Théorie d'Hamilton-Jacobi et variantes

Berat Clément, Berger Maxime, Jacopin François *

Juin 2015

Résumé

Après une introduction aux équations d'évolution d'Hamilton-Jacobi, nous étudions les opérateurs de Lax-Oleinik et leur application à la régularisation de Lasry-Lions, en particulier la régularisation de sous-solutions dans la théorie d'Hamilton-Jacobi. Ceci est traité en suivant [3]. Le cas des sous-solutions en régime stationnaire est traité à la section 2, en nous appuyant sur [2]. Dans la partie 3, nous étudions plus en détail le cas de l'hamiltonien $H(t,q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2$ sur un espace de Hilbert de dimension quelconque, en reprenant alors les résultats de [1] et [5]. Enfin, à la section 4, nous discutons le lien avec la régularisation par convolution classique ainsi que le cas plus général dans les variétés différentiables paracompactes.

1 Introduction et motivations

1.1 Systèmes hamiltoniens et équations d'Hamilton-Jacobi

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable (sans bord). Nous notons $T\mathcal{M}$ son fibré tangent et $T^*\mathcal{M}$ son fibré cotangent. Considérons un hamiltonien

$$H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,q,p) & \longmapsto & H(t,q,p) \end{array}.$$

Nous souhaitons résoudre le système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \partial_p H(t,q(t),p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\partial_q H(t,q(t),p(t)) \end{cases} \tag{HS}$$

Une méthode générale pour simplifier la résolution de (HS) consiste à employer une *transformation canonique*, c'est-à-dire essentiellement une transformation dans l'espace des phases $T^*\mathcal{M}$ qui conserve le crochet de Poisson, ou bien de manière équivalente, dont la matrice jacobienne est symplectique. Une telle transformation préserve les équations (HS),

* clement.berat@ens.fr, maxime.berger@ens.fr, francois.jacopin@ens.fr

c'est-à-dire qu'elle envoie (q,p) sur (Q,P) de telle sorte que Q et P soient à nouveau solution d'un système hamiltonien (en Q et P). Dans les situations physiques, nous pouvons en général appliquer une transformation canonique bien particulière de sorte que le nouvel hamiltonien $\tilde{H}$ puisse s'écrire

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$

où F est appelée la *fonction génératrice* de la transformation canonique.

Peut-on trouver F telle que $\tilde{H}$ soit nul ? Si c'est le cas, les nouvelles variables Q et P sont des constantes, c'est-à-dire des intégrales premières lorsqu'on les considère comme des fonctions des anciennes variables q, p et du temps t. De plus, les équations qui relient q et p à Q et P donnent directement la dépendance en temps de q et p donc la solution du problème (HS).

Plaçons nous dans le cas $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$, si bien que $T\mathcal{M} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et $T^*\mathcal{M} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}$. Nous cherchons plus précisément s'il existe une fonction F de (t,q,P) telle que

$$\begin{cases} p = \partial_q F \\ Q = \partial_P F \\ H + \partial_t F = 0 \end{cases}$$

Puisque $p = \partial_q F$, la troisième équation de ce système peut être réécrite comme

$$H(t,q,\partial_q F) + \partial_t F = 0.$$

Autrement dit, nous cherchons les fonctions u en (t,q) qui vérifient

$$\partial_t u + H(t,q,\partial_q u(t,q)) = 0. \tag{HJ}$$

On appelle cette équation aux dérivées partielles dans l'espace des fonctions u de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ l'équation d'évolution d'Hamilton-Jacobi.

Nous pouvons immédiatement faire quelques remarques : comme cette équation fait intervenir $d+1$ dérivées partielles, la solution générale (si elle existe) doit dépendre de $d+1$ constantes d'intégration $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d+1}$. De plus, elle ne fait intervenir que les dérivées de u, donc si u est solution, alors $u + C$ est aussi solution pour toute constante C. Autrement dit, la solution générale de (HJ) (si elle existe) peut s'écrire sous la forme

$$u(t,q) = S(t,q,\kappa_1,\ldots,\kappa_d) + \kappa_{d+1}.$$

La fonction S correspond alors à l'action (voir un peu plus loin pour une définition précise). Nous verrons qu'elle joue un rôle primordial dans la régularisation des sous-solutions de l'équation (HJ).

