$ de sous-ensembles fermés de $\mathbb{Z}_p$, dont chacun est non-vide, la compacité de $\mathbb{Z}_p$ montre alors que leur intersection est aussi non-vide. Or,

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}_+} A_i^{(a)} = \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}_+} A_i\right) \cap (a+p\mathbb{Z}_p) = P^{-1}(0) \cap (a+p\mathbb{Z}_p).$$

Nous en déduissons le lemme de Hensel :

Lemme 1.0.2. *Soit $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ un polynôme unitaire dont la réduction est séparable sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $P(a) \in p\mathbb{Z}_p$, alors il existe $b \in a+p\mathbb{Z}_p$ tel que $P(b)=0$.*

On applique le lemme précédent au polynôme $X^{p-1}-1$, sachant qu'il est séparable et scindé sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ainsi sur $\mathbb{Z}_p$. On note le groupe multiplicatif de ces racines par $\mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$.

Chapitre 2

Représentations de groupes localement profinis

Chapitres 2-5 surtout suivre [1].

2.1 Premières définitions

On fixe un corps de base k *de caractéristique* p avec la topologie discrète.

Définition 2.1.1. *Soit G est un groupe topologique séparé. On dit que G est localement profini si tout voisinage d'identité contient un sous-groupe compact ouvert.*

Définition 2.1.2. *On dit que G est un groupe profini si on peut écrire G comme une limite projective des groupes finis discrèts :*

$$G = \varprojlim G_k, \qquad |G_k| < \infty.$$

Un groupe profini G est un pro-p-groupe s'il est isomorphe à $G = \varprojlim G_k$ avec tous les G_k des p-groupes.

Lemme 2.1.1. *Soit G est un groupe profini. Alors G est un groupe localement profini.*

Démonstration. Par la définition de la topologie limite, les groupes $H_k = \ker(G \to G_k)$ constituent un système fondamental de voisinages de l'identité. On va montrer que ces groupes sont compacts. En effet, ils sont fermés comme le complément d'une union des ouverts $\bigcup_{g \in G_k \setminus \{1\}}$, et sont donc compacts, car G est compact. □

Définition 2.1.3. *Une représentation d'un groupe G est un k-espace vectoriel V muni d'une action $\pi : G \to GL(V)$.*

Définition-proposition 2.1.1. *Soit V une représentation d'un groupe localement profini G. Il est dite une représentation lisse, si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *pour tout $v \in V$ le stabilisateur $Stab(v) = \{g \in G : \pi(g)v = v\}$ de v est un sous-groupe ouvert de G ;*
2. *l'application $\Phi : G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \pi(g)v$ est continue.*

Démonstration. Supposons Φ est continue, et soit $v \in V$. On a $Stab(v) \times \{v\} = \{(g, v) : \pi(g)v = v\} = \Phi^{-1}(v) \cap (G \times \{v\})$. Mais c'est un sous-ensemble ouvert de $G \times V$. Alors par définition de la topologie produit le sous-groupe $Stab(v)$ est ouvert dans G.
Inversement, soit $Stab(v) \subset G$ est un sous-groupe ouvert pour tout $v \in V$. Si $(g, v_0) \in \Phi^{-1}(v)$, on a un ensemble ouvert $\{(hg, v_0) : h \in Stab(v_0)\} \subset \Phi^{-1}(v)$. Donc Φ est continue. □

Définition 2.1.4. *Soit V est une représentation d'un groupe localement profini G. On dit que V est une représentation de prodimension finie, si $V = \varprojlim V_k$ comme un k-espace vectoriel topologique, où les V_k sont discrètes.*

Soit G un groupe localement profini. On note $EV^G_{disc}(k)$ la catégorie des k-représentations lisses de G, et $EV^G_{pdf}(k)$ la catégorie des k-représentations de prodimension finie de G. On a l'équivalence suivante :

Théorème 2.1.2. *Les foncteurs*

$$\begin{array}{cc} EV^G_{disc}(k) \to EV^G_{pdf}(k) & \qquad EV^G_{disc}(k) \to EV^G_{pdf}(k) \\ V \mapsto V^* & \qquad W \mapsto W^* \end{array}$$

sont deux anti-équivalences de catégories quasi-inverses.

2.2 Réciprocité de Frobenius

Définition 2.2.1. *Soit G est un groupe localement profini, $H \subset G$ — un sous-groupe ouvert, et $\sigma : H \to Aut_k(V)$ une représentation lisse de H. On note $\operatorname{ind}_H^G \sigma$ l'espace des fonctions $F : G \to V$ telles que :*
- *$f(hg) = \sigma(h)f(g)$ pour tout $h \in H$, $g \in G$;*
- *f est à support compact modulo H ;*
- *pour tout f il existe un sous-groupe ouvert compact K de G tel que $f(gx) = f(g)$ pour tout $g \in G$, $x \in K$.*

On munit $\operatorname{ind}_H^G \sigma$ d'une action de G par $(gf)(x) = f(xg)$; $\operatorname{ind}_H^G \sigma$ est une représentation lisse de G. On note $\operatorname{ind}_H^G \sigma$ l'induite compacte de σ.

Si $v \in V$ et $g \in G$, on note $[g, v]$ l'élément de $\operatorname{ind}_H^G \sigma$ défini par

$$[g, v](x) = \begin{cases} \sigma(xg)(v) & \text{si } x \in Hg^{-1}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est évident que tout élément de $\operatorname{ind}_H^G \sigma$ s'écrit comme une combinaison linéaire de telles fonctions. De plus,
- $g[g', v] = [gg', v]$,
- $[gh, v] = [g, \sigma(h)(v)]$

pour tout $g \in G$, $h \in H$, $v \in V$. Si σ est un caractère lisse de H, on note $[g] = [g, 1]$, et alors $\{[g], g \in G/H\}$ est une base de $\operatorname{ind}_H^G \sigma$.

Proposition 2.2.1 (Réciprocité de Frobenius)**.** *Soit H un sous-groupe ouvert de G, σ une représentation lisse de H et π une représentation lisse de G. Alors il existe un isomorphisme :*

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind}_H^G \sigma, \pi) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\sigma, \pi|_H).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi|_H)$, $\Phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \sigma, \pi)$, $g \in G$, $h \in H$, $v \in V$ (où V est l'espace vectoriel associé à π), et $f \in \mathrm{ind}_H^G \sigma$. On définit deux applications :

$$F : \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \sigma, \pi) \to \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi|_H), \qquad F' : \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi|_H) \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \sigma, \pi),$$
$$F(\Phi)(v) = \Phi([1, v]), \qquad F'(\varphi)(f) = \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})\varphi(f(x)).$$

On note que la somme dans la définition de F' est fini. Il suffit de vérifier les quatre assertions suivantes :

1. $F(\Phi)$ est un H-homomorphisme, c'est-à-dire $F(\Phi)(hv) = hF(\Phi)v$:

$$F(\Phi)(hv) = \Phi([1, hv]) = \Phi([h, v]) = \Phi(h[1, v]) = h\Phi([1, v]) = hF(\Phi)v.$$

2. $F'(\varphi)$ est un G-homomorphisme, c'est-à-dire $F'(\varphi)(gf) = gF'(\varphi)f$:

$$\begin{aligned} F'(\varphi)(gf) &= \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})\varphi(gf(x)) = \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})\varphi(f(xg)) \\ &= \sum_{y \in H\backslash G} \pi(gy^{-1})\varphi(f(y)) = g \sum_{y \in H\backslash G} \pi(y^{-1})\varphi(f(y)) \\ &= gF'(\varphi)f. \end{aligned}$$

3. $F' \circ F = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire $F'(F(\Phi))(f) = \Phi(f)$:

$$\begin{aligned} F'(F(\Phi))(f) &= \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})F(\Phi)(f(x)) = \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})\Phi([1, f(x)]) \\ &= \Phi\left(\sum_{x \in H\backslash G} [x^{-1}, f(x)]\right) = \Phi(f). \end{aligned}$$

4. $F \circ F' = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire $F(F'(\varphi))(v) = \varphi(v)$:

$$\begin{aligned} F(F'(\varphi))(v) = F'(\varphi)([1, v]) &= \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})\varphi([1, v](x)) = \pi(1)\varphi([1, v](1)) \\ &= \varphi(v). \end{aligned}$$

□

2.3 Caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$

La preuve de l'existence des invariants suivre [2, Proposition 26].

Lemme 2.3.1. *Soit G est un p-groupe, qui agit sur un ensemble X fini. Notons X^G l'ensemble des G-invariants. Alors $|X| = |X^G| \mod p$.*

Démonstration. L'ensemble $X \setminus X^G$ est l'union des orbites non-triviales de G. La cardinalité de chaque orbite est divisible par p, et alors $X \setminus X^G$ l'est aussi. □

Corollaire 2.3.2. *Soit V une k-représentation lisse d'un pro-p-groupe G. Alors il existe $v \in V \setminus \{0\}$ invariant sous l'action de G.*

Démonstration. Soit $v_0 \in V$, et supposons que v_0 n'est pas invariant sous G. On considère le k-sous-espace $W \subset V$ engendré par les gv_0, $g \in G$. Comme V est une représentation lisse, $Stab(v_0)$ est ouvert et donc d'indice fini dans G, et donc $W \subset V$ est une représentation de dimension finie. Comme W est de dimension finie, il existe un sous-groupe H de G (à savoir l'intersection des stabilisateurs d'une base de W) qui agit trivialement sur W. Donc il suffit de trouver un invariant non nul de la représentation W de dimension finie du p-groupe G/H.
Soit W_0 est la $\mathbb{F}_p$-sous-représentation de W engendré par v_0. Elle est de dimension finie, comme G/H est finie. En appliquant le lemme précédent on a $|W^G| = 0 \mod p$, et donc $|W| \geq p > 1$, d'où le résultat. □

Proposition 2.3.3. *Soit V une représentation lisse, irréductible, de dimension finie de $\mathbb{Z}_p^\times$. Alors V est de dimension 1, et ρ est triviale sur $(1+p\mathbb{Z}_p)$ et entièrement déterminée par l'image d'une racine primitive $(p-1)$-ième de l'unité.*

Démonstration. On sait que $\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p) \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$. Puisque $1 + p\mathbb{Z}_p$ est un pro-p-groupe, $V^{1+p\mathbb{Z}_p} \neq \{0\}$. Comme $\mathbb{Z}_p^\times$ est abélien, $V^{1+p\mathbb{Z}_p}$ est une sous-$\mathbb{Z}_p^\times$-représentation de V, et par irréductibilité $V^{1+p\mathbb{Z}_p} = V$. Donc l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ se factorise en une action de $\mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$, et par conséquent est entièrement déterminée par l'image d'un générateur de ce groupe cyclique.
Le corps k contient $\mathbb{F}_p$, et alors toutes les racines $(p-1)$-ièmes de l'unité. Donc l'action de $\mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$ est diagonalisable, d'où V est de dimension 1. □

On note $\omega : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p \subset k$ la réduction modulo p ; on va aussi noter $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to k^\times$ sa restriction sur $\mathbb{Z}_p^\times$. De même, si $\lambda \in k^\times$, on note $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ le caractère $x \mapsto \lambda^{v_p(x)}$.

Corollaire 2.3.4. *Soit $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ un caractère lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$. Alors il existe une unique paire $\lambda \in k^\times$ et $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ telle que $\chi = \omega^r \mu_\lambda$.*

Démonstration. On pose $\lambda = \chi(p)$. Alors $\chi\mu_\lambda^{-1}$ est un caractère de $\mathbb{Z}_p^\times$, qui est égale à ω^r (r est unique) par la proposition précédente. □

Chapitre 3

(φ, Γ)-modules

3.1 Premières définitions

Soit $k((\pi))$ le corps des séries de Laurent à coefficients dans k, et soit φ son endomorphisme défini par

$$\varphi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \pi^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \pi^{pn}.$$

On définit une action k-linéaire continue $\cdot : \Gamma \to Aut_k(k((\pi)))$ (on voit ici $k((\pi))$ comme une k-algèbre) de $\Gamma := \mathbb{Z}_p^\times$ sur $k((\pi))$ (qui est bien définie par continuité) :

$$\gamma \cdot \pi = (1+\pi)^\gamma - 1.$$

Définition 3.1.1. *On appelle φ-module sur k un $k((\pi))$-espace vectoriel D de dimension finie d muni d'une application $\varphi : D \to D$ semi-linéaire par rapport à $\varphi : k((\pi)) \to k((\pi))$ et non-dégénérée.*
On appelle (φ, Γ)-module sur k un φ-module muni d'une action semi-linéaire continue de Γ, commutant à celle de φ.

