

---

# Fragmentations et Quadrees

---

Mémoire de première année de FIMFA  
Sous la direction de Nicolas Curien

Médéric Motte

Guillaume Roux

juin 2011



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Chaînes de fragmentation</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation . . . . .	5
1.2 Définition plus formelle d'une fragmentation binaire . . . . .	6
1.3 Hypothèse Malthusienne et martingale intrinsèque . . . . .	8
1.4 Convergence des Moments . . . . .	10
1.5 Un théorème de convergence $\mathbb{L}^2$ . . . . .	13
<b>2 Quadrees</b>	<b>16</b>
2.1 Rappels sur les processus de Poisson ponctuels . . . . .	16
2.2 Présentation du modèle . . . . .	17
2.3 Principales équations . . . . .	18
2.4 Lemme de discrétisation . . . . .	20
2.5 Cas uniforme . . . . .	22
2.6 Cas $x = 0$ . . . . .	27
<b>Remerciements</b>	<b>30</b>
<b>Références</b>	<b>30</b>



# Introduction

Nous nous sommes appuyés, pour réaliser ces pages, sur les travaux de Nicolas Curien et Adrien Joseph sur les quadrees [3] d'une part, et sur ceux de Jean Bertoin et Alexander V. Gnedin sur les chaînes de fragmentation [1] et [2] d'autre part.

Les quadrees sont des structures qui présentent entre autres des applications en informatique, dans le domaine de la recherche et du stockage de données ; ils constituent une extension assez naturelle des arbres de recherche binaire (voir [4]).

Le problème auquel nous nous sommes intéressés est le suivant. On construit de manière itérative un recouvrement du carré unité  $[0, 1]^2$  par des rectangles d'intérieurs disjoints, en procédant comme suit. À chaque étape, on choisit de manière uniforme un point dans  $[0, 1]^2$  (avec la mesure de Lebesgue), supposé d'abscisse et d'ordonnée distinctes de celles des points choisis aux étapes précédentes (ce qui est vrai p.s.). Le premier point choisi, en tombant dans le carré d'origine, le divise en quatre sous-rectangles d'intérieurs disjoints ayant le point en question pour sommet commun. Puis, à chaque étape, le nouveau point "tombant" dans  $[0, 1]^2$  partage le rectangle dans lequel il est tombé en quatre sous-rectangles selon le même procédé.

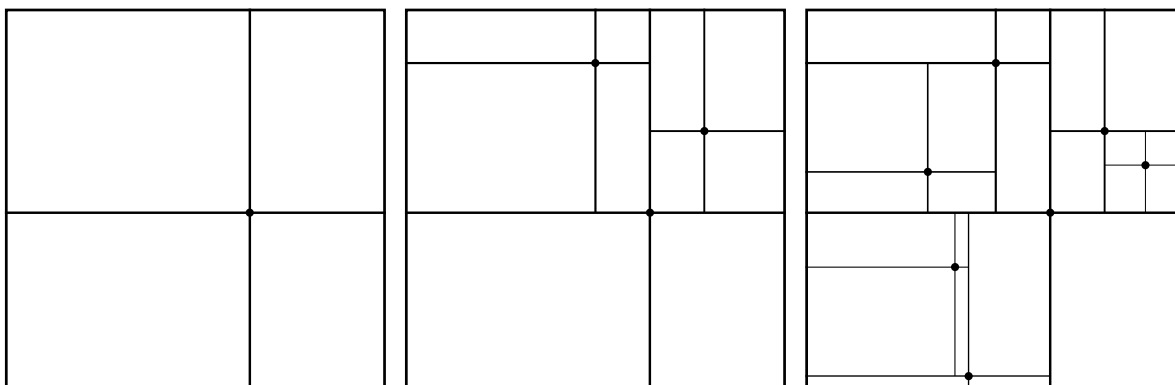


FIGURE 1 – Exemple de résultats obtenus après une, trois et sept itérations.

On note  $Q_n$  l'ensemble des rectangles obtenus après  $n$  itérations de ce procédé. Le processus  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi obtenu est nommé un *quadtree*. Étant donné  $x \in [0, 1]$ , et en notant  $S_x$  le segment vertical  $[(x, 0), (x, 1)]$ , on s'intéresse alors au nombre  $\mathcal{N}_n(x)$  de rectangles de  $Q_n$  intersectant  $S_x$  moins 1 (par convention,  $\mathcal{N}_0(x) = 0$ ). Le but de ce travail est d'étudier le comportement, quand  $n \rightarrow \infty$ , de  $\mathbb{E}[\mathcal{N}_n(x)]$ . On peut établir le résultat suivant, non démontré ici (pour la preuve, voir [3]) :

**Théorème 0.1.** *Soit  $x \in [0, 1]$ . Alors :*

$$n^{-\beta^*} \mathbb{E}[\mathcal{N}_n(x)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_0(x(1-x))^{\beta^*/2},$$

$$\text{où } \beta^* = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \text{ et } K_0 = \frac{\Gamma(2\beta^* + 2)\Gamma(\beta^* + 2)}{2\Gamma^3(\beta^* + 1)\Gamma^2(\beta^*/2 + 1)}$$

On établira ici des résultats de convergence de nature semblable. Le premier étudie non pas  $\mathbb{E}[\mathcal{N}_n(x)]$  à  $x$  fixé, mais  $\mathbb{E}[\mathcal{N}_n(U)]$ , où  $U$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$  indépendante du quadtree  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Le second se concentre sur le cas particulier où  $x = 0$ . Afin de parvenir à ces résultats, dont les démonstrations sont présentées dans la seconde partie de ce document, on fait appel à la théorie des fragmentations. La première partie se consacre à l'introduction de celle-ci.

# 1 Chaînes de fragmentation

## 1.1 Présentation

Commençons par donner une définition informelle d'une chaîne de fragmentation. Une chaîne de fragmentation est un modèle décrivant l'évolution d'un système de particules qui naissent, vivent un certain temps, et meurent en se "fragmentant", i.e. en donnant naissance à de nouvelles particules.

Nous nous intéresserons dans ce document uniquement au cas où il n'y a au départ qu'une seule particule, et où une particule de masse  $m$ , en mourant, donne naissance à exactement deux particules-filles (on parle de chaîne de fragmentation *binaire*), dont la somme des masses est (éventuellement strictement) inférieure à  $m$ . Cela signifie que, lors de la fragmentation d'une particule, on peut perdre de la masse mais jamais en gagner, ce qui est une hypothèse naturelle. Pour le cas général où les particules peuvent donner naissance à un nombre variable de particules filles, on renvoie à [1, section 1.2.1].

Notons  $S^\downarrow := \{(x_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0\}$  l'ensemble des suites décroissantes de réels positifs. Une chaîne de fragmentation binaire peut alors être vue comme un processus  $F := (F(t))_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $S^\downarrow$ , simplement en notant  $F(t)$  la suite des masses des particules vivantes à l'instant  $t$  rangées dans l'ordre décroissant.

Dans la suite, il sera important de distinguer la masse "absolue", i.e. la valeur exacte de la masse d'une particule, de sa masse "relative", i.e. le quotient de sa masse absolue par celle de la particule qui lui a donné naissance. On voudrait que chaque particule se fragmente selon une même loi  $\nu$  (dite *loi de dislocation* de la chaîne  $F$ ). Ainsi,  $\nu$  décrira la loi des masses relatives des deux filles d'une particule, ce sera donc une mesure de probabilité sur  $\mathcal{S} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 \geq x_2 > 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ .

On voudrait aussi que la chaîne ait une propriété de Markov, c'est-à-dire qu'après un instant  $t$ , le système se comporte exactement comme si une chaîne de fragmentation partait de chaque particule vivante. Enfin, on souhaite que les petites particules vivent plus longtemps que les grosses, ou de façon équivalente que la chaîne de fragmentation partant d'une particule plus petite soit plus lente. Ces deux souhaits seront satisfaits si la durée de vie d'une particule de masse  $m$  suit une loi exponentielle de paramètre  $m$  (c'est-à-dire qu'elle est de densité  $me^{-mx}$ ).

Pour résumer, une chaîne de fragmentation binaire est un processus dans lequel des particules, évoluant indépendamment les unes des autres, vivent un certain temps (et d'autant plus longtemps qu'elles sont légères), puis se brisent en deux nouvelles particules - sans gain de masse, et indépendamment de leur durée de vie - selon la même loi  $\nu$ .

Naturellement, dans ce modèle, on voudra étudier l'évolution en fonction du temps d'objets comme le nombre de particules vivantes et la masse totale du système. Ces deux objets semblent différents, mais on peut les voir comme des cas particuliers d'un objet plus général, la  $\beta$ -masse.

La  $\beta$ -masse d'un ensemble de particules est la somme des masses des particules, chacune élevée à la puissance  $\beta$ . Ainsi, si  $\beta = 1$ , la  $\beta$ -masse est la somme des masses des particules, i.e. la masse totale du système. Dans ce cas, les masses individuelles jouent un rôle discriminatoire, puisque les particules légères (resp. lourdes) participeront peu (resp. beaucoup) à la  $\beta$ -masse. Si  $\beta = 0$ , au contraire, on ne s'intéresse plus aux masses individuelles. On compte 1 pour chaque particule, et la  $\beta$ -masse est en fait simplement le nombre de particules vivantes. Les autres valeurs de  $\beta$  peuvent ainsi être vues comme des degrés intermédiaires du caractère discriminatoire donné à la masse de chaque particule. Formellement, la  $\beta$ -masse de  $F$  à l'instant  $t$  est

$$\sum_{i \geq 1} F_i^\beta(t).$$

## 1.2 Définition plus formelle d'une fragmentation binaire

Cette section s'attache à formaliser la notion de chaîne de fragmentation. On définit l'arbre infini  $\mathcal{A}$ , appelé arbre généalogique, de la façon suivante :

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0, 1\}^n$$

avec la convention  $\{0, 1\}^0 = \{\emptyset\}$ .

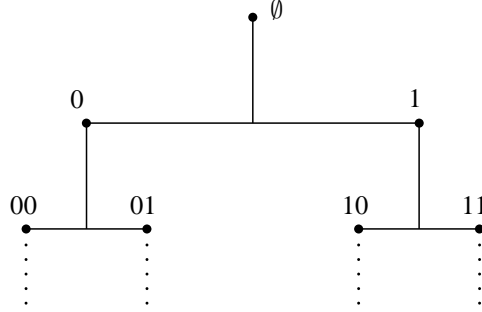


FIGURE 2 – L'arbre généalogique  $\mathcal{A}$ .

Pour chaque nœud  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{A}$ , on appelle  $n$  la *génération* de  $u$ , et on note  $|u| = n$  (avec la convention que la longueur de l'ensemble vide est nulle). Si  $n \geq 1$ , on note également  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$  le *parent* de  $u$ , et  $ui = (u_1, \dots, u_n, i)$  son  $i$ -ème *fil*.

On va à présent pouvoir donner une représentation de la chaîne de fragmentation  $(F(t))_{t \geq 0}$  sous forme d'arbre. On associe à chaque particule intervenant dans le processus un nœud de l'arbre généalogique, représentant naturellement sa place dans le processus de fragmentation (ce que l'on peut faire puisque l'on suppose que l'on part d'une particule seule). Pour chaque nœud  $u$ , on associe un triplet  $(\xi_u, a_u, \zeta_u)$ , où  $\xi_u$  est la taille de la particule associée au nœud  $u$ ,  $a_u$  le moment de sa naissance et  $\zeta_u$  sa durée de vie.

On peut dès lors énoncer la définition suivante :

**Définition 1.1.** Le processus  $F$  est une chaîne de fragmentation de loi de dislocation  $\nu$  s'il existe deux familles indépendantes de v.a. i.i.d. indexées par  $\mathcal{A}$ ,  $((\tilde{\xi}_{u0}, \tilde{\xi}_{u1}), u \in \mathcal{A})$  et  $(e_u, u \in \mathcal{A})$ , où chaque  $(\tilde{\xi}_{u0}, \tilde{\xi}_{u1})$  est de loi  $\nu$ , où  $e_u$  suit une loi exponentielle de paramètre 1, et telles que pour tout  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{A}$ , pour tout  $i \in \{0, 1\}$ ,

$$\begin{cases} \xi_{ui} &= \tilde{\xi}_{ui} \xi_u \\ \zeta_u &= \xi_u^{-1} e_u. \end{cases}$$

*Remarque 1.2.* Dans cette définition, les  $\tilde{\xi}_u$  correspondent aux masses relatives définies dans l'introduction.

*Remarque 1.3.* Au vu de cette définition, une chaîne de fragmentation ne dépend donc (en loi) que de sa loi de dislocation et de la masse de la particule initiale.

