

Une structure de variété riemannienne sur  
l'ensemble des courbes planes

FINSKI , Siarhei  
finsky1993@gmail.com

OZUCH-MEERSSEMAN , Tristan  
meerssem@clipper.ens.fr

Encadrante:  
WALDSPURGER , Irène  
irene.waldspurger@ens.fr

2 novembre 2014

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Les propriétés topologiques de <math>B_i(S^1, \mathbb{R}^2)</math></b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Différentes métriques sur l'ensemble des courbes planes</b>	<b>15</b>
4.1	Une métrique riemannienne naturelle sur $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$	15
4.2	La plus simple des métriques riemanniennes sur $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$	17
4.3	La métrique $H^0$ induit une distance nulle sur $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$	17
4.4	Construction de la métrique $H^A$	21
4.5	Une constante de Lipschitz pour la longueur des courbes pour $G^A$	23
4.6	Contrôle de l'aire balayée par un chemin dans $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$	23
4.7	Contrôle des distances uniformes entre courbes proches dans $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$	24
4.8	Propriétés topologiques de $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ muni de $G^A$	25
<b>5</b>	<b>La variété des immersions libres</b>	<b>26</b>
5.1	Les immersions nonlibres	28
<b>6</b>	<b>Appendix : Notions de base sur les variétés de Fréchet</b>	<b>32</b>
6.1	La notion d'intégrale de Riemann dans un espace de Fréchet	33
6.2	Les courbes paramétrées	34
6.3	La dérivée directionnelle	34
6.4	Règle de dérivation des composées	36
6.5	Les dérivées partielles	36
6.6	Les dérivées secondes	37
6.7	Les dérivées d'ordre supérieur	38
6.8	Variétés de Fréchet	39
6.9	Sous variétés	39
6.10	Fibrés vectoriels	39
6.11	Applications entre variétés	40

# 1 Notation

Dans cet article on étudie deux notions de variétés : les variétés différentielles et les variétés de Fréchet. Pour les désigner, on utilisera simplement le mot "variété", la distinction des deux notions étant simples (Les variétés différentielles sont de dimension finie, celles de Fréchet infinie).

- $\text{Diff}(S^1)$  - Le groupe de Lie des difféomorphismes sur  $S^1$ . (Il possède deux composantes connexes :  $\text{Diff}^+(S^1)$  (l'ensemble de ceux qui préservent l'orientation) et  $\text{Diff}^-(S^1)$  (l'ensemble de ceux qui inversent l'orientation))
- $\text{Diff}_1(S^1)$  - Le sous-groupe des difféomorphismes fixant  $1 \in S^1$ . On a  $\text{Diff}(S^1) = \text{Diff}^+(S^1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  au sens des groupes de Lie, où  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est représenté par l'inverse de orientation.
- $\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)$  - La variété des plongements lisses  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  - La variété des immersions lisses  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  - La variété des immersions lisses et libres  $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
Où par libre on entend que l'action  $\text{Diff}(S^1)$  sur cette variété est libre (si  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  et  $i(\phi) = i$ , alors  $\phi = \text{id}$ ).
- $B_c(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$  - Une variété connexe.
- $B_i(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$  - L'espace des orbites de  $\text{Diff}(S^1)$  sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .
- $B_{if}(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$  - L'espace des orbites de  $\text{Diff}(S^1)$  sur  $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

# 2 Introduction

Dans cet exposé nous allons considérer différentes métriques sur l'espace des "courbes planes" :  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$ . Nous allons montrer que l'on peut mettre une structure raisonnable sur  $B_{if}(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$  - l'espace des orbites des immersions libres (ce sont les immersions telles que le groupe  $\text{Diff}(S^1)$  agit librement sur elles).

Dans l'annexe on donne les définitions de base, que l'on va utiliser dans tout l'article (variété de Fréchet, fibré de Fréchet, ...). Nous obtiendrons aussi des résultats concernant la structure de l'espace  $\text{Diff}(S^1)$  : on obtient que c'est un groupe de Lie en un sens que l'on précisera après. Après nous prouverons les résultats annoncés dans la partie notation :

$$\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2), \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2), \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2), B_{if}(S^1, \mathbb{R}^2)$$

sont des variétés. Nous considérerons aussi leurs espaces tangents et étudierons d'autres propriétés de ces variétés.

Dans la deuxième partie nous donnerons différentes métriques sur l'espace  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  et nous prouverons aussi quelques propriétés qui permettent d'estimer la distance entre deux courbes (c'est à dire des éléments de  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ ) sans calculs explicites. Les métriques que l'on considèrera, viennent du fait qu'il existe

sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  une structure de variété de Fréchet naturelle ( $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un ouvert d'un espace de Fréchet). L'espace tangent à un point  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un espace comme  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$  (il faut penser à cette construction comme à la modification de  $c$  pour tout  $\theta \in S^1$  dans la direction de  $h(\theta) \in \mathbb{R}^2$ ). Pour obtenir une métrique sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , le plus simple est de donner une métrique sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  qui est invariante par l'action de  $\text{Diff}(S^1)$ . La première pseudo-métrique  $H^0$  est donnée par  $G_c^0(h, k) = \int_{S^1} \langle h(\theta), k(\theta) \rangle |c'(\theta)| d\theta$ . Elle est évidemment invariante par  $\text{Diff}(S^1)$ . Mais comme on le verra ensuite, la métrique sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , qui est définie comme infimum des longueurs de courbes qui relient deux points de  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  est nulle. Pour pallier ce problème on introduit une autre métrique :

$$G_c^A(h, k) = \int_{S^1} (1 + Ak_c(\theta)^2) \langle h(\theta), k(\theta) \rangle |c'(\theta)| d\theta$$

où  $k_c$  est la courbure de  $c$ . Nous montrerons que l'on obtient ainsi une métrique raisonnable sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

Ce sujet, en plus de son intérêt théorique, a des applications dans le domaine de l'imagerie numérique, où, être capable de reconnaître ou distinguer des formes à partir de leur contour est crucial. Toutes les métriques 'évidentes' sur l'ensemble des courbes planes ont de nombreuses lacunes qui les rendent incapables d'atteindre cet objectif. Par exemple, si on définit la distance entre deux courbes comme le supremum de distances entre les points sur ces courbes, cela donne une métrique correcte sur

$$B_i(S^1, \mathbb{R}^2), B_{if}(S^1, \mathbb{R}^2)$$

parce les axiomes des métriques sont évidemment vérifiés et la métrique ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe. Un des problèmes de cette métrique est le fait que la proximité de deux courbes (pour cette distance) n'implique pas la proximité des longueurs, ni des formes analogues. Cette métrique n'est pas une métrique 'naturelle' dans le sens où elle ne correspond pas à la notion naturelle de "formes semblables". Les métriques que l'on proposera sont toutes définies localement et pour obtenir les métriques globales on définit la distance entre deux immersions comme l'infimum des longueurs de courbes qui relient ces immersions. En disant cela, nous dirons que deux immersions sont proches s'il existe une petite 'déformation' de l'une sur l'autre. Pour la métrique  $H^A$  nous aurons en fait le résultat suivant : pour toute courbe  $c : [0, 1] \rightarrow B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , qui relie deux courbes  $c(0), c(1) \in B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  on a  $\text{dist}_{H^A}(c(0), c(1)) \cdot \max_{t \in [0, 1]} (\sqrt{l(c(t))}) >$  (domaine de la région balayée par  $c$ ). Où la domaine de la région balayée par  $c$  est défini comme image d'une isotopie, que nous avons obtenu de  $c$  ( $c$  induit une isotopie  $H : S^1 \times [0, 1]$ ). Donc si, par exemple, on compare deux courbes, qui sont les bords des régions compactes avec une grande différence symétrique, alors la distance entre ces courbes va être grande.

### 3 Les propriétés topologiques de $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$

On va annoncer les résultats, qui on prouve à l'appendix. Dans tout l'article, nous suivrons principalement [1].

Dans tout l'article on utilisera le fait que  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un espace de Fréchet muni des normes  $\|f\|_n = \sum_{k=0}^n \sup_{\theta \in S^1} \{|f^{(k)}(\theta)|\}$ .

**Proposition 3.1.**  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété.

**Proposition 3.2.** Pour  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  on peut identifier  $T_c \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  avec  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

**Proposition 3.3.**  $\text{Diff}(S^1), \text{Diff}_1(S^1), \text{Diff}_1^+(S^1)$  sont des groupes de Lie.

**Proposition 3.4.** On peut identifier  $T_\gamma \text{Diff}(S^1)$  avec l'applications  $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ .

**Proposition 3.5** (Composition sur les variétés des application). Si  $\gamma \in \text{Diff}(S^1)$ , alors les applications

1.  $l_\gamma : \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Diff}(S^1) \alpha \mapsto \gamma \circ \alpha$
2.  $r_\gamma : \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Diff}(S^1) \alpha \mapsto \alpha \circ \gamma$
3.  $i_\gamma : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) i \mapsto i \circ \gamma$
4. L'action de  $\text{Diff}(S^1)$  sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est lisse.  $p : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

sont lisses.

**Définition 3.1** (Degré d'une application  $c \in C^\infty(S^1, S^1)$ ). Le degré d'une application  $c \in C(S^1, S^1)$  est égal à  $k$  ( $\deg(c) = k$ ) si pour l'application  $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $c(\theta) = e^{i\phi(\theta)}$  on a  $\frac{\phi(2\pi) - \phi(0)}{2\pi} = k$ . Il est facile de voir que le degré est toujours une nombre entier.

Intuitivement, le degré correspond au nombre de tours que fait  $c$  autour de 0.

*Note.* La définition ne dépend pas du choix de  $\phi$ , parce que les différents choix de  $\phi$  sont tous égaux mod  $2\pi$ .

Pour l'application  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  on dira que  $\deg(c) = k$  si  $\deg(c'/|c'|) = k$ . ( $c'/|c'| : S^1 \rightarrow S^1$ ) Donc si  $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $e^{i\psi(\alpha)} = \frac{c'(e^{i\alpha})}{|c'(e^{i\alpha})|} \in C^\infty([0, 2\pi], S^1)$ , alors  $\deg(c) = \frac{\psi(2\pi) - \psi(0)}{2\pi}$ .

*Note.* Pour des informations plus détaillées, poussées, voir ([3]).

Notre manière de définir la métrique (comme inf de longueurs de "chemins", reliant nos immersions (ou "courbes")) nous permet de simplement comparer les immersions dans la même composante connexe de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  (ici, une composantes connexe est connexes par arcs parce que  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété). Nous voulons donc trouver ces composantes connexes, car on ne s'intéresse qu'aux topologies sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  induites par  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ . Nous allons montrer que le degré est invariant sur les composantes connexes de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ . Ainsi,

la partition de  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  avec le degré est compatible avec la partition des composantes connexes. Nous verrons en fait, que deux applications de degré non nul peuvent être reliées continûment si et seulement si elles ont le même degré. Les composantes connexes des immersions de degré non nul sont  $\text{Imm}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  pour  $k \neq 0$ . Mais notre preuve ne marche pas avec les immersions de degré 0, qui peuvent donc être dans des composantes connexes différentes.

**Définition 3.2** (Isotopie). Une isotopie entre deux courbes  $c_0, c_1 \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est une application  $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que l'application  $t \mapsto H(t, \cdot)$  soit continue comme application de  $\mathbb{R}$  dans  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et  $H(0, \cdot) = c_0(\cdot)$  et  $H(1, \cdot) = c_1(\cdot)$  et que pour chaque  $t \in [0, 1]$  on ait  $H(t, \cdot) \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

**Proposition 3.6** (Le degré est invariant par isotopie). Si  $c_0, c_1 \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  sont isotopique, alors  $\deg(c_0) = \deg(c_1)$ .

*Preuve.* Soit  $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  - une isotopie. Notons  $c(t)(\cdot) = H(t, \cdot)$  et  $\psi(t) \in C^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$  pour  $t \in [0, 1]$   $e^{i\psi(t)(\alpha)} = \frac{H_\theta(t, e^{i\alpha})}{|H_\theta(t, e^{i\alpha})|}$  et  $\psi(t)(0) \in [0, 2\pi]$ ,  $\deg(c(t)) = \frac{\psi(t)(2\pi) - \psi(t)(0)}{2\pi}$  est une quantité qui change continûment avec  $t$  (car  $H_\theta(t, \theta) \neq 0$ ). Mais cette quantité est toujours entière donc  $\deg(c_0) = \deg(c(0)) = \deg(c(1)) = \deg(c_1)$ .  $\square$

Dans la suite on utilisera la décomposition

$$\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$$

pour trouver la composante connexe de  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ . Nous montrerons que  $\text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$  est connexe et donc que les composantes connexes de  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  sont les mêmes que celles de  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

**Définition 3.3** (Produit semi-direct interne). Si  $G$  est un groupe est un produit semi-direct de ses sous-groupes  $A, B$  (on notera  $G = A \rtimes B$  ou  $G = B \rtimes A$ ) si  $B$  est un sous-groupe distingué,  $A \cap B = \{1\}$ ,  $AB = G$ .

On identifiera  $\mathbb{S}^1$  avec un sous groupe de  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  par homomorphisme  $\theta \rightarrow \gamma_\theta$ ,  $\gamma_\theta(\alpha) = \alpha + \theta$  et on identifiera aussi  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  avec un sous-groupe de  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  par  $0 \mapsto \text{Id}$ ,  $1 \mapsto \text{rev}$  ou  $\text{rev}(\theta) = -\theta$ . Alors en groupe  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  on a que  $\mathbb{S}^1$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  engendrent la sous groupe  $\mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (parce que  $-((-\theta) + \alpha) = \theta - \alpha$  et donc  $\mathbb{S}^1$  est distingué en groupe engendré par  $\mathbb{S}^1$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).

Nous allons donc montrer le théorème suivant :

On va dire qu'on a une décomposition  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1) = \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1) \times (\mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , mais on signifie  $\times$  au sens de produit direct des variétés et  $\rtimes$  au sens de produit de groupes de Lié.

**Théorème 3.7.** *l'espace  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  des immersions lisses paramétrées par la longueur est une variété lisse.*

*Il existe un difféomorphisme  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$  qui respecte la décomposition  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1) = \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1) \times (\mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  (i.e. l'action de  $\gamma =$*

$\gamma_1\gamma_2$  sur  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  (où  $\gamma_1 \in \mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\gamma_2 \in \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$ ) est de la forme : pour  $c \in \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et  $c = c_a \times \delta$ , où  $c_a \in \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et  $\delta \in \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$  on a  $\gamma.c = c \circ \gamma_1 \times \gamma_2^{-1} \circ \delta$ .

Il existe, de plus, une action lisse de  $\mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  dont les orbites forment  $B_i(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

*Preuve.* Pour  $c \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  on notera :

$$\sigma_c \in \text{Diff}_1(\mathbb{S}^1), \sigma_c = \exp\left(\frac{2\pi i \int_1^\theta |c'(u)| du}{\int_{\mathbb{S}^1} |c'(u)| du}\right)$$

$$\alpha : \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), \alpha(c)(\theta) = c(\sigma_c^{-1}(\theta))$$

Une application  $\sigma_c$  est une reparamétrisation de  $c$  par la longueur. L'application  $\alpha$  reparamétrise donc chaque application de  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ . Ces applications (on voit  $\sigma$  comme une application de  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  dans  $\text{Diff}_1(\mathbb{S}^1)$ ) sont lisses parce que le module  $|\cdot|$  est lisse dans  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) - U$  où  $U$  est un voisinage de l'ensemble des applications  $c$  telles que  $|c'| < \epsilon$ , on a  $d|h|_x = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$ . L'intégration et l'exponentielle sont aussi lisses. Donc l'application  $\alpha$  est lisse (comme une application de  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ ) comme composition d'applications lisses et on sait que dans  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  la composition est lisse.