Proposition 3.1.1. *Soit D un (φ, Γ)-module de dimension 1. Alors il existe $\lambda \in k^\times$ et $h \in \{0, \dots, p-2\}$ tels que $D \simeq D_{\lambda,h}$, où $D_{\lambda,h}$ est défini par :*

$$\begin{aligned} D_{\lambda,h} &= k((\pi))e \\ \varphi(e) &= \lambda e \\ \gamma \cdot e &= \omega(\gamma)^h e. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit e une base de D, et soit $h(\pi) \neq 0$ tel que $\varphi(e) = h(\pi)e$. On écrit $h(\pi) = \lambda \pi^a f(\pi)$, où $\lambda \in k^\times$, $a \in \mathbb{Z}$, $f \in 1 + \pi k[[\pi]]$.
Pour $g(\pi) \in k[[\pi]]$, on a

$$\varphi(g(\pi)e) = \frac{\varphi(g(\pi))}{g(\pi)} h(\pi) g(\pi) e.$$

Si on pose $g(\pi) = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n(f(\pi))$, on obtient

$$\frac{\varphi(g(\pi))}{g(\pi)} = \frac{1}{f(\pi)}.$$

Quitte à changer e en $g(\pi)e$, on peut donc supposer $\varphi(e) = \lambda\pi^a e$, avec $a \in \mathbb{Z}$. Quitte à changer encore e en $\pi^b e$, où b est le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$, on peut aussi supposer que $0 \leq a \leq p-1$.
Maintenant soit $(1+p)e = l(\pi)e$, $l(\pi) \in k((\pi))$. Alors

$$\lambda\varphi(l(\pi))\pi^a e = \varphi((1+p)e) = (1+p)\varphi(e) = \lambda(\pi + \pi^p + \pi^{p+1})^a l(\pi)e.$$

Par regardant le terme de plus bas degré du $l(\pi)$, on montre que $l(\pi) \in k[[\pi]]$. Par regardant le plus bas degré du $l(\pi) - l(0)$, on montre que $l(\pi) \in k$. Alors on a $1 = (1 + \pi^{p-1} + \pi^p)^a$, et donc $a = 0$.
Finalement, $\varphi(e) = \lambda e$, et $(1+p)$ agit par une constante. On obtient le résultat à partir du lemme (2.3.3). □

3.2 ψ-modules

Le corps $k((\pi))$ est un $k((\pi^p))$-espace vectoriel ayant pour base $\{1, 1+\pi, \ldots, (1+\pi)^{p-1}\}$. Alors tout élément $x \in k((\pi))$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+\pi)^i \varphi(x_i)$, avec $x_i \in D$, et on peut définir l'inverse à gauche ψ de φ par $\psi(x) = x_0$.

Définition 3.2.1. *Soit D un φ-module sur $k((\pi))$. Alors tout élément $x \in D$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+\pi)^i \varphi(x_i)$, avec $x_i \in D$. On définit alors une application k-linéaire $\psi : D \to D$ par $\psi(x) = x_0$.*

Proposition 3.2.1. *Soit D un φ-module. Alors pour tout $\lambda \in k((\pi))$, $x \in D$ on a :*

1. $\psi(\lambda\varphi(x)) = \psi(\lambda)x$, $\psi(\varphi(\lambda)x) = \lambda\psi(x)$;
2. $\psi(\pi^{pm+r}) = (-1)^r \pi^m$ *si* $0 \leq r \leq p-1$ *et* $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.
1. Voir à partir du fait que $\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda)\varphi(x)$;
2. $\pi^{pm+r} = ((1+\pi)-1)^r \varphi(\pi^m) = (-1)^r \varphi(\pi^m) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} (1+\pi)^i \varphi(\pi^m)$.

□

Définition 3.2.2. *On appelle ψ-module un $k[[\pi]]$-module de type fini M muni d'une application additive $\psi : M \to M$ telle que $\psi(\varphi(\lambda)x) = \lambda\psi(x)$ pour tout $\lambda \in k((\pi))$, $x \in M$. M est dit surjectif si $\psi : M \to M$ est surjectif, et irréductible s'il ne contient pas de sous-ψ-module distinct de M et $\{0\}$.*

3.3 Les ψ-modules associés à φ-modules : $D^\sharp$, $D^\natural$

Définition 3.3.1. *Si D est un espace vectoriel de dimension finie sur $k((\pi))$, on appelle réseau de D un sous $k[[\pi]]$-module de type fini de D de rang égal à la dimension de D sur $k((\pi))$.*

Si M, N sont deux réseaux de D, alors il existe deux entiers a et b tels que $\pi^a N \subset M \subset \pi^b N$ car $k[[\pi]]$ est un anneau de valuation discrète. En particulier, si N est inclus dans M, alors M/N est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 3.3.1. *Soit D un φ-module sur $k((\pi))$. Alors il existe des réseaux N_0 et N_1 de D tels que $\varphi(N_0) \subset \pi N_0 \subset N_1 \subset \varphi(N_1)$.*

Démonstration. On fixe une base $e_1, \dots, e_d$ de D. Comme φ est non-dégénérée, il existe des matrices $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$ de $GL_d((k((\pi))))$ telles que

$$e_i = \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\varphi(e_j), \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}e_j.$$

Soit $n \geq 1$ tel que $\left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n A$ et $\left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n B$ soient à coefficients dans $\pi k[[\pi]]$. Notons N_0 le $k[[\pi]]$-module engendré par les $\pi^n e_i$ et N_1 le $k[[\pi]]$-module engendré par les $\pi^{-n}e_i$. Alors :

- $\varphi(\pi^n e_i) = \varphi(\pi)^n \sum_{j=1}^{d} a_{ij}e_j = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n a_{ij}\pi^n e_j \in \pi N_0$, donc $\varphi(N_0) \subset \pi N_0$;
- $n \geq 1$, donc $\pi N_0 \subset N_1$;
- $\pi^{-n}e_i = \pi^{-n} \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n b_{ij}\varphi(\pi^{-n}e_j)$, donc $N_1 \subset \varphi(N_1)$.

□

Lemme 3.3.2. *Soit D un φ-module sur $k((\pi))$ et M un réseau de D.*

1. *Si $\varphi(M) \subset M$, alors $M \subset \psi(M)$;*
2. *si le $k[[\pi]]$-module engendré par $\varphi(M)$ contient M, alors $\psi(M) \subset M$;*
3. *si $\psi(M) \subset M$, alors $\psi(\pi^{-1}M) \subset \pi^{-1}M$, et pour tout $x \in D$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n(x)$ on a $\psi^n(x) \in \pi^{-1}M$.*

Démonstration.
1. $M = \psi(\varphi(M)) \subset \psi(M)$;
2. $\psi(M) \subset \psi(k[[\pi]]\varphi(M)) = k[[\pi]]M = M$;
3. par définition de ψ on a $\psi(\varphi^i(\pi^{-1})x) = \varphi^{i-1}(\pi^{-1})\psi(x) \in \varphi^{i-1}(\pi^{-1})M$ pour tout $i \geq 1$. Donc $\psi(\pi^{-1}M) \subset \psi(\pi^{-p}M) = \psi(\varphi(\pi^{-1})M) \subset \pi^{-1}M$. Pour la dernière assertion, on sait que il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \varphi^n(\pi)^{-1}M$, et on obtient le résultat par appliquant ψ^n.

□

Proposition 3.3.3. *Il existe un unique réseau $D^\sharp$ de D qui est un ψ-module surjectif tel que pour tout $x \in D$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp$.*

Démonstration. Soit N_0, N_1 les réseaux fournis par le lemme 3.3.1. Posons $M_n = \psi^n(N_0)$. On a $M_n = \psi^{n+1}(\varphi(N_0)) \subset M_{n+1}$, de sorte que $(M_n)_n$ est une suite croissante de réseaux de D. De plus, $N_0 \subset N_1 \subset \varphi(N_1)$, et par le lemme précédent (point 2) $M_n \subset N_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Car N_1 est noethérien (module libre de type fini sur $k[[\pi]]$), $(M_n)_n$ stationne en un réseau M_∞ tel que $\psi(M_\infty) = M_\infty$.
Posons $M'_n = \psi^n(\pi^{-1}M_\infty)$. Par le dernier point du lemme précédent, $(M'_n)_n$ est une suite décroissante de réseaux de D, contenant M_∞. Mais $\pi_{-1}M_\infty/M_\infty$ est artinien, de sorte que $(M'_n)_n$ stationne en M'_∞ : il vérifie alors $\psi(M'_\infty) = M'_\infty$.
Si $x \in D$, on sait que il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^n(x) \in \pi^{-1}M_\infty$ pour $n \geq n(x)$. Comme $(M'_n)_n$ est stationnaire, on a $\psi^{m+n}(x) \in M'_\infty$ pour un certain m, et donc M'_∞ vérifie bien les propriétés requises pour $D^\sharp$.
Soit M_1 et M_2 deux réseaux vérifient tous les deux propriétés de l'énoncé. Quitte à remplacer M_1 par $M_1 + M_2$, on peut supposer $M_2 \subset M_1$. Alors $\psi : M_1/M_2 \to M_1/M_2$ est k-linéaire, surjective et nilpotente. Car $\dim_k M_1/M_2$ est finie, on déduit que $M_1 = M_2$, d'où l'unicité. □

Proposition 3.3.4. *Si N est un réseau de D stable par ψ tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N \subset D^\sharp$ et $D^\sharp/N$ est annulé par π.*

Démonstration. Si $\psi(N) = N$, alors $N + D^\sharp$ vérifie les mêmes propriétés que $D^\sharp$, d'où $N + D^\sharp = D^\sharp$ et $N \subset D^\sharp$.
Ensuite, par la même démonstration que dans la proposition 3.3.3 on montre que $(\psi^n(\pi^{-1}N))_n$ est décroissante (car $\psi(N) = N$) et de limite $D^\sharp$, d'où $D^\sharp \subset \pi^{-1}N$. □

Proposition 3.3.5. *Si M est un réseau de D stable par ψ et inclus dans $D^\sharp$, alors ψ est surjectif sur M et $D^\sharp/M$ est un k-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la* $\dim_{k((\pi))} D$.

Démonstration. L'application ψ induit une application surjective $\psi : D^\sharp/M \to D^\sharp/\psi(M)$. Puisque M est stable par ψ, la projection $D^\sharp/\psi(M) \to D^\sharp/M$ est aussi surjective.
Les modules $D^\sharp$, M, $\psi(M)$ sont des réseaux de D, alors $D^\sharp/M$ et $D^\sharp/\psi(M)$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. On déduit que $D^\sharp/\psi(M) \to D^\sharp/M$ est injective et $\psi(M) = M$.
Par la proposition précédente $D^\sharp/M$ est annulé par π, et donc $\dim_k D^\sharp/M \leq \dim_k D^\sharp/\pi D^\sharp = \operatorname{rang}_{k[[\pi]]} D^\sharp = \dim_{k((\pi))} D$. □

Corollaire 3.3.6. *L'ensemble des réseaux de D stables par ψ et inclus dans $D^\sharp$ possède un plus petit élément $D^\natural$ qui est un ψ-module surjectif.*

Démonstration. Notons $D^\natural$ l'intersection de tous les réseaux stables par ψ et inclus dans $D^\sharp$. Si $(M_n)_n$ est une suite décroissante de réseaux stables par ψ contenus dans $D^\sharp$, alors $(D^\sharp/M_n)_n$ est une suite croissante de k-espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à $d = \dim_{k((\pi))} D$, d'où $(M_n)_n$ est stationnaire et $M_{d+k} = M_d$ pour tout $k > 0$. Ceci preuve que $D^\natural$ est bien un réseau de D, stable par ψ, et donc par la proposition précédente $D^\natural$ est un ψ-module surjectif. □

En fin de compte, pour tout φ-module D nous avons construit le plus grand réseau surjectif $D^\sharp$ et le plus petit réseau surjectif $D^\natural$.