On a ainsi une description par génération du système de particules, c'est-à-dire une représentation discrète du processus de fragmentation. Il est utile de noter que si l'on désigne par  $I_u = [a_u, a_u + \zeta_u[$  l'intervalle de vie de la particule associée au nœud  $u$ , alors les particules en

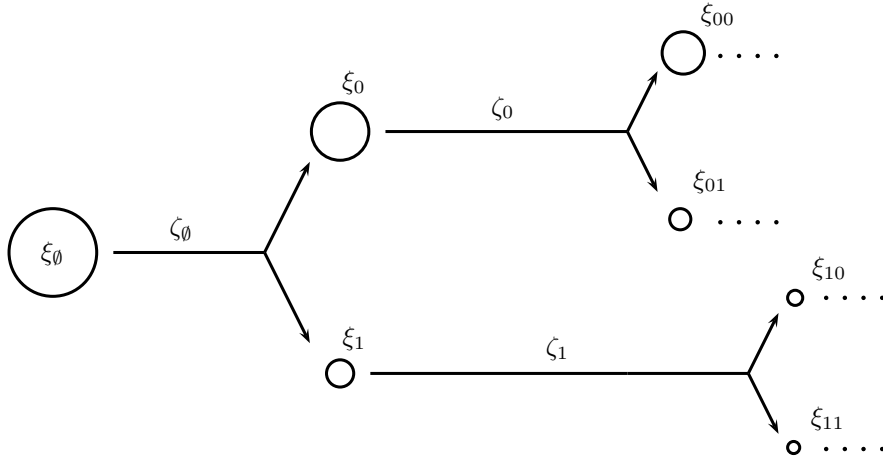


FIGURE 3 – Évolution de la particule initiale.

vie à l'instant  $t$  peuvent être vues aussi bien comme les  $\xi_u$ ,  $t \in I_u$  (représentation discrète) que comme les  $F_i(t)$ ,  $F_i(t) > 0$  (représentation continue). En d'autres termes, on a p.s. :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{F_i(t) > 0} \delta_{F_i(t)} = \sum_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{1}_{t \in I_u} \delta_{\xi_u}.$$

Cela permet de faire le lien entre les points de vue discret et continu.

Les chaînes de fragmentation vérifient deux propriétés caractéristiques qui sont les suivantes.

**Proposition 1.4.** (i) **Propriété de branchement** : soit  $F$  une chaîne de fragmentation. Pour tout  $t \geq 0$ , conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ , on a :

$$(F(t+s))_{s \geq 0} \stackrel{(d)}{=} \left( \mathbf{F}_1^{(F_1(t))}(s) \bullet \mathbf{F}_2^{(F_2(t))}(s) \bullet \dots \bullet \mathbf{F}_k^{(F_k(t))}(s) \right)_{s \geq 0}^{\downarrow},$$

où  $\bullet$  désigne la concaténation, l'opérateur  $(\cdot)^{\downarrow}$  range son argument dans l'ordre décroissant,  $k$  est le nombre de particules à l'instant  $t$ , et les  $\mathbf{F}_i^{(F_i(t))}$  sont des chaînes de fragmentation binaire partant d'une particule de masse  $F_i(t)$ , de même loi de dislocation que  $F$ , indépendantes entre elles et indépendantes de  $\mathcal{F}_t$ .

(ii) **Propriété de scaling** : soit  $y \geq 0$  et soit  $F^{(y)}$  (resp.  $F$ ) une chaîne de fragmentation binaire de loi de dislocation  $\nu$  et partant d'une particule de masse  $y$  (resp. 1). On a

$$(F^{(y)}(t))_{t \geq 0} \stackrel{(d)}{=} (y \cdot F(yt))_{t \geq 0}$$

La propriété de branchement (qui rappelle une propriété de Markov, avec en plus un caractère stationnaire pour la loi du processus) résulte intuitivement du fait qu'une variable exponentielle est sans mémoire : conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ , tout se passe à partir de l'instant  $t$  comme si les particules en vie à l'instant  $t$  venaient juste de naître, c'est-à-dire que le temps les séparant de leur mort est encore une variable exponentielle de paramètre leur masse. Conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ , le système évolue donc à partir de l'instant  $t$  comme si de chaque particule en vie à  $t$  partait une chaîne de fragmentation indépendante.



Pour montrer la propriété de scaling, il suffit de montrer que  $(y \cdot F(yt))_{t \geq 0}$  vérifie la Définition 1.1 avec  $y$  comme masse de départ et même loi de dislocation que  $F^{(y)}$ . Il suffit pour cela de prendre la même famille de v.a. que celle donnée pour  $F$  (qui vérifie par hypothèse la Définition 1.1).

La propriété de scaling permet de réduire l'étude des chaînes de fragmentation binaire au cas de celles qui partent d'une particule de masse 1 ; on étudiera uniquement de telles chaînes dans la suite.

### 1.3 Hypothèse Malthusienne et martingale intrinsèque

On définit tout d'abord, pour tout  $p > 0$ ,

$$\kappa(p) := 1 - \int_{\mathcal{S}} (s_1^p + s_2^p) \nu(ds). \quad (1.1)$$

Dans les cas non dégénérés où  $\nu(0 < s_1 < 1) > 0$  ou  $\nu(0 < s_2 < 1) > 0$  (ce que l'on suppose dans l'ensemble de ce document),  $\kappa$  est une fonction strictement croissante de  $p$ .

**Définition 1.5** (Hypothèse Malthusienne).

L'hypothèse Malthusienne est satisfaite s'il existe un (unique)  $\beta^* > 0$  tel que  $\kappa(\beta^*) = 0$ .

Dans la suite, on supposera cette hypothèse vérifiée (et ce sera bien le cas dans le problème qui nous intéresse).

**Théorème 1.6.** *Le processus*

$$M_n = \sum_{|u|=n} \xi_u^{\beta^*}, \quad n \in \mathbb{N}$$

*est une martingale (que l'on appellera martingale intrinsèque dans la suite) bornée dans  $\mathbb{L}^2$ , et en particulier uniformément intégrable.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{G}_n$  la tribu engendrée par les  $\xi_u$  pour  $|u| \leq n$ . D'après la Définition 1.1,

$$M_{n+1} - M_n = \sum_{|u|=n} \xi_u^{\beta^*} ((\tilde{\xi}_{v_0}^{\beta^*} + \tilde{\xi}_{v_1}^{\beta^*}) - 1). \quad (1.2)$$

D'après l'hypothèse Malthusienne, les  $\tilde{\xi}_u$ ,  $|u| \leq n$  étant indépendants de  $\mathcal{G}_n$ , il est clair que  $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{G}_n] = 0$ , ce qui prouve que  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale.

Afin d'établir que cette martingale est bornée dans  $\mathbb{L}^2$ , on utilise le fait suivant : toute martingale  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $N_0 = 0$  vérifie, d'après l'inégalité maximale de Doob :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{n \leq p} |N_n|^2 \right] \leq 4\mathbb{E}[N_p^2] = 4\mathbb{E} \left[ \sum_{n=0}^{p-1} |N_{n+1} - N_n|^2 \right],$$

et en faisant tendre  $p$  vers l'infini, par convergence monotone :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_n |N_n|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} |N_{n+1} - N_n|^2 \right]. \quad (1.3)$$

En particulier, si  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille i.i.d. de v.a. centrées,

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \right|^2 \right] \leq 4 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[|\beta_i|^2]. \quad (1.4)$$

Il suffit donc de vérifier que dans le cas de  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , le membre de droite de (1.3) est fini. Or les  $\tilde{\xi}_u$ ,  $|u| = n + 1$  sont indépendants des  $\xi_u$ ,  $|u| = n$ , donc par définition de l'exposant Malthusien, les v.a.  $\xi_u^{\beta^*} ((\tilde{\xi}_{v_0}^{\beta^*} + \tilde{\xi}_{v_1}^{\beta^*}) - 1)$  sont centrées, et indépendantes (clair au vu de la Définition 1.1). Par suite, (1.4) entraîne :

$$\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n|^2] \leq \left( \int_{\mathcal{S}} |(s_0^{\beta^*} + s_1^{\beta^*}) - 1|^2 \nu(ds) \right) 4 \mathbb{E} \left[ \sum_{|u|=n} \xi_u^{2\beta^*} \right].$$

Or d'après des arguments d'indépendance déjà évoqués, et d'après la Définition 1.1, on a pour tout  $q > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{|u|=n+1} \xi_u^q \mid \mathcal{G}_n \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{|v|=n} \xi_v^q (\tilde{\xi}_{v_0}^q + \tilde{\xi}_{v_1}^q) \mid \mathcal{G}_n \right] = (1 - \kappa(q)) \sum_{|v|=n} \xi_v^q$$

et par récurrence, on obtient, pour  $q = 2\beta^*$  :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{|u|=n} \xi_u^{2\beta^*} \right] = (1 - \kappa(2\beta^*))^n.$$

Puisque  $\kappa$  est strictement croissante,  $\kappa(2\beta^*) > \kappa(\beta^*) = 0$  donc  $(1 - \kappa(2\beta^*)) < 1$ . On en déduit la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n|^2]$  et le résultat.  $\square$

Dans la suite, on notera  $M_\infty$  la limite (p.s. et dans  $\mathbb{L}^2$ ) de  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On introduit enfin l'analogie en temps continu de cette martingale, c'est-à-dire

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^{\beta^*}(t) = \sum_{u \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{t \in I_u} \xi_u^{\beta^*}, \quad t \geq 0,$$

ainsi que  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration naturelle de  $(F(t))_{t \geq 0}$ . Le processus que l'on a ainsi défini n'est en fait rien d'autre que la  $\beta^*$ -masse, au sens défini précédemment. On a alors le résultat suivant :

**Proposition 1.7.** *Le processus  $(M(t))_{t \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , et*

$$M(t) = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t].$$

*En particulier,  $M(t)$  converge vers  $M_\infty$  dans  $\mathbb{L}^2$ .*

*Démonstration.* La preuve du caractère de martingale, bien que moins simple que dans le cas discret, repose sur les mêmes arguments et idées. Étant donnés  $t < t'$ , une particule  $u$  en vie au temps  $t$  se sera (éventuellement) décomposée à  $t'$  en un ensemble de particules. On raisonne alors par récurrence sur le nombre de décompositions qui sont intervenues, par exemple, pour établir que p.s. :

$$\mathbf{1}_{t \in I_u} \xi_u^{\beta^*} = \mathbf{1}_{t \in I_u} \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{\text{descendants } u' \text{ de } u \\ \text{présents à } t'}} \xi_{u'}^{\beta^*} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Le caractère de martingale en découle, en sommant cette égalité pour tout  $u \in \mathcal{A}$ .

Pour le reste, on sait déjà que

$$\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_t] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t].$$

De plus, en distinguant les particules encore en vie à l'instant  $t$  de celles qui ont "éclaté", on voit que

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_t] = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^{\beta^*}(t) \mathbf{1}_{G(F_i(t)) \leq n} + \gamma_n,$$

où  $G$  associe à une particule sa génération ( $G(\xi_u) = |u|$ ), et où  $\gamma_n = \sum_{|u|=n} \xi_u^{\beta^*} \mathbf{1}_{a_u + \zeta_u < t}$ . La première somme convergeant vers  $M(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini, il suffit de prouver que  $\mathbb{E}(\gamma_n) \rightarrow 0$ . En effet, puisque  $\gamma_n \geq 0$ , la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc dans  $\mathbb{L}^1$  vers 0, et par conséquent on peut en extraire une sous-suite qui converge p.s. vers 0; on obtient alors le résultat souhaité par passage à la limite le long de cette sous-suite.

Or, pour un  $u$  fixé, d'après la Définition 1.1,

$$a_u + \zeta_u = f_0 + x_1^{-1} f_1 + \dots + x_{|u|}^{-1} f_{|u|} \geq f_0 + f_1 + \dots + f_{|u|},$$

où les  $f_j$  sont des v.a. exponentielles de paramètre 1 indépendantes entre elles et indépendantes dans leur ensemble de  $\xi_u$ , et où  $x_j$  est la taille de la particule associée à l'ancêtre de  $u$  de la  $j$ -ième génération. En notant  $\omega_u = f_0 + f_1 + \dots + f_{|u|}$ , on a donc, en utilisant le fait que le Théorème 1.6 entraîne  $\mathbb{E}(M_n) = 1$  :

$$\mathbb{E}[\gamma_n] \leq \sum_{|u|=n} \mathbb{E}[\xi_u^{\beta^*}] \mathbb{P}(\omega_u < t) = \mathbb{P}(\omega_n < t)$$

où  $\omega_n$  désigne une somme de  $n + 1$  variables exponentielles de paramètre 1. La quantité de droite convergeant vers 0 (conséquence simple de la loi forte des grands nombres), cela conclut la démonstration de l'égalité.

Enfin, la convergence  $\mathbb{L}^2$  résulte de l'inégalité de Jensen, qui garantit à partir de  $M(t) = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$  que, puisque  $M_\infty \in \mathbb{L}^2$  par le théorème précédent, le processus  $(M(t))_{t \geq 0}$  est borné dans  $\mathbb{L}^2$ . De même que pour les martingales à temps discret, cela entraîne la convergence recherchée, qui s'effectue nécessairement p.s. et  $\mathbb{L}^2$  vers  $M_\infty$ .  $\square$

## 1.4 Convergence des Moments

Nous allons à présent démontrer un résultat sur le comportement moyen de la  $\beta$ -masse (définie à la fin de la Section ) quand  $t$  tend vers l'infini. La démonstration se fera en trois étapes : Seule la première utilise les probabilités, la seconde consiste à résoudre une équation intégral-différentielle avec les séries entières et la troisième utilise un résultat d'analyse complexe.