Nous allons maintenant montrer que  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété.

Notons, pour  $c \in \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$

$$\psi_c(s) : C^\infty(\mathbb{S}^1, ]-\epsilon, \epsilon[) \rightarrow \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), \psi_c(s)(\theta) = c(\theta) + s_1(\theta)n_c(\theta)$$

où  $n_c(y)$  est une vector normale a  $c$  en point  $y$ . Notons aussi

$$Q(c) = \psi_c(C^\infty(\mathbb{S}^1, ]-\epsilon, \epsilon[))$$

Construisons une carte pour  $c$  :

Considérons l'application :

$$A : C^\infty(\mathbb{S}^1, ]-\epsilon, \epsilon[) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \cup_{\theta \in \mathbb{S}^1} Q(c(\cdot + \theta)) \xrightarrow{\alpha} \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$$

cette application n'est pas injective en général (considérer une application de  $\mathbb{S}^1$  qui tourne deux fois sur la même image, donc

$$s : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, s(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

pour cette application, évidemment on a  $A(s, \pi) = A(s, 0)$ . Mais elle est localement injective, i.e. on peut choisir un voisinage  $U$  de  $0 \in \mathbb{S}^1$  telle que la même application, restreinte à  $C^\infty(\mathbb{S}^1, ]-\epsilon, \epsilon[) \times U$  soit injective. Pour prouver cela nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.8.** *Si la courbe  $c$  est suffisamment lisse ( $\in C^2$ ). Alors pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\epsilon > 0$  telle que pour tout  $\alpha \in \mathbb{S}^1$ , l'image de l'application  $F$*

*n'intersecte pas*  $\{c(\alpha) + n_c(\alpha) \cdot t, |t| < \epsilon\}$  où  $F(\theta, a) : S^1 - (\cup_i U_i) \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\theta, a) \mapsto c(\theta) + n_c(\theta) \cdot a$ . Où les  $U_i$  sont indexés par  $c^{-1}(\alpha)$  (il existe donc un nombre fini de  $U_i$ ) et  $U_i = \beta$  si  $c(\beta) = c(\alpha), c'(\beta) = c'(\alpha)$  et  $U_i = \text{arc ouvert de } S^1$  contenant  $\beta$  de longueur  $\delta$  si  $c(\beta) = c(\alpha), c'(\beta) \neq c'(\alpha)$ .

*Preuve.* Si  $c \in C^2$ , alors la courbure est définie, alors le rayon du cercle osculateur  $R(\theta) (= \frac{1}{|\kappa_c(\theta)|})$  est défini (il peut être infini) et il existe  $R > 0$  tel que  $R(\theta) > R$ . Mais on sait que le rayon d'un cercle osculateur est la limite de  $r_\theta$  où  $r_\theta$  est défini par :  $(c(\theta) + n_c(\theta) \cdot r_\theta) \in \{c(\alpha) + n_c(\alpha) \cdot t | t \in \mathbb{R}\}$  quand  $\theta \rightarrow \alpha$  ( $r_\theta$  existe et est unique pour  $\theta - \alpha$  petits si  $\kappa(c) \neq 0$ , si c'est n'était pas le cas, alors pour tout suite  $\theta_n$  telle que  $r_{\theta_n}$  existe on aurait  $r_{\theta_n} \rightarrow \infty$ ) - théorème connu de géométrie différentielle élémentaire. Il existe alors  $\epsilon_1$  tel que si  $|\theta - \beta| < \epsilon_1$  pour  $\beta$  tel que  $c(\beta) = c(\alpha), c'(\beta) = c'(\alpha)$ , alors  $r_\theta > R(\theta)/2$ . Pour  $\epsilon_2 > 0$  petit on a : si  $\text{dist}(\theta, \cup_i U_i) \geq \epsilon_1$ , alors  $|c(\theta) - c(\alpha)| > 2\epsilon_2$  et par conséquent  $r_\theta > \epsilon_2$ . Il suffit donc de prendre  $\epsilon = \min(R/2, \epsilon_2)$ . On a prouvé cette proposition pour  $\alpha \in S^1$  fixé, mais comme  $S^1$  est compact, alors c'est vraie uniformément.  $\square$

Nous utiliserons encore ce lemme quand on montrera certains faits pour les immersions non libres.

Pour prouver que l'on peut trouver  $U \subset S^1$  tel que l'application  $A|_{C^\infty(S^1, ]-\epsilon, \epsilon]) \times U}$  soit injective il faut remarquer que si on a  $A(f_1, \theta_1) = A(f_2, \theta_2)$  alors il existe un difféomorphisme  $\phi$  telle que  $\phi(1) = \theta_2 - \theta_1$  tel que  $c(\theta) + f_1(\theta)n_c(\theta) = c(\phi(\theta)) + f_2(\phi(\theta))n_c(\phi(\theta))$ .

Mais si  $|f_1|, |f_2| < \epsilon$  où  $\epsilon$  est comme dans le lemme pour  $\delta$  assez petit, alors on a deux possibilités pour  $\phi$ .

Première possibilité :  $\phi(1) = 1$ , mais alors  $f_1 = f_2$  parce que sinon, on peut trouver  $\theta_0 = \inf \{\theta \in S^1 | \phi(\theta) \neq \theta\}$  et pour cette valeur, dans un petit voisinage de  $\theta_0$  il existe une  $\theta'$  tel que  $\phi(\theta') \neq \theta'$ , mais on sait alors que  $\phi(\theta')$  doit être éloigné de  $\theta'$ , alors  $\phi$  n'est pas continu. Parce qu'on peut choisir un petit voisinage compact  $K$  de  $\theta_0$  telle que  $c$ , restreint dans un voisinage ouvert de  $K$  est injective et pour chaque valeur  $\theta' > \theta_0$  de ce voisinage on a que  $\phi(\theta') \notin K$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow \theta_0^-} \phi(\alpha) = \theta_0$ , mais  $\lim_{\alpha \rightarrow \theta_0^+} \phi(\alpha) \notin K$ , donc  $\phi$  n'est pas continue, contradiction.

La deuxième possibilité est  $\phi(1) \neq 1$ . Alors  $\phi(1)$  doit être éloigné de 1 (par le lemme on peut prendre  $\delta$  petit) mais  $\phi(1) = \theta_2 - \theta_1$  et alors on pouvait choisir un voisinage plus petit de  $S^1$ , qui contient  $\theta_1, \theta_2$  et  $\phi_1$  ne peut pas être très éloignée de 1. Donc si  $A(f_1, \theta_1) = A(f_2, \theta_2)$ , alors  $\theta_1 = \theta_2$  et  $f_1 = f_2$ . Donc cette application est localement injective.

Nous devons encore justifier que les fonctions de transition sont lisses. On suppose que

$$\alpha(\psi_{c_1(\cdot + \theta_1)}(f_1(\cdot + \theta_1))) = \alpha(\psi_{c_2(\cdot + \theta_2)}(f_2(\cdot + \theta_2)))$$

mais on sait que  $\alpha$  est une juste reparamétrisation, donc il existe  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  (qui dépend de  $f_1, f_2$  et est égale  $\sigma_{\psi_{c_2}(f_2)}^{-1} \circ \sigma_{\psi_{c_2}(f_2)}$ ) telle que l'on ait égalité (car



l'orientation des applications est égale) :

$$c_1(\theta + \theta_1) + f_1(\theta + \theta_1)n_{c_1}(\theta + \theta_1) = c_2(\phi(\theta) + \theta_2) + f_2(\phi(\theta) + \theta_2)n_{c_2}(\phi(\theta) + \theta_2)$$

Nous allons donner une preuve que les fonctions de transition sont lisses

Pour montrer que l'application de transition est lisse on doit prouver le fait suivant :

**Lemme 3.9.** *Pour  $c \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  il existe  $\epsilon > 0$  telle que l'application  $F : \mathbb{S}^1 \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(\theta, x) \mapsto c(\theta) + n_c(\theta)x$  est un difféomorphisme locale.*

*Preuve.*  $F$  est une immersion  $F_\theta$  a une composante non nulle de  $Tc$  (pour  $\epsilon$  assez petit) et  $F_x$  a une composante nulle sur  $Tc$  et non nulle sur  $Nc$ . Donc  $F$  est un difféomorphisme local.  $\square$

Nous allons aussi utiliser le lemme suivant :

**Lemme 3.10.** *On suppose qu'il existe un recouvrement fini de  $\mathbb{S}^1$  par les ouverts  $U_i$  et  $V_i$ . On suppose qu'il existe les fonctions lisses  $\Phi_i : C^\infty(U_i, \mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(V_i, \mathbb{R}^2)$  telles que pour une fonction  $\Phi : C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{r_{U_i}} & C^\infty(U_i, \mathbb{R}^2) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi_i \\ C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{r_{V_i}} & C^\infty(V_i, \mathbb{R}^2) \end{array}$$

Où  $r_U$  est une restriction sur  $U$ .  $\Phi$  est alors lisse.

*Preuve.* Cela vient du fait qu'on a pour  $a_n \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ ,  $\lim a_n = b \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  si et seulement si  $\lim a_n|_{U_i} = b|_{U_i} \in C^\infty(U_i, \mathbb{R}^2)$  et du fait que la dérivation commute avec la restriction.  $\square$

On prends des  $U_i$  petits tels que  $F_{i1} = F_{c_1}|_{U_i \times ]-\epsilon, \epsilon[}$  nous donne un difféomorphisme sur son image (la notation de  $F$  du lemme précédent) et  $F_{i2}^{-1} = F_{c_2}^{-1}|_{\text{Im}(F_{c_1}(U_i))}$  est défini et est un difféomorphisme sur son image où  $V_i = F_{i2}^{-1}(\text{Im}(F_{c_1}(U_i)))$  (si on se restreint à de petites valeurs de  $\theta_1, \theta_2$ , l'inversion est unique par le lemme du début).

Nous allons maintenant prouver que l'application  $T : C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ ,  $(f_1, \theta_1) \mapsto (f_2(\phi(\theta) + \theta_2 - \theta_1), \theta_2 - \theta_1)$  est lisse. Pour cela nous allons prouver que l'application  $T_i : C^\infty(U_i, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow C^\infty(V_i, \mathbb{R}^2)$ ,  $(f_1, \theta_1) \mapsto (f_2(\phi(\cdot) + \theta_2 - \theta_1), \theta_2 - \theta_1)$  où  $V_i = \phi(U_i) + \theta_2 - \theta_1$  est lisse.

On voit que l'application  $F_{i2}F_{i1}^{-1}$  est un difféomorphisme. On a aussi une application  $\Psi : U \rightarrow V$  ou  $U, V$  sont des voisinages de  $c_1, c_2$ ,  $\Psi(d) = F_{i2}F_{i1}^{-1} \circ d$  qui envoie  $(f_1|_{U_i}, \theta_1) \mapsto (f_2|_{V_i}(\phi(\cdot) + \theta_2 - \theta_1), \theta_2 - \theta_1)$ . Il est évidemment lisse, comme composition d'applications lisses. Et par le lemme précédent on voit que l'application  $(f_1, \theta_1) \mapsto (f_2(\phi(\cdot) + \theta_2 - \theta_1), \theta_2 - \theta_1)$  est lisse. Mais l'application

$\phi \in \text{Diff}(S^1)$  dépend de façon lisse de  $f_1, f_2$  parce que  $\phi = \sigma_{c_2+n_{c_2}f_2} \sigma_{c_1+n_{c_1}f_1}^{-1}$ , et donc l'inversion de  $\phi$  dépend de façon lisse de  $f_1, f_2$ , puis l'application

$$(f_1, \theta_1) \mapsto (f_2, \theta_2)$$

est lisse.

Avec ces cartes, il est évident que l'action de  $S^1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est lisse. Pour montrer que  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_a(S^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}_1(S^1)$  on introduit une application  $T : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}_a(S^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}_1(S^1) : c \mapsto (\alpha(c), \sigma_c)$ . C'est une application lisse, pour les mêmes raisons que précédemment. Son inverse est  $(c, \phi) \mapsto c \circ \phi^{-1}$ , qui est lisse parce que  $\text{Diff}_1^+(S^1)$  est un groupe de Lie et qu'il agit sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  de façon lisse.  $\square$

**Définition 3.4.** Deux applications continues  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  où  $X, Y$  sont des espaces topologiques sont dites homotopes s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  telle que  $H(0, \cdot) = f_0(\cdot)$ ,  $H(1, \cdot) = f_1(\cdot)$ .

**Définition 3.5.** Deux espaces topologiques  $X, Y$  sont dits homotopiquement équivalents s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $fg$  est homotope  $Id_Y$  et  $gf$  est homotope  $Id_X$ .

**Définition 3.6.** Un espace est dit contractible s'il est homotopiquement équivalent à un point.

Le lemme suivant est important parce qu'il nous permettra de déduire que  $\text{Diff}_1^+(S^1)$  est connexe et donc de voir que pour trouver les composantes connexes de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  il suffit de trouver les composantes connexes de  $\text{Imm}_a(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

**Lemme 3.11.**  $\text{Diff}_1^+(S^1)$  est contractible.

*Preuve.* Une homotopie entre l'application identité et l'application constante  $\gamma \in \text{Diff}_1^+(S^1) \mapsto id$  où  $id : x \rightarrow x$  est définie par :  $F_t : \gamma \mapsto \gamma^{1-t} \cdot id^t$ . Il est facile de voir que cette application est continue, et qu'elle nous donne une homotopie entre  $id$  et une application constante, donc  $\text{Diff}_1^+(S^1)$  est contractible.  $\square$

On voudrait savoir, si  $\text{Imm}^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une composante connexe. C'est le cas pour  $k \neq 0$ .

**Définition 3.7** (Rétraction forte par déformation). On dira qu'un sous-espace  $Y \subset X$  est une rétraction forte par déformation s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times X$  telle que  $H(0, \cdot) = Id_X(\cdot)$ ,  $H(t, \cdot)|_Y = Id_Y(\cdot)$  et  $Im(H(1, \cdot)) = Y$ .

**Théorème 3.12.** – Une variété  $\text{Imm}^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  contient  $\text{Imm}_a^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  comme une rétraction forte par déformation.  
– Pour  $k \neq 0$  une variété  $\text{Imm}_a^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  contient  $S^1$  comme une rétraction forte par déformation.  
– Pour  $k \neq 0$  une variété  $B_i^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  est contractible.

*Preuve.* Le premier point est le plus simple, parce que dans le théorème précédent on a précisé qu'il existe une décomposition

$$\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$$

et par le lemme précédent  $\text{Diff}_1^+(\mathbb{S}^1)$  est contractible.

Pour les deux points qui restent on doit préciser des notations : pour  $c \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , on appelle le "centre d'une courbe" :

$$C(c) = \text{Center}(c) = \frac{1}{l(c)} \int_0^{2\pi} c(u)c'(u)du \in \mathbb{R}^2$$

où  $l(c)$  est une longueur de  $c$ . Il est facile de voir que  $C(c) = C(\phi \circ c)$  i.e. que  $C$  est invariante par  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ .

Maintenant on se restreint au cas où  $k \neq 0$ . On notera, pour  $\alpha \in \mathbb{S}^1$   $e_\alpha(\theta) = \frac{\alpha e^{ik\theta}}{ik}$ , on a  $C(e_\alpha) = 0$ ,  $e'_\alpha(0) = 1$ .

On construira ensuite des isotopies qui vont, malheureusement, nous faire perdre la propriété de vitesse constante. Mais si on construit une rétraction par déformation lisse  $A : [0, 1] \times \text{Imm}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  où  $\text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est l'espace des courbes de degré  $k$  avec 0 comme centre et dont la vitesse est de module 1, on peut composer  $A$  avec l'isotopie précédente et obtenir isotopie sur  $\text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

Si  $c \in \text{Imm}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  on notera  $s_c(v) = \int_0^v |c'(u)du|$  et on définit

$$A(c, t, u) = (1 - t + t \frac{2\pi}{l(c)}) \cdot (c((1 - t)u + ts_c^{-1}(\frac{l(c)u}{2\pi})) - tC(c))$$

.  $A(c, t, u)$  est alors une homotopie entre  $c$  et  $c_1$  où  $c_1$  a un module de vitesse constant et a 0 pour centre. En fait, c'est une isotopie car :

$$\frac{\partial A}{\partial u}(c, t, u) = c'((1 - t)u + ts_c^{-1}(\frac{l(c)u}{2\pi}))((1 - t) + t \cdot \frac{l(c)}{2\pi} (s_c^{-1})'(\frac{l(c)u}{2\pi}))$$

et  $0 < (s_c^{-1})'(\frac{l(c)u}{2\pi}) < 1$  et il préserve de plus le degré comme isotopie, . Et donc  $\text{Imm}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  contient  $\text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  comme rétract fort par déformation lisse.

On veut montrer que  $\text{Imm}_a^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  contient  $\mathbb{S}^1$  comme un retraction forte par déformation en identifiant  $\mathbb{S}^1$  avec  $\{e_\alpha | \alpha \in \mathbb{S}^1\}$ .

Maintenant pour  $c \in \text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  on va construire une isotopie  $t \rightarrow H^1(c, t, \cdot)$  entre  $c$  et un  $e_\alpha$  (que n'est pas une isotopie de  $\text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , mais une isotopie de  $\text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ ). On va noter pour  $darg = \frac{-xdy + ydx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  :

$$\phi_c(u) = \int_{c'|_{[0,u]}} darg, \text{ alors } c'(u) = c'(0)e^{i\phi_c(u)}$$

$$\alpha(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi_c(u) - ku)du$$

$$\psi_c(t, u) = (1 - t)\phi_c(u) + t(ku + \alpha(c))$$

$$h(c, t, u) = \int_0^u e^{i\psi_c(t, u)} du - \frac{u}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\psi_c(t, u)} du$$

$$H^1(c, t, u) = c'(0)(h(c, t, u) - \text{Center}(h(c, t, \cdot)))$$

Alors, pour tout  $t$   $H^1(c, t, \cdot)$  est une application centrée (c'est à dire avec 0 pour centre).  $H^1(c, 0, \cdot) = c(\cdot)$  et  $H^1(c, 1, \cdot) = e_{\alpha(c) \cdot c'(0)}$  parce que  $h(c, 1, u) = e^{i\alpha(c)} \cdot \frac{e^{iku} - 1}{ik}$  et  $H^1$  centre  $h$  et multiplie par  $c'(0)$ . Pour montrer que  $H^1$  est une isotopie on doit prouver que :

$$\frac{\partial H^1}{\partial u}(c, t, u) = c'(0)(e^{i\psi_c(t, u)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\psi_c(t, u)} du) \neq 0$$

mais  $\left| \int_0^{2\pi} e^{i\psi_c(t, u)} du \right| \leq 1$  avec inégalité stricte si  $\psi_c(t, u)$  n'est pas constante en  $u$  et  $\psi_c(t, u)$  n'est pas une constante parce que  $\psi_c(t, 2\pi) - \psi_c(t, 0) = 2\pi k$  et  $k \neq 0$ .

On va montrer que l'action de  $S^1$  sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  commute avec  $H^1$ , i.e.  $H^1(c(\theta + \cdot), t, u) = H^1(c, t, u + \theta)$ .

Pour cela on utilise la chaîne d'égalités suivante :

$$\phi_{c(\theta + \cdot)}(u) = \phi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta)$$

parce que  $c'(u + \theta) = c'(\theta)e^{i(\phi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta))}$ .

$$\alpha(c(\theta + \cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta) - k(u + \theta) + k\theta) du = \alpha(c) + k\theta - \phi_c(\theta)$$

$$\begin{aligned} \psi_c(\theta + \cdot)(t, u) &= (1-t)(\phi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta)) + t(k(u + \theta) - k\theta + \alpha(c) + k\theta - \phi_c(\theta)) = \\ &= \psi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(c(\theta + \cdot), t, u) &= \int_0^u e^{i(\psi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta))} du - \frac{u}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\psi_c(\theta + u) - \phi_c(\theta))} du = \\ e^{-i\phi_c(\theta)} &\left( \int_0^{u+\theta} e^{i\psi_c(u)} du - \int_0^\theta e^{i\psi_c(u)} du - \frac{u+\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\psi_c(u)} du + \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\psi_c(u)} du \right) = \\ &= e^{-i\phi_c(\theta)}(h(c, t, \theta + u) - h(c, t, \theta)) \end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} H^1(c(\theta + \cdot), t, u) &= \\ c'(\theta)(e^{-i\phi_c(\theta)}(h(c, t, \theta + u) - h(c, t, \theta)) - \text{Center}(e^{-i\phi_c(\theta)}(h(c, t, \theta + u) - h(c, t, \theta)))) &= \\ c'(0)(h(c, t, \theta + u) - h(c, t, \theta) - \text{Center}(h(c, t, u) + h(c, t, \theta))) &= \\ H^1(c, t, u + \theta) \end{aligned}$$

. On finit la preuve en projetant  $H^1$  sur  $\text{Imm}_a(S^1, \mathbb{R}^2)$ , pour cela on définit  $H^2(c, t, u) = A(H^1(c, t, \cdot), 1, u)$ . Pour cette application on a  $H^2(c, 0, u) = c$  (si  $c \in \text{Imm}_a^k(S^1, \mathbb{R}^2)$ ) et  $H^2(c, 1, u) = e_\alpha$  (parce que  $e_\alpha$  est centrée et a une vitesse

constante). C'est donc une isotopie de  $\text{Imm}_a^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  sur  $\{e_\alpha | \alpha \in \mathbb{S}^1\}$ , qui est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . Cela conclut la preuve de la deuxième partie.

Pour la troisième partie, on a vu que  $H^1(c(\theta + \cdot), t, u) = H^1(c, t, u + \theta)$ . Et donc  $H^2(c(\theta + \cdot), t, u) = A(H^1(c, t, \cdot + \theta), 1, u)$  Et comme  $s_{c(\theta + \cdot)} = s_c(t + \theta) - s_c(\theta)$  et donc  $s_{c(\theta + \cdot)}^{-1}(t) = s_c(t + s_c(\theta)) - \theta$  on a

$$\begin{aligned} A(c(\theta + \cdot), 1, u) &= \frac{2\pi}{l(c)} \left( c \left( s_c^{-1} \left( \frac{l(c)}{2\pi} u + s_c(\theta) \right) - \theta + \theta \right) - C(c) \right) = \\ &= \frac{2\pi}{l(c)} \left( c \left( s_c^{-1} \left( \frac{l(c)}{2\pi} u + s_c(\theta) \right) \right) - C(c) \right) = A \left( c, 1, \frac{2\pi}{l(c)} s_c(\theta) + u \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} H^2(c(\theta + \cdot), t, u) &= A \left( H^1(c, t, \cdot), 1, \frac{2\pi}{l(c)} s_{H^1(c, t, \cdot)}(\theta) + u \right) = \\ &= H^2(c, t, f(\theta) + u) \end{aligned}$$

Où  $f(\theta) = \frac{2\pi}{l(c)} s_{H^1(c, t, \cdot)}(\theta)$  Mais on voudrait une application qui commute avec l'action de  $\mathbb{S}^1$ , parce que si on a une application  $H^3(c, t, u)$  telle que  $H^3$  est invariante par action de  $\mathbb{S}^1$ , i.e.  $H^3(c(\theta + u), t, u) = H^3(c, t, \theta + u)$ . Et on a  $B_1^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_a^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) / \mathbb{S}^1 \cong \text{im}(H^3) / \mathbb{S}^1 = e_1$  (où l'on a mis  $\cong$  car on a seulement une homotopie équivalente à  $H^3$ ). Donc  $B_1^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est contractible. C'est pour cela que l'on doit introduire des fonctions :

$$F^1 : \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times [0, 1] \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}), (c, t) \mapsto \frac{-2\pi}{l(c)} s_{H^1(c, t, \cdot)}$$

$$G^1 : \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}), c \mapsto s_{H^1(c, 1, \cdot)}$$

Ces applications sont lisses parce que  $H^1(c, t, \cdot)$  est lisse et  $s_c$  est lisse. On va introduire une constante  $C$ , que l'on précisera par la suite. Considérons l'application

$$H^3 : \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times [0, 1] \rightarrow \text{Imm}_{1,0}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), (c, t, u) \mapsto H^2(c, t, \cdot + F^1(c, t) + G^1(c) + C)$$

C'est évidemment une isotopie, car  $H^2$  en est une. On va montrer que  $H^3$  est invariante par l'action de  $\mathbb{S}^1$ .

$$H^3(c(\theta + \cdot), t)(u) = H^2(c, t, u + F^1(c(\theta + \cdot), t) + G^1(c(\theta + \cdot)) + C + f(\theta))$$

$$F^1(c(\theta + \cdot), t) = \frac{-2\pi}{l(c(\theta + \cdot))} s_{H^1(c(\theta + \cdot), t, \cdot)} = \frac{-2\pi}{l(c)} s_{H^1(c, t, \theta + \cdot)}$$

$$G^1(c(\theta + \cdot)) = s_{H^1(c(\theta + \cdot), 1, \cdot)} = s_{H^1(c, 1, \theta + \cdot)}$$

On voudrait savoir si

$$F^1(c(\theta + \cdot), t) + G^1(c(\theta + \cdot)) + C + f(\theta) = \theta$$

Pour cela on dérive les deux parties de l'égalité et on voit que si on prend  $C$  telle que l'égalité est vraie en un point quelconque, l'égalité est équivalente a :

$$\left( \frac{-2\pi}{l(c)} s_{H^1(c,t,\theta+\cdot)} \right)_\theta + (s_{H^1(c,1,\theta+\cdot)})_\theta + f'(\theta) = 1$$

$$\frac{-2\pi}{l(c)} |H^1(c,t,\theta)| + |H^1(c,1,\theta)| + \frac{2\pi}{l(c)} |H^1(c,t,\theta)| = 1$$

, qui est satisfait.  $H^3$  est alors invariante par  $S^1$ .  $B_1^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  est donc contractible.  $\square$

**Corollaire.**  $B_1^k(S^1, \mathbb{R}^2)$  est connexe par arcs.

## 4 Différentes métriques sur l'ensemble des courbes planes

Nous allons maintenant présenter différentes métriques riemanniennes sur l'ensemble des courbes planes obtenues à partir de métriques sur l'espace  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  invariantes par  $\text{Diff}(S^1)$ .

L'objectif est d'obtenir une métrique à la fois très simple et donnant de bonnes propriétés à l'ensemble des courbes planes, c'est à dire correspondant à l'idée usuelle et naturelle de "forme semblable".

Nous commencerons par munir  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  de métriques classiques sur les espaces fonctionnels, en utilisant sa structure de variété de Fréchet.

Une fois que l'on aura obtenu une métrique intéressante (ce qui correspondra à être non nulle pour commencer), nous la simplifierons (en supprimant certains termes de son expression) et vérifierons que la métrique simplifiée obtenue conserve des propriétés intéressantes.

Dans toute cette partie, on conserve la notation  $\pi : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

### 4.1 Une métrique riemannienne naturelle sur $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$

Commençons par munir  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  de la métrique la plus simple découlant de sa structure de variété de Fréchet. Nous comprendrons pourquoi le fait que cette métrique ne soit pas invariante par l'action des difféomorphismes de  $S^1$  l'empêche d'induire sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  une métrique intéressante.

Supposons que  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est telle que  $T_c \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) = \{h \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)\}$  on définit une métrique locale par :  $G_c(h, k) = \int_{S^1} \langle h(\theta), k(\theta) \rangle d\theta$  pour  $h, k \in T_c \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

On définit alors la longueur d'une courbe  $x : [0, L] \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  comme

$$l(x) = \int_0^L G_{x(t)}(x'(t), x'(t)) dt$$

Et la métrique sur l'espace  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est définie par : pour  $c_0, c_1 \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$

$$d(c_0, c_1) = \inf \{l(x) | x \in C([0, L], \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)), x(0) = c_0, x(L) = c_1\}$$

C'est donc l'infimum des longueurs des courbes dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  qui relient  $c_0, c_1$ . Cette métrique de variété riemannienne sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ , bien que naturelle, n'est pas invariante par  $\text{Diff}(S^1)$ . On définit la fonction

$$d'(e_0, e_1) = \inf_{c_0 \in \pi^{-1}(e_0); c_1 \in \pi^{-1}(e_1)} \{d(c_0, c_1)\}$$

On peut induire une métrique sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  comme pour  $e_0, e_1 \in B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  :

$$d''(e_0, e_1) = \inf_{C_1, \dots, C_n} \{d(c_0, C_1) + \dots + d(C_n, c_1)\}$$

Cela n'induit pas de métrique intéressante sur l'espace quotient  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  :

En fait, la distance entre deux courbes de  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  est nulle pour cette métrique. En effet, soient  $C_0$  et  $C_1 \in B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  et  $c_0$  et  $c_1 \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  dans leurs orbites respectives.

Nous allons construire un chemin entre ces deux courbes de longueur arbitrairement petite que l'on note  $C_t(\theta)$  dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des courbes.

On passera pour cela par une courbe intermédiaire  $C_{\frac{1}{2}}$  : C'est une courbe qui parcourt  $C_0$  sauf une petite partie, puis part sur  $C_1$  qu'elle parcourt aussi presque totalement avant de se refermer sur  $C_0$ .

Ce chemin sera constitué pour  $t \in [0, 1/2]$  de la projection sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  d'un chemin entre  $c_0$  et une paramétrisation de  $C_{\frac{1}{2}}$  que l'on notera  $c_{0,1/2}$  faisant jouer un rôle arbitrairement petit à la courbe  $C_1$  et pour  $t \in [1/2, 1]$  de la projection sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  d'un chemin entre  $c_{1,1/2}$ , une paramétrisation de  $C_{\frac{1}{2}}$  faisant jouer un rôle arbitrairement petit à la courbe  $C_0$  et  $c_1$ .