3.4 (ψ, Γ)-modules

Soit D un (φ, Γ)-module. On peut vérifier que l'opérateur ψ commute avec l'action de Γ. En effet, soit $a \in \Gamma$, $x \in D$. Alors $x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+\pi)^i \varphi(x_i)$, et $\psi(a \cdot x) = \sum_{i=0}^{p-1} \psi((1+\pi)^{ai} \varphi(a \cdot x_i))$. En notant $a_i = b_i + pc_i$, $b_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, avec $b_i = 0$ si et seulement si $i = 0$, on obtient

$$\psi(ax) = ax_0 + (1+\pi)^{c_i} \psi(\sum_{i=1}^{p-1} (1+\pi)^{b_i} \varphi(ax_i)),$$

d'où $\psi(a \cdot x) = a \cdot x_0 = a \cdot \psi(x)$.

Lemme 3.4.1. *Les ψ-modules $D^\sharp$, $D^\natural$ sont stables sous l'action de Γ.*

Démonstration. Le ψ-module $aD^\sharp$ est surjectif car ψ commute avec l'action de Γ. Par la proposition 3.3.4, on a $aD^\sharp \subset D^\sharp$, et en l'appliquant à a^{-1} on obtient $aD^\sharp = D^\sharp$.
De même,

$$aD^\natural = \bigcap_{M \subset D^\sharp \text{ stable par } \psi} aM = \bigcap_{M \subset D^\sharp \text{ stable par } \psi} M = D^\natural.$$

□

Définition 3.4.1. *Un (ψ, Γ)-module est un ψ-module muni d'une action semi-linéaire de Γ, commutant à ψ. Un (ψ, Γ)-module est dit irréductible, s'il ne posséde pas de sous-(ψ, Γ)-module non trivial et non propre, et surjectif si le ψ-module sous-jacent l'est.*

Proposition 3.4.2. *Si D est un (φ, Γ)-module de dimension 1, alors $D^\natural$ est un (ψ, Γ)-module irréductible.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un sous-(ψ, Γ)-module $M \subset D^\natural$ non trivial. Puisque $D^\natural$ est l'intersection de tous les réseaux ψ-stables inclus dans $D^\sharp$, M est nécessairement de rang sur $k[[\pi]]$ strictement inférieure à la dimension de D sur $k((\pi))$. Donc M est un ψ-module de torsion. Mais M est contenu dans D, donc il est libre — absurde. $\square$

Remarque. En fait, la proposition précédente reste vrai pour les (φ, Γ)-modules de dimension quelconque.

Chapitre 4

Représentations de $B_2(\mathbb{Q}_p)$

4.1 Premières observations

Soit $B = B_2(\mathbb{Q}_p)$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures. On note $K = B_2(\mathbb{Q}_p) \cap GL_2(\mathbb{Z}_p)$, et $Z = \mathbb{Q}_p^\times \operatorname{Id}$ le centre de B.

Proposition 4.1.1. *Soit $\chi : B \to k^\times$ un caractère lisse de $B_2(\mathbb{Q}_p)$. Alors $\chi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(c)$, où χ_1, χ_2 sont des caractères lisses de $\mathbb{Q}_p^\times$.*

Démonstration. On va commencer par montrer que le sous-groupe dérivé $D(B)$ de B est le groupe $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Un petit calcul donne $D(B) \subset N$. Pour l'inclusion réciproque, B/N est un groupe abélien. Alors χ se factorise en un caractère lisse de $B/N \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$. □

Corollaire 4.1.2. *Si σ_1, σ_2 sont deux caractères lisses de $\mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$, alors $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 : KZ \to k^\times$ défini par $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) = \sigma_1(a)\sigma_2(c)$ est un caractère lisse de KZ, et tout caractère lisse de KZ est de cette forme.*

Une représentation V du groupe G est dit *une représentation à caractère central*, si le centre de G agit sur V par un caractère.

Proposition 4.1.3. *Soit Π une représentation lisse irréductible de B à caractère central. Alors il existe un caractère lisse $\sigma : KZ \to k^\times$ tel que Π soit un quotient de $\operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma$.*

Démonstration. Considérons le pro-p-groupe $I_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1+p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1+p\mathbb{Z}_p \end{smallmatrix}\right)$. D'un côté, Π est lisse, et par la corollaire 2.3.2 on a $\Pi^{I_1} \neq \{0\}$. De l'autre côté, I_1 est le noyau du morphisme $K \to \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p^\times$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \mapsto (\bar{a}, \bar{c})$. Ainsi, Π^{I_1} est une représentation de $K/I_1 \simeq \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p^\times$.
Comme K/I_1 est abélien et que tous les éléments sont d'ordre $p-1$, cette représentation est diagonalisable. Comme Z agit sur Π par un caractère, il existe un caractère $\sigma : KZ \to k^\times$ et un élément non nul $v \in \Pi$ tel que KZ agit sur v via σ.
Par réciprocité de Frobenius (2.2.1) il existe un morphisme B-équivariant non nul $\operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma \to \Pi$, qui est nécessairement surjectif car Π est irréductible. □

Si $\lambda \in k^\times$, alors $\sigma_1\mu_\lambda \otimes \sigma_2\mu_\lambda^{-1}$ et $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ définissent les mêmes caractères de KZ, de sorte que $\operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma_1 \otimes \sigma_2 = \operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma_1\mu_\lambda \otimes \sigma_2\mu\lambda^{-1}$. Ainsi, nous pourrons toujours supposer $\sigma_2(p) = 1$.

4.2 Structure de $B_2(\mathbb{Q}_p)$

On note $A = \{a_1p^{-1} + \cdots + a_np^{-n}, 0 \leq a_i \leq p-1, n \in \mathbb{N}\}$ un système de représentants de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Pour $\beta \in A$ et $\delta \in \mathbb{Z}$, posons $g_{\beta,\delta} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{smallmatrix}\right)$. Alors les $g_{\beta,\delta}$ fournissent un système de représentants de B/KZ :

Lemme 4.2.1. *On a* $B = \bigsqcup_{\beta \in A, \delta \in \mathbb{Z}} g_{\beta,\delta}KZ$.

Démonstration. Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in B$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0p^{v_p(a)} & b \\ 0 & c_0p^{v_p(c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bp^{-v_p(a)}c_0^{-1} - x \\ 0 & p^{v_p(c)-v_p(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & xc_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{v_p(a)} & 0 \\ 0 & p^{v_p(c)} \end{pmatrix}$$

avec $a_0, c_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$. Il est toujours possible de choisir $x \in \mathbb{Z}_p$ de sorte que $bp^{-v_p(a)}c_0^{-1} - x$ soit dans A, donc $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in \bigcup_{\beta \in A, \delta \in \mathbb{Z}} g_{\beta,\delta}KZ$.
On va montrer que cette union est disjointe. En effet, soit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & p^{\delta'} \end{smallmatrix}\right)^{-1} \in KZ$. Alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta p^{-\delta'} - \beta' p^{-\delta} \\ 0 & p^{\delta-\delta'} \end{pmatrix} \in KZ$$

et donc $\delta = \delta'$, $\beta = \beta'$. $\square$

On peut identifier le système de représentants au-dessus à l'ensemble des sommets de l'arbre infini régulier de degré $p+1$, où tous les arcs sont de la forme $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & (\beta+a)p^{-1} \\ 0 & p^{\delta-1} \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $0 \leq a \leq p-1$:

Soit σ est un caractère de KZ. Alors par le lemme 4.2.1 et la section 2.2 une base de $\operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma$ est donnée par les $[g_{\beta,\delta}]$, $\delta \in \mathbb{Z}$, $\beta \in A$.

Définition 4.2.1. *Si $f = \sum_{\beta,\delta} \lambda_{\beta,\delta}[g_{\beta,\delta}]$ est un élément de $\operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma$, on appelle support de f l'ensemble fini des $g_{\beta,\delta}$ tels que $\lambda_{\beta,\delta} \neq 0$. On appelle l'entier δ la hauteur de $g_{\beta,\delta}$, et f est dit à support en niveaux $n_1, \ldots, n_k$ si tous les éléments de son support sont de hauteur dans $\{n_1, \ldots, n_k\}$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$ on appelle *n-bloc de niveau δ* un ensemble de la forme $\{[g_{\beta - jp^{-n},\delta}], j = 0, \ldots, p^n - 1\}$, et n-bloc *initial* de niveau δ le n-bloc pour lequel $\beta = 0$.

4.3 Certaines représentations irréductibles de B

Dans cette section on va construire quelques représentations irréductibles de B. On commence par des observations techniques.

Soit V_n le sous-k-espace vectoriel de $\operatorname{ind}_{KZ}^B \sigma$, engendré par le n-bloc de niveau δ.

Lemme 4.3.1. *On note $T_n : V_n \to V_n$ l'opérateur linéaire défini par multiplication par $g_{-p^{-n-\delta},0}$ à gauche. Alors $\Delta_n = T_n - \mathrm{Id}$ est nilpotent d'indice p^n.*

Démonstration. On a $\Delta_n^{p^n} = (T_n - \mathrm{Id})^{p^n} = T_n^{p^n} - \mathrm{Id}$ car k est de caractéristique p. Mais

$$g_{-p^{-n-\delta},0}^{p^n}[g_{\beta-jp^{-n},\delta}] = \begin{pmatrix} 1 & -p^{-n-\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p^n} \left[\begin{pmatrix} 1 & \beta - jp^{-n} \\ 0 & p^\delta \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & \beta - jp^{-n} - 1 \\ 0 & p^\delta \end{pmatrix}\right] =$$
$$= [g_{\beta-jp^{-n},\delta}],$$

donc $T_n^{p^n} = \mathrm{Id}$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 4.3.2. *Le noyau de Δ_n est égale à* $\operatorname{Vect}\left(\sum_{j=0}^{p^n-1}[g_{\beta-jp^{-n},\delta}]\right)$.

Démonstration. Soit $g=\sum_{j=0}^{p^n-1}a_j[g_{\beta-jp^{-n},\delta}]\in\operatorname{Ker}\Delta_n$. Alors

$$T_n g=\sum_{j=0}^{p^n-1}a_j[g_{\beta-(j+1)p^{-n},\delta}]=\sum_{j=0}^{p^n-1}a_j[g_{\beta-jp^{-n},\delta}]=g,$$

et donc tous les a_j sont égaux. Réciproquement, Δ_n est nilpotent, et donc la dimension de son noyauest au moins 1. $\square$

Lemme 4.3.3. *Soit $x\in V_n$ non nul. Alors on a*

$$\sum_{j=0}^{p^n-1}[g_{\beta-jp^{-n},\delta}]\in\operatorname{Vect}(x,T_n(x),\dots,T_n^{p^n-1}(x)).$$

Démonstration. Puisque Δ_n est nilpotent, il existe $m\le p^n$ tel que $\Delta_n^m(x)=0$ et $\Delta_n^{m-1}(x)\neq 0$. Alors $\Delta_n^{m-1}(x)\in\operatorname{Ker}\Delta_n$, et on obtient le résultat cherché en rappelant que $\Delta_n=T_n-\mathrm{Id}$. $\square$

Soit $\sigma=\sigma_1\otimes\sigma_2$ un caractère lisse de KZ tel que $\sigma_2(p)=1$, et $\lambda\in k^\times$. Notons $S(\lambda,\sigma)$ la sous-B-représentation de $\operatorname{ind}_{KZ}^B\sigma$ engendrée par

$$\omega=\lambda^{-1}[g_{0,1}]+\sum_{j=0}^{p-1}[g_{-jp^{-1},0}].$$

Lemme 4.3.4. *Un élément de $S(\lambda,\sigma)$ à support en un seul niveau est nécessairement nul.*