Lorsque l'équation (HJ) est *stationnaire* (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du temps), l'hamiltonien H est égal à l'énergie totale du système au sens physique (bien que la physique ne soit en général pas préservée par la transformation canonique, puisque les coordonnées généralisées q et les impulsions généralisées p sont complètement mélangées dans les définitions de Q et P). On peut alors s'intéresser aux sous-solutions, c'est-à-dire aux solutions qui restent en-dessous d'un certain seuil d'énergie fixé c. On dira donc qu'une fonction u est une *sous-solution* de (HJ) si elle est lipschitzienne et qu'elle satisfait l'inégalité $H(q,\, \mathrm{d}u(q)) \leq c$ presque partout. Nous traiterons cela dans la section 2.2.

Nous verrons que le bon espace pour étudier (HJ) est $\mathcal{C}^{1,1}$, c'est-à-dire l'espace des fonctions continûment différentiables, dont la dérivée est lipschitzienne. Cela correspond aussi à l'espace naturel pour approximer les fonctionnelles $u\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, qui sont bornées et uniformément continues (on notera $\mathcal{BUC}(\mathcal{H})$ l'espace de ces applications). Nous notons aussi $\mathcal{C}^{1,1}_{loc}$ pour les fonctions continûment différentiables, dont la dérivée est localement lipschitzienne.

1.2 Action hamiltonienne, méthode des caractéristiques

Si $u(t, q)$ résout (HJ), et si $q(s)$ est une courbe dans $\mathbb{R}^d$, alors il est facile de voir par un calcul direct que u vérifie

$$u(t_1, q(t_1)) - u(t_0, q(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \partial_q u(s, q(s)) \cdot \dot{q}(s) - H(s, q(s), \partial_q u(s, q(s)))\, \mathrm{d}s. \tag{1}$$

Notons qu'il s'agit de l'action hamiltonienne de la courbe $s \mapsto (q(s), \partial_q u(s, q(s)))$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Nous appelons action hamiltonienne de la courbe $s \mapsto (q(s), p(s))$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ la quantité

$$\int_{t_0}^{t_1} p(s) \cdot \dot{q}(s) - H(s, q(s), p(s))\, \mathrm{d}s. \tag{2}$$

Les orbites (q, p) dans l'espace des phases sont des points critiques de leur action hamiltonienne, c'est-à-dire qu'on a la

Proposition 1.2.1. *La courbe $\mathcal{C}^2$ $x(t) = (q(t), p(t))\colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}$ résout* (HS) *si et seulement si toute variation $x(t, s) = (q(t, s), p(t, s))\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}$ qui est $\mathcal{C}^2$ et qui fixe les extrémités*[1] *vérifie l'égalité*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(t, s) \cdot \dot{q}(t, s) - H(t, q(t, s), p(t, s))\, dt \right) = 0$$

(où le point désigne la dérivée par rapport à t).

1. c'est-à-dire $x(t, 0) = x(t)$ pour tout t, et $q(t_0, s) = q(t_0)$, $q(t_1, s) = q(t_1)$ pour tout s

Démonstration. On suppose d'abord que $t \mapsto (q(t), p(t))$ résout (HS). Soit $(t, s) \mapsto x(t, s)$ une variation $\mathcal{C}^2$ de cette solution. Nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(t, q(t,s), p(t,s)) dt \right) \\
&\qquad = \int_{t_0}^{t_1} \partial_s|_{s=0} \left[p(t,s) \partial_t q(t,s) \right] - \partial_q H(t, q(t,0), p(t,0)) \, \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \partial_p H(t, q(t,0), p(t,0)) \, \partial_s|_{s=0}\, p(t,s) dt \\
&\qquad = \int_{t_0}^{t_1} \partial_s|_{s=0}\, p(t,s) \partial_t q(t,0) + p(t,s) \, \partial_s|_{s=0}\, \partial_t q(t,0) + \partial_t p(t,0) \, \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \partial_t q(t,0) \, \partial_s|_{s=0}\, p(t,s) dt \\
&\qquad = \int_{t_0}^{t_1} p(t,0) \partial_t \, \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) + \partial_t p(t,0) \, \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) dt \\
&\qquad = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[p(t,0) \, \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) \right] dt \\
&\qquad = p(t_1, 0) \, \partial_s|_{s=0}\, q(t_1, s) - p(t_0, 0) \, \partial_s|_{s=0}\, q(t_0, s) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité vient du fait que $q(t_0, \cdot)$ et $q(t_1, \cdot)$ sont des fonctions constantes (donc leur dérivée est nulle).