Avant d'énoncer le théorème, introduisons quelques notations et hypothèses. Soit  $(F(t))_{t \geq 0} = ((F_i(t))_{i \geq 1})_{t \geq 0}$  une chaîne de fragmentation binaire de mesure de dislocation  $\nu$  (supposée non arithmétique, c'est-à-dire que ce n'est pas une mesure discrète dont les atomes sont sur un réseau). On suppose que l'hypothèse malthusienne est vérifiée (on note alors  $\beta^*$  l'exposant malthusien). Ensuite, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\beta \geq 0$ , on note

$$m_\beta(t) = \mathbb{E} \left[ \sum_{i \geq 1} F_i^\beta(t) \right]$$

l'espérance de la  $\beta$ -masse à l'instant  $t$ .

**Théorème 1.8** (Convergence des Moments). *Sous ces hypothèses, pour tout  $\beta \geq 0$  tel que  $\beta \neq \beta^*$ , on a*

$$m_\beta(t) \sim t^{\beta^* - \beta} \Gamma(\beta - \beta^*) \frac{\kappa(\beta)}{\kappa'(\beta^*)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n + \beta)}{\kappa(n + \beta + \beta^*)}, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$$

C'est-à-dire qu'en moyenne, la  $\beta$ -masse à l'instant  $t$  se comporte comme  $t^{\beta^* - \beta}$  quand  $t$  est grand.

*Démonstration.* La preuve se fait en plusieurs étapes :

- (a) On utilise le caractère de chaîne de fragmentation pour établir une équation intégrale-différentielle dont  $m_\beta$  est solution.
- (b) Cette équation a une unique solution que l'on donne sous forme de série entière.
- (c) On interprète cette série comme la somme des résidus d'une fonction méromorphe, et le théorème des résidus nous permet de conclure.

Nous ne détaillerons cependant pas la partie (c).

On commence donc par le (a) :

Le processus  $F$  étant une chaîne de fragmentation binaire, on a, avec les notations de la Définition 1.1,

$$\begin{aligned} S &:= \{(\tilde{\xi}_{u0}, \tilde{\xi}_{u1}), e_u \mid u \in \mathcal{A}\} \\ &= \{(\tilde{\xi}_{0u0}, \tilde{\xi}_{0u1}), e_{0u} \mid u \in \mathcal{A}\} \sqcup \{(\tilde{\xi}_{1u0}, \tilde{\xi}_{1u1}), e_{1u} \mid u \in \mathcal{A}\} \sqcup \{(\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1), e_\emptyset\} \\ &=: S_0 \sqcup S_1 \sqcup \{(\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1), e_\emptyset\}. \end{aligned}$$

On a

$$F(t) = ((\mathbf{1}_{t < e_\emptyset}) \bullet (\mathbf{1}_{t \geq e_\emptyset} \mathbf{F}_0(t - e_\emptyset)) \bullet (\mathbf{1}_{t \geq e_\emptyset} \mathbf{F}_1(t - e_\emptyset)))^\downarrow$$

où  $\mathbf{F}_i(t)$  est l'ensemble des particules issues de la particule  $\xi_i$  présentes à l'instant  $t + e_\emptyset$  si  $t \geq 0$  et est nul si  $t \leq 0$ . Le symbole  $\bullet$  désigne la concaténation, et l'exposant  $(.)^\downarrow$  ordonne son argument dans l'ordre décroissant. On note

$$F^{(i)} := (\xi_i^{-1} \cdot \mathbf{F}_i(\xi_i^{-1}t))_{t \geq 0}$$

Le processus  $F^{(i)}$  est une chaîne de fragmentation binaire de même loi que  $F$  d'après la Définition 1.1 (la famille de v.a.  $S_i$  fait "marcher" cette définition pour  $F^{(i)}$  et on a  $S_i = S$  en loi).

De plus,  $S_0, S_1$ , et  $(\xi_0, \xi_1, e_\emptyset)$  sont indépendantes (Définition 1.1) donc  $F^{(0)}, F^{(1)}$ , et  $(\xi_0, \xi_1, e_\emptyset)$  sont indépendantes ( $F^{(i)}$  est fonction de  $S_i$ ).

On déduit de ce qui précède l'équation :

$$(F(t))_{t \geq 0} \stackrel{(d)}{=} \left( (\mathbf{1}_{t < e_\emptyset}) \bullet \left( \mathbf{1}_{t \geq e_\emptyset} \xi_0 \cdot F^{(0)}(\xi_0(t - e_\emptyset)) \right) \bullet \left( \xi_1 \cdot F^{(1)}(\xi_1(t - e_\emptyset)) \right) \right)_{t \geq 0}^\downarrow.$$

Traduisons-la en termes de  $\beta$ -masses :

$$M_\beta(t) \stackrel{(d)}{=} \mathbf{1}_{t < e_\emptyset} + \mathbf{1}_{t \geq e_\emptyset} \left( \xi_0^\beta M_\beta^{(0)}(\xi_0(t - e_\emptyset)) + \xi_1^\beta M_\beta^{(1)}(\xi_1(t - e_\emptyset)) \right),$$

où  $M_\beta^{(0)}$  et  $M_\beta^{(1)}$  sont deux copies de  $M_\beta$  indépendantes entre elles et aussi indépendantes de  $(\xi_0, \xi_1, e_\emptyset)$ .

Dans la suite, on note pour simplifier les calculs

$$\sigma := P_{\xi_0} + P_{\xi_1},$$

où  $\xi_0$  et  $\xi_1$  désignent les masses des deux filles de la première particule et où, de manière générale,  $P_Y$  désigne la loi de la v.a.  $Y$ . En passant aux espérances dans l'équation précédente, on obtient

$$m_\beta(t) = e^{-t} + \int_{[0,t]} ds e^{-s} \int_{[0,1]} m_\beta((t-s)x) x^\beta \sigma(dx).$$

Par le changement de variable  $u = t - s$ , on a

$$m_\beta(t) = e^{-t} + e^{-t} \int_{[0,t]} du e^u \int_{[0,1]} m_\beta(ux) x^\beta \sigma(dx).$$

Ceci nous donne la continuité de  $m_\beta$  : en effet, il suffit de montrer que le terme intégral est continu en  $t$ , mais  $t$  n'apparaît que dans le domaine d'intégration, il suffit alors de montrer que le terme sous l'intégrale est borné sur, disons,  $[0, t+1]$ , ce qui est clair car  $m_\beta$  est bornée sur cet intervalle et car  $\sigma$  est une mesure finie. Par Fubini, on a

$$m_\beta(t) = e^{-t} \left( 1 + \int_{[0,1]} \sigma(dx) \int_{[0,t]} du e^u m_\beta(ux) x^\beta \right).$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégral nous permet alors de conclure que  $m_\beta$  est dérivable, et même  $C^\infty$  par récurrence. On peut alors différencier et obtenir

$$\begin{cases} \partial_t m_\beta(t) = -m_\beta(t) + \int_0^1 m_\beta(xt) x^\beta \sigma(dx), \\ m_\beta(0) = 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Nous admettrons l'unicité des solutions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de ce type d'équations (pour une démonstration, voir [5]).

Passons à présent à l'étape (b).

On cherche une série entière  $f$  de rayon infini vérifiant l'équation (1.5). Supposons qu'une telle série entière existe, et soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  telle que, pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

On a

$$\int_0^1 f(xt) x^\beta \sigma(dx) = \int_0^1 \sigma(dx) x^\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \int_0^1 x^{n+\beta} \sigma(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \kappa(n + \beta)) t^n,$$

car, par définitions de  $\sigma$  et de  $\kappa$ ,  $\int_0^1 x^y \sigma(dx) = 1 - \kappa(y)$ . Comme  $f$  est solution de (1.5), on montre alors facilement qu'on doit avoir

$$\begin{cases} (n+1)a_{n+1} = a_n(-1)\kappa(n+\beta), \\ a_0 = 1, \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \kappa(j+\beta), \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

On définit alors  $f$  ainsi, et il reste à montrer que son rayon de convergence est infini. Comme pour  $j \in \mathbb{N}$ ,  $|\kappa(j+\beta)| \leq 1$ ,  $R = \infty$ ,  $f$  est donc  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$f(t) = m_\beta(t)$$

par unicité des solutions de l'équation (1.5).

On pose maintenant

$$\gamma_\beta(n) := \prod_{j=0}^{n-1} \kappa(j+\beta),$$

ce qui nous donne

$$m_\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \gamma_\beta(n).$$

On passe enfin à l'étape (c).

Donnons une explication heuristique de l'apparition du terme  $t^{\beta^* - \beta}$ . Supposons qu'on ait  $m_\beta(t) \sim ct^a$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Quand on remplace  $m_\beta(t)$  par  $ct^a$  dans (1.5), on obtient à gauche un terme d'ordre  $t^{a-1}$  tandis qu'à droite on a  $-ct^a(\kappa(a + \beta))$ . En supposant que ce remplacement préserve le comportement asymptotique de chaque membre, cela suggère que  $\kappa(a + \beta) = 0$ . D'après l'hypothèse malthusienne, on a alors  $a = \beta^* - \beta$ ; cependant, on ne cherchera pas à rendre ce raisonnement rigoureux. On va plutôt donner les grandes lignes de la méthode utilisant l'analyse complexe. Ce qui suit, sans être une preuve, montre comment les termes de l'équivalence énoncée dans le théorème (en particulier la fonction  $\Gamma$ ) apparaissent.

On veut construire une famille  $g_t : z \mapsto g_t(z)$  de fonctions méromorphes telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $m_\beta(t)$  soit égal à la somme des résidus de  $g_t$ , afin d'utiliser le théorème des résidus.

Pour commencer, on prolonge  $\gamma_\beta$  en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  en posant

$$\gamma_\beta(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa(n + \beta)}{\kappa(n + \beta + z)},$$

puis

$$g_t(z) := \Gamma(-z) \gamma_\beta(z) t^z.$$

On sait que la fonction  $\Gamma$  a un pôle simple en chaque  $-n$  où  $n \in \mathbb{N}$ , et que

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Comme  $\beta^* \in ]0, 1[$ , on voit d'après la définition de  $\gamma_\beta$  que  $\gamma_\beta$  n'a pas de pôle sur  $\mathbb{N}$  (sauf si  $\beta = \beta^*$ , ce qu'on a exclu dans l'énoncé du théorème). On calcule donc aisément le résidu de  $g_t$  en  $n$  :

$$\text{Res}(g_t, n) = \frac{(-1)^n}{n!} t^n \gamma_\beta(n).$$

C'est exactement le terme général de la série  $m_\beta(t)$ . Le théorème des résidus permet alors de conclure (pour cette partie de la démonstration, voir [2]).  $\square$

## 1.5 Un théorème de convergence $\mathbb{L}^2$

À l'aide des résultats établis précédemment, on va à présent pouvoir montrer le théorème de convergence recherché, qui sera d'une grande utilité dans la suite. Avant toute chose, on définit dans la suite la constante  $\Delta$  comme :

$$\Delta = \Gamma(-\beta^*) \frac{-1}{\kappa'(\beta^*)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{\kappa(n + \beta^*)},$$

et on remarque que par le Théorème de Convergence des Moments, on a

$$t^{-\beta^*} m_0(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Delta. \tag{1.6}$$

Le théorème de convergence  $\mathbb{L}^2$  s'énonce alors comme suit.

**Théorème 1.9.** Soit  $N(t)$  le nombre de particules présentes à l'instant  $t$ , en d'autres termes (on rappelle que l'on prend par convention  $0^0 = 0$ ) :

$$N(t) = \sum_i F_i^0(t).$$

On a la convergence suivante :

$$t^{-\beta^*} N(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} \Delta M_\infty.$$

*Démonstration.* On admet dans cette démonstration l'existence d'un réel  $M$  tel que pour tout  $t$ ,

$$t^{-2\beta^*} \mathbb{E}[N(t)^2] \leq M. \quad (1.7)$$

On veut montrer que

$$\mathbb{E} \left[ \left( t^{-\beta^*} N(t) - M_\infty \Delta \right)^2 \right] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

En développant le carré, et en se souvenant que d'après la Proposition 1.7,  $\mathbb{E}[M(t)^2] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[M_\infty^2]$ , on remarque alors qu'il suffit de prouver les deux convergences suivantes, où on a posé  $A(t) = t^{-\beta^*} N(t)$  :

$$\mathbb{E}[A(t)^2] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[M_\infty^2] \Delta^2$$

et

$$\mathbb{E}[A(t)M(t)] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[M_\infty^2] \Delta.$$

Commençons par établir la première convergence. Pour cela, on se place à l'instant  $t + s$  et on conditionne par rapport à  $F(s)$ . A l'instant  $t + s$ , deux particules  $i$  et  $j$  peuvent descendre ou non d'un même ancêtre vivant à l'instant  $s$  : on notera  $i \sim_s j$  si c'est le cas, et  $i \not\sim_s j$  sinon. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A(t+s)^2 | F(s)] &= S_1 + S_2 \\ &:= (t+s)^{-2\beta^*} \mathbb{E} \left[ \sum_{i \sim_s j} F_i^0(t+s) F_j^0(t+s) \mid F(s) \right] \\ &+ (t+s)^{-2\beta^*} \mathbb{E} \left[ \sum_{i \not\sim_s j} F_i^0(t+s) F_j^0(t+s) \mid F(s) \right]. \end{aligned}$$

L'astuce consiste alors à utiliser le fait suivant : à l'instant  $s$ , conditionnellement à  $F(s)$ , chacune des particules présentes  $F_i(s)$  donne naissance à un processus de fragmentation  $(F_{ij}(t))_{j \geq 1}$  plus "lent" que le processus initial  $(F_i(s))_{i \geq 1}$  d'un facteur  $F_i(s)$ , et de plus ces processus sont indépendants les uns des autres. Plus précisément, la Proposition 1.4 entraîne qu'il existe une suite  $(F_{1j})_{j \geq 1}, (F_{2j})_{j \geq 1}, \dots$  de copies i.i.d. de la fragmentation initiale  $(F_i)_{i \geq 1}$ , indépendante de  $(F_i(s))_{i \geq 1}$ , telle que la particule  $F_i(s)$  ait évolué à l'instant  $t + s$  en  $(F_i(s) F_{ij}(t F_i(s)))_{j \geq 1}$  (en loi, conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$ , donc en particulier à  $F(s)$ ). Ainsi (en indiquant par  $k$  les quantités

associées à la fragmentation issue de  $F_k(s)$  :

$$\begin{aligned}
S_1 &= (t+s)^{-2\beta^*} \sum_k F_k^0(s) \mathbb{E} \left[ \sum_{i,j} F_{ki}^0(tF_k(s)) F_{kj}^0(tF_k(s)) \mid F(s) \right] \\
&\leq t^{-2\beta^*} \sum_k F_k^0(s) \mathbb{E} [N_k(tF_k(s))^2 \mid F(s)] \\
&= \sum_k F_k^{2\beta^*}(s) \mathbb{E} \left[ (tF_k(s))^{-2\beta^*} N_k(tF_k(s))^2 \mid F(s) \right] \\
&\leq M \sum_k F_k^{2\beta^*}(s).
\end{aligned}$$

On a utilisé (1.7) pour la dernière majoration. D'après le Théorème de Convergence des Moments,  $\mathbb{E}[S_1]$  converge donc vers 0 quand  $s$  tend vers l'infini, et cela uniformément en  $t$ .