Démonstration. Soit $f\in S(\lambda,\sigma)$ à support en niveau n, et notons $f=\sum_{\delta\in I}\sum_{\beta\in A_\delta}\lambda_{\beta,\delta}g_{\beta,\delta}\omega$, avec $I\subset\mathbb{Z}$ et $A_\delta\subset A$ tels que $\lambda_{\beta,\delta}\neq 0$. Une telle écriture est toujours possible car si $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&c\end{smallmatrix}\right)\in KZ$, on a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{pmatrix}\omega\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}&=\lambda^{-1}\begin{pmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\right]+\sum_{j=0}^{p-1}\begin{pmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&-jp^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\right]\\&=\lambda^{-1}\begin{pmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&bp\\0&c\end{pmatrix}\right]+\\&+\sum_{j=0}^{p-1}\begin{pmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-jp^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a&-jp^{-1}(a-c)+b\\0&c\end{pmatrix}\right]=\sigma_1(a)\sigma_2(c)g_{\beta,\delta}\omega.\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{pmatrix}1&\beta'\\0&p^\delta\end{pmatrix}\sum_{j=0}^{p-1}\left[\begin{pmatrix}1&-jp^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\right]\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{pmatrix}\sum_{j=0}^{p-1}\left[\begin{pmatrix}1&-jp^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\right]$$

sont à supports disjoints si $(\beta-\beta')\notin\{0,\dots,-(p-1)\}\subset A$ et égaux sinon. On peut donc supposer que $f=\sum_{\delta\in I,\beta\in\mathbb{Q}_p/p^{-1}\mathbb{Z}_p}\lambda_{\beta,\delta}\left(\begin{smallmatrix}1&\beta\\0&p^\delta\end{smallmatrix}\right)\omega$ où pour tout $\delta\in I$ il existe β tel que $\lambda_{\beta,\delta}\neq 0$. Si $f\neq 0$, alors I est non vide, et notons i_0 (resp. i_1) le plus grand (resp. petit) élément. Par la construction de la somme tout élément de niveau i_0+1 ou i_1 se rencontre une seule fois, donc $i_0+1=n=i_1$. Mais $i_0\ge i_1$ par définition. Absurde, et $f=0$. $\square$

Proposition 4.3.5. *Le représentation* $\Pi(\lambda,\sigma) = ind_{KZ}^{B}\sigma/S(\lambda,\sigma)$ *est une représentation irréductible non triviale de* B.

Démonstration. La représentation $\Pi(\lambda,\delta)$ est non triviale car $[\mathrm{Id}] \notin S(\lambda,\sigma)$ par le lemme précédent.
Pour montrer que $\Pi(\lambda,\sigma)$ est irréductible, on va prouver que si $\bar{f}$ est un élément non nul de $\Pi(\lambda,\sigma)$, alors il existe une combinaison linéaire de B-translatés de f qui est égale à $[\mathrm{Id}]$ modulo $S(\lambda,\sigma)$.
Soit donc f un élément de $\mathrm{ind}_{KZ}^{B}\,\sigma$ d'image non nulle dans $\Pi(\lambda,\sigma)$. On peut supposer que f est à support en niveaux $a, a+1, \ldots, a+r$. Quitte à retrancher à f une combinaison linéaire de $g_{\beta,\delta}\omega$, on peut supposer que f est à support en un seul niveau a.
Le support de f est fini, donc on peut supposer qu'il est inclus dans le n-bloc initial de niveau a. Par le lemme 4.3.3 on peut trouver une combinaison linéaire de B-translatés de f égale à $\sum\limits_{j=0}^{p^n-1}[g_{\beta-jp^{-n},\delta}]$. Cette combinaison linéaire ne peut être dans $S(\lambda,\sigma)$ car elle est à support en un seul niveau. Ensuite, en y ajoutant $\sum\limits_{j=0}^{p^{n-1}-1} g_{\beta-jp^{-n},\delta}\omega$, on obtient un élément dont le support est non nul et inclus dans le $(n-1)$-bloc de niveau $a-1$.
On procède par récurrence descendante sur n, et en fin on se ramene à un élément qui est une combinaison linéaire de translatés de f dont le support est contenu en un seul élément $[g_{\beta',\gamma'}]$ modulo $S(\lambda,\sigma)$, donc $[\mathrm{Id}] = g_{\beta',\gamma'}^{-1}[g_{\beta',\gamma'}] \in \Pi(\lambda,\sigma)$. $\square$

Chapitre 5

Construction de représentations de B à partir de (φ, Γ)-modules

5.1 Construction de $\varprojlim_\psi$ et propriétés

Soit D un (ψ, Γ)-module libre sur $k[[\pi]]$. On définit le k-espace vectoriel $\varprojlim_\psi D$ par :

$$\varprojlim_\psi D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \psi(x_{n+1}) = x_n\}.$$

On munit $\varprojlim_\psi D$ de la topologie de la limite projective, de sorte que $\varprojlim_\psi D$ est un k-espace vectoriel de prodimension finie.
Nous allons définir une action de $B_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\varprojlim_\psi D$. On peut vérifier sans peine que tout élément $g \in B$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $t \in \mathbb{Q}_p^\times$, $j \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Q}_p$, $a \in \mathbb{Z}_p^\times$

Définition-proposition 5.1.1. *Si χ est un caractère lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$, on définit une action de B sur $x \in \varprojlim_\psi D$ par :*

$$\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} x\right)_n = \chi^{-1}(t) x_n, \tag{5.1}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} x\right)_n = \begin{cases} \psi^j(x_n) & si\ j > 0, \\ x_{n-j} & si\ j \leq 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} x\right)_n = a^{-1} \cdot x_n, \tag{5.3}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\right)_n = \psi^j((1+\pi)^{p^{n+j}z} x_{n+j})\ si\ n + j \geq -v_p(z). \tag{5.4}$$

De plus, les formules d'action (5.1)-(5.4) définissent une représentation continue du groupe B.

Démonstration. Pour vérifier que l'action est bien définie, on doit montrer que $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ pour tout $g_1, g_2 \in B$, $x = (x_n)_n \in \varprojlim_\psi D$.

Comme le centre de B agit par un caractère, on peut supposer

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{j_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{j_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$g_1g_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_2+b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{j_1+j_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_2+b_1c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}_p$, $c_1 = a_1p^{j_1}$, $c_2 = a_2p^{j_2}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_p^\times$, $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$.
On peut vérifier sans peine que, si $b \in \mathbb{Q}_p$, $c = ap^j$, $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, $j \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} x\right)_n = \psi^{j+k}(a^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k}b}x_{n+k})$$

pour $k \in \mathbb{Z}$ suffisament grand. Alors :

$$\begin{aligned}
(g_1(g_2x))_n &= \psi^{j_1+k}(a_1^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k}b_1}(g_2x)_{n+k}) = \\
&= \psi^{j_1+k}(a_1^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k}b_1}\psi^{j_2+l}(a_2^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k+l}b_2}x_{n+k+l})) \\
&= \psi^{j_1+j_2+k+l}(a_1^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k+l+j_2}b_1}(a_2^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k+l}b_2}x_{n+k+l})) \\
&= \psi^{j_1+j_2+k+l}((a_1a_2)^{-1}(1+\pi)^{p^{n+k+l+j_2}b_1a_2+p^{n+k+l}b_2}x_{n+k+l}) \\
&= \psi^{(j_1+j_2)+(k+l)}((a_1a_2)^{-1}(1+\pi)^{p^{n+(k+l)}(b_1c_2+b_2)}x_{n+(k+l)}) \\
&= (g_1g_2)x
\end{aligned}$$

pour k, l suffisament grands, et l'action est bien définie.
Finalement, l'action de B est continue puisque celles de ψ, Γ et χ le sont. □

Ainsi, $\varprojlim_\psi D$ est une représentation de prodimension finie de B, et donc par le théorème 2.1.2, $\Omega_\chi(D) = (\varprojlim_\psi D)^*$ est une représentation lisse de B, à caractère central χ.

Lemme 5.1.1. *Soit M est un sous-espace fermé de $\varprojlim_\psi D$ stable par B. On pose M_j l'image de M par la projection $pr_j : \varprojlim_\psi D \to D$, $(x_n)_n \mapsto x_j$. Alors :*

1. *$M_0 = M_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;*
2. *M_0 est un sous-$k[[\pi]]$-module de D stable par ψ et Γ ;*
3. *$M = \varprojlim_\psi M_0$.*

Démonstration. 1. Soit $x \in \varprojlim_\psi D$ et $pr_0(x) = x_0$. Alors $pr_j\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{smallmatrix}\right)x\right) = x_0$, donc $M_0 \subset M_j$. De même, $M_j \subset M_0$.

2. M_0 est évidement un sous-$k[[\pi]] - module$, stable par ψ car $pr_0\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)x\right) = \psi(x_0)$, et stable par Γ car $pr_0\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)x\right) = a^{-1}x_0$

3. Il est évident que $M \subset \varprojlim_\psi M_0$. Maintenant, soit $z = (z_n)_n \in \varprojlim_\psi M_0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $u^{(k)} \in M$ tel que $u_k^{(k)} = z_k$. Mais cela siqnifie que $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers z. Puisque M est fermé dans $\varprojlim_\psi D$, on a $z \in M$, d'où l'inclusion réciproque.

□

Proposition 5.1.2. *Si D est un (ψ,Γ)-module irréductible, alors $\Omega_\chi(D)$ est une représentation lisse irréductible de B.*

Démonstration. Par le théorème 2.1.2 il suffit de montrer que $\varprojlim_\psi D$ n'a pas de sous-B-représentations fermées non triviales. Par le lemme précédent, toutes telles sous-représentations sont de la forme $\varprojlim_\psi D'$, où D' est un sous-(ψ,Γ)-module. D est irréductible, d'où $\varprojlim_\psi D$ est irréductible. □

Définition 5.1.1. *Si D est un (φ,Γ)-module sur k, et χ est un caractère liss de $\mathbb{Q}_p^\times$, on note $\Omega_\chi(D)$ la représentation lisse de B définie par $\Omega_\chi(D)=\Omega_\chi(D^\natural)$.*

Si D est un (φ,Γ)-module de dimension 1, on sait (par les propositions 3.4.2 et 5.1.2) que $\Omega_\chi(D)$ est une représentation irréductible.

5.2 Représentations associées à (φ,Γ)-modules de dimension 1

Soit D un (φ,Γ)-module de dimension 1. Par la proposition 3.1.1 $D\simeq D_{\lambda,h}$ pour $\lambda\in k^\times$, $h\in\{0,\dots,p-2\}$. Soit donc e est une base de $D_{\lambda,h}$ sur $k((\pi))$ telle que $\varphi(e)=\lambda e$ et $ae=\omega^h(a)e$. On peut vérifie directement que $D^\sharp=\pi^{-1}k[[\pi]]e$, $D^\natural=k[[\pi]]e$, et $\psi(\alpha(\pi)e)=\lambda^{-1}\psi(\alpha(\pi))e$.

Soit θ_0 la forme linéaire sur $D^\natural_{\lambda,h}$, définie par $\theta_0(\alpha(\pi)e)=\alpha(0)$. On définit alors une forme linéaire θ sur $\varprojlim_\psi D^\natural_{\lambda,h}$ par $\theta(y)=\theta_0(y_0)$.