Réciproquement, il suffit de considérer la variation donnée par

$$
\begin{aligned}
q(t,s) &= q(t) + s \cdot \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) \\
p(t,s) &= p(t) + s \cdot \partial_s|_{s=0}\, p(t,s)
\end{aligned}
$$

pour obtenir que

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{q}(t) - \partial_p H(t, q(t), p(t)) \right) \cdot \partial_s|_{s=0}\, p(t,s) dt \\
&\qquad\qquad - \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{p}(t) + \partial_q H(t, q(t), p(t)) \right) \cdot \partial_s|_{s=0}\, q(t,s) dt = 0.
\end{aligned}
$$

Comme ceci est vrai pour toute courbe $t \mapsto \partial_s|_{s=0}\, q(t,s)$ de régularité $\mathcal{C}^2$ et nulle aux extrémités, on doit nécessairement avoir $\dot{q}(t) - \partial_p H(t, q(t), p(t)) \equiv 0$. De même, en considérant toutes les courbes $t \mapsto \partial_s p(t, 0)$ de régularité $\mathcal{C}^2$, on obtient

$$
\dot{p}(t) + \partial_q H(t, q(t), p(t)) \equiv 0.
$$

$\square$

Nous précisons maintenant pourquoi résoudre (HJ) nous amène à la résolution de (HS).

Théorème 1.2.2. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *un ouvert et* $u(t,q) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une solution* $\mathcal{C}^{1,1}_{loc}$ *de* (HJ). *Soit* $q(t) \colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *une courbe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $(t, q(t)) \in \Omega$ *et*

$$\dot{q}(t) = \partial_p H(t, q(t), \partial_q u(t, q(t)))$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$. *Alors, en posant* $p(t) = \partial_q u(t, q(t))$, *la courbe* $(q(t), p(t))$ *est* $\mathcal{C}^1$ *et résout* (HS).

Les courbes $q(t)$ qui satisfont les hypothèses du théorème et les trajectoires associées $(q(t), p(t))$ sont appelées les *caractéristiques* de u.

Remarque. En rajoutant des hypothèses sur la régularité de H, nous pouvons affaiblir les autres hypothèses de ce théorème (voir théorème 1.3.5).

Démonstration. Considérons une courbe lisse $\theta \colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ nulle aux extrémités (c'est-à-dire $\theta(t_0) = \theta(t_1) = 0$). Posons

$$\begin{aligned} q(t,s) &:= q(t) + s \cdot \theta(t) \\ p(t,s) &:= \partial_q u(t, q(t,s)) \end{aligned}$$

si bien que par hypothèse nous avons $\dot{q}(t,0) = \dot{q}(t) = \partial_p H(t, q(t), p(t))$, ce qui correspond à la première des deux équations de (HS).
Par ailleurs, par (1), nous avons pour tout s

$$u(t_1, q(t_1)) - u(t_0, q(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} p(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(s, q(t,s), p(t,s)) \, \mathrm{d}t.$$

Le membre de gauche de l'équation ne dépend pas de s, donc

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(t, q(t,s), p(t,s)) \, \mathrm{d}t \right) = 0$$

Admettons pour l'instant l'affirmation suivante, que nous prouverons ensuite.

Affirmation :

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(t, q(t,s), p(t,s)) \, \mathrm{d}t \right) \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t_1} \partial_q H(t, q(t), p(t)) \cdot \theta(t) - p(t) \cdot \dot{\theta}(t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si l'affirmation est vraie, alors nous avons

$$\int_{t_0}^{t_1} \partial_q H(t, q(t), p(t)) \cdot \theta(t) - p(t) \cdot \dot{\theta}(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Par une intégration par parties sur le second terme dans l'intégrale (au sens de Lebesgue, voir proposition A.3.3), nous obtenons que

$$\int_{t_0}^{t_1} (\partial_q H(t, q(t), p(t)) + \dot{p}(t)) \cdot \theta(t) \, \mathrm{d}t = 0,$$

puisque θ s'annule aux extrémités. Étant donné qu'un tel θ est arbitraire, nous avons donc $\dot{p}(t) = -\partial_q H(t, q(t), p(t))$ au sens des distributions. Or le membre de droite de cette dernière équation est continu, donc p est $\mathcal{C}^1$ et l'égalité a lieu au sens ponctuel habituel. Nous avons alors obtenu la seconde équation de (HS).

