Marche aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^2$ incisé

Jean-Marie Mirebeau et Pierre-Henri Brouard
Sujet proposé par Christophe Sabot

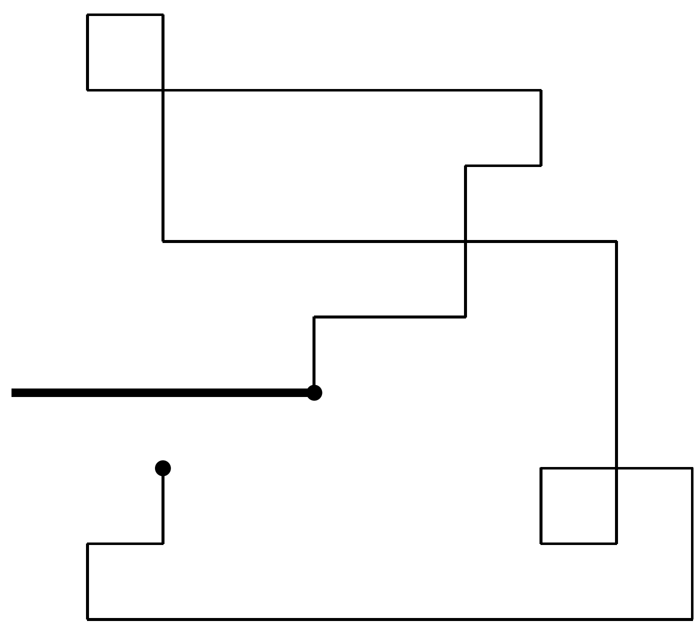
25 juin 2004

Table des matières

1 Introduction

1.1 Les principaux résultats et les méthodes

On veut étudier les marches aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^2$ (i.e. qui sont constituées de quatre pas : monter d'un, descendre d'un, aller à gauche d'un ou aller à droite d'un) qui partent de $(0,0)$, et qui ne reviennent pas sur l'axe des $x \leq 0$. On va ainsi chercher à dénombrer de telles marches de longueur fixée n.



Pour cela, les approches bijectives ne semblant pas aboutir, nous allons voir une approche combinatoire et considérer la fonction génératrice associée

$$S(x, y; t) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ i,j \in \mathbb{Z}}} a_{i,j}(n) x^i y^j t^n$$

où $a_{i,j}(n)$ est le nombre de telles marches de longueur n terminant en (i, j).

On va pour cela établir une relation de récurrence vérifiée par $S(x, y; t)$ en considérant un chemin de longueur n comme un chemin de longueur $n - 1$ auquel on a rajouté un pas à la fin. On la simplifiera ensuite en l'évaluant pour une valeur fixée de y de façon à annuler l'un des termes de l'équation.

Nous donnerons une expression algebrique de cette somme :

$$S(x, y; t) = \frac{(1 - 2t(1 + x^{-1}) + \sqrt{1 - 4t})^{1/2}(1 + 2t(1 - x^{-1}) + \sqrt{1 + 4t})^{1/2}}{2(1 - t(x + x^{-1} + y + y^{-1}))}.$$

Elle permet d'obtenir un équivalent du nombre de marches de longueur n :

$$a(n) \sim \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\Gamma(3/4)} 4^n n^{-\frac{1}{4}}.$$

On cherchera alors à dénombrer le nombre de marches de longueur n se terminant en un point (i,j) fixé, on s'intéressera donc à la série $S_{i,j}(t) = \sum_{n\geq 0} a_{i,j}(n)t^n$ que l'on peut calculer en extrayant le coefficient de $x^i y^j$ dans la série $S(x,y;t)$. On vérifiera en particulier que $S_{1,0}(t) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_{2n+1} t^{2n+1}$ et $S_{0,1}(t) = \sum_{n\geq 0} 4^n \mathrm{C}_n t^{2n+1}$ (où $\mathrm{C}_n = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{n+1}$ est le n-ième nombre de Catalan), c'est à dire qu'il y a exactement C_{2n+1} marches de longueur $2n+1$ entre $(0,0)$ et $(1,0)$ et qu'il y en a exactement $4^n \mathrm{C}_n$ entre $(0,0)$ et $(0,1)$.

On étudiera alors les marches ne partant plus nécessairement de l'origine mais d'un point de la demi-droite $x \leq 0$. Pour cela on s'intéressera à la série génératrice $B_{i,j}(z,t) = \sum_{n\geq 0, k\geq 0} a_{i,j}^{-k}(n) z^k t^n$ où $a_{i,j}^{-k}(n)$ est le nombre de marches partant de $(-k,0)$, se terminant en (i,j) et de longueur n. On obtiendra son expression par translation à partir de celle des $S_{i,j}(t)$.

On cherchera finalement la probabilité $p_{i,j}^k$ qu'une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ partant de (i,j) coupe pour la première fois l'axe des x négatifs en $(-k,0)$. On la calculera en utilisant la série génératrice $\sum_{k\geq 0} p_{i,j}^k z^k = \sum_{\substack{n\geq 0\\ k\geq 0}} \frac{a_{i,j}^{-k}(n)}{4^n} z^k = B_{i,j}(z, 1/4)$. On obtiendra en particulier que $p_{0,1}^0 = \frac{1}{2}$ et que $p_{1,0}^0 = 2 - \sqrt{2}$. Plus généralement, on remarquera que $p_{i,j}^k$ a toujours une expression relativement simple, puisque $p_{i,j}^k \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

1.2 Préliminaire

Nous utiliserons dans cet exposé plusieurs outils combinatoires.

1.2.1 Les séries de Laurent

Définition 1 *Si $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif, on note*

$$Laurent(\mathbb{A};t) = \{\sum_{n\geq N} a_n t^n\}_{\substack{N\in\mathbb{Z}\\ a_n\in\mathbb{A}}}$$

l'anneau des séries de Laurent formelles à coefficients dans $\mathbb{A}$.