Pour  $S_2$ , on procède comme suit. Commençons par noter  $y_k = F_k(s)$ , et  $I_k$  l'ensemble de  $i$  tels que la particule  $X_i(t+s)$  descende de  $y_k$ . Les descendants de deux particules distinctes  $y_k$  et  $y_l$  évoluant indépendamment (conditionnellement à  $F(s)$  ...), on a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= (t+s)^{-2\beta^*} \sum_{k \neq l} \mathbb{E} \left[ \sum_{i \in I_k} F_i^0(t+s) \mid F(s) \right] \mathbb{E} \left[ \sum_{j \in I_l} F_j^0(t+s) \mid F(s) \right] \\
&= (t+s)^{-2\beta^*} \sum_{k \neq l} \mathbb{E} [N_k(ty_k) \mid F(s)] \mathbb{E} [N_l(ty_l) \mid F(s)] \\
&= \sum_{k \neq l} y_k^{\beta^*} y_l^{\beta^*} \mathbb{E} [((t+s)y_k)^{-\beta^*} N_k(ty_k) \mid F(s)] \mathbb{E} [((t+s)y_l)^{-\beta^*} N_l(ty_l) \mid F(s)].
\end{aligned}$$

Par le Théorème de convergence des moments appliqué pour  $\beta = 2\beta^*$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_k F_k^{2\beta^*}(s) \right] = m_{2\beta^*}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

et il suit d'après la Proposition 1.7 que

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{k \neq l} F_k^{\beta^*}(s) F_l^{\beta^*}(s) \right] \sim \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l} F_k^{\beta^*}(s) F_l^{\beta^*}(s) \right] = \mathbb{E}[M(s)^2] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_\infty^2].$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On fixe désormais  $s$  suffisamment grand tel que

$$\left| \mathbb{E} \left[ \sum_{k \neq l} F_k^{\beta^*}(s) F_l^{\beta^*}(s) \right] - \mathbb{E}[M_\infty^2] \right| \leq \varepsilon.$$

De plus,  $N_k$  et  $F(s)$  étant indépendants et d'après l'équation (1.6),

$$\mathbb{E} [((t+s)y_k)^{-\beta^*} N_k(ty_k) \mid F(s)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Delta.$$

On a donc, par convergence dominée (justifiée plus bas),

$$\mathbb{E}[S_2] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Delta^2 \mathbb{E} \left[ \sum_{k \neq l} F_k^{\beta^*}(s) F_l^{\beta^*}(s) \right],$$



d'où pour  $t$  suffisamment grand :

$$|\mathbb{E}[S_2] - \mathbb{E}[M_\infty^2]\Delta^2| \leq \varepsilon (1 + \Delta^2).$$

Finalement cela établit

$$\mathbb{E}[A(t+s)^2] = \mathbb{E}[S_1] + \mathbb{E}[S_2] \xrightarrow{s, t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_\infty^2]\Delta^2$$

ce qui est le résultat souhaité.

Justifions à présent la convergence dominée. L'équation (1.6) se ré-écrit  $\mathbb{E}[t^{-\beta^*} N_t] \rightarrow \Delta$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et cela implique donc que la quantité  $\mathbb{E}[t^{-\beta^*} N_t]$  est bornée en  $t$ . Puisque  $N_k$  est, conditionnellement à  $F(s)$ , de même loi que  $N$ , et que  $N_k$  est indépendant de  $F(s)$ , on en déduit que

$$\mathbb{E}[((t+s)y_k)^{-\beta^*} N_k(ty_k) | F(s)]$$

est bornée selon  $t$ . Il existe donc une constante  $C$  telle que pour tout  $t$ ,

$$y_k^{\beta^*} y_l^{\beta^*} \mathbb{E}[((t+s)y_k)^{-\beta^*} N_k(ty_k) | F(s)] \mathbb{E}[((t+s)y_l)^{-\beta^*} N_l(ty_l) | F(s)] \leq C^2 y_k^{\beta^*} y_l^{\beta^*},$$

et puisque d'après la Proposition 1.7,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{k,l} y_k^{\beta^*} y_l^{\beta^*} \right] = \mathbb{E}[M(s)^2] < \infty,$$

la convergence dominée s'applique bien.

Pour la convergence de  $\mathbb{E}[A(t)M(t)]$ , on procède de même. Il n'y a pas de difficultés supplémentaires quant à la convergence de  $S_2$ ; la majoration que l'on établit sur  $S_1$  se fait également de façon semblable, à ceci près que l'on utilise Cauchy-Schwartz avant la dernière majoration pour séparer les termes issus de  $A(t)$  et ceux issus de  $M(t)$ . On utilise alors, pour les premiers, la majoration admise (1.7), et pour les seconds, le fait que d'après la Proposition 1.7, la martingale  $M(t)$  est bornée dans  $\mathbb{L}^2$ . Cela conclut la démonstration.  $\square$

*Remarque 1.10.* Ce théorème est en réalité un cas particulier, obtenu en prenant  $\beta = 0$  dans le théorème de convergence suivant :

$$t^{\beta-\beta^*} \sum_i F_i^\beta(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} M_\infty \Gamma(\beta - \beta^*) \frac{\kappa(\beta)}{\kappa'(\beta^*)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n + \beta)}{\kappa(n + \beta + \beta^*)}.$$

La démonstration est essentiellement la même (on a un analogue de l'équation (1.6) en appliquant le Théorème de Convergence des Moments pour  $\beta$  quelconque), et ne sera pas réalisée ici, seul le résultat énoncé dans le théorème étant utile dans la suite. Pour les détails de la preuve, on renvoie à [2, Corollaire 6].

## 2 Quadrees

### 2.1 Rappels sur les processus de Poisson ponctuels

**Définition 2.1.** Soit  $E$  un espace muni d'une mesure borélienne  $\mu$ .

- On dit qu'une v.a.  $X$  est un *processus ponctuel* si elle est à valeurs dans l'ensemble des configurations de points de  $E$ . Étant donné un tel processus, on note, pour tout borélien  $A$  de  $E$ ,  $N(A)$  le nombre de points de  $X$  qui "tombent" dans  $A$ .

- On dit qu'un processus ponctuel  $X$  est un *processus de Poisson ponctuel d'intensité  $\mu$*  si :
  1. pour tout borélien  $A$ ,  $N(A)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu(A)$ ,
  2. pour tous boréliens disjoints  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , les variables aléatoires  $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_k)$  sont indépendantes.

On ne s'intéressera pas dans ce papier à la question de l'existence de tels processus, ni à la démonstration des propriétés classiques qui suivent (on ne donne pas non plus leur cadre précis, ces propriétés étant de toute façon bien vérifiées dans le cas simple qui nous intéresse) ; pour tout détail supplémentaire, on renvoie à [6].

**Propriété 2.2.** *Si pour un borélien  $A$ , on définit  $X_A = X \cap A$ , alors pour tous boréliens  $A$  et  $B$  disjoints de  $E$ , les processus ponctuels  $X_A$  et  $X_B$  sur respectivement  $A$  et  $B$  (munis des mesures induites) sont des processus de Poisson ponctuels indépendants.*

**Propriété 2.3.** *Soient  $E$  et  $G$  deux espaces et  $f : E \rightarrow G$  une application mesurable. Si  $X$  est un processus de Poisson ponctuel sur  $E$  d'intensité  $\mu$ , alors  $f(X)$  est un processus de Poisson ponctuel sur  $G$  d'intensité la mesure  $\mu^*$  donnée par  $\mu^*(B) = \mu(f^{-1}(B))$ .*

**Propriété 2.4.** *Si  $X$  est un processus de Poisson ponctuel sur  $]0, +\infty[$  d'intensité  $a \cdot \lambda$ , avec  $\lambda$  la mesure de Lebesgue, et si on note  $X_1, X_2, \dots$  ses points rangés par ordre croissant, alors les v.a.  $X_1, X_2 - X_1, X_3 - X_2, \dots$  sont i.i.d. et suivent une loi exponentielle de paramètre  $a$ .*

Ici, l'espace  $E$  sera de la forme  $\mathbb{R}^+ \times E'$  et muni de la mesure  $dt \otimes \mu'$ , où  $\mu'$  est une mesure borélienne sur  $E'$ . On s'intéressera alors au processus  $(([0, t] \times E') \cap X)_{t \geq 0}$ , c'est-à-dire intuitivement à la façon dont les points de  $X$  tombent dans  $E'$  "au cours du temps". Les deux dernières propriétés entraînent alors facilement que pour tout borélien  $A$  de  $E'$ , le temps s'écoulant entre deux chutes de points dans  $A$  est une variable exponentielle de paramètre  $\mu'(A)$ .

*Remarque 2.5.* Dans les conditions que l'on vient d'énoncer, et dans le cas particulier où  $\mu'$  est une mesure de probabilité sur  $E'$  proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur cet ensemble (c'est-à-dire que  $\mu'$  est la loi uniforme sur  $E'$ ), on peut en fait se représenter le processus de Poisson ponctuel comme suit : on attend un temps exponentiel de paramètre 1, puis on laisse tomber un point dans  $E'$  de manière uniforme. Puis on attend à nouveau un temps exponentiel de même paramètre, on fait tomber un nouveau point suivant la même loi (et indépendamment du premier point), et ainsi de suite, les positions des points étant indépendantes des temps d'attente. Ce sera le cas ici.

## 2.2 Présentation du modèle

Afin de pouvoir traiter le problème, on introduit une version de celui-ci en temps continu. Cela permettra d'utiliser les résultats issus de la théorie des fragmentations que nous avons établis dans la première partie. Plus profondément, le passage en temps continu permet de faire intervenir la propriété de Markov des chaînes de fragmentation, qui est inexistante en temps discret. Il faudra bien entendu développer des outils permettant de transposer les résultats obtenus au cas du problème à temps discret, ce qui sera fait plus loin.

Soit donc  $\Pi$  un processus de Poisson ponctuel sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]^2$  d'intensité  $dt \otimes \lambda$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]^2$ . D'après la remarque faite plus haut, le processus  $\Pi$  consiste donc à faire tomber des points dans  $[0, 1]^2$ , de manière uniforme, le temps s'écoulant entre deux chutes successives étant une variable exponentielle de paramètre 1.

Notons  $((\tau_i, x_i, y_i), i \geq 1)$  les atomes de  $\Pi$  classés par ordre croissant selon leur première coordonnée (on pose également  $\tau_0 = 0$ ). Chaque atome correspond à un point  $(x_i, y_i)$ , qui

tombe dans le carré  $[0, 1]^2$  à l'instant  $\tau_i$ . On va définir un processus en temps continu  $(Q(t))_{t \geq 0}$  analogue au processus à temps discret  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini plus haut (c'est en fait le "même" processus, à ceci près que le temps qui s'écoule entre deux chutes de points est une variable exponentielle de paramètre 1). Pour cela, on commence par introduire l'opération Split, définie sur  $\mathcal{P}([0, 1]^2) \times [0, 1] \times [0, 1]$  par :

$$\text{Split}(R, x, y) = \{R \cap [0, x] \times [0, y], R \cap [0, x] \times [y, 1], R \cap [x, 1] \times [0, y], R \cap [x, 1] \times [y, 1]\}.$$

Cette fonction traduit le partage d'un rectangle en quatre sous-rectangles, de la même façon que dans le cas discret. On définit alors  $(Q(t))_{t \geq 0}$  comme suit :

$$\begin{cases} Q(t) = \{[0, 1]^2\} & \forall t \in [0, \tau_1[ \\ Q(t) = \text{Split}(R_i, x_i, y_i) \cup Q(\tau_{i-1}) \setminus \{R_i\} & \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[ \end{cases}$$

où  $R_i$  désigne le seul élément (qui existe p.s., et dont nous supposons l'existence dans la suite) de  $Q(\tau_{i-1})$  dont  $(x_i, y_i)$  soit à l'intérieur.