Il reste à montrer l'affirmation. Si u était de classe $\mathcal{C}^2$, un calcul direct suffirait ; cependant, lorsque u n'est que $\mathcal{C}^{1,1}_{loc}$, l'application p n'est que localement lipschitzienne et il faut être prudent. Par le caractère lipschitzien, nous avons pour chaque θ fixé

$$\partial_q H(t, q(t,s), p(t,s)) \cdot \theta(t) - p(t,s) \cdot \dot{\theta}(t) = \partial_q H(t, q(t), p(t)) \cdot \theta(t) - p(t) \cdot \dot{\theta}(t) + O(s),$$

$$\begin{aligned}
\partial_t q(t,s) - \partial_p H(t, q(t,s), p(t,s)) &= \dot{q}(t) - \partial_p H(t, q(t), p(t)) + O(s) \\
&= O(s),
\end{aligned}$$

où $O(s)$ est uniforme en t. Dès lors, pour tout $S > 0$ suffisamment petit, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \partial_q H(t, q(t), p(t)) \cdot \theta(t) - p(t) \cdot \dot{\theta}(t) \, \mathrm{d}t \\
&\qquad = O(S) + \frac{1}{S} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^S \partial_q H(t, q(t,s), p(t,s)) \cdot \theta(t) - p(t,s) \cdot \dot{\theta}(t) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\
&\qquad = O(S) + \frac{1}{S} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^S \partial_q H \cdot \partial_s q - p \cdot \partial_s \partial_t q + (\partial_t q - \partial_p H) \cdot \partial_s p \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\
&\qquad = O(S) + \frac{1}{S} \int_{t_0}^{t_1} [p \cdot \partial_t q - H]_0^S \, \mathrm{d}t \\
&\qquad = O(S) + \frac{1}{S} \left[\int_{t_0}^{t_1} p \cdot \partial_t q - H \, \mathrm{d}t \right]_0^S .
\end{aligned}$$

Il suffit alors de laisser tendre S vers 0 pour obtenir le résultat. □

1.3 Préliminaires sur les solutions d'Hamilton-Jacobi

La question qu'il semble maintenant raisonnable de se poser est celle de l'existence de solutions pour (HJ). Considérons une condition initiale $u_0(q)$ et étudions le problème de Cauchy qui consiste à trouver une solution $u(t,q)$ de (HJ) telle que $u(0,q) = u_0(q)$. Enonçons d'abord un résultat d'unicité.

Proposition 1.3.1 (sans preuve)**.** *Soit un intervalle* $]t_0, t_1[$ *contenant l'instant initial* $t = 0$*. Soit* u_0 *une condition initiale* $\mathcal{C}^{1,1}_{loc}$*. S'il existe une solution* $u(t, q)$ *de* (HJ) *définie sur* $]t_0, t_1[$*, de régularité* $\mathcal{C}^{1,1}_{loc}$ *et telle que* $u(0, q) = u_0(q)$ *pour tout* $q \in \mathbb{R}^d$*, alors cette solution est unique.*

Pour garantir l'existence d'une solution locale au problème de Cauchy pour (HJ), nous avons besoin d'une hypothèse de régularité sur H.

Hypothèse 1.3.2. *Il existe une constante* M *telle que*

$$\left\| d^2 H(t, q, p) \right\| \leq M$$

pour tout (t, q, p)*.*

(Notons qu'il aurait été possible de prendre une hypothèse plus faible, mais nous n'en avons pas l'utilité pour la suite.)

Sous cette hypothèse, nous avons le théorème d'existence suivant, que l'on admettra.

Théorème 1.3.3 (sans preuve)**.** *Soit un hamiltonien* $H \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui est* $\mathcal{C}^2$ *et qui satisfait l'hypothèse 1.3.2. Soit* u_0 *une condition initiale* $\mathcal{C}^{1,1}$*. Alors il existe un temps* $T > 0$ *et une solution* $\mathcal{C}^{1,1}_{loc}$ *définie sur* $] - T, T[$ *de* (HJ) *telle que* $u(0, q) = u_0(q)$*. De plus, si la condition initiale* u_0 *est* $\mathcal{C}^2$*, alors la solution* u *l'est aussi.*

Attention, l'existence n'est en général pas globale.