Il est commutatif. Il est unitaire si $\mathbb{A}$ l'est, et intègre si $\mathbb{A}$ l'est, ce que l'on supposera désormais.
Notons $deg(\sum_{n\geq N} a_n t^n) = inf\{n \geq N, a_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ alors $deg(ST) = degS + degT$ et $deg(S+T) \geq Min(degS, degT)$.

Définition 2 *On notera*

$$\mathbb{A}[[t]] = \{S \in Laurent(\mathbb{A};t), degS \geq 0\}$$

le sous anneau des series formelles $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$.

Si $S_n(t)$ est une suite dans $\mathbb{A}[[t]]$, alors $\sum_{n\geq N} t^n S_n(t)$ est bien définie, car le coefficient de t^n ne dépend que des $n-N$ premiers termes. On en déduit les propriétés suivantes :

Soit $S \in \mathbb{A}[[t]]$, alors $1 - tS(t)$ est inversible, et

$$(1 - tS(t))^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n S(t)^n.$$

D'autre part,

Définition 3 *posons*

$$\sqrt{1 + tS(t)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}^n_{\frac{1}{2}} t^n S(t)^n$$

avec

$$\mathrm{C}^n_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\ldots)(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sqrt{1+tS(t)}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}^k_{\frac{1}{2}} \mathrm{C}^{n-k}_{\frac{1}{2}}) t^n S(t)^n \\ &= 1 + tS(t). \end{aligned}$$

En effet l'égalité, dans $\mathbb{Q}$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}^k_{\frac{1}{2}} \mathrm{C}^{n-k}_{\frac{1}{2}} = \delta_{n,0} + \delta_{n,1}$ découle du fait que les *séries entières* $1 + x$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}^k_{\frac{1}{2}} \mathrm{C}^{n-k}_{\frac{1}{2}}) x^n = \sqrt{1+x}^2$ sont égales sur $]-1,1[$.

1.2.2 Les polynômes de Laurent

L'anneau $\mathbb{A}$ considéré sera le plus souvent celui de polynômes de Laurent en x et y :

Définition 4 *Sur un corps* K*, c'est*

$$K[x, x^{-1}, y, y^{-1}] = \{P(x, x^{-1}, y, y^{-1})\}_{P\in K[x_1,x_2,y_1,y_2]} \subset K(x,y).$$

On notera par commodité $\overline{x} = x^{-1}$ et $\overline{y} = y^{-1}$.
Ainsi par exemple, $S(x,y;t) \in (\mathbb{Q}[x,\overline{x},y,\overline{y}])[[t]]$.
C'est dans l'anneau $Laurent(K[x,\overline{x},y,\overline{y}];t)$ que nous effectuerons le plus souvent nos calculs. Occasionellement nous aurons besoin de $Laurent(\mathbb{A};z,t) = Laurent(Laurent(\mathbb{A};z);t)$.

Il sera important à plusieurs reprises de connaître le signe des exposants d'une série, sans se préoccuper de la valeur des coefficients. Nous noterons donc $\sum(x_1, x_2, ...;t)$pour un élement quelconque de $K[x_1,x_2,...][[t]] \subset Laurent(K[x,\overline{x},y,\overline{y}];t)$. Par exemple, $\sum(t)$, $\sum(x;t)$, $\sum(x,\overline{x};t)$.

2 Fonction génératrice associée à la marche

2.1 La relation de récurrence et sa traduction fonctionnelle

Définition 5 *On appellera un pont un chemin qui se termine sur l'axe des x négatifs sans rencontrer la demi droite $x \leq 0$ entre temps.*
On notera $B(\overline{x};t) = \sum_{\substack{i \leq 0 \\ n \geq 0}} b_{i,0}(n) x^i t^n$ la fonction génératrice pour les ponts, où $b_{i,0}(n)$ désigne le nombre de ponts entre $(0,0)$ et $(i,0)$.

Proposition 1 $S(x,y;t) = 1 + tS(x,y;t)(x + \overline{x} + y + \overline{y}) - B(\overline{x};t)$.

Démonstration :

On peut obtenir une relation de récurrence pour $S(x,y;t)$ en considérant un chemin de longueur n comme un chemin de longueur $n-1$ auquel on a rajouté une arête à la fin : on obtient ainsi un chemin de longueur n sauf si on obtient un pont. Donc

$$a_{i,j}(n+1) = \begin{cases} a_{i-1,j}(n) + a_{i+1,j}(n) + a_{i,j-1}(n) + a_{i,j+1}(n) & \text{sauf si } (j=0 \text{ et } i \leq 0) \\ 0 = a_{i-1,0}(n) + a_{i+1,0}(n) + a_{i,-1}(n) + a_{i,+1}(n) - b_{i,0}(n+1) & \text{dans ce cas} \end{cases}$$

$$a_{i,j}(n+1) = a_{i-1,j}(n) + a_{i+1,j}(n) + a_{i,j-1}(n) + a_{i,j+1}(n) - \delta_{j,0} 1_{i \leq 0} b_{i,0}(n+1).$$

$$S(x,y;t) = 1 + t \sum_{\substack{n \geq 0 \\ i,j \in \mathbb{Z}}} a_{i,j}(n+1) x^i y^j t^n$$

$$= 1 + t \sum_{\substack{n \geq 0 \\ i,j \in \mathbb{Z}}} \Big(x a_{i-1,j}(n) x^{i-1} y^j t^n + \overline{x} a_{i+1,j}(n) x^{i+1} y^j t^n + ... - \delta_{j,0} 1_{i \leq 0} b_{i,0}(n+1) x^i y^j t^n \Big).$$

Finalement $S(x,y;t) = 1 + tS(x,y;t)(x + \overline{x} + y + \overline{y}) - B(\overline{x};t)$. $\square$