Lemme 5.2.1. *Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\in KZ$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\theta=\chi(a)\omega^h(a^{-1}d)\theta$.*

Démonstration.

$$\left(\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\theta\right)(y)==\theta\left(\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1}d^{-1}\\ 0 & d^{-1}\end{pmatrix}y\right)=$$
$$=\theta\left(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -bd^{-1}\\ 0 & ad^{-1}\end{pmatrix}y\right)=\chi(a)\omega^h(a^{-1}d)\theta(y).$$

□

Proposition 5.2.2. *La forme linéaire θ est annulée par*

$$\omega=\lambda^{-1}\chi(p)\,\mathrm{Id}-\sum_{j=0}^{p-1}\begin{pmatrix} p & -j\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Démonstration. En utilisant la définition de l'action de $B_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $D^\natural_{\lambda,h}$, on obtient :

$$\left(\lambda^{-1}\chi(p)\theta-\sum_{j=0}^{p-1}\begin{pmatrix} p & -j\\ 0 & 1\end{pmatrix}\theta\right)(y)=\lambda^{-1}\chi(p)\theta_0(y_0)-\chi(p)\theta_0\circ\psi\left(\sum_{j=0}^{p-1}(1+\pi)^jy_0\right).$$

Notons $y_0=\alpha(\pi)e$, avec $\alpha=\sum_{n\geq 0}\alpha_n\pi^n\in k[[\pi]]$. Alors $\theta_0(y_0)=\alpha_0$, et

$$\theta_0\left(\psi\left(\sum_{j=0}^{p-1}(1+\pi)^jy_0\right)\right)=\theta_0(\psi(\pi^{p-1}\alpha))=\lambda^{-1}\psi(\pi^{p-1}\alpha)(0)=$$
$$=\lambda^{-1}\alpha_0(-1)^{p-1}.$$

□

Théorème 5.2.3. *Si* $\lambda \in k^\times$ *et* $h \in \{0, \ldots, p-2\}$*, alors* $\Omega_\chi(D_\lambda, h) \simeq \Pi(\lambda\chi(p^{-1}), \sigma)$*, avec* $\sigma = \chi\omega^{-h} \otimes \omega^h$.

Démonstration. On sait déjà par le lemme 5.2.1 et la réciprocité de Frobenius 2.2.1 que $\Omega_\chi(D_\lambda, h)$ est un quotient de $\mathrm{ind}_{KZ}^B \sigma$ via l'application $\mathrm{ind}_{KZ}^B \to \Omega_\chi(D_\lambda, h)$ définie par

$$\sum_{\beta,\delta} \alpha(\beta,\gamma)[g_{\beta,\gamma}] \mapsto \sum_{\beta,\delta} \alpha(\beta,\gamma) g_{\beta,\gamma}\theta.$$

Cette application est surjective car non nulle et car $\Omega_\chi(D_\lambda, h)$. La proposition 5.2 dit que son noyau contient ω, et donc $S(\lambda\chi(p^{-1}), \sigma)$. Alors on obtient une application non triviale $\Pi(\lambda\chi(p^{-1}), \sigma) \to \Omega_\chi(D_\lambda, h)$. La représentation $\Pi(\lambda\chi(p^{-1}), \sigma)$ est irréductible par la proposition 4.3.5, donc cette application est un isomorphisme. $\square$

Chapitre 6

Calcul de $Ext^1(D_1, D_2)$ pour (φ, Γ)-modules de dimension 1

6.1 Premières remarques

Dans la suite, on fixe un corps k de caractéristique p non nul muni de la topologie discrète, on munit le corps $k((\pi))$ (π est une indéterminée) et le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ de leur topologie. On fixe ζ_{p-1} un générateur du groupe de $(p-1)$-ième racines de l'unité $\mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$.

Pour deux éléments $f, g \in k((\pi))$, on dit $f = O(g)$ si $f \in k[[\pi]]g$.

Pour chaque $h \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, on définit une nouvelle action de Γ sur $k((\pi))$ (notée $\odot_h$) par :

$$\gamma \odot_h f = \omega(\gamma)^h \gamma \cdot f.$$

On peut réécrire les conditions dans la définition d'un (φ, Γ)-module de la façon suivante :

$$\varphi(fv) = \varphi(f)\varphi(v),$$

$$\gamma \cdot (fv) = (\gamma \cdot f)(\gamma \cdot v),$$

$$\varphi(\gamma \cdot v) = \gamma \cdot \varphi(v)$$

pour tout $f \in k((\pi))$, $v \in D$, et $\gamma \in \Gamma$.

6.2 Explicitation de la définition de (φ, Γ)-modules

Soit D un (φ, Γ)-module de dimension n et $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ une $k((\pi))$-base de D. Alors il existe une unique matrice Φ et une unique famille continue de matrices $(M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ dans $GL_n(k((\pi)))$ telles que $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)\Phi$, $\gamma \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)M_\gamma$. Dans ce cadre, les conditions que D soit un (φ, Γ)-module se traduisent comme : $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$,

$$\Phi\varphi(M_\gamma) = M_\gamma \gamma \cdot \Phi, \tag{6.1}$$

$$M_{\gamma\gamma'} = M_\gamma(\gamma \cdot M_{\gamma'}). \tag{6.2}$$

6.3 Changement de base

Soit $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n$ une autre base de D, on note $A \in GL_n(k((\pi)))$ la matrice de transition, $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)A$. Alors on a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n) =&\varphi((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)A) \\ =&\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)\varphi(A) \\ =&(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)\Phi\varphi(A) \\ =&(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n)A^{-1}\Phi\varphi(A),\end{aligned} \tag{6.3}$$

et de même,

$$\gamma \cdot (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n)A^{-1}M_\gamma(\gamma \cdot A). \tag{6.4}$$

6.4 Le produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux (φ, Γ)-modules est aussi un (φ, Γ)-module de manière évidente. Par exemple on a $D_{\lambda,h} \otimes_{k((\pi))} D_{\lambda',h'} \cong D_{\lambda\lambda',h+h'}$. L'ensemble des classes d'isomorphisme de (φ, Γ)-modules de dimension un devient ainsi un groupe isomorphe à $k^\times \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, dont l'élément neutre est $D_{1,0}$.

Grâce à cette structure de groupe, le problème de trouver toutes les extensions de D_2 par D_1 pour D_1,D_2 deux (φ, Γ)-modules de dimension un se réduit au cas où $D_2 = D_{1,0}$.

6.5 L'espace des polynômes de degré plus petit que p

L'espace $\wp$ des polynômes de degré strictement plus petit que p est un sous k-espace vectoriel de $k[\pi]$ de dimension p, dont une base est $((1+\pi)^i)_{i=0}^{p-1}$. Chaque élément v de $\wp$ s'en exprime uniquement comme une combinaison k-linéaire :

$$v = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i a_i,\ a_i \in k,$$

on écrit alors $v = (a_0, a_1, \cdots, a_{p-1})$ par abus de langage. On a deux bijections suivantes sous cette correspondance :

$$\begin{aligned}&\{v \in \wp | v \text{ est constant}\} \\ \leftrightarrow&\{(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}) \in k^p | a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0\},\end{aligned} \tag{6.5}$$

et

$$\begin{aligned}&\{v \in \wp | v \text{ ne contient que des termes de degré } 0 \text{ et } p-1\} \\ \leftrightarrow&\{(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}) \in k^p | a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1}\}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

6.6 Un peu d'arithmétique sur $\mathbb{Z}_p$

$\forall \gamma \in \mathbb{Z}_p$, il existe un unique élément dans $\mathbb{Z}_p$ qu'on appelera $[\frac{\gamma}{p}]$ qui vérifie $\gamma = \bar{\gamma} + p[\frac{\gamma}{p}]$. On définit alors une application $\Delta : \Gamma \to k$ par $\Delta_\gamma = \omega([\frac{\gamma^{p-1}}{p}])$. On a :

Lemme 6.6.1. Δ *est un morphisme de groupes.*

Démonstration. Pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ quelconques, $1 + p[\frac{(\gamma\gamma')^{p-1}}{p}] = (\gamma\gamma')^{p-1} = (1 + p[\frac{\gamma}{p}])(1 + p[\frac{\gamma'}{p}]) \equiv 1 + p([\frac{\gamma^{p-1}}{p}] + [\frac{\gamma'^{p-1}}{p}]) \pmod{p^2\mathbb{Z}_p}$. Donc $[\frac{(\gamma\gamma')^{p-1}}{p}] \equiv [\frac{\gamma^{p-1}}{p}] + [\frac{\gamma'^{p-1}}{p}] \pmod{p\mathbb{Z}_p}$, il s'en suit que $\Delta_{\gamma\gamma'} = \Delta_\gamma + \Delta_{\gamma'}$. □

Pour $a \in \mathbb{Z}_p$, $(1+pa)^{p-1} \equiv 1 - pa \pmod{p^2\mathbb{Z}_p}$, donc les valeurs de Δ sur $1+p\mathbb{Z}_p$ sont données par :

$$\Delta_{1+pa} = -\omega(a), \forall a \in \mathbb{Z}_p. \tag{6.7}$$

On peut déduire un truc utile :

Lemme 6.6.2. $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \omega(\frac{[\frac{\gamma'\gamma}{p}]}{\gamma'\gamma}) = \Delta_{\overline{\gamma'\gamma}} - \Delta_{\gamma'} - \Delta_\gamma$.

Démonstration. Par (6.7) et lemme 6.6.1, $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$, on a :

$$\omega(\frac{[\frac{\gamma'\gamma}{p}]}{\gamma'\gamma}) = \omega(\frac{[\frac{\gamma'\gamma}{p}]}{\overline{\gamma'\gamma}}) = -\Delta_{1+p\frac{[\frac{\gamma'\gamma}{p}]}{\overline{\gamma'\gamma}}} = -\Delta_{\frac{\gamma'\gamma}{\overline{\gamma'\gamma}}} = \Delta_{\overline{\gamma'\gamma}} - \Delta_{\gamma'\gamma} = \Delta_{\overline{\gamma'\gamma}} - \Delta_{\gamma'} - \Delta_\gamma.$$

□

S'appuyant sur le lemme 6.6.1, on peut faire des calculs suivants : $0 = \Delta_1 = 2\Delta_{-1}$, donc $\Delta_{-1} = 0$ lorsque $p \geqslant 3$. Dans ce cas, on a par (6.7) que

$$\Delta_{p-i} = \Delta_{-1} + \Delta_i + \Delta_{1-pi^{-1}} = \Delta_i + \omega(i^{-1}).$$

Ça entraîne que

$$\sum_{i=1}^{p-1} i\Delta_i = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i(\Delta_i - \Delta_{p-i}) = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i(-\omega(i^{-1})) = -\omega(\frac{p-1}{2}) = \omega(\frac{1}{2}). \tag{6.8}$$

On va résoudre un système d'équations :

Lemme 6.6.3. *Soit $h \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ non nul, si une application $g : \Gamma \to k$ vérifie $g_{\gamma\gamma'} = g_\gamma + \omega(\gamma)^h g_{\gamma'}, \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$, alors il existe $C \in k$ tel que $g_\gamma = C(\omega(\gamma)^h - 1), \forall \gamma \in \Gamma$.*

Démonstration. Pour $\gamma \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, on a par l'hypothèse sur g que

$$g_\gamma + g_{\gamma'} = g_{\gamma\gamma'} = g_{\gamma'\gamma} = g_{\gamma'} + \omega(\gamma')^h g_\gamma,$$

donc $g_\gamma = \omega(\gamma')^h g_\gamma, \forall \gamma' \in \Gamma$. Mais $\omega(\gamma')^h$ n'est pas toujours égal à 1 car $h \neq 0$ dans $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, donc on a forcément $g = 0$ sur $1 + p\mathbb{Z}_p$. On en déduit que $g_\gamma = g_{\bar\gamma}, \forall \gamma \in \Gamma$. Maintenant prenons $\gamma = \zeta_{p-1}$, ainsi $\{1, \bar\gamma, \cdots, \overline{\gamma^{p-2}}\} = \{1, 2, \cdots, p-1\}$. On a d'abord $g_{\gamma^i} = g_{\gamma^{i-1}} + \omega(\gamma^{i-1})^h g_\gamma$. En sommant, on obtient $\forall i \in \{0, \cdots, p-1\}$,

$$g_{\gamma^i} = \sum_{j=1}^{i} \omega(\gamma^h)^{j-1} g_\gamma = \frac{\omega(\gamma^h)^i - 1}{\omega(\gamma^h) - 1} g_\gamma = \frac{\omega(\gamma^i)^h - 1}{\omega(\gamma)^h - 1} g_\gamma.$$

D'où le lemme. □

Lorsque $p \geqslant 3$, on a une sorte d'inverse du lemme 6.6.1 :

Lemme 6.6.4. *Si $g : \Gamma \to k$ est un morphisme de groupes, alors il existe $C \in k$ tel que $g_\gamma = C\Delta_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma$. (g est donc continue)*

Démonstration. Il suffit de prouver que g est déterminée par sa valeur en $1+p$. D'abord $0 = g_1 = g_{\zeta_{p-1}^{p-1}} = (p-1)g_{\zeta_{p-1}}$, donc $g_{\zeta_{p-1}} = 0$, on sait alors que g est déterminée par ses valeurs en $1+p\mathbb{Z}_p$. En plus, $\forall \gamma \in 1+p\mathbb{Z}_p$, $g_{\gamma^p} = pg_\gamma = 0$. Donc $g = 0$ sur $1+p^2\mathbb{Z}_p$ sachant que $(1+p\mathbb{Z}_p)^p = 1+p^2\mathbb{Z}_p$. D'où ce qu'on veut en remarquant que $1 + p\mathbb{Z}_p/1 + p^2\mathbb{Z}_p$ est engendré par $1 + p$. □

6.7 L'action $\lambda\varphi - Id$ sur $k((\pi))$

Soit $\lambda \in k^\times$. Comme ceux dans les sections précédantes, la série des lemmes présentés dans cette partie nous serviront quand nous entrerons dans les sections prochaines.