On rappelle que  $S_x$  est définie dans l'introduction. On introduit à présent

$$N_t(x) = \#\{R \in Q(t) \mid R \cap S_x \neq \emptyset\} - 1,$$

le nombre de rectangles de  $Q(t)$  qui intersectent  $S_x$  réduit de 1. Il est clair que,  $\tau_n$  étant le temps d'arrivée du  $n$ -ième point,  $Q(\tau_n)$  a même loi que la v.a.  $Q_n$  définie plus haut. En particulier, pour tout entier  $n$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $N_{\tau_n}(x)$  a même loi que  $\mathcal{N}_n(x)$ .

Dans la suite, nous allons établir un lien entre notre modèle et la théorie des fragmentations. L'idée est de voir le carré initial comme une particule qui va se fragmenter en deux morceaux : quand le premier point  $P_1$  tombe dans le carré, on ne s'intéresse qu'aux deux sous-rectangles qui intersectent la verticale  $S_x$ , les deux autres étant éliminés et considérés comme de la masse perdue. Ensuite, on attend qu'un point tombe dans un des deux rectangles gardés et on applique le même procédé au rectangle en question et à la verticale extraite de  $S_x$  qui le traverse. Ceci nous permet - plus ou moins, comme nous le verrons par la suite - de voir le modèle comme une chaîne de fragmentation binaire, où l'aire de chaque rectangle est interprétée comme sa masse. En effet, en vertu des Propriétés 2.3 et 2.4, et d'après la propriété d'absence de mémoire d'une variable exponentielle, le temps que met un rectangle pour se diviser est bien une variable exponentielle de paramètre l'aire de ce rectangle. Dans la section suivante, les termes de "chaîne de fragmentation" sont donc employés abusivement, dans les descriptions intuitives de la situation, pour désigner le processus étudié.

### 2.3 Principales équations

Dans cette section, on introduit de nombreuses notations afin de commencer à faire le rapprochement entre notre modèle et la théorie des fragmentations. On fixe pour cela  $x \in [0, 1]$  l'abscisse du segment vertical  $S_x$  traversant le carré.

On associe à chaque rectangle apparaissant dans  $(Q(t))_{t \geq 0}$  et d'intersection non vide avec  $S_x$  un nœud de l'arbre  $\mathcal{A}$  en procédant comme suit :

- $R_\emptyset(x) = [0, 1]^2$
- $\forall u \in \mathcal{A}$ , le premier point tombant dans  $R_u(x)$  partage ce rectangle en quatre sous-rectangles, dont presque sûrement deux intersectent  $S_x$ . On note  $R_{u0}(x)$  celui du bas et  $R_{u1}(x)$  celui du haut.

Pour  $u \in \mathcal{A}$ , on note  $G_u(x)$  (resp.  $D_u(x)$ ) l'abscisse minimale (resp. maximale) de  $R_u(x)$ , et on introduit la *place* de  $x$  dans  $R_u(x)$  comme

$$X_u(x) = \frac{x - G_u(x)}{D_u(x) - G_u(x)}.$$

On définit également, si  $u \neq \emptyset$ ,

$$L_u(x) = \frac{\lambda(R_u(x))}{\lambda(R_{\bar{u}}(x))},$$

où par convention  $L_\emptyset(x) = 1$ . On introduit de plus, pour  $u \in \{0, 1\}$  et  $t \geq 0$ , le "sous-quadtrees"  $Q_{u,x}(t) = \{R \in Q(t + \tau_1) : R \subset R_u(x)\}$ . On a donc défini sur  $(Q(t))_{t \geq 0}$  une structure proche de celle d'une chaîne de fragmentation : chaque rectangle  $R_u(x)$  se divise au bout d'un certain temps en deux rectangles  $R_{u0}(x)$  et  $R_{u1}(x)$ , et leurs masses relatives sont données par  $L_{u0}(x)$  et  $L_{u1}(x)$ . Pour  $u \in \{0, 1\}$  ( $u$  sera pris comme tel dans cette section),  $(Q_{u,x}(t))_{t \geq 0}$  représente donc la sous-fragmentation issue de  $R_u(x)$ . On remarque que l'on a l'égalité suivante, pour tout  $t \geq 0$  :

$$N_t(x) = \mathbb{1}_{t \geq \tau_1} + \mathbb{1}_{t \geq \tau_1} \sum_{u \in \{0,1\}} (\#\{R \in Q_{u,x}(t - \tau_1) : R \cap S_x \neq \emptyset\} - 1). \quad (2.1)$$

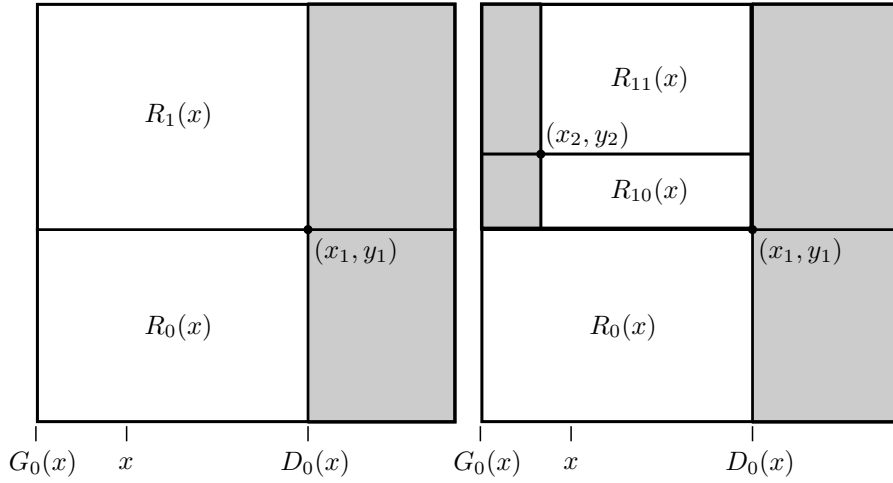


FIGURE 4 – cas  $x_2 < x < x_1$ .

Enfin, si  $R$  est un rectangle de côtés horizontaux ou verticaux, on note  $\Phi_R$  la transformation affine de  $\mathbb{R}^2$  qui l'envoie sur le carré d'origine  $[0, 1]^2$  (en envoyant chaque arête du rectangle sur celle du carré qui est "du même côté"). Cela permet d'effectuer une "renormalisation" de la chaîne de fragmentation issue du rectangle  $R_u(x)$ . On note que l'application de  $\Phi_{R_u(x)}$  divise les aires des sous-rectangles de  $R_u(x)$  par celle de ce rectangle, c'est-à-dire, du point de vue des fragmentations, divise les masses absolues de la descendance de  $R_u(x)$  par l'aire de ce rectangle. Intuitivement, on obtient après cette renormalisation une chaîne de fragmentation identique à celle originelle, à ceci près que l'abscisse du segment vertical est  $X_u(x)$  et non  $x$ , et que le temps s'écoule plus lentement d'un facteur  $L_u(x)$ .

Plus formellement, les propriétés des processus de Poisson ponctuels entraînent qu'il existe  $\tilde{Q}$  une copie indépendante de  $Q$  telle que, conditionnellement à  $(L_u(x), X_u(x), R_u(x))$ , le processus  $(\Phi_{R_u(x)}(Q_{u,x}(t)))_{t \geq 0}$  a même loi que  $(\tilde{Q}(L_u(x)t))_{t \geq 0}$ .

En effet, on vérifie facilement à partir de la définition d'un processus de Poisson ponctuel (Définition 2.1) que, si on note  $\Pi_u$  le processus formé des points de  $\Pi$  qui tombent dans  $R_u(x)$  à partir de l'instant  $\tau_1$ , alors conditionnellement à  $(L_u(x), X_u(x), R_u(x))$ ,  $\Pi_u$  est un processus de Poisson ponctuel d'intensité  $L_u(x)dt \otimes U_{R_u(x)}$ , où  $U_{R_u(x)}$  est la loi uniforme sur  $R_u(x)$ , et donc (toujours

conditionnellement  $(L_u(x), X_u(x), R_u(x))$ ,  $(\Phi_{R_u(x)}(\Pi_u(t/L_u(x))))_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $dt \otimes U_{[0,1]^2}$ . Autrement dit, si on définit  $\tilde{\Pi}$  une copie indépendante de  $\Pi$  (donc de  $(L_u(x), X_u(x), R_u(x))$ ), alors  $(\Phi_{R_u(x)}(\Pi_u(t/L_u(x))))_{t \geq 0}$  et  $\tilde{\Pi}$  ont même loi conditionnellement à  $(L_u(x), X_u(x), R_u(x))$ . De plus, en définissant  $\tilde{Q}$  le quadtree associé à  $\tilde{\Pi}$ ,  $\tilde{Q}$  est fonction de  $\tilde{\Pi}$  et la même fonction appliquée à  $(\Phi_{R_u(x)}(\Pi_u(t/L_u(x))))_{t \geq 0}$  donne  $(\Phi_{R_u(x)}(Q_{u,x}(t/L_u(x))))_{t \geq 0}$ , et cela justifie donc l'affirmation précédente.

En particulier, conditionnellement à  $(L_u(x), X_u(x))$ , le nombre de rectangles de  $Q_{u,x}$  qui intersectent  $S_x$  réduit de 1, vu comme un processus de  $t$ , a même loi que  $(\tilde{N}_{L_u(x)t}(X_u(x)))_{t \geq 0}$ , où  $\tilde{N}$  est définie à partir de  $\tilde{Q}$  comme  $N$  à partir de  $Q$ . En effet, comme précédemment, ces deux processus sont le résultat d'une même fonction appliquée respectivement à  $((\Phi_{R_u(x)}(\Pi_u(t/L_u(x))))_{t \geq 0}, X_u(x))$  et à  $(\tilde{\Pi}, X_u(x))$ , qui ont même loi conditionnelle. En d'autres termes, conditionnellement à  $(L_u(x), X_u(x))$ , on a les égalités en loi :

$$\begin{aligned} & (\#\{R \in Q_{u,x}(t) \mid R \cap S_x \neq \emptyset\} - 1)_{t \geq 0} \\ &= (\#\{R \in \Phi_{R_u(x)}(Q_{u,x}(t)) \mid R \cap S_{X_u(x)} \neq \emptyset\} - 1)_{t \geq 0} \\ &= (\#\{R \in \tilde{Q}(L_u(x)t) \mid R \cap S_{X_u(x)} \neq \emptyset\} - 1)_{t \geq 0} \\ &= (\tilde{N}_{L_u(x)t}(X_u(x)))_{t \geq 0}. \end{aligned}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $L_0(x)$  et  $L_1(x)$  ont même loi, et de plus  $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$  est indépendant de  $\Pi$  donc de  $\tau_1$ . On tire donc de (2.1) :

$$\mathbb{E}[N_t(x)] = \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2\mathbb{E}[\tilde{N}_{L_0(x)(t-\tau_1)}(X_0(x))], \quad (2.2)$$

où l'on convient que  $\tilde{N}_t(x) = 0$  quand  $t < 0$ .

Pour terminer, on réalise un petit calcul afin de déterminer la loi de  $(L_0(x), X_0(x))$ , ce qui sera utile dans la suite.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(L_0(x), X_0(x))] &= \int_0^1 du \int_0^1 dv \left( \mathbb{1}_{x < u} f\left(uv, \frac{x}{u}\right) + \mathbb{1}_{x > u} f\left((1-u)v, \frac{x-u}{1-u}\right) \right) \\ &= \int_x^1 \frac{dy}{y} \int_0^{\frac{x}{y}} dm f(m, y) + \int_0^x \frac{dy}{1-y} \int_0^{\frac{1-x}{1-y}} dm f(m, y) \quad (2.3) \\ &= \int_0^x dm \int_x^1 \frac{dy}{y} f(m, y) + \int_x^1 dm \int_x^{\frac{x}{m}} \frac{dy}{y} f(m, y) \\ &+ \int_0^{1-x} dm \int_0^x \frac{dy}{1-y} f(m, y) + \int_{1-x}^1 dm \int_{1-\frac{1-x}{m}}^x \frac{dy}{1-y} f(m, y). \quad (2.4) \end{aligned}$$

## 2.4 Lemme de discrétisation

Avant d'entamer la démonstration des résultats principaux de ce document, on établit dans cette section un résultat qui permettra de transposer les résultats obtenus en temps continu pour un processus à temps discret. Pour commencer, on établit le résultat préliminaire suivant.

**Lemme 2.6.** *Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a :*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tau_n \leq n(1-\varepsilon)) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}, \\ \mathbb{P}(\tau_n \geq n(1+\varepsilon)) \leq C\sqrt{ne}^{-\alpha n}, \end{cases}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ , et où  $\alpha > 0$ .