Pour exprimer la symétrie du problème par rapport à l'axe des x $(a_{i,j} = a_{i,-j})$, on va considérer la série génératrice

Définition 6

$$\begin{aligned} T(x,y;t) &= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ i,j \in \mathbb{Z}}} a_{i,j}(n) x^i y^{|j|} t^n \\ &= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ i,j \in \mathbb{Z}}} t_{i,j}(n) x^i y^j t^n. \end{aligned}$$

Définition 7 *Notons $S_0(x;t) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ i \geq 0}} a_{i,0}(n) x^i t^n$ la série génératrice pour les chemins se terminant sur l'axe des x.*

Proposition 2

$$T(x,y;t) = 1 + tT(x,y;t)(x+\overline{x}+y+\overline{y}) - B(\overline{x};t) - tS_0(x;t)(\overline{y}-y)$$

Démonstration :

$$t_{i,j}(n) = \begin{cases} 2a_{i,j}(n) & \text{si } j>0 \\ a_{i,j}(n) & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } j<0 \end{cases}$$

En distinguant les cas $j>1$, $j=1$, $j=0$, $j=-1$ et $j<-1$, on obtient facilement la formule :

$$t_{i,j}(n+1) = t_{i+1,j}(n) + t_{i-1,j}(n) + t_{i,j+1}(n)(1-\delta_{-1,j}) + t_{i,j-1}(n)(1+\delta_{1,j}).$$

Ainsi

$$T(x,y;t) = 1 + t \sum_{\substack{n\geq 0\\ i,j\in\mathbb{Z}}} t_{i,j}(n+1)x^i y^j t^n.$$

$$= \Big(\text{idem formule précedente}\Big) + t \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ j=1\\ n\in\mathbb{N}}} \underbrace{t_{i,j-1}(n)}_{a_{i,0}(n)} x^i \underbrace{y^j}_{y} t^n - t \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ j=-1\\ n\in\mathbb{N}}} \underbrace{t_{i,j+1}(n)}_{a_{i,0}(n)} x^i \underbrace{y^j}_{\overline{y}} t^n.$$

$$= \Big(1 + tT(x,y;t)(x+\overline{x}+y+\overline{y}) - B(\overline{x};t)\Big) + tS_0(x;t)y - tS_0(x;t)\overline{y}. \ \square$$

Intuitivement : on veut écrire une relation de récurrence similaire à celle portant sur $S(x,y;t)$: la formule est la même pour passer des chemins de longueur $n-1$ à ceux de longueur n sauf pour les chemins qui se terminaient sur l'axe des x : pour ceux qui descendent ensuite, il faut non pas multiplier par $t\overline{y}$ mais par ty.

Définition 8 $K(x,y;t) = 1 - t(x+\overline{x}+y+\overline{y})$

on obtient donc :

$$K(x,y;t)S(x,y;t) = 1 - B(\overline{x};t). \tag{1}$$

$$K(x,y;t)T(x,y;t) = 1 - B(\overline{x};t) + tS_0(x;t)(y-\overline{y}). \tag{2}$$

2.2 La méthode du noyau

On va maintenant appliquer la méthode du noyau : pour simplifier ces équations, on cherche à annuler le terme de gauche et donc à choisir $Y(x;t)$ tel que $K(x,Y(x;t);t)=0$. Il s'agit de résoudre un polynôme du second degré en y : $ty^2 + (tx + t\overline{x} - 1)y + t = 0$.

Proposition 3 *Si A est intègre, unitaire et $2 \neq 0$, et si a^2-1 est un carré dans A, alors $\alpha = -a \pm \sqrt{a^2-1}$ est inversible et dans $A[X, X^{-1}]$*

$$\begin{aligned} X^2 + 2aX + 1 &= (X-\alpha)(X-\alpha^{-1}) && (3) \\ X + 2a + \frac{1}{X} &= \frac{-1}{\alpha}(1-\frac{\alpha}{X})(1-\alpha X) && (4) \end{aligned}$$

Démonstration : Dans l'annexe.

Définition 9 $\Delta(x;t) = (1-t(x+\overline{x}-2))(1-t(x+\overline{x}+2))$.
C'est le discriminant de l'équation en y : $K(x,y;t)=0$.

Comme $\Delta(x;t) = 1 + t\sum(x,\overline{x};t)$, $\sqrt{\Delta}$ est bien définie.

Proposition 4 $1 - B(\overline{x};t) = S_0(x;t)\sqrt{\Delta(x;t)}$

Démonstration :
D'après la proposition 3, posons

$$Y(x;t) = \frac{1-t(x+\overline{x}) - \sqrt{\Delta(x;t)}}{2t} = t\sum(x,\overline{x};t).$$

Alors

$$K(x, Y(x;t);t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{Y(x;t)} = \frac{1-t(x+\overline{x}) + \sqrt{\Delta(x;t)}}{2t}.$$

Réinjectons ceci dans l'équation (2)
Ainsi

$$\begin{aligned} T(x, Y(x;t);t) &= \sum_{\substack{n\geq 0 \\ i,j\in\mathbb{Z}}} a_{i,j}(n) x^i Y(x;t)^{|j|} t^n \\ &= \sum_{\substack{n\geq 0 \\ i,j\in\mathbb{Z}}} a_{i,j}(n) x^i t^{n+|j|} \widetilde{Y}(x;t)^{|j|}. \end{aligned}$$

avec $\widetilde{Y}(x;t) = \frac{Y(x;t)}{t} = \sum(x,\overline{x};t)$.
Comme $a_{i,j}(n) = 0$ dès que $|i|+|j| > n$, on a

$$T(x, Y(x;t);t) = \sum_{N\in\mathbb{N}} t^N \sum_{\substack{n+|j|=N \\ |i|+|j|\leq n\leq N}} a_{i,j}(n) x^i \widetilde{Y}(x;t)^{|j|}.$$