Expliquons cela de manière détaillée :

Définissons plus précisément  $C_{\frac{1}{2}}$ . Soit  $U_\epsilon$  un voisinage de 1 dans  $S^1$  de longueur  $\epsilon$ , notons  $C_0^\epsilon$  et  $C_1^\epsilon$  les images par  $c_0$  et  $c_1$  de  $S^1$  privé de  $U_\epsilon$ . On peut alors construire une courbe lisse parcourant  $C_0^\epsilon$  puis  $C_1^\epsilon$  avant de se refermer. Pour cela, on approche de manière lisse (et en conservant les parties parcourant  $C_0^\epsilon$  et  $C_1^\epsilon$ ) la courbe qui parcourt  $C_0^\epsilon$ , est reliée à une extrémité de  $C_1^\epsilon$  par un segment, parcourt  $C_1^\epsilon$  puis se referme par un segment au point de départ.

Hors de  $U_\epsilon$   $c_t(\theta) = c_0(\theta)$ . Si  $\theta \in U_\epsilon$  pour  $t \in [0, 1/2]$ , pour  $\theta$  dans  $U_\epsilon$  on peut créer un chemin qui part de  $c_0$ , et va jusqu'à  $c_{0,1/2}$  (paramétrisation de  $C_{\frac{1}{2}}$  (définie au paragraphe précédent où l'excursion hors de  $C_0$  est paramétrée sur l'ouvert  $U_\epsilon$ ) en ne modifiant les valeurs que sur l'ouvert  $U_\epsilon$ .

Ainsi, la courbe  $C_{\frac{1}{2}}$  est parcourue avec une vitesse non constante : On parcourt très rapidement la partie de  $C_0$  qui se rapproche de la courbe  $C_1$ , ce qui réduit son apport dans l'expression de la distance.

Symétriquement on crée un chemin entre  $c_1$  et  $c_{1,1/2}$  (paramétrisation de  $C_{\frac{1}{2}}$  où l'excursion hors de  $C_1$  est paramétrée sur l'ouvert  $U_\epsilon$ ).



On voit alors, à partir de l'expression de  $G_c$  que les distances entre  $c_0$  et  $c_{0,\frac{1}{2}}$  et  $c_{1,\frac{1}{2}}$  et  $c_1$  sont majorées par une constante fois  $\epsilon$  (car les modifications bornées des courbes sont faites sur un intervalle de longueur  $\epsilon$ . Les immersions  $c_{0,\frac{1}{2}}$  et  $c_{1,\frac{1}{2}}$  ayant toutes les deux pour projection  $C_{\frac{1}{2}}$  dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , l'ensemble des courbes, on obtient un chemin entre  $C_0$  et  $C_1$  dont la longueur est arbitrairement petite.

## 4.2 La plus simple des métriques riemanniennes sur $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$

Nous construisons maintenant, à partir de la métrique précédente, une métrique invariante par  $\text{Diff}(S^1)$ .

Soient  $h, k \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$  deux vecteurs tangents de base  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  (donc  $h, k \in T_c \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ ).

On définit une métrique sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  par :

$$G_c(h, k) := \int_{S^1} \langle h(\theta), k(\theta) \rangle |c'(\theta)| d\theta$$

Cette métrique est, cette fois-ci, invariante sous l'action de  $\text{Diff}(S^1)$  (par la formule du changement de variable).

Nous noterons  $H^0$  la métrique induite sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

## 4.3 La métrique $H^0$ induit une distance nulle sur $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$

Cette métrique  $H^0$  induit cependant une distance nulle sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ . C'est un fait étonnant, qui n'est possible qu'en dimension infinie (en dimension finie, une métrique localement non nulle induit globalement une métrique non nulle sur la variété). Et dont cet espace est un des premiers exemples.

Pour commencer on donnera la formule de la longueur du projeté d'un chemin de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ . Si  $c(t), t \in [0, 1]$  est une chemin dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ , on note  $L_G^{hor}(c)$  la longueur dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ . On a la formule

$$\begin{aligned} L_G^{hor}(c) &= \int_0^1 \sqrt{G_{\pi(c)}(d\pi(c_t), d\pi(c_t))} = \int_0^1 \sqrt{G_{\pi(c)}(c_t^\perp, c_t^\perp)} = \\ &= \int_0^1 \left( \int_{S^1} \left\langle \frac{\langle c_t, ic_\theta \rangle}{|c_\theta|^2} ic_\theta, \frac{\langle c_t, ic_\theta \rangle}{|c_\theta|^2} ic_\theta \right\rangle |c_\theta| d\theta \right)^{1/2} dt = \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left( \int_{S^1} \langle c_t, ic_\theta \rangle^2 \frac{d\theta}{|c_\theta|} \right)^{1/2} dt$$

On écrira cela de la manière la plus courte car on utilisera souvent cette formule :

$$L_G^{hor}(c) = \int_0^1 \left( \int_{S^1} \langle c_t, ic_\theta \rangle^2 \frac{d\theta}{|c_\theta|} \right)^{1/2} dt$$

Pour cette démonstration, nous aurons besoin de considérer des chemins “horizontaux” (voir le lemme dans la démonstration).

Passons désormais au théorème qui nous intéresse.

**Théorème 4.1.** *Pour toutes immersions  $c_0, c_1 \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ , qui peuvent être reliées dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ , pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un chemin  $t \mapsto c(t, \cdot)$  tel que  $c(0, \cdot) = c_0(\cdot)$  et  $\pi(c(1, \cdot)) = \pi(c_1(\cdot))$  et tel que  $L_G^{hor}(c) < \epsilon$ .*

Ce théorème nous dit en fait que chaque orbite de  $\text{Diff}(S^1)$  est arbitrairement proche de chaque élément de sa composante connexe. Ou, en d’autres termes, pour tout  $c_0, c_1$  on peut reparamétriser  $c_1$  de manière à avoir la distance entre  $c_0$  et la reparamétrisation de  $c_1$  arbitrairement petite.

Il est important de noter que si l’on reparamétrise simultanément  $c_0$  et  $c_1$ , alors la longueur de la courbe, reliant  $c_0, c_1$  ne change pas.

*Preuve.* L’idée consiste à faire “zigzaguer” une courbe bien choisie (horizontale, voir le lemme suivant) en la reparamétrisant de manière affine par morceaux dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

On fait cela de manière périodique, de période  $1/n$  en  $\theta$  en modulant en  $t$  pour bien partir de  $c_0$  et arriver en  $c_1$ . Si l’on note  $\alpha$  l’angle maximum de ces pics, avec le changement de variable la longueur de la courbe augmente alors d’un facteur  $1/(\cos(\alpha))$ , mais sa composante normale diminue d’un facteur  $\cos(\alpha)$ , le terme normal étant quadratique dans l’intégrale, l’intégrale devient arbitrairement petite pour  $\alpha$  s’approchant de  $\pi$ .

Pour construire cette courbe “horizontale”, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 4.2** (Horizontalité dans  $\text{Imm}_a(S^1, \mathbb{R}^2)$ ). *Pour chaque chemin lisse  $c \in C^\infty([0, 1], \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2))$  il existe un chemin lisse  $\phi_c \in C^\infty([0, 1], S^1)$  telle que  $\phi_c(0) = 1$ ,  $\phi_c$  dépend de façon lisse de  $c$  et le chemin  $e$ , donné par  $e(t)(\theta) = c(t)(\phi_c(t) \cdot \theta)$  satisfait  $\langle e_t, e_\theta \rangle = 0$ . Une telle courbe sera dite “horizontale”.*

*Preuve.* Il est facile de voir qu’il suffit d’obtenir  $\phi_c$  tel que  $\phi_c'(t) = -\frac{\langle c_t, c_\theta \rangle}{|c_\theta|}$ , une telle solution existe évidemment et dépend de façon lisse de  $c$ .  $\square$

On commence par choisir le chemin que l'on va reparamétriser : Soit  $c_0$  et  $c_1$  deux courbe de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  et un chemin  $t \mapsto c(t, \cdot)$  les reliant. D'après le lemme précédent, on peut supposer que  $t \mapsto (\theta \mapsto c(t, \theta))$  est horizontal c'est à dire que  $\langle c_t, c_\theta \rangle = 0$ .

On voit maintenant  $c$  comme un plongement de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Et on considère une reparamétrisation affine par morceaux :  $(t, \theta) \rightarrow (\phi(t, \theta), \theta)$  avec  $\phi$  :

$$\phi(t, \theta) = \begin{cases} 2t(2n\theta - 2k), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \frac{2k}{2n} \leq \theta \leq \frac{2k+1}{2n} \\ 2t(2k + 2 - 2n\theta), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \frac{2k+1}{2n} \leq \theta \leq \frac{2k+2}{2n} \\ 2t - 1 + 2(1-t)(2n\theta - 2k), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \frac{2k}{2n} \leq \theta \leq \frac{2k+1}{2n} \\ 2t - 1 + 2(1-t)(2k + 2 - 2n\theta), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \frac{2k+1}{2n} \leq \theta \leq \frac{2k+2}{2n} \end{cases}$$

Les valeurs des dérivées (qui nous serviront pour le calcul) suivant la même partition :

$$\phi_\theta = \begin{cases} +4nt, \\ -4nt, \\ +4n(1-t), \\ -4n(1-t) \end{cases}$$

$$\phi_t = \begin{cases} 4n\theta - 4k, \\ 4k + 4 - 4n\theta, \\ 2 - 4n\theta + 4k, \\ -(2 - 4n\theta + 4k) \end{cases}$$

On notera  $\tilde{c}(t, \theta) = c(\phi(t, \theta), \theta)$ . On a :  $\tilde{c}_\theta = \phi_\theta \cdot c_t + c_\theta$  et  $\tilde{c}_t = \phi_t \cdot c_t$ .

On a  $\langle \tilde{c}_t, i\tilde{c}_\theta \rangle = \langle \phi_t \cdot c_t, i\phi_\theta \cdot c_t + ic_\theta \rangle = \phi_t \cdot |c_t| \cdot |c_\theta|$  car  $\langle c_t, c_\theta \rangle = 0$  et  $|\tilde{c}_\theta| = |c_\theta| \sqrt{1 + \phi_\theta^2 \left(\frac{|c_t|}{|c_\theta|}\right)^2}$ . Alors :

$$\begin{aligned} L^{hor}(\tilde{c}) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \langle \tilde{c}_t, i\tilde{c}_\theta \rangle^2 \frac{d\theta}{|\tilde{c}_\theta|} \right)^{1/2} dt = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{|\tilde{c}_t|^2 \phi_t^2 |c_\theta|}{\sqrt{1 + \phi_\theta^2 \left(\frac{|c_t|}{|c_\theta|}\right)^2}} d\theta \right)^{1/2} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} \frac{(4n\theta - 4k)^2 |c_t(\phi, \theta)|^2 |c_\theta(\phi, \theta)|}{\sqrt{1 + (4nt)^2 \left(\frac{|c_t(\phi, \theta)|}{|c_\theta(\phi, \theta)|}\right)^2}} d\theta + \right. \right. \\
& \left. \left. \int_{\frac{2k+1}{2n}}^{\frac{2k+2}{2n}} \frac{(2 - 4n\theta + 4k)^2 |c_t(\phi, \theta)|^2 |c_\theta(\phi, \theta)|}{\sqrt{1 + (4nt)^2 \left(\frac{|c_t(\phi, \theta)|}{|c_\theta(\phi, \theta)|}\right)^2}} d\theta \right) \right)^{1/2} dt + \\
& \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} \frac{(2 - 4n\theta + 4k)^2 |c_t(\phi, \theta)|^2 |c_\theta(\phi, \theta)|}{\sqrt{1 + (4nt)^2 (1-t)^2 \left(\frac{|c_t(\phi, \theta)|}{|c_\theta(\phi, \theta)|}\right)^2}} d\theta + \right. \right. \\
& \left. \left. \int_{\frac{2k+1}{2n}}^{\frac{2k+2}{2n}} \frac{(2 - 4n\theta + 4k)^2 |c_t(\phi, \theta)|^2 |c_\theta(\phi, \theta)|}{\sqrt{1 + (4nt)^2 (1-t)^2 \left(\frac{|c_t(\phi, \theta)|}{|c_\theta(\phi, \theta)|}\right)^2}} d\theta \right) \right)^{1/2} dt
\end{aligned} \tag{1}$$

On remarque que  $c_\theta(\phi, \theta)$  est à valeur hors d'un voisinage de zéro uniformément et  $c_t(\phi, \theta)$  est uniformément bornée (car  $c_\theta$  et  $c_t$  le sont). Ainsi on obtient (en appliquant un changement de variable affine de  $\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}}$  sur  $\int_0^{\frac{1}{2n}}$ ) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} \frac{(4n\theta - 4k)^2 |c_t(\phi, \theta)|^2 |c_\theta(\phi, \theta)|}{\sqrt{1 + (4nt)^2 \left(\frac{|c_t(\phi, \theta)|}{|c_\theta(\phi, \theta)|}\right)^2}} d\theta$$

Comme  $c_\theta(\phi, \theta)$  est éloigné de zéro, pour toute valeur de t (sinon il pourrait y avoir des problèmes pour des petites valeurs de t) on a l'estimation :

$$\leq O(1) \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2n}} \frac{4n^2 \theta^2 |c_t(\phi(t, \theta + \frac{2k}{2n}), \theta + \frac{2k}{2n})|^2}{\sqrt{1 + (4nt)^2 |c_t(\phi(t, \theta + \frac{2k}{2n}), \theta + \frac{2k}{2n})|^2}} d\theta$$

On conclut alors en fixant  $\epsilon > 0$  et en séparant l'intégrale entre 0 et  $\epsilon$  qui est  $O(\epsilon)$  uniformément en  $n$  car,  $c_t(\phi, \theta)$  est uniformément bornée.

Pour l'autre partie de l'intégrale,  $t > \epsilon$ , on sépare encore l'intervalle entre les  $\theta$  tels que  $|c_t(\phi(t, \frac{2k}{2n} + \theta), \frac{2k}{2n} + \theta)| < \epsilon$  pour lesquels on obtient l'estimation  $O(1) \cdot n \cdot 4n^2 \cdot \epsilon^2 \left(\frac{\theta^3}{3}\right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{1}{2n}} = O(\epsilon)$ .

Dans l'ensemble complémentaire, on a  $t \geq \epsilon$  et  $|c_t(\phi(t, \frac{2k}{2n} + \theta), \frac{2k}{2n} + \theta)| \geq \epsilon$ , on obtient l'estimation  $O(1) \cdot n \cdot 4n^2 \cdot \frac{1}{4n\epsilon^2} \cdot \left(\frac{\theta^3}{3}\right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{1}{2n}} = O(1/(\epsilon^2 n))$ .

En prenant par exemple  $\epsilon(n) = 1/(n^{1/3})$ , l'intégrale tend vers 0.

De même pour les autres sommes.

Ici,  $\phi$  n'était pas lisse mais peut facilement être approchée par des fonctions lisses qui ne changent pas la conclusion.

La longueur de la courbe tend donc vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . □

#### 4.4 Construction de la métrique $H^A$

Une autre manière de munir un espace fonctionnel d'une métrique riemannienne, en renforçant une métrique de type  $H^0$  consiste à ajouter un autre terme dans l'intégrale :

$$\tilde{G}_c^A(h, k) = \int_{S^1} \left( \langle h(\theta), k(\theta) \rangle + A \frac{\langle h_\theta, k_\theta \rangle^2}{|c_\theta|} \right) |c_\theta| d\theta$$

Pour simplifier, nous noterons  $f_s = \frac{f_\theta}{|c_\theta|}$ . Pour mieux comprendre cette métrique, supposons que  $h = k = aic_s + bc_s$ .