Exemple. En dimension un, considérons l'hamiltonien $H(t, q, p) = \frac{p^2}{2}$ avec la condition initiale $u_0(q) = -q^2$. Alors on peut montrer que la solution $\mathcal{C}^2$ ne peut pas être étendue au-delà de l'instant $t = \frac{1}{2}$.
Cet hamiltonien sera étudié plus en détail à la section 3.

Rajoutons une hypothèse supplémentaire sur l'hamiltonien.

Hypothèse 1.3.4. *Il existe* $m > 0$ *telle que*

$$\partial^2_{pp} H \geq m Id$$

pour tout (t, q, p)*, au sens des formes quadratiques.*

Sous cette hypothèse de convexité (qui est aussi sous-optimale, afin de garder des énoncés simples), on peut étendre le théorème 1.2.2 au cas $\mathcal{C}^1$.

Théorème 1.3.5. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *un ouvert et* $u(t, q) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une solution* $\mathcal{C}^1$ *de* (HJ)*. Soit* $q(t) \colon [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *une courbe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $(t, q(t)) \in \Omega$ *et*

$$\dot{q}(t) = \partial_p H(t, q(t), \partial_q u(t, q(t)))$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$*. Alors, en posant* $p(t) = \partial_q u(t, q(t))$*, la courbe* $(q(t), p(t))$ *est* $\mathcal{C}^1$ *et résout* (HS)*.*

Démonstration. Comme pour la preuve du théorème 1.2.2, nous considérons une courbe lisse θ nulle aux extrémités, et nous regardons les variations $q(t,s)$ et $p(t,s)$ telles que

$$\begin{aligned} q(t,s) &:= q(t) + s \cdot \theta(t) \\ \dot{q}(t,s) &:= \partial_p H(t, q(t,s), p(t,s)). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse , la matrice $\partial^2_{pp} H$ est inversible, et donc l'application $s \mapsto p(t,s)$ que l'on vient de définir ainsi est dérivable en s, puisque q et $\dot{q}$ sont dérivables en s.
Comme pour le théorème 1.2.2, nous savons par hypothèse que $\dot{q}(t) = \partial_p H(t, q(t), p(t))$, et nous commençons par montrer que

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(t, q(t,s), p(t,s)) \,\mathrm{d}t \right) = 0. \tag{3}$$

Pour cela, considérons à nouveau la variation $P(t,s) := \partial_q u(t, q(t,s))$ et posons

$$F(s) := \int_{t_0}^{t_1} p(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(t, q(t,s), p(t,s)) \,\mathrm{d}t.$$

Nous avons l'égalité suivante, qui est vérifiée pour tout s,

$$F(0) = u(t_1, q(t_1)) - u(t_0, q(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} P(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(t, q(t,s), P(t,s)) \,\mathrm{d}t.$$

Nous allons montrer que $s = 0$ est un minimum local de $s \mapsto F(s)$, c'est-à-dire que pour tout s,

$$F(s) \geq F(0) = \int_{t_0}^{t_1} P(t,s) \cdot \dot{q}(t,s) - H(s, q(t,s), P(t,s)) \,\mathrm{d}t.$$

Cette inégalité découle encore de la convexité de H (hypothèse 1.3) car on a alors

$$\begin{aligned} H(t, q(t,s), P(t,s)) &\geq (P(t,s) - p(t,s)) \cdot \partial_p H(t, q(t,s), p(t,s)) + H(t, q(t,s), p(t,s)) \\ &\geq (P(t,s) - p(t,s)) \cdot \dot{q}(t,s) + H(t, q(t,s), p(t,s)). \end{aligned}$$

Nous venons de montrer (3). Il suffit de conclure comme dans le théorème 1.2.2 : nous affirmons qu'en développant le membre de gauche de (3), nous obtenons

$$\int_{t_0}^{t_1} \partial_q H(t, q(t), p(t)) \cdot \theta(t) - p(t) \cdot \dot{\theta}(t) \,\mathrm{d}t = 0,$$

c'est-à-dire que $\dot{p}(t) = \partial_q H(t, q(t), p(t))$ au sens des distributions.