Cette serie formelle est bien définie (alors que ce ne serait pas le cas pour $S(x, Y(x;t);t)$). On peut donc bien réinjecter $Y(x;t)$ dans (2) pour annuler $K(x,y;t)$ et on obtient donc

$$1 - B(\overline{x};t) = tS_0(x;t)\Big(\frac{1}{Y(x;t)} - Y(x;t)\Big).$$

Or la différence entre les deux racines de l'équation du second degré, $1/Y$ et Y vaut $\sqrt{\Delta(x;t)}/t$ donc

$$1 - B(\overline{x};t) = S_0(x;t)\sqrt{\Delta(x;t)}. \square$$

On remarque que $B(\overline{x};t)$ ne contient que des exposants de x négatifs tandis que $S_0(x;t)$ ne contient que des exposants de x positifs. On va donc chercher à séparer les exposants positifs et négatifs dans l'équation pour obtenir une égalité.
Ainsi, si l'on parvient à écrire $\Delta(x;t) = \Delta_-(\overline{x};t)\Delta_0(t)\Delta_+(x;t)$ avec $\Delta_-(\overline{x};t)$ à puissances de x négatives et $\Delta_+(x;t)$ à puissance de x positives on pourra écrire

$$\frac{1 - B(\overline{x})}{\sqrt{\Delta_-(\overline{x};t)}} = S_0(x;t)\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_+(x;t)}.$$

Lemme de factorisation : $\Delta(x;t)$ se factorise sous la forme

$$\Delta(x;t) = \Delta_-(\overline{x};t)\Delta_0(t)\Delta_+(x;t).$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= 1 + t\sum(t) \\
\Delta_+(x;t) &= 1 + xt\sum(x;t) \\
\Delta_-(\overline{x};t) &= 1 + \overline{x}t\sum(\overline{x};t).
\end{aligned}$$

Démonstration : Appliquons la proposition 3

$$\begin{aligned}
\Delta(x;t) &= \Big(1 - t(x + \overline{x} - 2)\Big) \cdot \Big(1 - t(x + \overline{x} + 2)\Big) \\
&= t^2 \cdot \Big(x - (\frac{1}{t} + 2) + \overline{x}\Big) \cdot \Big(x - (\frac{1}{t} - 2) + \overline{x}\Big) \\
&= t^2 \cdot \frac{-1}{X_1}(1 - xX_1)(1 - \overline{x}X_1) \cdot \frac{-1}{X_2}(1 - xX_2)(1 - \overline{x}X_2) \qquad \text{cf (4)} \\
&= (1 - \overline{x}X_1)(1 - \overline{x}X_2) \cdot \frac{t^2}{X_1X_2} \cdot (1 - xX_1)(1 - xX_2)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
X_1 = \frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 4t}}{2t} &= \quad \mathrm{C}(t) - 1 \quad = t\sum(t) \\
X_2 = \frac{1 + 2t - \sqrt{1 + 4t}}{2t} &= \quad 1 - \mathrm{C}(-t) \quad = t\sum(t)
\end{aligned}$$

Avec $\mathrm{C}(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{n+1}t^n$, la série génératrice pour les nombres de Catalan.

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta_+(x;t) = \Delta_-(x;t) &= (1 - xX_1)(1 - xX_2) \\
&= \Big(1 - x(\mathrm{C}(t) - 1)\Big)\Big(1 + x(\mathrm{C}(-t) - 1)\Big) = 1 + xt\sum(x;t).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_0(t) &= \frac{t^2}{X_1X_2}\\ &= \Big(\mathrm{C}(t)\mathrm{C}(-t)\Big)^{-2} = 1+t\sum(t).\end{aligned}$$

Corollaire 5 $S_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}}$ *et* $1-B(\overline{x};t) = \sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(\overline{x};t)}$.

Démonstration :
On obtient donc $\frac{1-B(\overline{x};t)}{\sqrt{\Delta_-(\overline{x};t)}} = S_0(x;t)\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_+(x;t)}$
Or $\sqrt{\Delta_+(x;t)} = \sqrt{1+xt\sum(x;t)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}^n_{\frac{1}{2}} x^n t^n \sum(x;t)^n = 1+xt\sum(x;t)$

$$\text{et } \frac{1}{\sqrt{\Delta_-(\overline{x};t)}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(\overline{x};t)}} = \frac{1}{1+\overline{x}t\sum(\overline{x};t)} = 1+\overline{x}t\sum(\overline{x};t).$$

Ce qui donne

$$\frac{1-B(\overline{x};t)}{\sqrt{\Delta_-(\overline{x};t)}} = \sum(\overline{x};t)$$

$$= S_0(x;t)\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_+(x;t)} = \sum(x;t).$$

Ces quantités sont donc indépendantes de x. (i.e ce sont des $\sum(t)$) Comme $S_0(x;t) = 1+xt\sum(x;t)$, le membre de droite vaut $\sqrt{\Delta_0(t)}(1+xt\sum(x;t))$ donc seulement $\sqrt{\Delta_0(t)}$. D'où

$$S_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}} \text{ et } 1-B(\overline{x};t) = \sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(\overline{x};t)}.\ \square$$

Corollaire 6 *L'équation* $K(x,y;t)S(x,y;t) = 1-B(\overline{x};t)$ *nous donne finalement l'expression*

$$S(x,y;t) = \frac{\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(\overline{x};t)}}{K(x,y;t)}.$$

Numériquement :

$$S(x,y;t) = \frac{\big(1-2t(1+\overline{x})+\sqrt{1-4t}\big)^{1/2}\big(1+2t(1-\overline{x})+\sqrt{1+4t}\big)^{1/2}}{2\big(1-t(x+\overline{x}+y+\overline{y})\big)}.$$