Nous allons utiliser le fait que  $(c_s)_s = \kappa ic_s$  par la définition de la courbure  $\kappa$  et donc  $(ic_s)_s = -\kappa c_s$ . En observant que  $h_s = (aic_s + bc_s)_s = (a_s + \kappa b)ic_s + (b_s - \kappa a)c_s$  (cela vient directement du fait que  $\cdot_s$  est une différentiation).

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^A(h, k) &= \int_{S^1} (a^2 + b^2 + A(a_s + \kappa b)^2 + A(b_s - \kappa a)^2) ds = \\ &= \int_{S^1} (T_1(a) \cdot a + 2T_2(a) \cdot b + T_1(b) \cdot b) ds \end{aligned}$$

Où  $T_1 = I + A\kappa^2 - A(d/(ds))^2$  et  $T_2 = A(\kappa_s + 2\kappa d/(ds))$ .  $T_1$  est autoadjoint défini positif, et possède donc un inverse. On obtient alors :

$$\tilde{G}_c^A(h, k) = \int_{S^1} (T_1(a) \cdot a - T_1^{-1}(T_2(a))T_2(a) + T_1(b + T_1^{-1}(T_2(a)))(b + T_1^{-1}(T_2(a)))) ds$$

Si on minimise cette quantité (pour obtenir un chemin minimisant et en particulier vérifier qu'il est de longueur non nulle) en  $b$  à  $a$  fixé. On choisit de fixer  $a$  et de faire varier  $b$  car les mouvements tangents (c'est à dire les valeurs de  $b$ ) correspondent localement à une reparamétrisation de  $c$  (et sont donc sans effet après projection sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ ), comme on l'a vu dans les formules des vecteurs tangents aux orbites de  $c$  par l'action de  $\text{Diff}(S^1)$ . On arrive dans l'ensemble de fibres  $N_c^A \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ . C'est à dire :

$$N_c^A = \{h \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2) | h = aic_s + bc_s, b = -T_1^{-1}(T_2(a))\}$$

Avec un tel  $h$  on obtient :

$$G_c^A(h, h) = \int_c ((1 + A\kappa^2)a^2 + Aa_s^2) ds - \int_c (T_1^{-1}(T_2(a)) \cdot T_2(a)) ds$$

L'objectif étant d'obtenir la métrique la plus simple possible, on décide d'éliminer certains termes de cette expression et nous verrons que même sans ces termes, la métrique est suffisamment forte pour avoir des propriétés intéressantes.

On préférerait une métrique sans terme de dérivée, pour avoir une expression simple, on élimine alors le terme en  $a_s$ . Le second terme est, lui, un opérateur intégral non local, on décide aussi de l'éliminer.

On obtient alors exactement la métrique à laquelle l'article s'intéresse particulièrement :

$$G_c^A(h, k) := \int_{S^1} (1 + A\kappa_c(\theta)^2) \langle h(\theta), k(\theta) \rangle |c'(\theta)| d\theta$$

Cette expression contient donc un terme de courbure supplémentaire qui permet d'empêcher les chemins comme celui du théorème 4.1 d'avoir une faible longueur. On espère alors obtenir une métrique non nulle.

La longueur d'un chemin dans cette métrique, plongée dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , est donnée par :

$$L_{G^A}^{hor}(c) = \int_0^1 \left( \int_{S^1} (1 + A\kappa_c^2) \langle c_t, ic_\theta \rangle^2 \frac{d\theta}{|c_\theta|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La distance entre deux courbes est l'infimum des longueurs des chemins reliant les courbes.

Jusqu'à la fin de cette partie, nous allons donner des raisons pour lesquelles, cette métrique est très intéressante.

Nous allons commencer par montrer qu'avec cette métrique, on peut contrôler la longueur des courbes, puis nous montrerons que cette métrique contrôle les normes naturelles que l'on peut poser sur l'ensemble des courbes planes pour bien montrer que la notion de courbes proches semble respectée. Enfin nous nous intéresserons à la topologie induite sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , et en particulier, nous montrerons que deux courbes distinctes ont cette fois-ci toujours une distance non nulle.

## 4.5 Une constante de Lipschitz pour la longueur des courbes pour $G^A$

Jusqu'à la fin de cette partie, nous allons donner des raisons pour lesquelles, cette métrique est très intéressante.

On montre dans cette partie qu'elle rend la fonction longueur contrôlable. C'est à dire que deux courbes proches ont une longueur proche.

On utilisera la formule de la différentielle de l'application longueur  $l$  : comme  $l(c) = \int_{S^1} \sqrt{\langle c_\theta, c_\theta \rangle} d\theta$ , on a

$$\begin{aligned} dl(c)(h) &= \int_{S^1} \langle h_\theta, \frac{c_\theta}{|c_\theta|} \rangle d\theta = \\ &= - \int_{S^1} \langle h, \left( \frac{c_\theta}{|c_\theta|} \right)_\theta \rangle d\theta = - \int_{S^1} \kappa_c \langle h, n_c \rangle |c_\theta| d\theta \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$dl(c)(h) = - \int_{S^1} \kappa_c \langle h, n_c \rangle |c_\theta| d\theta$$

On applique en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la dérivée de la fonction longueur le long d'un chemin  $t \mapsto c(t, \cdot)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t l(c) &= dl(c)(c_t) = - \int_{S^1} \kappa(c) \langle c_t, n_c \rangle |c_\theta| d\theta \leq \\ &= \left( \int_{S^1} |c_\theta| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{S^1} \kappa(c)^2 \langle c_t, n_c \rangle^2 |c_\theta| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &= l(c)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{A}} \left( \int_{S^1} (1 + A\kappa(c)^2) \langle c_t, n_c \rangle^2 |c_\theta| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

En intégrant la dérivée temporelle de  $\sqrt{l(c)}$ , on obtient :

$$\sqrt{l(c_1)} - \sqrt{l(c_0)} \leq \frac{1}{2\sqrt{A}} L_{G^A}^{hor}(c)$$

Par passage à la borne inférieure sur les chemins reliant  $C_0, C_1 \in B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ , on obtient :

$$\sqrt{l(c_1)} - \sqrt{l(c_0)} \leq \frac{1}{2\sqrt{A}} dist_{G^A}^{B_i(S^1, \mathbb{R}^2)}(C_0, C_1)$$

## 4.6 Contrôle de l'aire balayée par un chemin dans $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'aire balayée par un chemin dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

Cela correspond à un contrôle d'une sorte de norme 1 (l'aire balayée par un chemin correspond moralement à l'aire de la différence symétrique des intérieurs des courbes (quand les courbes sont des bords de compactes), qui est une des distances "naturelles" sur l'ensemble des courbes dont nous avons parlé) sur l'ensemble des courbes par  $G^A$ .

**Théorème 4.3.** *L'aire balayée par  $c(t)$  dans  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  est elle aussi contrôlée par l'inégalité :*

$$(\text{Aire balayée par } c) \leq \max_t (\sqrt{l(c(t, \cdot))}) \cdot L_{G^A}(c)$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} L_{G^A}^{hor}(c) &= \int_0^1 \sqrt{G_c^A(c_t, c_t)} dt = \\ &= \int_0^1 \left( \int_{S^1} (1 + A\kappa(c)^2) |c_t(t, \theta)|^2 |c_\theta(t, \theta)| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} dt \geq \\ &= \int_0^1 \left( \int_{S^1} |c_t(t, \theta)|^2 |c_\theta(t, \theta)| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} dt \geq \text{Par Cauchy-Schwartz} \\ &= \int_0^1 \left( \int_{S^1} |c_\theta(t, \theta)| d\theta \right)^{-\frac{1}{2}} dt \cdot \int_0^1 \int_{S^1} |c_t(t, \theta)| |c_\theta(t, \theta)| d\theta dt = \end{aligned}$$

pour une valeur  $t_0$  intermédiaire

$$\frac{1}{\sqrt{l(c(t_0, \cdot))}} \cdot \int_{[0,1] \times S^1} |\det dc(t, \theta)|$$

Et on obtient donc :

$$(\text{Aire balayée par } c) \leq \max_t (\sqrt{l(c(t, \cdot))}) \cdot L_{G^A}(c)$$

□

#### 4.7 Contrôle des distances uniformes entre courbes proches dans $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$

La distance uniforme entre des courbes proches pour la métrique  $G^A$  est aussi contrôlée, on montre cette fois-ci que la métrique  $G^A$  contrôle la norme uniforme qui est aussi une distance "naturelle" sur l'ensemble des courbes planes :

**Théorème 4.4.** *Si  $c_0$  (de longueur  $l$ ) et  $c_1$  sont deux courbes distantes d'au plus  $\epsilon$  où  $\epsilon$  est inférieur à  $\frac{\min(2\sqrt{Al}, l^{\frac{3}{2}})}{8}$ . Alors, la courbe  $c_1$  est dans le voisinage tubulaire de  $c_0$  de rayon  $\nu = 4(l^{\frac{3}{4}} A^{-\frac{1}{4}} + l^{\frac{1}{4}}) \sqrt{\epsilon}$ .*

*Si, en plus la courbe  $c$  de longueur  $\epsilon$  est horizontale, alors, pour tout  $\theta$ , on a*

$$|c(0, \theta) - c(1, \theta)| < \nu$$

Vous pouvez trouver la preuve dans [1].



## 4.8 Propriétés topologiques de $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ muni de $G^A$

Nous nous intéressons enfin à la structure qu'induit  $G^A$  sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  comparée à celle de  $B_i^{cont}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

Nous remarquons en particulier que la distance induite est cette fois ci bien séparante.

$B_i^{cont}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un espace que l'on munit de la topologie induite par la topologie  $C^0$  (c'est à dire induite par la norme uniforme de  $C(S^1, \mathbb{R}^2)$ ) de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

En combinant les résultats de contrôle uniforme des longueurs (4.5) et de contrôle de la distance uniforme entre des courbes proches (4.6), nous pouvons donner les caractéristiques principales de  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  muni de la métrique  $G^A$  :

**Corollaire.** *Pour tout  $A > 0$ , Le plongement de  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  muni de  $G^A$  dans  $B_i^{cont}(S^1, \mathbb{R}^2)$  muni de la métrique de Fréchet est continue, et même uniformément continue sur tout sous-ensemble où la longueur est bornée. En particulier,  $dist_{G^A}$  est séparante sur  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ .*

## 5 La variété des immersions libres

On rappelle qu'une immersion libre est une immersion sur laquelle les diffeomorphismes agissent librement (i.e.  $c$  est libre si  $c \circ \phi = c$  pour  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$ ) implique que  $\phi = Id$ ).

Dans ce chapitre on prouve que l'on peut mettre une structure de variété de Fréchet sur  $B_{\text{if}}(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$ . On va commencer avec une petite proposition qui nous dit que  $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une sous variété de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

Dans la preuve du fait que  $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une sous-espace ouvert de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  on a besoin de pouvoir extraire d'une suite de  $\text{Diff}(S^1)$  une sous suite convergente dans  $\text{Diff}(S^1)$ .

**Lemme 5.1.** *On suppose qu'il existe une suite de  $\phi_n \in \text{Diff}(S^1)$  telle que pour deux applications  $i, j \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  on a  $\lim i \circ \phi_n = j$  dans  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ , i.e. converge avec tout ses dérivées. Alors on peut extraire une sous-suite de  $\phi_n$  convergente vers  $\phi$  dans  $\text{Diff}(S^1)$ .*

*Preuve.*  $\lim(i \circ \phi_n)' = j'$ , alors  $\lim(i' \circ \phi_n \cdot \phi_n') = j'$  et comme  $i'$  est distinct de 0, alors  $|\max_{\theta \in S^1}(\phi_n')|$  est borné, on voit aussi, que  $|\phi_n'|$  est uniformément par  $n$  minoré.  $\lim(i \circ \phi_n)'' = j''$ , alors  $\lim(i' \circ \phi_n \cdot \phi_n'' + i'' \circ \phi_n \cdot (\phi_n')^2) = j''$  alors  $|\max_{\theta \in S^1}(\phi_n'')|$  est borné. Et donc par lemme d'Ascoli on peut trouver une sous-suite convergente  $\phi_n$ , ainsi que sa dérivée première uniformément vers  $\phi$ . Evidemment  $\phi$  est un application du cercle sur lui-meme. Il est injectif car les dérivés sont mineurs et on peut supposer que dans la suite  $\phi_n$  il existe une infinité de  $\phi_n$  qui préservent l'orientation. Surjectivité va être évident si on voit les applications  $\phi_n$  comme les applications croissantes  $[0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  fixant 0 et  $2\pi$ . Comme la convergence est uniforme, on obtient que la limite est une application croissante  $[0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  fixant 0 et  $2\pi$ , donc il est surjective. Donc  $\phi$  est une bijection et  $i \circ \phi = j$ , alors  $\phi' = \frac{j'}{i' \circ \phi}$ . Donc par récurrence  $\phi \in C^k$  pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$ .  $\square$

**Proposition 5.2.** *L'espace des immersions libres est ouvert dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .*

*Preuve.* On fixe une application  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$   $c' \neq 0$ , il existe alors  $\beta, \delta > 0$  tels qu'on ait  $|c(0) - c(\beta)| > \delta$  et  $c(s) \neq c(t)$  pour  $s \neq t; s, t \in [0, \beta]$  et pour  $\theta$  minimal telle que  $c(\cdot) = c(\cdot + \theta)$  on a  $\theta > \beta$ .

Donc pour chaque diffeomorphisme  $\phi \neq Id$ , pour lequel  $c = c \circ \phi$  on a  $\phi(1) > \beta$ . Et  $\beta$  dépend continûment de  $c'(0)$  ainsi que des variations de  $c''(t)$  au voisinage de 0 (c'est facile à voir) et donc si on a  $b \in \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  tel que pour chaque voisinage de  $b$  dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  il existe  $a_n \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) - \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$ , alors on peut trouver une suite  $\phi_n \in \text{Diff}(S^1)$  telle que  $a_n = a_n \circ \phi_n$  et  $a_n$  converge vers  $b$  ainsi que toutes ses dérivées. Mais comme chaque  $a_n$  est proche de  $c$ , il a  $a_n'(0), a_n''(t)$  sont proche de  $c'(0), c''(t)$ .

Et alors il existe  $\epsilon > 0$  telle que  $\forall n$  on ait  $\phi_n(1) > \epsilon$ . Par le lemme précédent on peut trouver une sous-suite convergente de  $\phi_n$  qui converge vers  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  et  $\phi(1) > \epsilon$ . Mais  $c \circ \phi = c$  donc  $c$  n'est pas libre. Contradiction.