Mais puisque $\partial_q H(t, q(t), p(t))$ est continue (par hypothèse), alors p est $\mathcal{C}^1$ et l'égalité a lieu au sens usuel. □

2 Opérateurs et semi-groupe de Lax-Oleinik

2.1 Définitions

Nous supposons que la variété $\mathcal{M}$ est connexe.

Rappelons que l'on peut passer de l'hamiltonien $H\colon \mathbb{R} \times T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ au lagrangien $L\colon \mathbb{R} \times T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ par une transformée de Legendre (inverse),

$$L(t,q,v) = \sup_{p \in T_q^*\mathcal{M}} p(v) - H(t,q,p).$$

Nous considérons à présent le cas stationnaire des équations d'Hamilton-Jacobi. Un hamiltonien H (ou un lagrangien L) est dit *autonome* s'il ne dépend pas explicitement de la variable de temps.

On définit pour chaque $t \geq 0$ la fonction $A_t\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$A_t(x,y) := \inf_{\gamma} \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,t], \mathcal{M})$ telles que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(t) = y$. Notons que pour chaque $t \geq 0$ et chaque $(x,y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, $A_t(x,y)$ correspond à l'infimum d'une certaine action (lagrangienne). On parle alors d'*action minimale*. Cette dernière est bien définie puisque nous supposons que $\mathcal{M}$ est connexe, donc connexe par arcs (puisque connexe et localement connexe par arcs).

Les *opérateurs de Lax-Oleinik* sur $\mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ sont alors donnés par

$$\begin{aligned} T_t u(x) &= \inf_{y \in \mathcal{M}} \left(u(y) + A_t(y,x) \right), \\ \check{T}_t u(x) &= \sup_{y \in \mathcal{M}} \left(u(y) - A_t(x,y) \right). \end{aligned}$$

Nous étudierons ces opérateurs plus loin pour une certaine classe d'hamiltoniens. Ils permettent en particulier de régulariser les sous-solutions de (HJ), comme l'ont montré Lasry et Lions dans [5].

Notons enfin que ces opérateurs forment des semi-groupes, qu'on appelle les *semi-groupes de Lax-Oleinik*. Autrement dit,

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s\,, \quad \check{T}_{t+s} = \check{T}_t \circ \check{T}_s\,.$$

Ceci se montre facilement en remarquant que pour tous $x, z \in \mathcal{M}$ et tous $t, s > 0$, l'action minimale vérifie

$$A_{t+s}(x,z) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \left(A_t(x,y) + A_s(y,z) \right).$$

Toutefois, nous l'avons aussi montré par un calcul explicite pour un certain hamiltonien (celui de la particule libre, utilisé pour la régularisation de Lasry-Lions) à l'annexe A.2.

Nous pouvons aussi observer que la propriété de semi-groupe n'est qu'une autre formulation de la propriété de Markov dans le contexte du régime stationnaire.

2.2 Sous-solutions dans le cas stationnaire

Nous supposons à présent que nous nous trouvons dans l'une des deux situations suivantes :

- soit $\mathcal{M}$ est une variété connexe et compacte,
- soit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$,

et nous étudions les sous-solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi stationnaire au niveau d'énergie α,

$$H(q,\, \mathrm{d}u(q)) = \alpha, \tag{HJα}$$

où α est un paramètre réel fixé.

Rappelons qu'une fonction $u\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une sous-solution de (HJα) si elle est lipschitzienne et satisfait l'inégalité $H(q,\, \mathrm{d}u(q)) \leq \alpha$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue). La définition est analogue dans le cas non-stationnaire.

Le but de cette section est de voir que s'il existe une sous-solution de régularité quelconque, alors nous pouvons en déduire qu'il existe aussi des sous-solutions de classe $\mathcal{C}^{1,1}$.

Un hamiltonien autonome est dit *de Tonelli* s'il est $\mathcal{C}^2$ et si pour tout $q \in \mathcal{M}$, l'application $p \mapsto H(q,p)$ est

- convexe,
- de matrice hessienne définie positive,
- super-linéaire sur la fibre $T_q^*\mathcal{M}$.

On définit le sens d'un lagrangien *de Tonelli* de façon analogue.