En particulier,

$$\sum_{n\geq 0} a(n)t^n = S(1,1;t) = \frac{(1+\sqrt{1+4t})^{1/2}(1+\sqrt{1-4t})^{1/2}}{2(1-4t)^{3/4}}.$$

Dans l'article [2] on trouve le théorème suivant :
Théorème
Si $f(z)$ est analytique sur

$$\Delta(\phi,\eta) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \mid |z| < 1+\eta,\ |arg(z-1)| > \phi\}$$

avec $0 < \eta$ *et* $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$,
et si pour $z \mapsto 1$

$$f(z) \sim K(1-z)^{\alpha} \quad \textit{avec } \alpha \notin \mathbb{N}$$

alors

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n \textit{ sur B(0,1) et } f_n \sim \frac{K}{\Gamma(-\alpha)} n^{-\alpha-1}$$

Corollaire 7 *En l'appliquant à* $S(1,1,\frac{t}{4})$ *avec* $\alpha = -\frac{3}{4}$ *on obtient*

$$a(n) \sim \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\Gamma(3/4)} 4^n n^{-\frac{1}{4}}.$$

2.3 Généralisation à d'autres marches

Dans la marche que l'on a étudiée, les quatre pas pouvaient être représentés par $(0,1), (0,-1), (1,0)$ et $(-1,0)$.
On peut considérer les marches sur $\mathbb{Z}^2$ dont les pas sont pris dans un ensemble A quelconque. Pourvu que l'ensemble A vérifie les deux conditions suivantes la même solution marche :
(1) l'ensemble doit être symétrique par rapport à l'axe x, c'est à dire

$$(i,j) \in A \Longrightarrow (i,-j) \in A.$$

(2) les variations verticales doivent être faibles, c'est à dire

$$(i,j) \in A \Longrightarrow |j| \leq 1.$$

La première hypothèse est nécessaire pour pouvoir définir $T(x,y;t)$ et que cette série vérifie une formule de récurrence similaire à celle de $S(x,y;t)$. La deuxième hypothèse assure que l'équation en Y à résoudre pour annuler $K(x,y;t)$ est du second degré.
Ainsi on peut définir $A_0(x) = \sum_{(i,0)\in A} x^i$ et $A_1(x) = \sum_{(i,1)\in A} x^i$ tels que

$$K(x,y;t) = 1 - tA_0(x) - t(y+\overline{y})A_1(x).$$

On obtient alors

$$\Delta(x;t) = \big(1 - tA_0(x) - 2tA_1(x)\big)\big(1 - tA_0(x) + 2tA_1(x)\big).$$

On a toujours

$$S(x,y;t) = \frac{\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(\overline{x};t)}}{K(x,y;t)}.$$

On peut appliquer ce résultat aux marches à pas diagonaux $(1,1),(1,-1),(-1,1)$ et $(-1,-1)$.

Numériquement :

$$S(x,y;t) = \frac{\left(1-8t^2(1+\overline{x}^2)+\sqrt{1-16t^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{2}\left(1-t(x+\overline{x})(y+\overline{y})\right)}.$$

En particulier,

$$\sum_{n\geq 0} a(n)t^n = S(1,1;t) = \frac{(1+4t)^{1/4}\left(1+\sqrt{1-16t}\right)^{1/2}}{\sqrt{2}(1-4t)^{3/4}}.$$

Par la même méthode que précédemment,

$$a(n) \sim \frac{1}{2^{1/4}\Gamma(3/4)} 4^n n^{-\frac{1}{4}}.$$

3 Chemins se terminant en un point précis

On va maintenant s'intéresser aux chemins se terminant en un point précis, et l'on va chercher à obtenir une expression de la série génératrice $S_{i,j}(t) = \sum_{n\geq 0} a_{i,j}(n)t^n$ associée à de tels chemins à partir de la série génératrice étudiée précédemment c'est à dire extraire le coefficient de $x^i y^j$. Cela n'est pas immédiat à partir des dérivées de $S(x,y;t)$ car les exposants de x et y ne sont pas tous positifs.

3.1 Les chemins triés par ordonnée d'arrivée

On va commencer par extraire le coefficient de y^j. Par symétrie, on suppose $j \geq 0$.

Définition 10

$$S_j(x;t) = \sum_{n\geq 0, i\in\mathbb{Z}} a_{i,j}(n)x^i t^n$$

pour $j \geq 0$. C'est le coefficient de y^j dans $S(x,y;t)$.

Proposition 8

$$S_j(x;t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}}(Y(x;t))^j$$

Démonstration :

Comme $S(x,y;t) = \frac{\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(\overline{x};t)}}{K(x,y;t)}$ il s'agit d'extraire le coefficient de y^j dans $1/K(x,y;t)$. On va pour cela commencer par séparer les exposants positifs et négatifs de y (Voir annexe) :

$$\frac{1}{K(x,y;t)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x;t)}}(\frac{\overline{y}Y(x;t)}{1-\overline{y}Y(x;t)} + \frac{1}{1-yY(x;t)}).$$

Or $\Delta(x;t) = 1 + t\sum(x,\overline{x};t)$ et $Y(x;t) = t + t^2\sum(x,\overline{x};t)$ donc $\frac{1}{K(x,y;t)}$ a bien été décomposé en somme de deux séries formelles en t avec seulement des exposants strictement négatifs de y pour la première, et seulement des exposants positifs pour la deuxième.

Le coefficient de y^j dans $\frac{1}{K(x,y;t)}$ est donc $\frac{1}{\sqrt{\Delta(x;t)}}(Y(x;t))^j$.

Donc

$$S_j(x;t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}}(Y(x;t))^j$$

3.2 Les chemins triés par point d'arrivée

On va maintenant chercher à séparer les termes avec une puissance de x positive de ceux avec une puissance de x strictement négative.