*Démonstration.* La v.a.  $\tau_n$  est le temps où  $P_n$  tombe dans le carré. Comme les points tombent selon un processus de Poisson ponctuel, la loi de  $\tau_n$  est celle du  $n$ -ième saut d'un processus de Poisson standard. Or, on sait qu'une manière de définir un processus de Poisson standard  $(R_t)_{t>0}$  est de se donner des v.a.i.i.d.  $(e_n)_{n>1}$  exponentielles de paramètre 1, d'introduire les sommes partielles  $T_n := \sum_{k=1}^n e_k$  (en posant  $T_0 = 0$ ), et de définir :

$$R_t := \sup\{i \geq 0 : T_i \leq t\}$$

On voit alors que  $\tau_n \stackrel{(d)}{=} T_n$ . Or :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(T_n \leq n(1-\varepsilon)) = \mathbb{P}(R_{n(1-\varepsilon)} \geq n), \\ \mathbb{P}(T_n \geq n(1+\varepsilon)) = \mathbb{P}(R_{n(1+\varepsilon)} \leq n-1), \end{cases}$$

et on sait que  $R_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $t$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{n(1-\varepsilon)} \geq n) &= e^{-n(1-\varepsilon)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(n(1-\varepsilon))^k}{k!} \\ &\leq e^{-n(1-\varepsilon)} (1-\varepsilon)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \\ &\leq e^{-n(1-\varepsilon)} (1-\varepsilon)^n e^n \\ &= e^{n(\varepsilon + \log(1-\varepsilon))} \\ &\leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}, \end{aligned}$$

d'où la première majoration annoncée. Pour la seconde,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{n(1+\varepsilon)} \leq n-1) &= e^{-n(1+\varepsilon)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n(1+\varepsilon))^k}{k!} \\ &\leq e^{-n(1+\varepsilon)} n \frac{(n(1+\varepsilon))^n}{n!} \\ &\leq C e^{-n\varepsilon} \sqrt{n} (1+\varepsilon)^n \\ &= C e^{n(\log(1+\varepsilon) - \varepsilon)} \sqrt{n}, \end{aligned}$$

la première majoration étant vraie car,  $k$  étant plus petit que  $n$ , chaque terme de la somme est dominé par  $\frac{(n(1+\varepsilon))^n}{n!}$ . La seconde majoration s'obtient avec Stirling. Enfin, en posant  $\alpha := \varepsilon - \log(1+\varepsilon) > 0$ , on a le résultat. □

On peut à présent énoncer (et démontrer) le lemme suivant.

**Lemme 2.7** (Discrétisation). *Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{x \in [0,1]} |N_{\tau_n}(x) - N_n(x)|^2 \mathbf{1}_{\tau_n \notin [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)]} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

*Démonstration.* D'une part, on commence par remarquer que pour tout  $x \in [0, 1]$ , l'application  $t \mapsto N_t(x)$  est croissante, et que  $N_t(x)$  vaut au plus le nombre de points tombés jusqu'à l'instant  $t$  :  $N_t(x) \leq \max\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq t\}$ . En particulier  $N_{\tau_n}(x) \leq n$ , et donc :

$$\sup_{x \in [0,1]} |N_{\tau_n}(x) - N_n(x)|^2 \mathbb{1}_{\tau_n > n(1+\varepsilon)} \leq n^2 \mathbb{1}_{\tau_n > n(1+\varepsilon)}.$$

D'après le lemme précédent,

$$n^2 \mathbb{P}(\tau_n > n(1+\varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{x \in [0,1]} |N_{\tau_n}(x) - N_n(x)|^2 \mathbb{1}_{\tau_n < n(1-\varepsilon)} \right] \leq \sqrt{\mathbb{E}[\max\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq t\}^4]} \sqrt{\mathbb{P}(\tau_n < n(1-\varepsilon))}. \quad (2.5)$$

De plus  $\mathbb{E}[\max\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq n\}^4] = O(n^4)$ . En effet, en reprenant les notations du lemme précédent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq n\}^4] &= \mathbb{E}[R_n^4] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^4 e^{-n} \frac{n^k}{k!} \\ &= O(n^4) + n^4 e^{-n} \sum_{k=4}^{\infty} k^4 \frac{n^{k-4}}{k!} \\ &\leq O(n^4) + cste \cdot n^4 e^{-n} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{n^{k-4}}{(k-4)!} \\ &\leq O(n^4) + cste \cdot n^4. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{E}[\max\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq n\}^4] = O(n^4)$ , le lemme précédent assure que le membre de droite de (2.5) tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2.5 Cas uniforme

Dans cette partie, nous allons supposer que le point  $x$  n'est pas fixé dès le départ : on le choisira uniformément sur  $[0, 1]$ , et indépendamment des points du quadtree. Sous cette hypothèse, on peut notamment établir la proposition suivante :

**Proposition 2.8.** *Soit  $U$  une v.a. uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendante du quadtree  $(Q(t))_{t \geq 0}$ . Soit  $u \in \mathcal{A}$ , et soient  $u_0 = \emptyset, u_1, \dots, u_k = u$  ses ancêtres. Alors  $X_u(U)$  est uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendante de  $(L_{u_1}(U), \dots, L_{u_k}(U))$ , qui est une famille de v.a. indépendantes, chacune de densité  $2(1-m)\mathbb{1}_{m \in [0,1]}$ .*

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur  $k$ . Soit  $u \in \mathcal{A}$ , et soient  $u_0 = \emptyset, u_1, \dots, u_k = u$  ses ancêtres. Intuitivement, on peut voir que  $X_{u_1}(U)$  est uniforme sur  $[0, 1]$  en choisissant d'abord l'abscisse de  $P_1$ , puis  $U$ , de manière uniforme. Plus rigoureusement, ceci découle aussi du fait suivant : pour  $v \in \{0, 1\}$ ,  $X_v(U)$  et  $L_v(U)$  sont indépendantes et distribuées selon la loi

$$\mathbb{1}_{u \in [0,1]} du \otimes \mathbb{1}_{m \in [0,1]} 2(1-m) dm.$$

Ceci vient simplement en intégrant (2.4) par rapport à  $x$ . Les propriétés des processus de Poisson ponctuels entraînent que conditionnellement à  $(X_{u_1}(U), L_{u_1}(U))$ , le processus

$$(\Phi_{R_{u_1}(U)}(Q_{u_1,U}(t/L_{u_1}(U))))_{t \geq 0}$$

a même loi que  $\tilde{Q}$ , où  $\tilde{Q}$  est une copie indépendante de  $(Q, U)$  (la démonstration faite dans la Section 2.3 dans le cas  $x$  fixé s'adapte au cas  $x$  uniforme). Soient alors, pour  $x \in [0, 1]$ , les  $(\tilde{X}_{u_i}(x), \tilde{L}_{u_i}(x))$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , définies par rapport à  $\tilde{Q}$  de la même manière que les v.a.  $(X_{u_i}(x), L_{u_i}(x))$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , par rapport à  $Q$ . La famille  $(\tilde{X}_{u_i}(X_{u_1}(U)), \tilde{L}_{u_i}(X_{u_1}(U)))_{1 \leq i \leq k-1}$  est donc une fonction de  $(\tilde{Q}, X_{u_1}(U))$ , et si l'on applique la même fonction à

$$((\Phi_{R_{u_1}(U)}(Q_{u_1,U}(t/L_{u_1}(U))))_{t \geq 0}, X_{u_1}(U)),$$

on obtient exactement les  $(X_{u_i}(U), L_{u_i}(U))_{2 \leq i \leq k}$ . Ces deux familles ont donc même loi conditionnellement à  $(X_{u_1}(U), L_{u_1}(U))$ . On a donc (pour des fonctions continues bornées  $f, g_1, \dots, g_k$ ) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(X_{u_k}(U)) \prod_{j=1}^k g_j(L_{u_j}(U)) \right] \\ = & \mathbb{E} \left[ g_1(L_{u_1}(U)) \mathbb{E} \left[ f(X_{u_k}(U)) \prod_{j=2}^k g_j(L_{u_j}(U)) \middle| (L_{u_1}(U), X_{u_1}(U)) \right] \right] \\ = & \mathbb{E} \left[ g_1(L_{u_1}(U)) \mathbb{E} \left[ f(\tilde{X}_{u_{k-1}}(X_{u_1}(U))) \prod_{j=2}^k g_j(\tilde{L}_{u_{j-1}}(X_{u_1}(U))) \middle| (L_{u_1}(U), X_{u_1}(U)) \right] \right] \\ = & \mathbb{E} \left[ g_1(L_{u_1}(U)) \mathbb{E} \left[ f(\tilde{X}_{u_{k-1}}(X_{u_1}(U))) \prod_{j=2}^k g_j(\tilde{L}_{u_{j-1}}(X_{u_1}(U))) \middle| (X_{u_1}(U)) \right] \right] \\ = & \mathbb{E} [g_1(L_{u_1}(U))] \mathbb{E} \left[ f(\tilde{X}_{u_{k-1}}(X_{u_1}(U))) \prod_{j=2}^k g_j(\tilde{L}_{u_{j-1}}(X_{u_1}(U))) \right] \\ = & \mathbb{E} [g_1(L_{u_1}(U))] \mathbb{E} [f(\tilde{X}_{u_1}(X_{u_1}(U)))] \prod_{j=2}^k \mathbb{E} [g_j(\tilde{L}_{u_1}(X_{u_1}(U)))] \\ = & \mathbb{E} [f(X_{u_1}(U))] \prod_{j=1}^k \mathbb{E} [g_j(L_{u_1}(U))], \end{aligned}$$

On a utilisé pour la ligne 4 que  $L_{u_1}(U)$  est indépendant de  $(\tilde{Q}, X_{u_1}(U))$ . On s'est servi de l'indépendance de  $L_{u_1}(U)$  et  $X_{u_1}(U)$  à la ligne suivante. On a ensuite appliqué l'hypothèse de récurrence à  $\tilde{Q}$  (on rappelle que  $X_{u_1}(U)$  est uniforme sur  $[0, 1]$ ). On a enfin utilisé le fait que  $Q$  et  $\tilde{Q}$  ont même loi pour faire des remplacements à la fin. La proposition découle de cette égalité.  $\square$

Cette proposition et sa preuve nous permettent de constater deux choses : La première est que le quadtree a naturellement une structure proche de celle d'une chaîne de fragmentations binaire avec perte de masse. La seconde, malheureusement, est que ce n'en est pas une. En effet, on a pu montrer l'indépendance entre un certain nombre de v.a., mais pas entre les  $(X_u(U))_{u \in \mathcal{A}}$ .



La raison en est simple : elles ne sont pas indépendantes, puisque, par exemple,  $X_0(U) = X_1(U)$ . Ainsi, on imagine bien que les rectangles  $R_0(U)$  et  $R_1(U)$  ne vont pas évoluer de manière indépendante : la façon dont le sous-quadtrees dans  $R_0(U)$  évolue nous donne des informations sur  $X_0(U)$ , donc sur  $X_1(U)$ , et donc sur la façon dont le sous-quadtrees dans  $R_1(U)$  évolue. En fait, on a montré l'indépendance des masses relatives  $L_u(U)$  le long d'une même branche, mais celle-ci ne tient plus pour des  $L_u(U)$  cousins, ce qui est pourtant une propriété essentielle d'une chaîne de fragmentation binaire. On va donc plutôt introduire une chaîne de fragmentation binaire auxiliaire, qui "ressemble" au quadtrees. La difficulté sera alors de montrer quelles propriétés ils ont en commun. Plus précisément, on verra qu'en espérance, ils se comportent de la même manière.

**Définition 2.9.** On pose  $F(t) = (F_i(t))_{i \geq 1}$  une chaîne de fragmentation binaire dont la mesure de dislocation  $\nu$  est la loi du couple  $(L_0(U), L_1(U))^\downarrow$ . On a vu, dans la démonstration du Théorème de Convergence des Moments, que la loi de  $(F(t))_{t \geq 0}$  vérifie l'équation suivante :

$$(F(t))_{t \geq 0} \stackrel{(d)}{=} \left( (\mathbb{1}_{t < e_\theta}) \bullet \left( \mathbb{1}_{t \geq e_\theta} L_0(U) \cdot F^{(0)}(L_0(U)(t - e_\theta)) \right) \bullet \left( \mathbb{1}_{t \geq e_\theta} L_1(U) \cdot F^{(1)}(L_1(U)(t - e_\theta)) \right) \right)_{t \geq 0}^\downarrow,$$

Où  $(F^{(0)}(t))_{t \geq 0}$  et  $(F^{(1)}(t))_{t \geq 0}$  sont deux copies de  $(F(t))_{t \geq 0}$  indépendantes entre elles et aussi indépendantes de  $(L_0(U), L_1(U), e_\theta)$ , avec  $e_\theta$  une variable exponentielle de paramètre 1 et indépendante du reste.