Donc  $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  est ouverte dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ , mais  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un espace ouvert d'un espace de Fréchet  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$  (pour la preuve voir annexe). Donc  $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un ouvert de  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ .  $\square$

**Corollaire.**  $\text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété.

**Théorème 5.3.**  $\text{B}_{\text{if}}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété.

*Preuve.* On note

$$\psi_c(s) : C^\infty(S^1, ]-\epsilon, \epsilon[) \rightarrow \text{Imm}_f(S^1, \mathbb{R}^2), \psi_c(s)(\theta) = c(\theta) + s(\theta)n_c(\theta)$$

où  $n_c(y)$  est un vecteur normal à  $c$  en point  $y$ ,  $Q(c) = \psi_c(C^\infty(S^1, ]-\epsilon, \epsilon[))$  et  $\pi \circ \psi_c : C^\infty(S^1, ]-\epsilon, \epsilon[) \rightarrow \text{B}_{\text{if}}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

Le fait que l'application  $\pi \circ \psi_c$  est globalement injective est une conséquence directe de la deuxième partie de la proposition 5.10, parce que on n'a pas l'injectivité ssi  $c(\theta) + s_1(\theta)n_c(\theta) = c(\phi(\theta)) + s_2(\phi(\theta))n_c(\phi(\theta))$  et donc au termes de proposition 5.10, on a  $Q(c) \circ \phi \cap Q(c) \neq \emptyset$ , donc  $\phi \in \text{Diff}(S^1)_c = Id$ , alors  $s_1 = s_2$ . On peut alors prendre  $\pi \circ \psi_c$  comme cartes de  $\text{B}_{\text{if}}(S^1, \mathbb{R}^2)$ . Le fait que les fonctions de transitions soient lisses se prouve de la même manière que pour  $\text{Imm}_a(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

La seule chose, qu'il reste à prouver est que  $\text{B}_{\text{if}}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est séparé. Pour ça on a besoin d'une lemme :

**Lemme 5.4.** *On suppose qu'il existe une suite de  $\phi_n \in \text{Diff}(S^1)$  telle que pour deux applications  $i, j \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  on a  $\lim i \circ \phi_n = j$  dans  $C^0(S^1, \mathbb{R}^2)$ , i.e. converge uniformément. Alors on peut extraire une sous-suite de  $\phi_n$  telle que  $\phi_n$  converge vers  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  simplement (alors, uniformément dans  $C^0(S^1, S^1)$ ).*

Il faut remarquer que les conditions de cette lemme sont plus générales que dans la lemme 5.1 mais le resultat est moins précis.

*Preuve.* Dans la preuve de ce lemme on aura besoin d'une lemme de Helly :

**Lemme 5.5** (Lemme de Helly). *Soit  $f_n$  est une suite de fonctionnes croissantes  $[a, b] \rightarrow [c, d]$ . On peut extraire une sous suite convergeante simplement vers une fonction  $f$ .*

On peut supposer que tout diffeomorphism  $\phi_n$  conserve l'orientation. Appliquant theoreme de Helly pour fonctions croissantes  $\gamma_n \in C^\infty([0, 2\pi], [0, 4\pi])$  telle que  $\phi_n = e^{i\gamma_n}$ , on peut extraire une sous-suite de  $\phi_n$ , qui converge vers  $\phi$  simplement (a priori  $\phi$  peut être incontinue). On sait que  $i(\theta) = j(\phi(\theta))$  et que la convergence  $i(\phi_n(\theta)) \rightarrow j(\theta)$  est continue uniformément. On va montrer que  $\phi$  est continue à gauche. Soit  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . On va montrer que  $\phi$  est continue à  $\theta_0$ . Soit  $\epsilon > 0$ , on va montrer que  $\phi(\theta) \geq \phi(\theta_0) - \epsilon$  pour  $\theta$  assez proche de  $\theta_0$ . Quitte à prendre  $\epsilon$  un peu plus petit, on peut supposer que  $i(\phi(\theta_0) - \epsilon) \neq i(\phi(\theta_0)) = j(\theta_0)$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que :

$$|i(\phi(\theta_0) - \epsilon) - i(\phi(\theta_0))| > 2\alpha$$

Soit  $\eta > 0$  tel que  $j([\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta]) \subset B(j(\theta_0), \alpha)$ .

Pour tout  $n$  assez grand, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout  $\theta$ ,  $|i(\phi_n(\theta)) - j(\theta)| < \alpha$
2.  $\phi_n(\theta_0) > \phi(\theta_0) - \epsilon$

Pour de tels  $n$ , on ne peut pas avoir  $\phi_n(\theta) \leq \phi(\theta_0) - \epsilon$  si  $\theta \in [\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta]$ . En effet, si cela arrivait, d'après 2, et comme  $\phi_n$  est continue, le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait qu'il existe  $\theta' \in [\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta]$  tel que  $\phi_n(\theta') = \phi(\theta_0) - \epsilon$ .

Mais alors

$$\begin{aligned} |i(\phi(\theta_0) - \epsilon) - i(\phi(\theta_0))| &= |i(\phi_n(\theta')) - j(\theta_0)| \\ &\leq |j(\theta') - j(\theta_0)| + |i(\phi_n(\theta')) - j(\theta')| \\ &< |j(\theta') - j(\theta_0)| + \alpha < \alpha + \alpha = 2\alpha \end{aligned}$$

C'est en contradiction avec  $|i(\phi(\theta_0) - \epsilon) - i(\phi(\theta_0))| > 2\alpha$ .

Par la même raison on peut conclure que  $\phi$  est continue à droite. Alors on a  $i \circ \phi = j$  et  $\phi$  continue. Mais comme  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  on a par le théorème d'inversion locale que  $\phi$  est une fonction différentiable. Mais comme avant on a  $\phi$  est  $C^\infty$  (parce que  $i \circ \phi = j$ ) et donc  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$ . Lorsque une suite de fonctions croissantes converge simplement vers une fonction continue, la convergence est toujours uniforme.  $\square$

A partir de ce théorème on peut conclure que

**Lemme 5.6.** *Une espace d'orbites de  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  par action de  $\text{Diff}(S^1)$  ( $= B_e(S^1, \mathbb{R}^2)$ ) est Hausdorff.*

*Démonstration.* On suppose que  $i, j$  ne sont pas séparés. Alors chaque voisinage de  $i$  intersecte un voisinage de  $j$ . Donc il existe une suite de reparamétrisations  $\phi_n, \psi_n \in \text{Diff}(S^1)$  telle que  $i \circ \psi_n - j \circ \phi_n$  est proche de 0 uniformément. Changeant  $\phi_n$ , on peut supposer que  $\psi_n = \text{Id}$ .

Alors  $j \circ \phi_n$  tend vers  $i$ . Par le lemme d'avant on a qu'il existe  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  telle que  $j \circ \phi = i$ , donc  $j$  est une reparamétrisation de  $i$  et ils sont égaux dans  $B_e(S^1, \mathbb{R}^2)$ .  $\square$

$\square$

## 5.1 Les immersions nonlibres

Ici on va considérer l'espace  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) / \text{Diff}(S^1)$ . Dans le dernier lemme du paragraphe précédent on a montré que  $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  est séparé. On veut montrer que  $\text{Diff}(S^1)_c = \{\phi \in \text{Diff}(S^1) \mid c = c \circ \phi\}$ , le groupe d'isotropie de  $c$  est un groupe cyclique d'ordre fini.

**Lemme 5.7.** *Si  $\phi \in \text{Diff}(S^1)_c$  vérifie  $\phi(\theta) = \theta$  pour un  $\theta$  quelconque  $\theta$  alors  $\phi = \text{Id}$ .*

*Preuve.* On sait que  $c'(\theta) \neq 0$  pour toute valeur de  $\theta$ , alors l'orientation de  $\phi$  est positive. Parce que (comme on l'a déjà montré) il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $c|_{[0,\epsilon]}$  est injective, alors  $\phi = Id$  sur cette intervalle. Mais on peut faire cela avec  $\theta = \epsilon$  et on conclure que  $\phi = Id$ .  $\square$

On a déjà vu que si pour  $c \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  et  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$ , tel que  $\phi \neq Id$  et  $c \circ \phi = c$ , alors  $|\phi(1) - 1| > \epsilon$  pour epsilon, qui dépend de  $c$ .

**Proposition 5.8.** *Le groupe d'isotropie  $\text{Diff}(S^1)_c$  est un groupe cyclique d'ordre fini.*

*Preuve.* On peut prendre un difféomorphisme  $\phi \neq Id$  dans  $\text{Diff}(S^1)_c$ , qui minimise  $|\phi(1) - 1|$  (il existe parce que pour les  $\phi_n \in \text{Diff}(S^1)_c$  on a  $c \circ \phi_n = c$  et alors d'après le lemme d'avant, il existe  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  tel que  $\lim \phi_n = \phi$ ).  $\phi$  est, évidemment dans  $\text{Diff}(S^1)_c$  et  $|\phi(1) - 1| \geq \epsilon > 0$ . On va montrer que  $\phi$  engendre  $\text{Diff}(S^1)_c$ . Si on a  $\psi \in \text{Diff}(S^1)_c$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} \psi \neq \phi^n$ , alors on peut choisir  $m \in \mathbb{N}$ , tel que  $m$  est minimal pour la propriété  $\phi^m(1) > \psi(1)$  (ici on met un ordre sur  $S^1 - 1$  compatible avec l'orientation positive). Comme  $\psi$  est croissante, on prend l'inverse et obtiens  $|\psi^{-1}(1) \circ \phi^m - 1| < |\phi(1) - 1|$  (l'inegalite stricte par la dernière lemme). Contradiction. Il reste a montrer que le groupe est fini. Mais si ce n'est pas le cas, on obtient une contradiction en considérant le min des  $m$  tels que  $\phi^m(1) > 1$ .  $\square$

Maintenant on va étudier l'application naturelle  $\pi : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$ . Pour ca on a besoin de théorème suivante :

**Théorème 5.9** (Théorème de Helly). *Soit  $F_n$  une suite des fonctions croissantes  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est simplement bornée. Alors il existe une sous-suite (qu'on appellera  $F_n$ ) croissante et une fonction  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante, continue a droite tel que :  $\forall x$  où  $G$  est continue on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$ .*

On a les propriétés suivantes pour l'application  $\pi$  :

**Proposition 5.10.** 1.  $Q(c)$  est invariant par  $\text{Diff}(S^1)_c$

2. Si  $Q(c) \circ \phi \cap Q(c) \neq \emptyset$ , alors  $\phi \in \text{Diff}(S^1)_c$  (pour  $\epsilon$  assez petit dans la définition de  $Q(c)$ )
3.  $Q(c) \circ \text{Diff}(S^1)$  est un voisinage de l'orbite  $c \circ \text{Diff}(S^1)$  dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  et il admet un rétraction lisse  $r$  sur  $c \circ \text{Diff}(S^1)$  avec pour fibre  $r^{-1}(c \circ \phi) = Q(c \circ \phi)$

*Preuve.* 1. C'est évident d'après par la définition de  $Q(c)$  comme image de la fonction  $C^\infty(S^1, ]-\epsilon, \epsilon[) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) : f \mapsto c + fn_c$ .

2. C'est la partie la plus difficile. Nous allons utiliser le lemme 3.8. Pour préciser que  $Q(c)$  dépend de  $\epsilon$  on va la noter  $Q_\epsilon(c)$ . On va supposer que pour chaque  $\epsilon$  on a  $Q_\epsilon(c) \circ \phi \cap Q_\epsilon(c) \neq \emptyset$ . Mais il existe alors des suites  $\epsilon_n \in \mathbb{R}_+$ ;  $f_n^1, f_n^2 \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ ,  $|f_n^1|, |f_n^2| < \epsilon_n$ ;  $\phi_n \in \text{Diff}(S^1)$  telles que  $c(\theta) + f_n^1(\theta)n_c(\theta) = c(\phi_n(\theta)) + f_n^2(\phi_n(\theta))n_c(\phi_n(\theta))$ . Quand  $n$  tend vers  $\infty$  on va avoir que  $c(\phi_n(\theta))$  tend vers  $c(\theta)$  uniformément. Appliquant

la lemme 5.4 on voit que on peut extraire une sous-suite de  $\phi_n$  qui converge uniformément vers  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  telle que  $c \circ \phi = c$ , alors  $\phi \in \text{Diff}(S^1)_c$ . Mais comme  $c + f \cdot n_c = c \circ \psi + f \cdot n_c \circ \psi$  pour  $\psi \in \text{Diff}(S^1)_c$ , on peut supposer que  $\phi = Id$ . On veut prouver qu'à partir d'un certain instant  $\phi_n = Id$ . C'est vraie parce que sinon on peut fixer  $\theta_0 \in S^1$  et trouver une sous-suite de  $\phi_n$  (on va l'appeler  $\phi_n$ ) telle que pour chaque  $\epsilon_0 > 0$  on a  $0 < |\phi_n(\theta_0) - \theta_0| < \epsilon_0$ , mais par le lemme 3.8 on sait que si  $Q_\epsilon(c) \circ \phi \cap Q_\epsilon(c) \neq \emptyset$ , alors  $\phi(\theta_0)$  est  $\theta_0$  ou  $\phi(\theta_0)$  est loin de  $\theta_0$ . Donc on a  $\phi_n(\theta_0) = \theta_0$  à partir d'un certain instant. Donc on a  $Q_\epsilon(c) \circ \phi \cap Q_\epsilon(c) \neq \emptyset$  pour  $\phi \in \text{Diff}(S^1)$  et  $\phi$  à un point fixe. On a déjà montré ce fait dans le lemme 3.8 et on a vu que  $\phi = Id$ , alors  $f_1 = f_2$  et donc  $Q_\epsilon(c) \circ \phi \cap Q_\epsilon(c) = \emptyset$  si  $\phi \notin \text{Diff}(S^1)_c$ .

3. On va noter pour  $(s_1, s_2) \in V(c) \subset C^\infty(S^1, \mathbb{R}) \times \text{Diff}(S^1)$ ,

$$\phi_c : V(c) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2), \phi_c((s_1, s_2)) = c \circ s_2 + s_1 \circ s_2 \cdot n_c \circ s_2$$

, ou  $V(c)$  est un voisinage de  $(0, Id)$  telle que  $V_\epsilon(c) = \{s_1 \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}) \mid |s_1| < \epsilon\} \times \text{Diff}(S^1)$  pour  $\epsilon > 0$ . C'est facile a voir que  $\phi_c(V(c))$  est un voisinage ouvert de  $c$  dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  (c'est une union des ouvertes

$$\{c_1 \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \mid |c_0 - c_1| < \epsilon\}$$

pour  $c_0 \in c \circ \text{Diff}(S^1)$ ).

$Q_\epsilon(c) \circ \text{Diff}(S^1) = \text{Im}(\phi_c(V_\epsilon(c)))$  est un voisinage ouvert de  $c$  dans  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ . Et  $Q_\epsilon(c \circ \phi) \circ \text{Diff}(S^1) = \text{Im}\phi_c(V_\epsilon(c \circ \phi)) = \text{Im}\phi_c(V_\epsilon(c))$ , donc  $Q_\epsilon(c) \circ \text{Diff}(S^1)$  est un voisinage ouvert de l'orbite de  $c$  par l'action de  $\text{Diff}(S^1)$ . Pour montrer la partie avec rétraction, on introduit une application pour  $s \in V_\epsilon(c)$ ,  $t \in [0, 1]$   $F(t, s) = \phi(c, (s_1 \cdot t, s_2))$  et comme cette application ne dépend pas du choix de  $c_2$  dans classe d'équivalence de  $\text{Diff}(S^1)_c$ , on peut considérer une fonction

$$\Phi(t, u) : [0, 1] \times \text{Im}(\phi_c(V_\epsilon(c))) \rightarrow \text{Im}(\phi_c(V_\epsilon(c))), \Phi(t, u) = \phi_c(F(t, \phi_c^{-1}(u)))$$

où  $\phi_c^{-1}(u)$  nous donne une inverse quelconque. On voit bien que c'est une rétraction lisse de  $\text{Im}\phi_c(V_\epsilon(c))$  sur orbite  $c \circ \text{Diff}(S^1)$ . □

Donc on voit que pour chaque point de  $x \in B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  on peut choisir un voisinage  $U$  tel que :

- si  $x$  est libre, alors  $U$  est diffeomorphe a une espace de Fréchet. ( $B_i(S^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété localement au points libres)
- si  $x$  n'est pas libre, alors  $\pi^{-1}(U)$  est une union d'espaces  $Q(c) \circ \phi \mid \phi \in \text{Diff}(S^1)$  pour lesquelles la propriété suivante tiens : si  $Q(c) \circ \phi$  intersecte  $Q(c) \circ \psi$ , alors  $\phi \circ \psi^{-1} \in \text{Diff}(S^1)_c$ . Donc chaque 'feuille'  $Q(c) \circ \phi$  intersecte juste un nombre fini d'autres feuilles.