Corollaire 9

$$S_j(x;t) = \frac{1}{(2t)^j}(\frac{f_j^+(x;t)}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}} - f_j^-(x;t)\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(\overline{x};t)})$$

$$\begin{aligned} \textit{avec } f_j^+(x;t) &= \sum_{k=0}^{[j/2]} \mathrm{C}_j^{2k}\Delta(x;t)^k(1-t(x+\overline{x}))^{j-2k} \\ \textit{et } f_j^-(x;t) &= \sum_{k=0}^{[(j-1)/2]} \mathrm{C}_j^{2k+1}\Delta(x;t)^k(1-t(x+\overline{x}))^{j-2k-1}. \end{aligned}$$

Démonstration : On développe le binôme $Y(x;t)^j = (\frac{1-t(x+\overline{x})-\sqrt{\Delta(x;t)}}{2t})^j$ en séparant les termes de rang pair et impair.

Comme $f_j^+(x;t)$ et $f_j^-(x;t)$ sont des polynômes de Laurent, le premier terme de la somme ne comprend qu'un nombre fini de termes ayant un exposant de x négatif : il est de la forme $\sum(x;t) + \sum_{k=1}^{n} \overline{x}^k \sum_k(t)$. De même le second ne comprend qu'un nombre fini de termes ayant un exposant de x positif.

On peut donc séparer les termes à exposants pour x négatifs et positifs. Puis on pourra facilement extraire les coefficients de chacune de ces deux séries.

3.3 Quelques dénombrements explicites de marches

A titre d'exemple, nous allons calculer $S_{1,0}(t)$ et $S_{0,1}(t)$.

Proposition 10 *Notons* $\mathrm{C}_n = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{n+1}$ *le n-ième nombre de Catalan.*

$$\begin{aligned} S_{1,0}(t) &= \tfrac{2-\sqrt{1-4t}-\sqrt{1+4t}}{4t} &= \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_{2n+1} t^{2n+1}. \\ S_{0,1}(t) &= \tfrac{1-\sqrt{1-16t^2}}{8t} &= \sum_{n\geq 0} 4^n \mathrm{C}_n t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Démonstration : pour $S_{1,0}(t)$.
Comme $S_0(x;t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}}$, cette série ne contient que des exposants positifs pour x. Comme $\Delta_+(x;t) = (1 - x(\mathrm{C}(t)-1))(1 + x(C(-t)-1))$ le coefficient du terme en x est $\frac{1}{2}(\mathrm{C}(t) - 1 + 1 - C(-t)) = \frac{1}{2}(\mathrm{C}(t) - C(-t))$. Donc

$$S_{1,0}(t) = \frac{2 - \sqrt{1-4t} - \sqrt{1+4t}}{4t} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_{2n+1} t^{2n+1}. \ \Box$$

pour $S_{0,1}(t)$.
On a

$$S_1(x;t) = \frac{1}{2t}\left(\frac{1 - t(x+\overline{x})}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}} - \sqrt{\Delta_0(t)\Delta_+(\overline{x};t)}\right).$$

Or on sait que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}} = 1 + xt\sum(x;t) \text{ et } \sqrt{\Delta_+(\overline{x};t)} = 1 + \overline{x}t\sum(\overline{x};t).$$

Le premier des deux termes entre parenthèses ne contient donc que des exposants positifs pour x sauf $-t\overline{x}$ tandis que le deuxième ne contient que des exposants strictement négatifs de x sauf $\sqrt{\Delta_0(t)}$.
Ainsi on obtient

$$S_1(x;t) = S_1^+(x;t) + S_1^-(x;t)$$

$$\text{où} \quad S_1^+(x;t) = \sum_{\substack{i\geq 0\\ n\geq 0}} a_{i,1}(n)x^it^n = \frac{1}{2t}\left(\frac{1-t(x+\overline{x})}{\sqrt{\Delta_+(x;t)}} + t\overline{x} - \sqrt{\Delta_0(t)}\right).$$
$$\text{et} \quad S_1^-(x;t) = \sum_{\substack{i< 0\\ n\geq 0}} a_{i,1}(n)x^it^n = \frac{1}{2t}\left(\sqrt{\Delta_0(t)} - t\overline{x} - \sqrt{\Delta_0(t)\Delta_+(\overline{x};t)}\right).$$

Le terme constant de $S_1^+(x;t)$ est

$$S_{0,1}(t) = \frac{1}{2t}(1 - t\overline{x}(\frac{x}{2}(\mathrm{C}(t)-1) - \frac{x}{2}(C(-t)-1)) - \sqrt{\Delta_0(t)}).$$

Il se simplifie :

$$S_{0,1}(t) = \frac{1-\sqrt{1-16t^2}}{8t} = \sum_{n\geq 0} 4^n \mathrm{C}_n t^{2n+1}.$$

Ainsi, on peut connaître pour i et j fixés le nombre de chemins de longueur n allant de $(0,0)$ à (i,j) et ne passant pas par l'axe des $x \leq 0$. En particulier il y en a C_{2n+1} de longueur $2n+1$ entre $(0,0)$ et $(1,0)$ et $4^n\mathrm{C}_n$ de longueur $2n+1$ entre $(0,0)$ et $(0,1)$ (aucun de longueur paire evidemment).
On peut même montrer plus généralement que $S_{i,j}(t) \in \mathbb{Q}(t, \sqrt{1+4t}, \sqrt{1-4t})$.

4 Autres points de départ

4.1 Départ en un point quelconque de la demi droite interdite

On ne part plus maintenant nécessairement de $(0,0)$ et l'on cherche la probabilité qu'un chemin coupe pour la première fois l'axe des x négatifs en un point donné. Pour cela, on étudie tout d'abord la série génératrice

Définition 11 *pour $k \leq 0$,*

$$S_k(x,y;t) = \sum_{n\geq 0}\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j}^k(n)x^iy^jt^n.$$

où $a_{i,j}^k(n)$ est le nombre de chemins de longueur n partant de $(k,0)$ arrivant en (i,j) sans couper l'axe des x négatifs (on étudie donc le problème dans le sens inverse).