Suivant les notations de la section 1.3, on pose, pour tout  $\beta > 0$ ,

$$\kappa(\beta) := 1 - \int_{\mathcal{S}} (s_1^\beta + s_2^\beta) \nu(ds) = 1 - \mathbb{E}[L_0^\beta(U) + L_1^\beta(U)],$$

la seconde égalité étant vraie par définition de  $\nu$ . On peut donc facilement calculer  $\kappa(\beta)$ . On obtient :

$$\kappa(\beta) = \frac{\beta^2 + 3\beta - 2}{(\beta + 1)(\beta + 2)}.$$

On en déduit que l'hypothèse Malthusienne est vérifiée, avec pour unique solution positive de  $\kappa(\beta) = 0$ ,

$$\beta^* := \frac{\sqrt{17} - 3}{2}.$$

Appliquons le Théorème de Convergence des Moments avec  $\beta = 0$ , on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\beta^*} m_0(t) = \Gamma(-\beta^*) \frac{-1}{\kappa'(\beta^*)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa(k)}{\kappa(k + \beta^*)}.$$

(on rappelle que  $m_0(t)$  est la 0-masse, c'est-à-dire le nombre de particules vivantes, à l'instant  $t$ ) On utilise ensuite  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  et on calcule  $\kappa'(\beta^*) = \frac{2\beta^* + 3}{4}$  (utiliser deux fois  $\beta^{*2} + 3\beta^* - 2 = 0$  pour simplifier les calculs). On a

$$\kappa(\beta) = \frac{(\beta - \beta^*)(\beta - 3 + \beta^*)}{(\beta + 1)(\beta + 2)}.$$

On fait le remplacement dans le produit et on regroupe chaque facteur obtenu au numérateur avec le facteur au dénominateur qui lui est égal à  $\pm\beta^*$  près. On obtient alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\beta^*} m_0(t) = \frac{\Gamma(1 - \beta^*)}{\beta^*} \frac{4}{2\beta^* + 3} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\beta^*}{k} \right) \left( 1 - \frac{\beta^*}{k + \sqrt{17}} \right) \left( 1 + \frac{\beta^*}{k + 1} \right) \left( 1 + \frac{\beta^*}{k + 2} \right).$$

On va ensuite utiliser l'identité de Weierstrass pour la fonction  $\Gamma$  : pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ ,

$$\Gamma(z+1) = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k},$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler-Mascheroni.

Les facteurs sous le signe  $\Pi$  sont exactement "de la bonne forme" pour utiliser cette identité, sauf le deuxième, que l'on réécrit

$$1 - \frac{\beta^*}{k + \sqrt{17}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{17}-\beta^*}{k}}{1 + \frac{\sqrt{17}}{k}}$$

On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\beta^*} m_0(t) = \frac{4}{\beta^*(2\beta^*+3)} \frac{\Gamma(\sqrt{17}+1)}{\Gamma(\sqrt{17}-\beta^*+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\beta^*+2)} \frac{1}{1+\beta^*/2} = \frac{\Gamma(2(\beta^*+1))}{2\Gamma^3(\beta^*+1)},$$

car les exponentielles se simplifient. La dernière égalité est obtenue en remplaçant  $\sqrt{17} - \beta^* + 1$  par  $\beta^* + 4$  et  $\sqrt{17} + 1$  par  $2(\beta^* + 1) + 2$ , puis en utilisant plusieurs fois  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , et enfin en développant les facteurs apparaissant (toujours utiliser  $\beta^{*2} + 3\beta^* - 2 = 0$  pour simplifier les calculs).

Autrement dit, à une constante multiplicative près : au cours de la chaîne de fragmentation auxiliaire  $(F(t))_{t \geq 0}$ , le nombre de particules présentes à l'instant  $t$  se comporte, en moyenne, comme  $t^{\frac{\sqrt{17}-3}{2}}$  quand  $t$  est grand.

Maintenant, on va montrer que ceci est aussi vrai pour le nombre de sous-rectangles du quadtree non éliminés à l'instant  $t$ , i.e. intersectant le segment  $S_U := [(U, 0), (U, 1)]$ , moins un. On pose :

$$\mathbf{m}(t) = \mathbb{E}[N_t(U)].$$

Il suffit alors d'établir que  $\mathbf{m}(t) = m_0(t) - 1$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Lemme 2.10.** *Les fonctions  $\mathbf{m}$  et  $m_0 - 1$  (prolongées par 0 sur  $\mathbb{R}_-$ ) sont toutes deux solutions de l'équation en  $f$*

$$f(t) = \mathbb{P}(t \geq \tau) + 2\mathbb{E}[f(L(t-\tau))] \quad (2.6)$$

où  $\tau$  est une v.a. exponentielle de paramètre 1 indépendante de  $L$  qui est une v.a. ayant pour densité  $2(1-m)\mathbb{1}_{m \in [0,1]}$ .

*Démonstration.* Dans la preuve du Théorème de Convergence des Moments (en prenant  $\beta = 0$ ), on a établi que  $m_0$  était l'unique solution de l'équation (1.4) (l'unicité vient du fait qu'on en a déduit un problème intégro-différentiel ayant lui-même une unique solution), qui, en notant qu'ici  $\sigma := P_{L_0(U)} + P_{L_1(U)} = 2P_L$  où  $L$  a pour densité  $2(1-m)\mathbb{1}_{m \in [0,1]}$  (Proposition 2.8), se réécrit :

$$m_0(t) = e^{-t} + 2 \int_{[0,t]} ds e^{-s} \int_{[0,1]} m_0((t-s)x) P_L(dx). \quad (2.7)$$

En remplaçant  $m_0$  par  $(m_0 - 1) + 1$ , on trouve facilement

$$(m_0 - 1)(t) = \mathbb{P}(t \geq \tau) + 2\mathbb{E}[(m_0 - 1)(L(t-\tau))] \quad (2.8)$$

où on a prolongé  $(m_0 - 1)$  par 0 sur  $\mathbb{R}_-$  et où  $\tau$  est une v.a. exponentielle de paramètre 1 indépendante de  $L$ . Il reste donc à montrer que  $\mathbf{m}$  (prolongée par 0 sur  $\mathbb{R}_-$ ) est aussi solution de (2.8).

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(t) &= \mathbb{E}[N_t(U)] \\
&= \int_{[0,1]} \int_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} f_t(u) P_N(df) du \\
&= \int_{[0,1]} \mathbb{E}[N_t(u)] du \\
&= \int_{[0,1]} (\mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2\mathbb{E}[\tilde{N}_{L_0(u)(t-\tau_1)}(X_0(u))]) du \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{[0,1]} du \int_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} \times \mathbb{R}_+ \times [0,1]^2} f_{m(t-e)}(x) P_{\tilde{N}} \otimes P_{\tau_1} \otimes P_{(L_0(u), X_0(u))}(d(f, e, (m, x))) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} \times \mathbb{R}_+} P_{\tilde{N}} \otimes P_{\tau_1}(d(f, e)) \left( \int_{[0,1]} du \int_{[0,1]^2} f_{m(t-e)}(x) P_{(L_0(u), X_0(u))}(d(m, x)) \right) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} \times \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[f_{L_0(U)(t-e)}(X_0(U))] P_{\tilde{N}} \otimes P_{\tau_1}(d(f, e)) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} \times \mathbb{R}_+ \times [0,1]^2} f_{m(t-e)}(x) P_{\tilde{N}} \otimes P_{\tau_1} \otimes P_{L_0(U)} \otimes P_{X_0(U)}(d(f, e, m, x)) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{[0,1] \times \mathbb{R}_+} P_{L_0(U)} \otimes P_{\tau_1}(d(m, e)) \int_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+ \times [0,1]} \times [0,1]} f_{m(t-e)}(x) P_{\tilde{N}} \otimes P_{X_0(U)}(d(f, x)) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{[0,1] \times \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[\tilde{N}_{m(t-e)}(X_0(U))] P_{L_0(U)} \otimes P_{\tau_1}(d(m, e)) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2 \int_{[0,1] \times \mathbb{R}_+} \mathbf{m}(m(t-e)) P_{L_0(U)} \otimes P_{\tau_1}(d(m, e)) \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau_1) + 2\mathbb{E}[\mathbf{m}(L_0(U)(t-\tau_1))] \\
&= \mathbb{P}(t \geq \tau) + 2\mathbb{E}[\mathbf{m}(L(t-\tau_1))].
\end{aligned}$$

La ligne 3 est obtenue par (2.2) (on rappelle que  $\tau_1$  est exponentielle de paramètre 1). On s'est servi de l'indépendance entre  $\tau_1$ ,  $(L_0(u), X_0(u))$ , et  $\tilde{N}$  à la ligne 5. Pour montrer cette indépendance, le point délicat est de montrer que  $\tau_1$  et  $(L_0(u), X_0(u))$  sont indépendants, or il découle de la Remarque 2.5 que les temps d'arrivée des points dans le carré d'origine sont indépendants de la "forme" du quadtree (on pourrait en fait choisir dès le départ la forme du quadtree à chaque étape et ensuite, indépendamment de ce qui précède, les temps d'arrivée des points). On a utilisé pour la ligne 8 l'indépendance de  $L_0(U)$  et  $X_0(U)$  (Proposition 2.8). On s'est aussi servi du fait que  $X_0(U)$  est uniforme et indépendante de  $\tilde{N}$  pour obtenir l'avant-avant-dernière égalité. Enfin, on rappelle pour la dernière ligne que  $\tau_1$  est exponentielle de paramètre 1.  $\square$

Il est clair que (2.7) est équivalente à (2.8) (l'une n'est qu'une réécriture de l'autre). Ainsi, (2.8) a aussi une unique solution. Le lemme précédent entraîne donc que  $\mathbf{m}(t) = m_0(t) - 1$  pour tout  $t \geq 0$ , et on a ainsi démontré la propriété suivante.

**Proposition 2.11.** *Soit  $U$  une v.a. uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendante de  $(Q(t))_{t \geq 0}$ . En posant  $\beta^* := \frac{\sqrt{17}-3}{2}$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\beta^*} \mathbb{E}[N_t(U)] = \frac{\Gamma(2(\beta^* + 1))}{2\Gamma^3(\beta^* + 1)}.$$

On va à présent utiliser le lemme de discrétisation pour avoir le même résultat en temps discret.

**Corollaire 2.12.** *On a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\beta^*} \mathbb{E}[\mathcal{N}_n(U)] = \frac{\Gamma(2(\beta^* + 1))}{2\Gamma^3(\beta^* + 1)}.$$

*Démonstration.* Soient  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . On a :

$$\begin{aligned} u_n := n^{-\beta^*} \mathbb{E}[\mathcal{N}_n(U)] - n^{-\beta^*} \mathbb{E}[N_n(U)] &= n^{-\beta^*} \mathbb{E}[N_{\tau_n}(U) - N_n(U)] \\ &= n^{-\beta^*} \mathbb{E}[(N_{\tau_n}(U) - N_n(U)) \mathbf{1}_{\tau_n \in [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)]}] \\ &\quad + n^{-\beta^*} \mathbb{E}[(N_{\tau_n}(U) - N_n(U)) \mathbf{1}_{\tau_n \notin [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)]}] \\ &=: A_n + B_n. \end{aligned}$$

Comme la fonction  $(N_t)_{t \geq 0}$  est croissante, on a

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq n^{-\beta^*} \mathbb{E}[|N_{\tau_n}(U) - N_n(U)| \mathbf{1}_{\tau_n \in [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)]}] \\ &\leq n^{-\beta^*} \mathbb{E}[(N_{n(1+\varepsilon)}(U) - N_{n(1-\varepsilon)}(U))] \\ &= (1+\varepsilon)^{\beta^*} (n(1+\varepsilon))^{-\beta^*} \mathbb{E}[(N_{n(1+\varepsilon)}(U))] - (1-\varepsilon)^{\beta^*} (n(1-\varepsilon))^{-\beta^*} \mathbb{E}[N_{n(1-\varepsilon)}(U)]. \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente, quand  $n \rightarrow +\infty$ , le dernier terme tend vers  $((1+\varepsilon)^{\beta^*} - (1-\varepsilon)^{\beta^*})C$  où  $C$  est une constante. En prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit, cette limite est donc strictement inférieure à  $\frac{\eta}{2}$ . Il existe donc  $n_A$  tel que pour tout  $n \geq n_A$ , on ait

$$|A_n| < \frac{\eta}{2}.$$

Pour  $B_n$ , on a :

$$\begin{aligned} |B_n| &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{x \in [0,1]} |N_{\tau_n}(x) - N_n(x)| \mathbf{1}_{\tau_n \notin [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)]} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{x \in [0,1]} |N_{\tau_n}(x) - N_n(x)|^2 \mathbf{1}_{\tau_n \notin [n(1-\varepsilon), n(1+\varepsilon)]} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'après le lemme de discrétisation, il existe donc  $n_B$  tel que pour tout  $n \geq n_B$ ,

$$|B_n| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Donc, pour  $n \geq \max(n_A, n_B)$ ,  $|u_n| \leq \eta$ . On a montré que  $u_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Le résultat découle alors de la proposition précédente.  $\square$

## 2.6 Cas $x = 0$

Dans le cas  $x$  fixé égal à zéro, le quadtree peut cette fois-ci être interprété comme une "vraie" chaîne de fragmentation binaire. On comprend bien que c'est un cas très particulier, puisque les  $(X_u(0))_{u \in \mathcal{A}}$  sont tous nuls (donc indépendants, contrairement au cas uniforme).

On introduit donc le processus  $(F(t))_{t \geq 0} = ((F_i(t))_{i \geq 0})_{t \geq 0}$ , défini comme suit :

$$F(t) := (\lambda(R_u(0)) \mathbf{1}_{R_u(0) \in Q(t)})^\downarrow.$$

Ce processus correspond aux aires des rectangles touchant le côté gauche du carré initial au temps  $t$ , réorganisées dans l'ordre décroissant.

**Lemme 2.13.** *Le processus  $(F(t))_{t \geq 0}$  est une chaîne de fragmentation binaire, de mesure de dislocation  $\nu$  donnée par la loi de la v.a.*

$$(L_0(0), L_1(0))^\downarrow,$$

qui réarrange l'ensemble  $\{L_0(0), L_1(0)\}$  dans l'ordre décroissant.