Nous allons maintenant expliquer pourquoi cela est intéressant et nous donnons alors la définition suivante :

**Définition 5.1.** Un orbifold  $O$  est un espace séparé avec recouvrement  $U_i$  stable par intersection finie. A chaque  $U_i$  on associe un groupe fini  $\Gamma_i$  et l'action sur un espace ouvert  $\tilde{U}_i \subset F$  ou  $F$  est un espace de Fréchet avec une homéomorphisme  $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$ ,  $\Phi_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$  les applications naturelles. Si  $U_i \subset U_j$ , alors il existe une homomorphisme injectif

$$f_{ij} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$$

et un plongement  $\tilde{\phi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$ , qui commute avec l'action de  $\Gamma_i$  (qui est donnée sur  $\tilde{U}_j$  par  $f_{ij}$ ) avec les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\ \Phi_i \downarrow & & \Phi_j \downarrow \\ \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\phi_{ij}=\tilde{\phi}_{ij}/\Gamma_i} & \tilde{U}_j/\Gamma_i \\ & & \\ U_i & \xrightarrow{i_{ij}} & U_j \\ \phi_i \downarrow & & \phi_j \downarrow \\ \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\tilde{f}_{ij} \circ \phi_{ij}} & \tilde{U}_j/\Gamma_j \end{array}$$

Où  $i_{ij} : U_i \rightarrow U_j$  est l'inclusion et  $\tilde{f}_{ij} : \tilde{U}_j/\Gamma_i \rightarrow \tilde{U}_j/\Gamma_j$  est une application induit par  $f_{ij}$ .

*Note.* On ne demande pas que  $\phi_{ik} = \phi_{kj} \circ \phi_{ij}$ .

On peut dire que  $B_1(S^1, \mathbb{R}^2)$  est un orbifold (voir [5]). Nous allons simplement donner une idée de la preuve. La seule chose qui reste à prouver (et ce n'est pas simple) que dans un voisinage de  $c$  non libre on a une structure d'orbifold. On peut voir la projection  $\pi : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow B_1(S^1, \mathbb{R}^2)$  comme une projection de  $D$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$  sur  $D/\mathbb{Z}_n$ , ou  $\mathbb{Z}_n$  agit sur  $D$  par les rotations car notre lemme nous dit que dans  $c$  les préimages de voisinages se 'recouvrent'  $n$  fois.

## 6 Apendix : Notions de base sur les variétés de Fréchet

Dans cet annexe, nous suivons principalement [2]. Mais nous nous contenterons de donner les définitions qui seront utilisées dans notre exposé.

**Définition 6.1** (Semi-norme). Une semi-norme sur un espace vectoriel est une application  $\|\cdot\| : F \rightarrow \mathbb{R}$  qui a les propriétés suivantes :

- $\|f\| \geq 0$
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
- $\|cf\| = |c| \|f\|$

**Définition 6.2** (Espace vectoriel topologique localement convexe (noté evtlc)). c'est un espace vectoriel  $F$  muni d'un ensemble de semi-normes  $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$  et de l'unique topologie dans laquelle la sousbase d'ouverts se compose de  $\{f \in F : \|f - g\|_n < \epsilon, g \in F, \epsilon \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ .

**Proposition 6.1.** - La topologie sur un evtlc  $F$  est séparée si et seulement si  $\|f\|_n = 0, \forall n \in M$  implique que  $f = 0$ .  
 - La topologie sur un evtlc  $F$  est métrisable si elle peut être définie par une collection dénombrable de semi-normes.

**Définition 6.3** (Espace de Fréchet). Espace de Fréchet - c'est un evtlc qui est complet, séparé et métrisable.

La notation  $F$  désignera toujours un espace de Fréchet.

**Définition 6.4** (Sous-espace). Une sous-espace de Fréchet  $G$  d'un espace de Fréchet  $F$  est un sous-espace vectoriel, muni de la topologie induite (c'est donc un espace de Fréchet avec les normes  $\{\|\cdot\|_n|G : n \in M\}$ ), qui est complet.

On suppose que le lecteur connaît des exemples fondamentaux d'espaces de Fréchet ainsi que les propriétés fondamentales suivantes, que l'on donne sans preuve sans preuve :

- Un espace fermé sur un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.
- Un espace quotient d'espace de Fréchet par un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.
- Les théorèmes de Hanh-Banach et de l'application ouverte sont vrais pour des espaces de Fréchet. (Ici on utilisera le théorème d'Hanh-Banach sous la forme : si pour toute forme linéaire  $l$  et pour deux éléments  $x, y$  d'un espace de Fréchet on a  $l(x) = l(y)$ , alors  $x = y$ ).

On travaillera avec des fonctions de deux variables

$$L : (U \subseteq F') \times F \rightarrow H$$

linéaire par rapport à la seconde variable, continue comme application

$$L : (U \subseteq F') \times F \rightarrow H$$



, mais pour mettre en évidence la linéarité, on notera  $L(f)g$  la quantité  $L(f, g)$ .

## 6.1 La notion d'intégrale de Riemann dans un espace de Fréchet

On notera  $PL([a, b], F)$  l'ensemble des fonctions affines par morceaux. En utilisant le fait que  $[a, b]$  est compact, on voit facilement (comme dans le cas  $F = \mathbb{R}$ ) que  $PL([a, b], F)$  est dense dans l'espace de fonctions continue  $C^0([a, b], F)$ .

**Théorème-Définition 6.2** (existence de l'intégrale). *Pour un espace de Fréchet  $F$  et une courbe paramétrée  $f : [a, b] \rightarrow F$  il existe un unique élément  $\int_a^b f(t)dt \in F$  tel que*

1. Pour toute forme linéaire  $l : F \rightarrow \mathbb{R}$

$$l\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b l(f(t))dt$$

2. Pour toute semi-norme  $\|\cdot\|$  continue

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

3.  $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$
4.  $\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
5.  $\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt$

*Preuve.* L'unicité de cet élément découle directement du théorème d'Hahn-Banach car on connaît les valeurs de toute forme linéaire sur l'intégrale. Pour l'existence on peut définir l'intégrale sur les formes linéaires par  $\int_a^b f_1 + tf_2 dt = (a-b)(f_1 + \frac{a+b}{2}f_2)$ . On va étendre cette définition aux fonctions linéaires par morceaux  $PL([a, b], F)$ , utilisant la 3-ème propriété. Pour les autres fonctions on peut les approcher par des éléments de  $PL([a, b], F)$  et définir l'intégrale comme limite d'approximations. On voit facilement qu'avec cette définition toutes les propriétés sont vraies parce qu'elles le sont sur  $PL([a, b], F)$  (par passage à la limite). Le fait qu'une intégrale converge si son argument converge vient de la 2-ème propriété.  $\square$

On obtient facilement d'après la première propriété :

**Corollaire.** *Pour  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - fonction croissante et  $f$  - une courbe paramétrée dans  $F$ , définie pour  $\gamma(a) \leq t \leq \gamma(b)$ , on a :*

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(u)du = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

En utilisant de nouveau la 2-eme propriété avec le fait que  $x_0 \times [a, b]$  est compact on obtient

**Corollaire.** Si  $X$  est un espace topologique et  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue. On définit  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

alors  $g$  est continue aussi.

## 6.2 Les courbes paramétrées

**Définition 6.5.** Pour une courbe paramétrée  $f(t)$  on définit la dérivée de  $f$  comme :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Si cette limite existe et est continue, on dit que  $f$  est  $C^1$ .

**Théorème 6.3.** 1. Si  $f(t)$  est une courbe  $C^1$  pour  $a \leq t \leq b$ , alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

2. Si  $f(t)$  est  $C^0$  courbe pour  $a \leq t \leq b$  et  $g(t) = \int_a^t f(u) du$ , alors  $g(t)$  est  $C^1$  et  $g'(t) = f(t)$ .

*Preuve.* La première propriété vient directement de l'analogie avec les courbes réelles de la première propriété du théorème-définition 3.1.1. , et du fait que toute forme linéaire commute avec dérivation.

La deuxième est un corollaire de l'assertion :  $\int_a^{a+h} f(t) dt = h \int_0^1 f(a+hu) du$  qui vient de la 1-re propriété de définition d'intégrale.  $\square$

## 6.3 La dérivée directionnelle

Les lettres  $F, G$  désignent ici des espaces de Fréchet,  $U$  - un sous-espace ouvert de  $F$  et  $P$  pour une application non nécessairement linéaire continue  $P : U \subseteq F \rightarrow G$ .

**Définition 6.6.** La dérivée de  $P$  au point  $f \in U$  dans le direction  $h \in F$  est

$$DP(f)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+th) - P(f)}{t}$$

On dira que  $P$  est dérivable dans le direction  $h$  si la limite existe. Si elle est continue comme une fonction de  $U \times G$ , alors, on dire  $P$  est  $C^1$ .

*Remarque.* On note que la définition dans le cas  $G = \mathbb{R}$  est compatible avec la définition classique.

**Lemme 6.4.** Si  $P$  est  $C^1$  et  $f, h \in F$ , alors  $P(f + th)$  est une fonction  $C^1$  de  $f + th$  qui est dans  $U$  pour  $t \in [0, 1]$  alors

1.

$$P(f + th)' = DP(f)h$$

2.

$$P(f + h) - P(f) = \int_0^1 DP(f + th)h dt$$

*preuve.* La première propriété découle directement de la définition et la seconde de la première et de 6.3.  $\square$

Comme pour des fonctions sur  $\mathbb{R}$  on a les résultats suivants :

**Lemme 6.5.** 1.  $DP(f)ch = cDP(f)h$ .

2.  $\frac{P(f+th)-P(f)}{t} = \int_0^1 DP(f + ut)h du$

3. Pour  $h_1, h_2 \in F$

$$DP(f)(h_1 + h_2) = DP(f)h_1 + DP(f)h_2$$

*Preuve.* 1.  $DP(f)ch = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+tc h)-P(f)}{t} = c \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f+th)-P(f)}{t} = cDP(f)h$ .

2. C'est une conséquence du lemme précédent et de la formule de changement de variable.

3.

$$\begin{aligned} DP(f)(h_1 + h_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + t(h_1 + h_2)) - P(f)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + t(h_1 + h_2)) - P(f + th_1)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th_1) - P(f)}{t} \end{aligned}$$

Par le lemme précédent on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + t(h_1 + h_2)) - P(f + th_1)}{t} &= \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 DP(f + th_1 + tuh_2)h_2 du &= DP(f)h_2 \end{aligned}$$

comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} DP(f + th_1 + tuh_2)h_2 = DP(f)h_2$$

.

De manière analogue :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th_1) - P(f)}{t} = DP(f)h_1$$

Donc

$$DP(f)(h_1 + h_2) = DP(f)h_1 + DP(f)h_2$$

.

$\square$

## 6.4 Règle de dérivation des composées

**Lemme 6.6.** *Si  $P : U \subseteq F \rightarrow G$  est une application continue et  $U$  est convexe. Alors  $P$  est différentiable si et seulement s'il existe une application continue  $L : (U \subseteq F) \times (U \subseteq F) \times F \rightarrow G$  linéaire par rapport à la dernière coordonnée, telle que :*

$$P(f_1) - P(f_2) = L(f_1, f_2)(f_1 - f_2)$$

De plus  $DP(f)h = L(f, f)h$ .

*Preuve.* C'est une conséquence de la 2-ème partie du lemme 6.4.  $L(f_1, f_2)h = \int_0^1 DP((1-t)f_1 + tf_2)h dt$ .  $\square$

**Théorème 6.7** (Dérivée de composée). *Si  $P, Q$  sont des opérateurs  $C^1$ , alors leur composition  $Q \circ P$  est aussi  $C^1$  et  $D(Q \circ P)(f)h = DQ(P(f)) \circ DP(f)h$*

*Preuve.* On va utiliser les formules suivantes, qui viennent directement du théorème précédente :

$$P(f_1) - P(f_2) = L(f_1, f_2)(f_1 - f_2)$$

$$Q(g_1) - Q(g_2) = M(g_1, g_2)(g_1 - g_2)$$

Donc

$$QP(f_1) - QP(f_2) = M(P(f_1), P(f_2))(P(f_1) - P(f_2)) = M(P(f_1), P(f_2))L(f_1, f_2)(f_1 - f_2)$$

. Et par la deuxième assertion du théorème précédent on a  $D(QP)(f)h = M(P(f), P(f))L(f, f)h = DQ(P(f))DP(f)h$ .  $\square$

## 6.5 Les dérivées partielles

**Définition 6.7.** Les dérivées partielles sont définies par :

$$D_f P(f, g)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th, g) - P(f, g)}{t}$$

$$D_g P(f, g)k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + tk, g) - P(f, g)}{t}$$

Comme dans la section précédente on peut déduire

**Lemme 6.8.** *La dérivée partielle  $D_f P(f, g)$  existe et est continue si et seulement s'il existe une application continue  $L : (U \subseteq F) \times (U \subseteq F) \times (U \subseteq F) \times F \rightarrow G$  linéaire par rapport à la dernière coordonnée, telle que*

$$P(f_1, g) - P(f_2, g) = L(f_1, f_2, g)(f_1 - f_2)$$

De plus  $D_f P(f, g)h = L(f, f, g)h$ .

**Théorème 6.9.** *Les dérivées partielles  $D_f P, D_g P$  existent et sont continues si et seulement si la dérivée totale  $DP$  existe et est continue, de plus :*

$$DP(f, g)(h, k) = D_f P(f, g)h + D_g P(f, g)k$$

*Preuve.* La condition est bien suffisante en prenant dans la formule de dérivation totale  $h = 0$  et après  $k = 0$ .