Définition 12

$$S_-(z;x,y;t) = \sum_{k\geq 0} S_{-k}(x,y;t)z^k \in Laurent(\mathbb{Q}[x,y];z,t).$$

On cherche à obtenir une relation de récurrence portant sur cette série génératrice.

Proposition 11

$$S_-(z,x,y;t) = \frac{\sqrt{\Delta_+(z,t)}}{1-z\overline{x}} S(x,y;t).$$

Démonstration :

Un chemin partant de $(-k,0)$ pour $k>0$ arrivant en (i,j) peut se translater d'un pas à droite : on obtient un chemin partant de $(-k+1,0)$ arrivant en $(i+1,j)$. Réciproquement, un chemin partant de $(-k+1,0)$ arrivant en $(i+1,j)$ peut se translater d'un pas à gauche, on obtient un chemin partant de $(-k,0)$ arrivant en (i,j) sauf si jamais le nouveau chemin coupe l'axe des x négatifs en $(0,0)$. Il peut alors se décomposer sous la forme d'un pont entre $(-k,0)$ et $(0,0)$, de ponts entre $(0,0)$ et $(0,0)$, puis d'un chemin entre $(0,0)$ et (i,j).

On obtient donc

$$S_-(z,x,y;t) = S_-(0,x,y;t) + z\overline{x}S_-(z,x,y;t) - (B(z,t)-B(0;t))(\sum_{n\geq 0}(B(0;t)^n))S(x,y;t)$$

où le troisième terme est le terme correcteur pour le cas où par translation à gauche on n'obtient pas un chemin.

Or $S_-(0,x,y;t) = S(x,y;t)$ et comme $B(z,t) = 1-\sqrt{\Delta_0(t)\Delta_-(z,t)}$ et $B(0;t) = 1-\sqrt{\Delta_0(t)}$ on obtient $(1-z\overline{x})S_-(z,x,y;t) = \sqrt{\Delta_-(z,t)}S(x,y;t)$.

Or $\Delta_+(z,t) = \Delta_-(z,t)$ donc

$$S_-(z,x,y;t) = \frac{\sqrt{\Delta_+(z,t)}}{1-z\overline{x}} S(x,y;t). \ \square$$

4.2 Dénombrement des ponts entre $(-k,0)$ et (i,j)

On peut maintenant en déduire la fonction génératrice $B_{i,j}(z,t)$ pour les ponts partant de (i,j).

Définition 13

$$B_{i,j}(z,t) = \sum_{n\geq 0, k\geq 0} a_{i,j}^{-k}(n) z^k t^n.$$

Il s'agit du coefficient de $x^i y^j$ dans $S_-(z,x,y;t)$.

Or $S_-(z,x,y;t) = \sqrt{\Delta_+(z;t)}(\sum_{k\geq 0}(z\overline{x})^k)S(x,y;t)$ donc son coefficient en $x^i y^j$ est $\sqrt{\Delta_+(z;t)}S_{i,j}^+(z;t)$ avec

Définition 14

$$S_{i,j}^+(z;t) = \sum_{k\geq 0} z^k S_{i+k,j}(t).$$

Corollaire 12

$$B_{i,j}(z,t) = \sqrt{\Delta_+(z;t)}S^+_{i,j}(z;t).$$

5 Distribution de frappe sur la demi-droite

Considérons une marche aléatoire de $\mathbb{Z}^2$ prenant chacune des quatre directions cardinales avec la probabilité $\frac{1}{4}$. La probabilité qu'elle coupe pour la première fois l'axe des x négatifs en $(-k, 0)$ en partant de (i, j) est :

$$p^k_{i,j} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{-k}_{i,j}(n)}{4^n}.$$

5.1 Quelques probabilités explicites

En particulier on peut obtenir directement la valeur de $p^0_{i,j}$ car

$$p^0_{i,j} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_{i,j}(n)}{4^n} = S_{i,j}(1/4).$$

Or on a vu que pour i et j fixés, on peut calculer $S_{i,j}(t)$.

Proposition 13

$$p^0_{0,1} = S_{0,1}(1/4) = \frac{1}{2} \quad et \quad p^0_{1,0} = S_{1,0}(1/4) = 2 - \sqrt{2}.$$

Pour calculer $p^k_{i,j}$ pour k différent de 0, on va étudier la série génératrice

$$\sum_{k\geq 0} p^k_{i,j} z^k = B_{i,j}(z, 1/4).$$

Or $B_{i,j}(z, 1/4) = \sqrt{\Delta_+(z, 1/4)}S^+_{i,j}(z, 1/4)$.
On vérifie que

$$\Delta_+(z, 1/4)) = (1 - z)(1 - z(\sqrt{2} - 1)^2).$$

Il reste à calculer la valeur de $S^+_{i,j}(z, 1/4)$.

$$\text{Or } z^i S^+_{i,j}(z,t) = \sum_{k\geq 0} z^{i+k} S_{i+k,j}(t).$$

Comme $S^+_j(z,t) = \sum_{k\geq 0} S_{k,j}(t)z^k$, les deux séries $z^i S^+_{i,j}(z,t)$ et $S^+_j(z,t)$ ne diffèrent que de la somme d'un nombre fini de termes : $(z^k S_{k,j}(t)$ pour $0 \leq k < i)$. Pour i et j fixés, on peut calculer explicitement ces termes et de plus on peut aussi expliciter $S_j^+(z,t)$ donc on peut obtenir $S_{i,j}^+(z,t)$ et finalement $B_{i,j}(z,1/4)$. On peut donc bien expliciter la série génératrice et donc calculer la valeur de $p_{i,j}^k$ pour i,j,k fixés.