Dans ce contexte, on peut alors montrer que l'action minimale prend des valeurs finies (puisque L est bornée inférieurement par super-linéarité, et par compacité de $\mathcal{M}$). En fait, un théorème de compacité attribué à Tonelli affirme que l'infimum dans la définition de l'action minimale est atteint (c'est un minimum), et l'on montre que les courbes minimisantes sont de classe $\mathcal{C}^r$ si L est de classe $\mathcal{C}^r$ (avec $r \geq 2$).
De plus, la transformée de Legendre $\mathcal{L}\colon T\mathcal{M} \longrightarrow T^*\mathcal{M}$ est alors un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^{r-1}$, et le supremum dans la définition est en fait un maximum.
Le livre de Fathi [4] expose ces résultats de façon détaillée.

Nous nous concentrons sur le cas où l'hamiltonien autonome H est de Tonelli, car nous souhaitons qu'il existe des courbes minimisantes pour l'action minimale. Par exemple, pour $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$, nous pourrions demander que H ne soit pas très différent de l'hamiltonien de la particule libre $H(q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2$ au sens suivant :

$$\frac{1}{2}m\|p\|^2 - M \leq H(q,p) \leq \frac{1}{2}M\|p\|^2 + M,$$

où m et M sont comme dans les hypothèses 1.3.2 et 1.3.

Commençons par énoncer quelques caractérisations des sous-solutions de (HJα).

Proposition 2.2.1. *Soit H un hamiltonien de Tonelli. Pour une fonction $u\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) la fonction u est sous-solution de (HJα) *;*

(ii) l'inégalité $u(q_1) - u(q_0) \leq A^t(q_0, q_1) + \alpha t$ est vraie pour tout $(q_0, q_1) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, et tout $t > 0$;

(iii) l'inégalité $u \leq T_t u + t\alpha$ est vérifiée pour tout $t \geq 0$;

(iv) la fonction u est lipschitzienne, et l'inégalité $H(q,\, du(q)) \leq \alpha$ est vérifiée en tout point q où u est différentiable (par le théorème de Rademacher, u est presque partout différentiable).

La preuve pour le cas $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ peut être trouvée dans [3] pp. 1158-1159. Le cas d'une variété connexe compacte est traité dans [4].

Lorsqu'il y a égalité dans la condition (*iii*), on dit que u est une solution KAM faible de (HJα). Ceci a des conséquences importantes en dynamique, pour l'existence de certains ensembles invariants. On peut montrer que tout hamiltonien autonome et suffisamment régulier (notamment, périodique en la coordonnée généralisée q) admet une telle solution ; il s'agit des théorèmes KAM faible (voir [4]).

Passons maintenant au résultat principal de cette section.

Théorème 2.2.2. *Si H est un hamiltonien de Tonelli, et u est une sous-solution de* (HJα)*, alors pour tout $s > 0$ suffisamment petit et tout $t > 0$, $T_s\check{T}_t u$ est une sous-solution $\mathcal{C}^{1,1}$ de* (HJα)*.*

Ce théorème est immédiat avec les deux propositions suivantes.

Proposition 2.2.3. *Soit H un hamiltonien de Tonelli. Alors pour toute fonction semi-convexe v, la fonction $T_s v$ est $\mathcal{C}^{1,1}$ pour tout $s > 0$ suffisamment petit.*

Idée de la démonstration. Il s'avère que $T_s v$ est semi-concave pour tout $s > 0$. Par la caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^{1,1}$ (voir l'annexe A.4), il suffit de montrer qu'elle est aussi semi-convexe pour s assez petit, ce qui sera fait à la section suivante dans un cas particulier (voir théorème 3.3.4). □

Proposition 2.2.4. *Si u est une sous-solution de* (HJα)*, alors pour tout $t \geq 0$, $T_t u$ et $\check{T}_t u$ sont aussi sous-solutions de* (HJα)*.*
En particulier, pour tout $s \geq 0$ et tout $t \geq 0$, $T_s \check{T}_t u$ est aussi une sous-solution.

Démonstration. Par la proposition 2.2.1, la fonction u est une sous-solution si et seulement si elle vérifie $u \leq T_s u + \alpha s$ pour tout $s \geq 0$. En appliquant T_t (pour un $t \geq 0$ quelconque), nous obtenons $T_t u \leq T_t T_s u + \alpha s = T_s T_t u + \alpha s$.
Cette égalité étant vraie pour tout $s \geq 0$, la fonction $T_t u$ est alors une sous-solution.
On procède de même pour $\check{T}_t u$. □

Le théorème 2.2.2 est optimal au sens suivant : il existe des systèmes qui n'admettent pas de sous-solutions $\mathcal{C}^2$, mais seulement $\mathcal{C}^{1,1}$.