On va prouver la nécessité et la formule en utilisant le lemme précédent : si

$$P(f_1, g) - P(f_2, g) = L(f_1, f_2, g)(f_1 - f_2)$$

$$P(f, g_1) - P(f, g_2) = K(f, g_1, g_2)(g_1 - g_2)$$

, alors

$$\begin{aligned} DP(f, g)(h, k) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th, g + tk) - P(f, g)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f + th, g + tk) - P(f, g + tk)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(f, g + tk) - P(f, g)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} L(f + th, f, g)h + \lim_{t \rightarrow 0} K(f, g + th, g)k = L(f, f, g)h + K(f, g, g)k = \\ &= D_f P(f, g)h + D_g P(f, g)k \end{aligned}$$

□

## 6.6 Les dérivées secondes

On va définir la dérivée seconde comme une dérivée de dérivée par rapport à la première coordonnée :

**Définition 6.8.**

$$D^2 P(f)h, k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{DP(f + tk)h - DP(f)h}{t}$$

On dit que  $P$  est  $C^2$  si cette limite existe et continue comme une application :

$$D^2 P : (U \subseteq F) \times F \times F \rightarrow G$$

Comme la première dérivée est linéaire, on obtient :

**Lemme 6.10.** *Si  $f$  est  $C^2$ , alors  $D^2 P(f)h, k$  est bilinéaire en  $h, k$ .*

**Théorème 6.11.** *Si  $P$  est  $C^2$  alors*

$$D^2 P(f)h, k = \lim_{t, u \rightarrow 0} \frac{P(f + th + uk) - P(f + th) - P(f + uk) + P(f)}{tu}$$

*Preuve.* On utilise les identités :

$$\begin{aligned}\frac{P(f+th)-P(f)}{t} &= \int_0^1 DP(f+th\alpha)h d\alpha \\ \frac{P(f+th+uk)-P(f+uk)}{t} &= \int_0^1 DP(f+uk+th\alpha)h d\alpha \\ \frac{DP(f+uk+th\alpha)h - DP(f+th\alpha)h}{u} &= \int_0^1 D^2P(f+th\alpha+th\beta)h, kd\beta\end{aligned}$$

Alors :

$$P(f+th+uk)-P(f+th)-P(f+uk)+P(f) = \int_0^1 \int_0^1 D^2P(f+th\alpha+th\beta)h, kd\alpha d\beta$$

□

**Corollaire.** Si  $P$  est  $C^2$ , alors  $D^2P$  est symétrique :

$$D^2P(f)h, k = D^2P(f)k, h$$

## 6.7 Les dérivées d'ordre supérieur

Les dérivées d'ordre supérieur sont définies comme les dérivées de dérivées, par récurrence :

**Définition 6.9.**

$$D^n P(f)h_1, \dots, h_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D^{n-1}P(f+th_n)h_1, \dots, h_{n-1} - D^{n-1}P(f)h_1, \dots, h_{n-1}}{t}$$

**Théorème 6.12.** Si  $P$  est  $C^n$ , alors  $D^n P(f)h_1, \dots, h_n$  est symétrique par rapport à  $h_1, \dots, h_n$ .

*Preuve.* Par récurrence  $D^{n-2}P(f)$  est symétrique par rapport à  $h_1, \dots, h_{n-2}$  et  $D^2(D^{n-2}P(f)) = D^n P(f)$  est symétrique par rapport à  $h_{n-1}, h_n$ , de plus  $D^{n-1}P(f)$  est symétrique par rapport à  $h_1, \dots, h_{n-1}$ , donc  $D^n P(f)$  est également symétrique par rapport à  $h_1, \dots, h_n$ . □

**Définition 6.10.** Si  $P : U \subseteq F \rightarrow V \subseteq G$  est une application entre des sous espaces ouverts d'espaces de Frechet, on définit le tangent comme  $TP : U \subseteq F \times F \rightarrow V \subseteq G \times G$  par

$$TP(f, h) = (P(f), DP(f)h)$$

.

*Note.*  $TP$  est définie et continue si et seulement si  $P$  est  $C^1$ . On veut aussi définir  $T^n P$  par récurrence :  $T^n P = T^{n-1}(TP)$ .  $T^n P$  est définie et continue si et seulement si  $P$  est  $C^n$ .

**Théorème 6.13.** *Si  $P, Q$  sont de classe  $C^n$ , alors leur composée est également de classe  $C^n$  et*

$$T^n(QP) = T^n(Q)T^n(P)$$

*Preuve.* La propriété est vraie au rang  $n=1$ , la formule de dérivation des composées permet de conclure par récurrence.  $\square$

## 6.8 Variétés de Fréchet

**Définition 6.11** (Variété de Fréchet). Une variété de Fréchet  $X$  est un espace topologique séparé muni d'une collection d'homéomorphismes  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset F_i$  où les  $U_i : i \in I$  sont des ouverts de  $X$ , qui forment sous-base de la topologie sur  $X$  et  $V_i = \phi_i(U_i)$  sont des ouverts de  $F_i$ , où les  $F_i$  sont des espaces de Fréchet. Ces applications doivent vérifier la condition de compatibilité suivante : les fonctions de transition  $\phi_i \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  sont  $C^\infty$ . L'ensemble maximal de ces applications qui sont compatibles s'appelle un atlas.

Pour avoir plus d'exemples sur les variétés de Fréchet, voir l'article de Nash et Moser.

Ici nous allons simplement donner les exemples, que l'on utilisera par la suite.

**Proposition 6.14.**  *$\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété.*

*Preuve.* C'est un espace ouvert d'un espace de Fréchet  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , car  $\mathbb{S}^1$  est compact, donc pour  $c \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $|c'(\theta)| > \epsilon$  pour chaque  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Et donc un voisinage  $\{c + f \mid f \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), |f'| < \epsilon\}$  sera dans  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .  $\square$

## 6.9 Sous variétés

**Définition 6.12.**  $N$  est une sous variété de  $M$ . Si pour point dans  $N$  il existe une carte locale de  $M$  telle que il existe des espaces de Fréchet  $F, G$  tels que l'espace de Fréchet, associé à la carte est  $F \times G$  et  $N$  est l'image de  $F \times 0$ .

*Note.* Une sous espace ouvert d'une variété de Fréchet est un variété de Fréchet.

## 6.10 Fibrés vectoriels

**Définition 6.13.** On dit que  $V$  est un fibré de Fréchet sur  $M$  avec la projection  $\pi$  si pour tout  $x \in M$  il existe  $U \subseteq F$  ouvert de l'espace de Fréchet  $F$ , associé avec le carte, contient  $x$ , telle que il existe une carte de  $V$  à valeurs dans  $U \subseteq F \times G$  pour  $G$  espace de Fréchet tel que la projection  $\pi$  corresponde à la projection de  $U \subseteq F \times G$  sur  $U$  et sur chaque fibre l'espace vectoriel associé a la même structure que  $G$ .

**Définition 6.14** (Le fibré tangent).  $M$  - variété de Fréchet. On définit le fibré tangent comme dans la théorie des variétés de dimension finie. Les cartes de  $TM$  sont juste les fonctions  $DP$  pour  $P$  carte sur  $M$ .

*Note.* Pour  $c \in \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  on a  $T_c \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

## 6.11 Applications entre variétés

**Définition 6.15.** Une application  $P : M \rightarrow N$  est une application *lisse* entre les variétés de Fréchet  $M, N$  si restreinte sur les cartes, cette application est lisse.

**Exemple 6.1** (Application entre fibrés tangents). Si  $P : M \rightarrow N$  est lisse entre  $M, N$  - variétés de Fréchet, alors l'application  $TP : TM \rightarrow TN$  est lisse aussi car sur les cartes l'application  $TG$  agit comme l'application  $TP$  qui est lisse.

**Définition 6.16.** Un groupe de Lie de Fréchet  $G$  est une variété de Fréchet munie d'une structure de groupe telle que l'application  $\mu : G \times G \rightarrow G$  ( $x, y \mapsto xy$ ) et l'application d'inversion  $\nu : G \rightarrow G$  ( $x \mapsto x^{-1}$ ) sont lisses aussi.

Dans le théorème quand où l'on montre que  $\text{Imm}_a(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est une variété on utilisera le fait que  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  est un groupe de Lie et que l'action de  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  sur  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est lisse. Il faut donc prouver ces résultats :

**Proposition 6.15.**  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  est groupe de Lie.

*Preuve.* Premièrement nous allons prouver que  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  est une variété de Fréchet. Donnons les cartes de  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ . Si  $\gamma \in \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ , on considère alors l'ensemble des applications  $U_\gamma = \{f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} \mid |f'(\theta)| < \epsilon, |f(\theta)| < \pi\}$  pour  $\epsilon$  petit. Et les cartes  $\phi_\gamma : U \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$   $f \mapsto \gamma \cdot e^{if}$ . L'image de ces cartes est dans  $\text{Imm}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  car  $\frac{d\phi_\gamma(f)}{d\theta} = \gamma'(\theta) \cdot e^{if(\theta)} + \gamma(\theta) \cdot e^{if(\theta)} f'(\theta)$  est non nul pour  $\epsilon$  petit. Nous devons encore prouver que les applications de transition.

Si  $\gamma_1 \cdot e^{if_1}(\theta) = \gamma_2 \cdot e^{if_2}(\theta)$  alors  $e^{i(f_2 - f_1)}(\theta) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ , mais la partie de droite ne dépend pas de  $f_1, f_2$  donc si  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que  $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = e^{ig}$  (cela existe, il suffit de considérer une paire de  $f_1, f_2$  fixée  $g = f_2 - f_1$  dans l'intersection). Ainsi,  $f_2 = f_1 + g$ , dépend de façon lisse de  $f_1$ . Les fonctions de transition sont donc lisses, et  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  est une sous-variété. Montrons maintenant que la composition est lisse dans  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ , en se restreignant aux cartes de  $\gamma_1, \gamma_2$ . Il faut montrer que la solution en  $h$  de l'équation  $\gamma_1(\gamma_2 \cdot e^{if_2}(\theta)) e^{if_1(\gamma_2 \cdot e^{if_2}(\theta))} = \gamma_1(\gamma_2(\theta)) \cdot e^{ih(\theta)}$  dépend de façon lisse de  $f_1, f_2$ . C'est le cas parce qu'on peut également trouver une fonction  $g$  telle que  $A(\theta) = \frac{\gamma_1(\gamma_2 \cdot e^{if_2}(\theta))}{\gamma_1(\gamma_2(\theta))} = e^{ig(\theta)}$ .  $g$  dépend de façon lisse de  $f_1, f_2$  car c'est une fonction primitive de  $\frac{A'(\theta)}{A(\theta)}$ . Et alors

$h = g + if_1(\gamma_2 \cdot e^{if_2})$  dépend de façon lisse de  $f_1, f_2$ . La composition est donc lisse. Concernant l'inversion, il suffit donc de prouver qu'elle est lisse en  $Id$  (quitte à composer). On suppose que  $F(t, \theta) : [0, \epsilon] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  est une fonction telle que  $F(t, \cdot) \in \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  et la fonction  $[0, \epsilon] \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ , défini par  $t \mapsto F(t, \cdot)$  est  $C^\infty$  et  $F(0, \cdot) = Id$ . On va noter  $G(t, \cdot)$  sa inverse en point  $t$ . Alors il faut prouver que la fonction  $\Lambda : [0, \epsilon] \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ , défini par  $t \mapsto G(t, \cdot)$  est  $C^\infty$ .

Premièrement on a  $\Lambda$  continue (c'est parce que si  $\phi_\alpha \rightarrow \phi$ , alors  $\phi_\alpha^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$  parce que on a toujours égalité  $\phi_\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta)) = \theta$ ). On va prouver que  $G$  est différentiable en  $t = 0$ . Notons qu'on a égalité  $G(t, F(t, \theta)) = \theta$  pour chaque  $t, \theta$ . On va fixer  $\theta$ .

L'application  $F(t, \theta)$  est  $C^\infty$  (c'est presque évident que si l'application  $t \rightarrow$



$\text{Diff}(S^1)$  induit par  $F$  qui est  $C^\infty$ , alors l'application  $F(t, \theta)$  pour  $\theta$  fixé est  $C^\infty$  (par contre le fait que l'application  $F(t, \theta)$  pour chaque  $\theta$  fixé est continue n'implique pas que  $F$  est continue comme une fonction de  $[0, \epsilon] \rightarrow \text{Diff}(S^1)$ ))

Par la theoreme d'inversion de dimension finie on obtient que pour chaque  $\theta$  fixé  $G(t, \theta)$  est différentiable et on a égalité  $\frac{\partial G(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0} + G(0, \theta) \frac{\partial F(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ . Donc  $\frac{\partial G(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \theta \frac{\partial F(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ . De telle façon on a prouvé que la limite (ici et après on parle de limite dans la définition de dérivation  $\frac{\partial G(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ ) existe au sens simple par rapport a  $\theta$ .

On veut que cette limite existe au sens uniforme par rapport a  $\theta$  (ou si  $\epsilon_n$  est une suite qui tend vers 0, alors  $\frac{G(\epsilon_n, \theta) - G(0, \theta)}{\epsilon_n}$  tend vers  $-\theta \frac{\partial F(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0}$  uniformément). Mais par la même raisonnement comme avant on peut obtenir que la fonction  $G$  est  $C^\infty$  comme la fonction de  $[0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow S^1$ . Donc pour la suite  $\epsilon_n$  qui tend vers 0 on a  $\left| \frac{G(\epsilon_n, \theta) - G(0, \theta)}{\epsilon_n} + \theta \frac{\partial F(t, \theta)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right| < \epsilon_n \sup_{0 < t < \epsilon_n} G_{tt}(t, \theta)$  donc ce convergence est uniforme, donc  $G$  est  $C^1$ . Par la même raisonnement on obtient que  $G$  est  $C^\infty$ .  $\square$

*Remarque.* En fait, si l'on veut prouver qu'un groupe est un groupe de Lie, en dimension fini on sait qu'il suffit de prouver que l'application de multiplication est lisse. En dimension infini cela reste vraie dans le cas particulier où notre variété est "tame" (voir l'article de Nash et Moser) et multiplication est "tame" aussi, car dans ce cas, on peut utiliser théorème d'inversion de Nash-Moser et conclure par même raisonnement. Pour plus de détails voir [2].

*Note.* Par le même raisonnement on peut montrer que  $\text{Diff}_1^+(S^1)$ ,  $\text{Diff}_1^-(S^1)$  sont des groupes de Lie.

**Corollaire** (L'espace tangent de  $\text{Diff}(S^1)$ ). *On peut identifier  $T_\gamma \text{Diff}(S^1)$  avec l'application  $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ .*

La proposition suivante est très importante car elle nous permet de dire que si on fait un reparamétrisation  $\sigma : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$  qui est lisse, alors l'application  $F : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ ,  $c \mapsto c \circ \sigma(c)$  est lisse.

**Proposition 6.16** (Composition sur les variétés des application). *Si  $\gamma \in \text{Diff}(S^1)$ , alors l'application*

1.  $l_\gamma : \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$   $\alpha \mapsto \gamma \circ \alpha$
2.  $r_\gamma : \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$   $\alpha \mapsto \alpha \circ \gamma$
3.  $i_\gamma : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$   $i \mapsto i \circ \gamma$
4. *L'action de  $\text{Diff}(S^1)$  sur  $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$  est lisse.  $p : \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ .*

*sont lisses.*

*Preuve.* 1. C'est parce que  $Dl_\gamma|_\alpha(h) = d(\gamma)|_\alpha h$ , donc il est continue. On conclut par la même raison avec les dérivés partielles.

2. C'est parce que  $Dr_\gamma|_\alpha(h) = h \circ \gamma$ , donc continue et  $r_\gamma$  est linéaire.

3. Par la même raison que précédente.
4. C'est parce que  $Dp(c, \gamma)(h_1, h_2) = h_1 \circ \gamma + d(c \circ \gamma)h_2$ . Avec les dérivées partielles on fait la même chose.

□

## Références

- [1] Michor P., Mumford D., *Riemannian Geometries on Spaces of Plane Curves*. J. Eur. Math. Soc. **8** (1982), 1-48
- [2] Richard S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*. Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 65-222
- [3] Victor Guillemin, Alan Pollack *Differential Topology* Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, (1974).
- [4] Vicente Cervera, Francisca Mascaro Peter W. Michor *The orbit structure of the action of the diffeomorphism group on the space of immersions* Diff. Geom. Appl. **1991**.
- [5] Richard Palais *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups* Ann. of Math. (2) **1961**.