Lemme 6.7.1. *$\lambda\varphi - Id$ est un auto-homéomorphisme de $\pi k[[\pi]]$; Si de plus $\lambda \neq 1$, on a d'ailleurs que $\lambda\varphi - Id$ est un auto-homéomorphisme de $k[[\pi]]$.*

Démonstration. Pour le premier énoncé du lemme, il suffit de noter que $\lambda\varphi - Id : \pi k[[\pi]] \to \pi k[[\pi]]$ possède un inverse continu : $-\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^i \varphi^i$; Le deuxième énoncé en est une conséquence directe. □

Lemme 6.7.2. *$k((\pi)) = (\lambda\varphi - Id)(k((\pi))) \oplus \Omega_\lambda$, où* $\Omega_\lambda = \begin{cases} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}} k\pi^{-i} & \textit{lorsque } \lambda \neq 1, \\ k \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}} k\pi^{-i} & \textit{lorsque } \lambda = 1. \end{cases}$

Démonstration. C'est facile de voir que $(\lambda\varphi - Id)(k((\pi))) \cap \Omega_\lambda = \{0\}$. Il reste donc de prouver $k((\pi)) = (\lambda\varphi - Id)(k((\pi))) + \Omega_\lambda$. Remarquons d'abord $k[[\pi]] \subseteq (\lambda\varphi - Id)(k((\pi))) + \Omega_\lambda$ par lemme 6.7.1. Alors le fait que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$, on a $\pi^{-p^n m} = \lambda^{-n}\pi^{-m} + (\lambda\varphi - Id)\sum_{i=1}^n \lambda^{-i}\pi^{-p^{n-i}m}$ nous permet de conclure. □

Lemme 6.7.3. *Si $f \in \wp, i \in \mathbb{Z}_{\leqslant -1}, g \in \pi^{(i+1)p}k[[\pi]]$ satisfont $f\pi^{ip} + g \in Im(\lambda\varphi - Id)$, alors on a :*

$$\begin{cases} f \textit{ est constant,} & \textit{lorsque } i \leqslant -2, \\ f \textit{ ne contient que des termes de degré 0 et } p-1, & \textit{lorsque } i = -1. \end{cases}$$

Si de plus $f = O(\pi)$, alors $f = 0$.

Démonstration. Soient f, i, g comme dans l'hypothèse de l'énoncé, donc $\exists g' \in k((\pi))$ tel que $f\pi^{ip} + g = (\lambda\varphi - Id)g'$. Si $f = 0$, l'énoncé est vérifié automatiquement. Si $f \neq 0$, alors i est le plus grand entier tel que $g' = O(\pi^i)$, c.-à-d. $\exists C \in k$ tel que $g' = C\pi^i + O(\pi^{i+1})$. D'où $(\lambda\varphi - Id)g' = C\lambda\pi^{ip} - C\pi^i + O(\pi^{(i+1)p})$. Ça entraîne que $f\pi^{ip} = C\lambda\pi^{ip} - C\pi^i + O(\pi^{(i+1)p})$. Lorsque $i \leqslant -2$, on a $i \geqslant (i+1)p$, et donc $f\pi^{ip} = C\lambda\pi^{ip} + O(\pi^{(i+1)p})$. On a alors forcément $f = C\lambda$. Lorsque $i = -1$, on a $f\pi^{-p} = C\lambda\pi^{-p} - C\pi^{-1} + O(1)$, et donc $f = C\lambda - C\pi^{p-1}$ est bien ce qu'on attend.

Si de plus $f = O(\pi)$, la démonstration ci-dessus implique $f = 0$. □

Lemme 6.7.4. *Soient $f \in k((\pi)), \lambda \in k^\times, h \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, alors l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma | \gamma \odot_h f - f \in (\lambda\varphi - Id)(k((\pi)))\}$ est un sous-groupe ouvert (donc fermé) de Γ.*

Démonstration. Si $\gamma \odot_h f - f = (\lambda\varphi - Id)g, \gamma' \odot_h f - f = (\lambda\varphi - Id)g'$, alors on a

$$\begin{aligned} \gamma\gamma' \odot_h f - f =& \gamma \odot_h (\gamma' \odot_h f) - f \\ =& \gamma \odot_h (\gamma' \odot_h f - f) + (\gamma \odot_h f - f) \\ =& \gamma \odot_h ((\lambda\varphi - Id)g') + (\lambda\varphi - Id)g \\ =& (\lambda\varphi - Id)(\gamma \odot_h g' + g), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \odot_h f - f =& -\gamma^{-1} \odot_h (\gamma \odot_h f - f) \\ =& -\gamma^{-1} \odot_h ((\lambda\varphi - Id)g) \\ =& (\lambda\varphi - Id)(-\gamma^{-1} \odot_h g). \end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma | \gamma \odot_h f - f \in (\lambda\varphi - Id)(k((\pi)))\}$ est un sous-groupe de Γ. Il est ouvert grâce au lemme 6.7.1 et au fait que l'action $\odot_h$ est continue. □

6.8 Explicitation de $Ext^1(D_{\lambda,h}, D_{1,0})$

Soit $\lambda \in k$ et $h \in \{0, \cdots, p-2\}$. Pour une suite exacte de (φ, Γ)-modules

$$0 \to D_{\lambda,h} \to D \to D_{1,0} \to 0,$$

on fixe $\tilde{\mathbf{e}}_1 \in D_{\lambda,h}, \tilde{\mathbf{e}}_2 \in D_{1,0}$ tels que $\varphi(\tilde{\mathbf{e}}_1) = \lambda\tilde{\mathbf{e}}_1, \gamma \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 = \omega(\gamma)^h\tilde{\mathbf{e}}_1$ et que $\varphi(\tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_2, \gamma \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 = \tilde{\mathbf{e}}_2, \forall \gamma \in \Gamma$. Notons $\mathbf{e}_1$ l'image de $\tilde{\mathbf{e}}_1$ dans D. Prenons $\mathbf{e}_2 \in D$ une pré-image de $\tilde{\mathbf{e}}_2$. Alors on peut définir Φ et $(M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ comme dans la section 6.2 sous cette base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de D. Ces matrices sont triangulaires supérieures, il existe $f \in k((\pi))$ et une famille $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ dans $k((\pi))$ tels que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_\gamma = \begin{pmatrix} \omega(\gamma)^h & g_\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les équations (6.1) et (6.2) se traduisent maintenant comme

$$\gamma \odot_h f - f = (\lambda\varphi - Id)g_\gamma, \tag{6.9}$$

$$\text{et } g_{\gamma\gamma'} = g_\gamma + \gamma \odot_h g_{\gamma'}, \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma. \tag{6.10}$$

Pour que D soit un (φ, Γ)-module, il faut encore que g_γ soit continue par rapport à γ. Le lemme suivant nous dit que cette condition est redondante :

Lemme 6.8.1. *Soient $f \in k((\pi))$ et une application $g : \Gamma \to k$ vérifient les équations* (6.9) *et* (6.10)*, alors g est continue.*

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}_+$, par la continuité de l'action $\odot_h$, $\exists N \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ telle que $\gamma \odot_h f - f \in \pi^n k[[\pi]], \forall \gamma \in 1+p^N\mathbb{Z}_p$. Par (6.9), on sait que $g_\gamma \in k \oplus \pi^n k[[\pi]], \forall \gamma \in 1+p^N\mathbb{Z}_p$. On note ε_γ le terme constant de g_γ, en se concentrant sur les termes constants des deux côtés de l'équation (6.10), on a que ε est un morphisme de groupes de $1+p^N\mathbb{Z}_p$ sur k. En particulier, $\forall \gamma \in 1+p^N\mathbb{Z}_p, \varepsilon_{\gamma^p} = p\varepsilon_\gamma = 0$. Mais $(1+p^N\mathbb{Z}_p)^p = 1+p^{N+1}\mathbb{Z}_p$, donc $g_\gamma \in \pi^n k[[\pi]], \forall \gamma \in 1+p^{N+1}\mathbb{Z}_p$, d'où la continuité de g en $\gamma = 1$. Et (6.10) entraîne la continuité de g en $\gamma \in \Gamma$ quelconque. □

Si on choisit $\mathbf{e}_2'$ au lieu de $\mathbf{e}_2$ comme pré-image de $\tilde{\mathbf{e}}_2$ dans D, alors il existe $a \in k((\pi))$ tel que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2') = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note Φ' (resp. M'_γ) la matrice de l'action de φ (resp. $\gamma \in \Gamma$) sous cette nouvelle base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2')$, alors par (6.3) et (6.4), on a :

$$\begin{aligned} \Phi' &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Phi\varphi \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & f + (\lambda\varphi - Id)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M'_\gamma &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} M_\gamma\gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(\gamma)^h & g_\gamma + \gamma \odot_h a - a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

On pose :

$$\widehat{\Theta}_{\lambda,h} = \{(f, (g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}) | g : \Gamma \to k((\pi)) \text{ et } f \in k((\pi)) \text{ vérifient les équations (6.9) et (6.10)}\},$$

on en tire un sous-ensemble :

$$\Theta_{\lambda,h} = \{(f, (g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}) \in \widehat{\Theta}_{\lambda,h} | f \in \Omega_\lambda\}.$$

Grâce au lemme 6.8.1, on a par (6.11) que :

$$Ext^1(D_{\lambda,h}, D_{1,0}) \cong \widehat{\Theta}_{\lambda,h}/\hat{\sim}.$$

(Ici $\hat{\sim}$ est la relation d'équivalence définie par : $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\hat{\sim}(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ ssi il existe $a\in k((\pi))$ tel que $f'=f+(\lambda\varphi-Id)a$ et que $g'_\gamma=g_\gamma+\gamma\odot_h a-a,\forall\gamma\in\Gamma$.)

Par le lemme 6.7.2, on sait que pour tout $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\in\widehat{\Theta}_{\lambda,h}$, il existe $a\in k((\pi))$ tel que $f+(\lambda\varphi-Id)a\in\Omega_\lambda$, prenons $f'=f+(\lambda\varphi-Id)a$ et $g'_\gamma=g_\gamma+\gamma\odot_h a-a,\forall\gamma\in\Gamma$, alors $(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\in\Theta_{\lambda,h}$ et $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\hat{\sim}(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$.

En plus, pour deux éléments $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}),(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\in\Theta_{\lambda,h}$ différents, si $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\hat{\sim}(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$, alors il existe $a\in k((\pi))^\times$ tel que $f'=f+(\lambda\varphi-Id)a$, et que $g'_\gamma=g_\gamma+\gamma\odot_h a-a,\forall\gamma\in\Gamma$. Mais $f'-f\in\Omega_\lambda$, donc on a par le fait $\Omega_\lambda\cap(\lambda\varphi-Id)(k((\pi)))=\{0\}$ que $f'-f=(\lambda\varphi-Id)a=0$. Ça force $\lambda=1$ et $a\in k^\times$. Donc $g'_\gamma=g_\gamma+\gamma\odot_h a-a=g_\gamma+(\omega(\gamma)^h-1)a,\forall\gamma\in\Gamma$. Mais on a supposé que $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ et $(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ sont différents, donc $\omega(\gamma)^h-1$ n'est pas identiquement nul, d'où $h\neq 0$.