En particulier,

Proposition 14

$$p_{1,0}^0 = 2-\sqrt{2} \text{ et } p_{1,0}^1 = \frac{3}{2}-\sqrt{2}.$$

Démonstration : si $(i,j)=(1,0)$, les deux séries ne diffèrent que de $S_{0,0}(t)=1$, c'est à dire

$$S_{1,0}^+(z,t) = \frac{S_0(z,t)-1}{z}.$$

Or $S_0(z,t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_+(z,t)}}$ donc finalement

$$B_{1,0}(z,t) = \frac{1-\sqrt{\Delta_+(z,t)}}{z}$$

et on obtient la série génératrice en posant $t = 1/4$:

$$\sum_{k\geq 0} p_{1,0}^k z^k = \frac{1-\sqrt{(1-z)(1-z(\sqrt{2}-1)^2)}}{z}.$$

En développant cette série pour respectivement obtenir son terme constant et son terme en x, on vérifie bien que $p_{1,0}^0 = 2-\sqrt{2}$ et $p_{1,0}^1 = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$. $\square$
A la vue de ces deux exemples, on peut conjecturer que les probabilités $p_{i,j}^k$ ont toutes des expressions algébriques simples.

5.2 Un résultat plus général

Proposition 15 *On peut constater que cette série est nécessairement de la forme :*

$$\sum_{k\geq 0} p_{i,j}^k z^k = f(z) - g(z)\sqrt{(1-z)(1-z(\sqrt{2}-1)^2)}$$

où $f(z)$ et $g(z)$ sont des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ respectivement.

Démonstration : En effet, pour $t = 1/4$, $S_{i,j}(t)$ est un polynôme de Laurent à coefficients dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tandis que

$$S_j^+(z,\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2\cdot 4})^j \frac{f_j^+(z,1/4)}{\sqrt{\Delta_+(z,1/4)}} + P(z)$$

où $f_j^+(z,1/4)$ et P sont des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ respectivement. Comme

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} p_{i,j}^k z^k &= B_{i,j}(z,\frac{1}{4}) = \sqrt{\Delta_+(z,1/4)}S_{i,j}^+(z,1/4)\\ &= \sqrt{\Delta_+(z,1/4)}\frac{S_j^+(z,1/4) - \sum_{0\leq k<i} z^k S_{k,j}(1/4)}{z^i}\end{aligned}$$

on a bien le résultat annoncé. □

Corollaire 16 *Pour tous* $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in -\mathbb{N}$ *on a* $p_{i,j}^k \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Bibliographie

[1] Mireille Bousquet-Mélou et Gilles Schaeffler. *Walks on the slit plane*, 2002.
[2] Flajolet et Odlyzko : *Singularity analysis of generating functions, SIAM*, 1990.

6 Annexe

6.1 Factorisation de $X + 2a + X^{-1}$ dans $A[X, X^{-1}]$

Il s'agit simplement de verifier que les opérations effectuées précedement sont bien légales.
L'anneau A possède les caractéristiques suivantes :
il est unitaire, intègre, et $2 \neq 0$.

$$X^2 + 2aX + 1 = (X+a)^2 - (a^2-1)$$

Posons $\Delta = a^2 - 1$.

$$\text{Alors} \begin{cases} \text{Si } \Delta \text{ n'est pas un carré} & \text{il n'y a pas de racine.} \\ \text{Si } \Delta = 0 & -\frac{a}{2} \text{ est la seule racine.} \end{cases}$$

Si Δ est un carré, notons $\sqrt{\Delta}$ l'une de ses racines. Alors

$$X^2 + 2aX + 1 = \Big(X - (-a + \sqrt{\Delta})\Big)\Big(X - (-a - \sqrt{\Delta})\Big).$$

Par intégrité ce sont les seules racines de l'équation. De plus leur produit vaut 1. Elles sont donc inversibles et inverses l'une de l'autre.
Notons l'une des racines α.

$$X^2 + aX + 1 = (X - \alpha)(X - \alpha^{-1})$$

ou encore

$$X + a + \frac{1}{X} = \frac{-1}{\alpha}(1 - \frac{\alpha}{X})(1 - \alpha X).$$

C'est cette dernière égalité que nous utilisons.

6.2 Séparation des puissances positives et négatives de y dans $\frac{1}{K(x,y;t)}$

On veut montrer

$$\frac{1}{K(x,y;t)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x;t)}}\left(\frac{\overline{y}Y(x;t)}{1-\overline{y}Y(x;t)} + \frac{1}{1-yY(x;t)}\right).$$

Où $K(x,y;t) = 1 - t(x+\overline{x}+y+\overline{y})$ et $Y = \frac{1-t(x+\overline{x})-\sqrt{\Delta}}{2t}$ est l'une des racines de $-\frac{K}{t} = y + (x+\overline{x}-\frac{1}{t}) + \overline{y}$.

Ommettons les variables pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\overline{y}Y}{1-\overline{y}Y} + \frac{1}{1-yY}\right) &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\Delta}}_{\frac{1}{t}(\frac{1}{Y}-Y)}}\frac{\overline{y}Y(1-yY) + 1-\overline{y}Y}{(1-\overline{y}Y)(1-yY)} \\
&= \frac{t}{\frac{1-Y^2}{Y}}\frac{1-Y^2}{(1-\overline{y}Y)(1-yY)} \\
&= \frac{tY}{(1-\overline{y}Y)(1-yY)}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
K(x,y;t) &= 1 - t(x+\overline{x}+y+\overline{y}) \\
&= -t\Big(y + (x+\overline{x}-\frac{1}{t}) + \overline{y}\Big) \\
&= \frac{t}{Y}\Big((1-\overline{y}Y)(1-yY)\Big).
\end{aligned}$$

d'aprés le premier résultat de l'annexe appliqué à $A = Laurent(Q[x,\overline{x}];t)$.
Ceci permet de conclure.