*Démonstration.* Il faut montrer que  $(F(t))_{t \geq 0}$  vérifie les conditions de la Définition 1.1. Le réarrangement de v.a. dans l'ordre décroissant est une fonction déterministe. Pour simplifier, nous allons donc laisser les v.a. dans leur ordre naturel.

Tout d'abord, pour tout  $u \in \mathcal{A}$ , on note  $n_u$  le numéro du point qui a permis de créer  $R_u(0)$ , puis on pose, pour reprendre les notations de la Définition 1.1 :

$$\begin{cases} \xi_u &= \lambda(R_u(0)), \\ a_u &= \tau_{n_u}, \\ \zeta_u &= a_{u0} - a_u. \end{cases}$$

Ces variables correspondent bien à la masse, la date de naissance, et le temps de vie de  $R_u(0)$ .

Ensuite, on introduit les deux familles de v.a.  $((\tilde{\xi}_{u0}, \tilde{\xi}_{u1}), u \in \mathcal{A})$  et  $(e_u, u \in \mathcal{A})$  définies par

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{ui} &= \frac{\lambda(R_{ui}(0))}{\lambda(R_u(0))} = L_{ui}(0), \\ e_u &= \xi_u \zeta_u. \end{cases}$$

Ces deux familles vérifient par définition les équations de la Définition 1.1. Il reste donc à montrer que ce sont des v.a. indépendantes, que chaque  $(\tilde{\xi}_{u0}, \tilde{\xi}_{u1})$  a la loi de  $(L_0(0), L_1(0))$ , et que les  $e_u$  sont exponentielles de paramètre 1. Il suffit de montrer que, pour tout  $k \geq 1$ , cela est vrai quand on ne regarde que les v.a. des  $k$  premières générations. Nous le ferons par récurrence sur  $k$ .

L'initialisation est immédiate.

Pour le pas de récurrence, on se restreint d'abord aux v.a. dont l'indice commence par 0 (cela revient à se focaliser sur  $R_0(0)$ ). On rappelle que, conditionnellement à  $R_0(0)$ , le processus

$$\hat{Q} := (\Phi_{R_0(0)}(Q_{0,0}(t/L_0(0))))_{t \geq 0}$$

a même loi qu'une copie  $Q'_0$  indépendante de  $Q$ . On raisonne alors comme dans la preuve de la Proposition 2.8. Soient, pour  $u \in \mathcal{A}$ ,  $\xi'_u$ ,  $\zeta'_u$ , et pour  $u \neq \emptyset$ ,  $\tilde{\xi}'_u$ , et  $e'_u$  définies par rapport à  $Q'_0$  comme  $\xi_u$ ,  $\zeta_u$ ,  $\tilde{\xi}_u$ , et  $e_u$  par rapport à  $Q$ . Ces v.a. sont fonctions de  $Q'_0$ , et les mêmes fonctions appliquées à  $\hat{Q}$  donnent respectivement  $\xi_{0u}/\xi_0$  (car les aires des rectangles de  $\hat{Q}$  sont celles des rectangles de  $Q_{0,0}$  divisées par  $\xi_0$ ),  $\xi_0 \zeta_{0u}$  (car les durées de vie des rectangles de  $\hat{Q}$  sont celles des rectangles de  $Q_{0,0}$  multipliées par  $\xi_0$ ),  $\tilde{\xi}_{0u}$ , et  $e_{0u}$  (par définition,  $e'_u = \xi'_u \zeta'_u$ , donc la v.a. obtenue à partir de  $\hat{Q}$  est  $(\xi_{0u}/\xi_0) \times \xi_0 \zeta_{0u} = e_{0u}$ ). On peut alors faire un calcul semblable à celui de la Proposition 2.8, appliquant l'hypothèse de récurrence à  $Q'_0$  et montrant ainsi que les  $(\tilde{\xi}_{0u0}, \tilde{\xi}_{0u1})_{|u| \leq k-1}$  sont chacune de même loi que  $(L_0(0), L_1(0))$ , que les  $e_{0u}$  sont exponentielles de paramètre 1, que toutes ces v.a. sont indépendantes entre elles et qu'elles forment une famille indépendante de  $R_0(0)$ .

Ce n'est cependant pas terminé car on ne s'est intéressé pour l'instant qu'à la descendance  $(0u)_{|u| \leq k-1}$  du rectangle  $R_0(0)$ . Le même raisonnement s'applique à la descendance  $(1u)_{|u| \leq k-1}$  du rectangle  $R_1(0)$ . Montrons à présent que ces deux familles de v.a. sont indépendantes. Ceci découle des propriétés des processus de Poisson ponctuels : d'après la Propriété 2.2, de même qu'on a associé un processus  $Q'_0$  indépendant de  $Q$  à la première descendance, on peut en associer un, noté  $Q'_1$  et également indépendant de  $Q$ , à la seconde descendance, tel que  $Q'_0$  et  $Q'_1$  soient indépendants conditionnellement à  $R_0(0)$ . Par suite la famille de v.a. de la première descendance

et la famille de v.a. de la seconde sont indépendantes conditionnellement à  $R_0(0)$ , et un calcul du même type que dans la Proposition 2.8 montre alors que ces deux familles et  $(\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1)$  (qui est fonction de  $R_0(0)$ ) sont indépendantes dans leur ensemble. Montrons à présent que  $e_\emptyset$  est indépendante de la famille regroupant toutes les autres v.a. considérées jusqu'ici. On a  $e_\emptyset = \tau_1$  et on voit facilement que les autres v.a. ici ne sont fonction que de la "forme" du quadtree et des v.a. exponentielles  $\varepsilon_j$  de paramètre 1 correspondant aux temps d'attente entre la chute de  $P_j$  et celle de  $P_{j+1}$  pour  $j \geq 1$ , et on sait d'après la Remarque 2.5 que la famille formée par ces v.a. est indépendante de  $\tau_1$  (qui n'est autre que  $\varepsilon_0$ ).

Toutes les indépendances montrées permettent facilement, par des raisonnements de regroupement par paquets, d'obtenir les indépendances voulues et de terminer la récurrence.  $\square$

On peut à présent énoncer un théorème donnant, entre autres, le résultat important de convergence  $\mathbb{L}^2$  de cette section :

**Théorème 2.14.** *Le processus*

$$\mathfrak{M}_t := \sum_{u \in \mathcal{A}} \lambda(R_u(0))^{\sqrt{2}-1} \mathbf{1}_{R_u(0) \in Q(t)}, \quad t \geq 0,$$

est une martingale uniformément intégrable qui converge p.s. vers  $\mathfrak{M}_\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ . La loi de  $\mathfrak{M}_\infty$  est caractérisée par

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_\infty \stackrel{(d)}{=} L_0(0)^{\sqrt{2}-1} \mathfrak{M}_\infty^{(0)} + L_1(0)^{\sqrt{2}-1} \mathfrak{M}_\infty^{(1)} \\ \mathbb{E}[\mathfrak{M}_\infty] = 1, \end{cases}$$

où  $\mathfrak{M}_\infty^{(0)}$  et  $\mathfrak{M}_\infty^{(1)}$  sont deux copies indépendantes de  $\mathfrak{M}_\infty$ , aussi indépendantes de  $(L_0(0), L_1(0))$ . De plus, on a

$$t^{1-\sqrt{2}} N_t(0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} \frac{\Gamma(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}\Gamma^3(\sqrt{2})} \mathfrak{M}_\infty.$$

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, le processus

$$(\lambda(R_u(0)) \mathbf{1}_{R_u(0) \in Q(t)})^\downarrow, \quad t \geq 0$$

est une chaîne de fragmentation binaire de loi de dislocation la loi de la v.a.  $(L_0(0), L_1(0))^\downarrow$ . On pose, pour tout  $p > 0$ ,

$$\kappa(p) := 1 - \int_{\mathcal{S}} (s_1^p + s_2^p) \nu(ds) = 1 - \mathbb{E}[L_0^p(0) + L_1^p(0)] = \frac{(p+1)^2 - 2}{(p+1)^2},$$

la dernière égalité étant obtenue par un calcul simple. On en déduit que l'hypothèse malthusienne est vérifiée, avec pour exposant malthusien

$$p^* = \sqrt{2} - 1.$$

On remarque alors que  $(\mathfrak{M}_t)_{t \geq 0}$  n'est autre que la  $p^*$ -masse ; le fait que  $(\mathfrak{M}_t)_{t \geq 0}$  est une martingale uniformément intégrable découle donc de la Proposition 1.7.

Ceci nous donne immédiatement

$$\mathbb{E}[\mathfrak{M}_\infty] = \mathbb{E}[\mathfrak{M}_0] = 1.$$

À présent, si on reprend la démonstration du cas (a) dans le Théorème de Convergence des Moments, on voit qu'on avait trouvé une équation vérifiée par la loi de la  $\beta$ -masse à l'instant  $t$ .

Or, l'hypothèse  $\beta \neq \beta^*$  ne servait pas encore à ce moment de la preuve. Autrement dit, l'équation est aussi vérifiée par la loi de la  $\beta^*$ -masse :

On a

$$\mathfrak{M}_t \stackrel{(d)}{=} \mathbf{1}_{t < \tau_1} + \mathbf{1}_{t \geq \tau_1} \left( L_0(0)^{\sqrt{2}-1} \mathfrak{M}_{L_0(0)(t-\tau_1)}^{(0)} + L_1(0)^{\sqrt{2}-1} \mathfrak{M}_{L_1(0)(t-\tau_1)}^{(1)} \right),$$

où  $(\mathfrak{M}_t^{(0)})_{t \geq 0}$  et  $(\mathfrak{M}_t^{(1)})_{t \geq 0}$  sont deux copies indépendantes de  $(\mathfrak{M}_t)_{t \geq 0}$ , aussi indépendantes de  $(L_0(0), L_1(0))$ . Maintenant, comme la convergence p.s. implique la convergence en loi, on peut faire tendre  $t$  vers l'infini dans cette équation pour obtenir

$$\mathfrak{M}_\infty \stackrel{(d)}{=} L_0(0)^{\sqrt{2}-1} \mathfrak{M}_\infty^{(0)} + L_1(0)^{\sqrt{2}-1} \mathfrak{M}_\infty^{(1)},$$

où  $\mathfrak{M}_\infty^{(0)}$  et  $\mathfrak{M}_\infty^{(1)}$  sont deux copies indépendantes de  $\mathfrak{M}_\infty$ , aussi indépendantes de  $(L_0(0), L_1(0))$ .

La dernière convergence annoncée dans le théorème s'obtient simplement en appliquant le Théorème 1.9 et en utilisant l'identité de Weierstrass de la même façon que dans la preuve de la Proposition 2.11.  $\square$

**Corollaire 2.15.** *On a :*

$$n^{1-\sqrt{2}} N_{\tau_n}(0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} \frac{\Gamma(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}\Gamma^3(\sqrt{2})} \mathfrak{M}_\infty.$$

*Démonstration.* Il faut adapter la preuve du Corollaire 2.12 à la convergence  $\mathbb{L}^2$  : on considère  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , et on définit :

$$u_n := \mathbb{E}[(n^{-\beta^*} \mathcal{N}_n(0) - n^{-\beta^*} N_n(0))^2] =: A_n + B_n,$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont définis de la même manière que dans la preuve du Corollaire 2.12. Les raisonnements pour dominer ces deux termes sont ensuite les mêmes que dans la preuve de 2.12, à ceci près que l'on utilise le Théorème 2.14 au lieu de la Proposition 2.11. Notons tout de même que la convergence  $\mathbb{L}^2$  établie dans le lemme de discrétisation est ici nécessaire, alors que dans la preuve du Corollaire 2.12, la convergence  $\mathbb{L}^1$  suffisait (pour dominer  $B_n$ ).  $\square$

*Remarque 2.16.* Le corollaire précédent signifie que

$$n^{1-\sqrt{2}} \mathcal{N}_n(0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} \frac{\Gamma(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}\Gamma^3(\sqrt{2})} \mathfrak{M}_\infty.$$

*Remarque 2.17.* Le cas  $x \in ]0, 1[$  fixé est très différent du cas  $x = 0$ . En effet, on voit dès le départ que la situation n'est pas aussi simple dans le premier cas. C'est le même problème que dans le cas uniforme : les  $X_u(x)$  ne sont plus constants, donc plus indépendants, puisque  $X_0(x) = X_1(x)$ .

## Remerciements

Nous tenons à remercier vivement Nicolas Curien, qui nous a guidés par ses explications et ses conseils tout au long de notre travail, et a su trouver la patience de répondre en détails à nos questions malgré la proximité de sa soutenance de thèse.

## Références

- [1] Bertoin, Jean. *Random fragmentation and coagulation processes*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol 102, Cambridge University Press, 2006.
- [2] Bertoin, Jean et V. Gneden, Alexander. Asymptotic laws for nonconservative self-similar fragmentations. *Electronic Journal of Probability*, 9(19) :575-593, 2004.
- [3] Curien, Nicolas et Joseph, Adrien. *Partial match queries in two-dimensional quadrees : A probabilistic approach*. Adv. App. Prob, 2010.
- [4] Flajolet, Philippe et Sedgewick, Robert. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] Iserles, Arieh et Liu, Yunkang. *Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions* J. Math. Anal. Appl. : 208, 404-424, 1997.
- [6] Kingman, John Frank Charles. *Poisson processes*. Oxford Studies in Probability ; 3, Oxford University Press, 1993