Les discussions ci-dessus nous conduisent au lemme suivant :

Lemme 6.8.2. $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})\cong\begin{cases}\Theta_{\lambda,h} & \textit{si } \lambda\neq 1 \textit{ ou } h=0,\\ \Theta_{\lambda,h}/\sim & \textit{sinon.}\end{cases}$

(Ici $\sim$ est la relation d'équivalence sur $\Theta_{\lambda,h}$ définie par : $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\sim(f',(g'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ ssi $f=f'$ et il existe $a\in k$ tel que $g'_\gamma=g_\gamma+(\omega(\gamma)^h-1)a,\forall\gamma\in\Gamma$.) Ainsi $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})$ est muni d'une structure de k-espace vectoriel induite par celle de $\Theta_{\lambda,h}$, on va déterminer sa dimension (finie !) et en donner une base explicite.

6.9 Calcul de $\Theta_{\lambda,h}$

Soit $(f,(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})\in\Theta_{\lambda,h}$. Écrivons f comme $\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(x_i)$. Posons

$$m=\max\{i\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}|x_0,\cdots,x_{p-1}\in\pi^i k[[\pi]]\},$$

alors il existe $b_0,\cdots,b_{p-1},c_0,\cdots,c_{p-1}\in k$ uniques tels que

$$x_i=b_i\pi^m+c_i\pi^{m+1}+O(\pi^{m+2}),\ \forall i\in\{0,\cdots,p-1\}.$$

et alors

$$f=\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(b_i\pi^m+c_i\pi^{m+1})+O(\pi^{p(m+2)}).$$

Dans ce qui suit, on va s'appliquer à exploiter les équations (6.9) et (6.10).

• Si $m=0$, on distingue le cas $\lambda\neq 1$ et le cas $\lambda=1$.

Dans le premier cas, on a $f=0$ parce que $f\in\Omega_\lambda$. Chaque g_γ est aussi 0 par (6.9).

Dans le deuxième cas, on a d'abord $f\in k$ parce que $f\in\Omega_1$. $\star$Si $f\neq 0$, alors par (6.9), on a $\omega(\gamma)^h f-f\in k\cap Im(\varphi-Id)=0,\forall\gamma\in\Gamma$. Donc $h=0$. Si c'est bien le cas ($h=0$), alors $g_\gamma\in k,\forall\gamma\in\Gamma$ par (6.9). Et (6.10) nous dit que g est un morphisme de groupes de Γ sur k. Dans la suite, on suppose toujours que $p\geqslant 3$. Par le lemme 6.6.4, il existe $C\in k$ tel que $g_\gamma=C\Delta_\gamma,\forall\gamma\in\Gamma$. $\star$Si $f=0$, on a $g_\gamma\in k$ par (6.9), et on sait par (6.10) et le lemme 6.6.3 qu'il existe $C\in k$ tel que $g_\gamma=C(\omega(\gamma)^h-1),\forall\gamma\in\Gamma$ lorsque $h\neq 0$, et par (6.10) et le lemme 6.6.4 qu'il existe $C\in k$ tel que $g_\gamma=C\Delta_\gamma,\forall\gamma\in\Gamma$ lorsque $h=0$.

Si $m\leqslant -1$, on a

$$f=O(\pi^{1+pm}) \tag{6.12}$$

parce que $f\in\Omega_\lambda$, et au moins un des $b_0,\cdots,b_{p-1}$ n'est pas 0. On en déduit

$$b_0+b_1+\cdots+b_{p-1}=0. \tag{6.13}$$

À partir de
$$f=\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(b_i\pi^m)+O(\pi^{p(m+1)}),\tag{6.14}$$
on a
$$\begin{aligned}\gamma\cdot f=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i\gamma}\varphi(b_i\gamma\cdot\pi^m)+O(\pi^{p(m+1)})\\=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{\overline{i\gamma}}\varphi(b_i\omega(\gamma)^m\pi^m)+O(\pi^{p(m+1)})\\=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i}\varphi(b_{\overline{i\gamma^{-1}}}\omega(\gamma)^m\pi^m)+O(\pi^{p(m+1)}).\end{aligned}$$
Donc
$$\gamma\odot_h f-f=\pi^{pm}\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i(b_{\overline{i\gamma^{-1}}}\omega(\gamma)^{m+h}-b_i)+O(\pi^{p(m+1)}).\tag{6.15}$$
Mais (6.12) entraîne $\gamma\odot_h f-f=O(\pi^{1+pm})$, donc
$$\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i(b_{\overline{i\gamma^{-1}}}\omega(\gamma)^{m+h}-b_i)=0$$
par l'équation (6.9) et le lemme 6.7.3. Autrement dit,
$$b_{\overline{i\gamma^{-1}}}\omega(\gamma)^{m+h}=b_i,\forall\gamma\in\Gamma,\forall i\in\{1,\cdots,p-1\}.$$
($b_0\omega(\gamma)^{m+h}=b_0$ est une conséquence directe de ceci grâce à (6.13).) D'où il existe $C\in k^\times$ telle que
$$b_i=C\omega(i^{m+h}),\forall i\in\{1,\cdots,p-1\}.\tag{6.16}$$
En regardant l'action de $1+p$ sur f, on a
$$\begin{aligned}(1+p)\cdot f=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i+ip}\varphi(b_i(\pi+\pi^p+\pi^{p+1})^m+c_i\pi^{m+1})+O(\pi^{p(m+2)})\\=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i}\varphi(b_i(1+\pi)^i(\pi+\pi^p+\pi^{p+1})^m+c_i\pi^{m+1})+O(\pi^{p(m+2)})\\=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i}\varphi(b_i\pi^m+(ib_i+c_i)\pi^{m+1})+O(\pi^{p(m+2)}).\end{aligned}\tag{6.17}$$
On en déduit :
$$(1+p)\odot_h f-f=\pi^{p(m+1)}\sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^i ib_i+O(\pi^{p(m+2)}).\tag{6.18}$$
Si $m\leqslant -3$, on a par (6.18), (6.9) et le lemme 6.7.3 que $\sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^i ib_i$ est constant. il s'en suit par (6.5) que $b_1=\cdots=b_{p-1}=0$. Donc b_0 est aussi nul par (6.13), ce qui contredit la définition de m.

- Si $m=-1$, on distingue le cas $\lambda=1$ et le cas $\lambda\neq 1$.

Lorsque $\lambda \neq 1$, on a $f = C\pi^{-p}\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i - 1)\omega(i^{h-1})$ par (6.14), (6.16), (6.13) et par $f \in \Omega_\lambda$. Et (6.15) garantit que $\gamma \odot_h f - f \in k[[\pi]]$ pour cette f. On en déduit par le lemme 6.7.1 que pour chaque $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique $g_\gamma \in k((\pi))$ (qui est dans $k[[\pi]]$ en fait) qui vérifie $\gamma \odot_h f - f = (\lambda\varphi - Id)g_\gamma$. Pour ces g_γ, on a

$$\begin{aligned}&(\lambda\varphi - Id)(g_\gamma + \gamma \odot_h g_{\gamma'} - g_{\gamma\gamma'})\\ =&(\gamma \odot_h f - f) + \gamma \odot_h (\gamma' \odot_h f - f) - (\gamma\gamma' \odot_h f - f) = 0.\end{aligned} \tag{6.19}$$

D'où $g_{\gamma\gamma'} = g_\gamma + \gamma \odot_h g_{\gamma'}$ par l'injectivité de l'application $\lambda\varphi - Id$. Ça veut dire qu'on a bien obtenu des éléments dans $\Theta_{\lambda,h}$.

Lorsque $\lambda = 1$, on a $f = C\pi^{-p}\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i - 1)\omega(i^{h-1}) + Cu$ pour certain $u \in k$. Par (6.15), on a d'abord $\gamma \odot_h f - f \in k[[\pi]], \forall \gamma \in \Gamma$. Donc $\gamma \odot_h f - f \in (\varphi - Id)(k((\pi)))$ si et seulement si $\gamma \odot_h f - f \in \pi k[[\pi]]$ parce que $(\varphi - Id)(k((\pi))) \cap k[[\pi]] = \pi k[[\pi]]$. On en déduit grâce au lemme 6.7.4 que $\gamma \odot_h f - f$ se trouve dans $(\varphi - Id)(k((\pi)))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ ssi $\gamma \odot_h f - f \in \pi k[[\pi]]$ pour $\gamma \in \{1+p, \zeta_{p-1}\}$ parce que $1+p$ est un générateur topologique du groupe $1 + p\mathbb{Z}_p$ et que $\Gamma \cong \mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p) \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$. Par (6.18), $(1+p) \odot_h f - f = C\sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^i\omega(i^h) + O(\pi^p)$, donc $\sum_{i=1}^{p-1}\omega(i^h) = 0$, c.-à-d. $h \neq 0$. Si h est bien non nul, alors il existe un unique $u = u^{(h)} \in k$ (qui ne dépend que de h) tel que $\zeta_{p-1} \odot_h f - f \in \pi k[[\pi]]$ parce que $\omega(\zeta_{p-1})^h \neq 1$ [(1)]. Pour ce u et cette f, on a alors $\gamma \odot_h f - f \in \pi k[[\pi]], \forall \gamma \in \Gamma$. Maintenant, le lemme 6.7.1 entraîne que pour chaque $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique $\tilde{g}_\gamma = \tilde{g}_\gamma^{(h)} \in \pi k[[\pi]]$ (qui ne dépend que de h) tel que $\gamma \odot_h f - f = (\varphi - Id)(C\tilde{g}_\gamma)$. Une dérivation comme (6.19) montre alors $(\varphi - Id)(\tilde{g}_\gamma + \gamma \odot_h \tilde{g}_{\gamma'} - \tilde{g}_{\gamma\gamma'}) = 0$, donc la famille $(C\tilde{g}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ vérifie bien l'équation (6.10) par l'injectivité de $\varphi - Id$ sur $\pi k[[\pi]]$ (lemme 6.7.1). Quelle est la relation entre cette famille spécifique et la famille $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ qu'on veut déterminer ? Elles vérifient toutes les deux les équations (6.9) et (6.10), donc leur différence $g_\gamma - C\tilde{g}_\gamma$ est contenu dans k. En plus, en tant qu'une application de Γ sur k, $g_\gamma - C\tilde{g}_\gamma$ vérifie l'hypothèse du lemme 6.6.3, donc il existe un $C' \in k$ tel que $g_\gamma - C\tilde{g}_\gamma = C'(\omega(\gamma)^h - 1), \forall \gamma \in \Gamma$.

- Si $m = -2$, on a par (6.18), (6.9), le lemme 6.7.3 et (6.6) que $b_1 = 2b_2 = \cdots = (p-1)b_{p-1}$ Combiné avec (6.16), ça entraîne $\omega(i^{h-1}) = \omega(j^{h-1}), \forall i, j \in \{1, \cdots, p-1\}$. Donc $h = 1$. On sait d'ailleurs $c_0 + c_1 + \cdots + c_{p-1} = 0$ parce que $f \in \Omega_\lambda$. On déduit à partir de $f = \sum_{i=0}^{p-1}(1+$

---

(1). Par exemple $u^{(1)} = \omega(\frac{1}{2})$, comme justifié par les calculs suivants : on a

$$\pi^{-p}\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i - 1) = \pi^{-1},$$

et

$$\begin{aligned}\gamma \odot_1 (\pi^{-1} + \omega(\frac{1}{2})) =&\omega(\gamma)(\omega(\gamma)^{-1}\pi^{-1} - \omega(\gamma^{-2}\binom{\gamma}{2}) + \omega(\frac{1}{2})) + O(\pi)\\ =&\pi^{-1} + \omega(\frac{1}{2})) + O(\pi), \forall \gamma \in \Gamma.\end{aligned} \tag{6.20}$$

$\pi)^i\varphi(b_i\pi^{-2}+c_i\pi^{-1})+O(1)$ que :

$$\begin{aligned}\gamma\odot_1 f =&\omega(\gamma)\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i\gamma}\varphi(b_i\gamma\cdot\pi^{-2}+c_i\gamma\cdot\pi^{-1})+O(1)\\ =&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{i\gamma}\varphi(b_i\omega(\gamma)^{-1}\pi^{-2}+(-2b_i\omega(\binom{\gamma}{2}\gamma^{-2})+c_i)\pi^{-1})+O(1)\\ =&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{\overline{i\gamma}}\varphi((1+\pi)^{[\frac{i\gamma}{p}]}(b_i\omega(\gamma)^{-1}\pi^{-2}+(-2b_i\omega(\binom{\gamma}{2}\gamma^{-2})+c_i)\pi^{-1}))+O(1)\\ =&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^{\overline{i\gamma}}\varphi(b_i\omega(\gamma)^{-1}\pi^{-2}+(-2b_i\omega(\binom{\gamma}{2}\gamma^{-2})+c_i+b_i\omega(\gamma)^{-1}\omega([\frac{i\gamma}{p}]))\pi^{-1})+O(1).\end{aligned}$$

Mais on avait obtenu $b_i=C\omega(i^{-1}),\forall i\in\{1,\cdots,p-1\}$ dans (6.16), donc $b_0=0$ par (6.13), ainsi

$$\begin{aligned}\gamma\odot_1 f-f=&\sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^{\overline{i\gamma}}\varphi((\omega(-2i^{-1}\binom{\gamma}{2}\gamma^{-2})C+c_i+\omega(\frac{[\frac{i\gamma}{p}]}{i\gamma})C-c_{\overline{i\gamma}})\pi^{-1})+O(1)\\ =&\pi^{-p}\sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^{\overline{i\gamma}}(c_i-\omega(i^{-1})C-c_{\overline{i\gamma}}+\omega(\overline{i\gamma}^{-1})C+\omega(\frac{[\frac{i\gamma}{p}]}{i\gamma})C)+O(1).\end{aligned}$$

Par le lemme 6.6.2, $\omega(\frac{[\frac{i\gamma}{p}]}{i\gamma})=\Delta_{\overline{i\gamma}}-\Delta_i-\Delta_\gamma$, la formule ci-dessus se simplifie ainsi à :

$$\gamma\odot_1 f-f=\pi^{-p}\sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^{\overline{i\gamma}}(a_i-a_{\overline{i\gamma}}-C\Delta_\gamma)+O(1)$$

où $a_i\in k$ est une notation pour $c_i-\omega(i^{-1})C-C\Delta_i,\forall i\in\{1,\cdots,p-1\}$. Par (6.9), le lemme 6.7.3 et (6.6), on obtient :

$$a_i-a_{\overline{i\gamma}}-C\Delta_\gamma=a_j-a_{\overline{j\gamma}}-C\Delta_\gamma,\forall i,j\in\{1,\cdots,p-1\}.$$

En particulier,

$$a_1-a_{\bar\gamma}=a_{\bar\gamma}-a_{\overline{\gamma^2}}=\cdots=a_{\overline{\gamma^{p-2}}}-a_{\overline{\gamma^{p-1}}}.$$

Mais leur somme est 0 a priori, donc chacun est en fait 0. En particulier $a_1-a_{\bar\gamma}=0$. C'est vrai $\forall\gamma\in\Gamma$, donc il existe $C'\in k$ tel que $a_1=a_2=\cdots=a_{p-1}=C'$, alors

$$\gamma\odot_1 f-f=C\Delta_\gamma(\pi^{-p}-\pi^{-1})+O(1),\forall\gamma\in\Gamma \tag{6.21}$$

Rappelons que c'est dans l'image de $(\lambda\varphi-Id)$ pour tout $\gamma\in\Gamma$, cela n'est possible que lorsque $\lambda=1$ car Δ_γ n'est pas toujours 0 (par exemple $\Delta_{1+p}=-1$ comme dans (6.7)). Lorsque $\lambda=1$, $f=\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(b_i\pi^m+c_i\pi^{m+1})+a$ pour certain $a\in k$ parce que $f\in\Omega_1$. On calcule $(1+p)\odot_1 f$ comme dans l'équation (6.17) mais d'une manière plus précise :

$$\begin{aligned}(1+p)\odot_1 f=&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(b_i(1+\pi)^i(\pi+\pi^p+\pi^{p+1})^{-2}+c_i(1+\pi)^i\pi^{-1})+a+O(\pi)\\ =&\sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(b_i\pi^{-2}+(ib_i+c_i)\pi^{-1}+\binom{i}{2}b_i+ic_i-2b_i\pi^{p-3})+a+O(\pi).\end{aligned}$$

Par (6.13),

$$(1+p)\odot_1 f - f = \sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(ib_i\pi^{-1}+\binom{i}{2}b_i+ic_i)+O(\pi)$$
$$= -C(\pi^{-p}-\pi^{-1})+\sum_{i=1}^{p-1}(\binom{i}{2}b_i+ic_i)+O(\pi).$$

Mais on a dans k que $\sum_{i=1}^{p-1}(\binom{i}{2}b_i+ic_i) = \sum_{i=1}^{p-1}(\omega(\frac{i-1}{2})C+i(\omega(i^{-1})C+C\Delta_i+C')) = C(\sum_{i=1}^{p-1}i\Delta_i-\omega(\frac{1}{2}))=0$ par l'équation (6.8). Alors par le même argument comme dans le cas $m=-1$, on sait qu'il existe un unique $a=a^{(C,C')}\in k$ (qui dépend d'une façon linéaire de C,C') tel que $\gamma\odot_1 f-f$ se trouve bien dans $Im(\varphi-Id)$ pour tout $\gamma\in\Gamma$. Pour ce a et cette f, on sait par (6.21) et lemme 6.7.1 que pour chaque $\gamma\in\Gamma$, il existe un unique $\hat{g}_\gamma=\hat{g}_\gamma^{(C,C')}$ (qui dépend linéairement de C,C') de la forme $C\Delta_\gamma(\pi^{-1}+\omega(\frac{1}{2}))+O(\pi)$ qui satisfait l'équation $\gamma\odot_1 f-f=(\varphi-Id)\hat{g}_\gamma$. Par (6.20), on a $\gamma\odot_1\hat{g}_{\gamma'}=C\Delta_{\gamma'}(\pi^{-1}+\omega(\frac{1}{2}))+O(\pi),\forall\gamma,\gamma'\in\Gamma$. Combiné avec le lemme 6.6.1, on a :

$$\hat{g}_\gamma+\gamma\odot_1\hat{g}_{\gamma'}-\hat{g}_{\gamma\gamma'}=C(\Delta_\gamma+\Delta_{\gamma'}-\Delta_{\gamma\gamma'})(\pi^{-1}+\omega(\frac{1}{2}))+O(\pi)=O(\pi)$$

Donc une dérivation comme dans (6.19) nous permet de conclure que $\hat{g}_\gamma+\gamma\odot_1\hat{g}_{\gamma'}=\hat{g}_{\gamma\gamma'}$ grâce à l'injectivité de l'application $\varphi-Id$ sur $\pi k[[\pi]]$. Alors par les mêmes arguments comme dans le cas $m=-1$, on sait qu'il existe $C''\in k$ tel que $g_\gamma-\hat{g}_\gamma=C''(\omega(\gamma)-1),\forall\gamma\in\Gamma$.

On résume ce qu'on a obtenu sur $\Theta_{\lambda,h}$ pour p impair :

Théorème 6.9.1. *Lorsque $\lambda\neq 1$, alors $\Theta_{\lambda,h}$ est de dimension 1, dont une base est : $(f=\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i-1)\omega(i^{h-1})\varphi(\pi^{-1}), g_\gamma=\tilde{g}_\gamma)$. Où $\tilde{g}_\gamma=O(1)$ ne dépend que de λ,h,γ.*

Lorsque $\lambda=1,h\neq 0,1$, alors $\Theta_{\lambda,h}$ est de dimension 2, dont une base est : $(f=0,g_\gamma=\omega(\gamma)^h-1),(f=\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i-1)\omega(i^{h-1})\varphi(\pi^{-1})+u^{(h)},g_\gamma=\tilde{g}_\gamma^{(h)})$. Où $u^{(h)}\in k$ ne dépend que de h, $\tilde{g}_\gamma^{(h)}=O(\pi)$ ne dépend que de h,γ.

Lorsque $\lambda=1,h=0$, alors $\Theta_{\lambda,h}$ est de dimension 2, dont une base est : $(f=1,g_\gamma=0),(f=0,g_\gamma=\Delta_\gamma)$.

Lorsque $\lambda=1,h=1$, alors $\Theta_{\lambda,h}$ est de dimension 3, dont une base est : $(f=0,g_\gamma=\omega(\gamma)-1),(f=\pi^{-1}+\omega(\frac{1}{2}),g_\gamma=\tilde{g}_\gamma^{(1)}),(f=\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i-1)\varphi(\omega(i^{-1})\pi^{-2}+(\omega(i^{-1})+\Delta_i)\pi^{-1}))+v,g_\gamma=\tilde{\tilde{g}}_\gamma)$. Où $v(=a^{(1,0)})\in k$ est une constante absolue, $\tilde{g}_\gamma^{(1)}=O(\pi),\tilde{\tilde{g}}_\gamma(=\hat{g}_\gamma^{(1,0)})=\Delta_\gamma(\pi^{-1}+\omega(\frac{1}{2}))+O(\pi)$ ne dépend que de γ.

6.10 Résumé pour $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})$

Soit $p=char(k)$ impair, soient $\lambda\in k^\times,h\in\{0,1,\cdots,p-2\}$. Par la connaissance de $\Theta_{\lambda,h}$ qu'établit la section précédante, nous pouvons maintenant déterminer $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})$ grâce au lemme 6.8.2 :

- Lorsque $\lambda\neq 1$, alors $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})$ est de dimension 1, dont une base est : $(f=\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i-1)\omega(i^{h-1})\varphi(\pi^{-1}),g_\gamma=\tilde{g}_\gamma)$. Où $\tilde{g}_\gamma=O(1)$ ne dépend que de λ,h,γ.
- Lorsque $\lambda=1,h\neq 0,1$, alors $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})$ est de dimension 1, dont une base est : $(f=\sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i-1)\omega(i^{h-1})\varphi(\pi^{-1})+u^{(h)},g_\gamma=\tilde{g}_\gamma^{(h)})$. Où $u^{(h)}\in k$ ne dépend que de h, $\tilde{g}_\gamma^{(h)}=O(\pi)$ ne dépend que de h,γ.
- Lorsque $\lambda=1,h=0$, alors $Ext^1(D_{\lambda,h},D_{1,0})$ est de dimension 2, dont une base est : $(f=1,g_\gamma=0),(f=0,g_\gamma=\Delta_\gamma)$.

• Lorsque $\lambda = 1, h = 1$, alors $Ext^1(D_{\lambda,h}, D_{1,0})$ est de dimension 2, dont une base est : $(f = \pi^{-1} + \omega(\frac{1}{2}), g_\gamma = \tilde{g}_\gamma^{(1)}), (f = \sum_{i=1}^{p-1}((1+\pi)^i - 1)\varphi(\omega(i^{-1})\pi^{-2} + (\omega(i^{-1}) + \Delta_i)\pi^{-1})) + v, g_\gamma = \tilde{\tilde{g}}_\gamma)$. Où $v \in k$ est une constante absolue, $\tilde{g}_\gamma^{(1)} = O(\pi), \tilde{\tilde{g}}_\gamma = \Delta_\gamma(\pi^{-1} + \omega(\frac{1}{2})) + O(\pi)$ ne dépend que de γ.

Bibliographie

[1] Mathieu Vienney, *Construction de* (φ,Γ)*-modules en caractèristique* p, thèse de doctorat (2012). Disponible à `http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/76/37/85/PDF/VIENNEY_Mathieu_2012_these.pdf`

[2] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1978.