Exemple. Considérons le cas ou $\mathcal{M} = \mathbb{T}$ est le tore (identifié ici à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Pour un paramètre réel P, on regarde l'hamiltonien

$$H(x,p) = \frac{1}{2}(p+P)^2 - \sin^2(\pi x)$$

Soit $X\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], X(x) = \sin(\pi x)$. En prenant

$$a = \frac{2}{\pi} = \int_{\mathbb{T}} X(x)dx$$

on peut voir que pour tout $P \in]-a, a[$, (HJ) a des sous-solutions lisses. En revanche pour $P = a$, il n'y a qu'une seule sous-solution qui est en fait une solution. Elle est donnée par une primitive de $X - a$. Celle-ci est $\mathcal{C}^{1,1}$, mais pas $\mathcal{C}^2$.

Pour plus de détails, voir [2] pp. 451-452.

Il est aussi intéressant de noter que l'ensemble des sous-solutions $\mathcal{C}^{1,1}$ de (HJα) est dense dans l'ensemble des sous-solutions de (HJα), pour la topologie de la convergence uniforme. On peut donc tout à fait envisager d'approcher une sous-solution quelconque par des sous-solutions $\mathcal{C}^{1,1}$. C'est l'idée de la régularisation de Lasry-Lions.

Par ailleurs, on peut montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha(H)$ telle que l'équation (HJα) admette des sous-solutions si et seulement si $\alpha \geq \alpha(H)$. On appelle habituellement ce nombre la valeur critique de Mañé de H, et l'on montre par régularisation classique que pour $\alpha > \alpha(H)$, il existe toujours des sous-solutions lisses. Le théorème 2.2.2 est donc pertinent pour les sous-solutions de l'équation critique

$$H(q,\, \mathrm{d}u(q)) = \alpha(H).$$

L'étude de cette équation d'Hamilton-Jacobi critique est le point de départ de la théorie KAM faible de Fathi, que l'on trouve dans [4].

3 Estimations explicites pour un certain hamiltonien

On ne peut en général pas espérer montrer l'existence d'une solution globale pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, et c'est l'une des motivations pour l'étude des sous-solutions. Toutefois, si l'on se restreint au cas où H ne dépend que de p, et où la variété $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}^d$ (si bien que $T\mathcal{M} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et $T^*\mathcal{M} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}$), il est possible d'obtenir une solution faible, à savoir lipschitzienne (donc différentiable presque partout, par le théorème de Rademacher). En particulier, ce sera une sous-solution.

Nous pouvons alors chercher à régulariser cette sous-solution par des sous-solutions $\mathcal{C}^{1,1}$. La régularisation de Lasry-Lions visait initialement à faire cela pour un hamiltonien particulier sur $\mathbb{R}^d$ (qui ne dépendait que de p). Toutefois, l'idée de Lasry et Lions dans leur article original [5] permet en fait de régulariser n'importe quelle fonctionnelle sur un espace de Hilbert de dimension quelconque, pour autant que celle-ci soit bornée et uniformément continue. C'est précisément avec cette optique que nous exposerons ces résultats.

3.1 Existence de solution

Nous montrons d'abord l'existence d'une solution lipschitzienne (donc d'une sous-solution) pour le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et H ne dépend que de p.

Réécrivons l'équation (HJ) dans ce cas, avec une condition initiale :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + H(\partial_x u(x,t)) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = g \end{cases} \tag{HJg}$$

Nous supposerons ici que la condition initiale g est lipschitzienne (et donc en particulier uniformément continue). Nous allons alors montrer qu'une solution est donnée par le principe variationnel

$$u(x,t) = \inf \left\{ \int_0^t L(\dot{w}(s))\,\mathrm{d}s + g(w(0)) \;\Big|\; w \in \mathcal{C}^1, w(t) = x \right\}, \tag{PV}$$

et que cette solution est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$. L'idée de considérer ce problème variationnel vient en fait de la forme des solutions régulières locales (dans le temps) de (HJ) que l'on obtient par la méthode des caractéristiques.

Pour les détails de la démonstration (en particulier des lemmes), voir [7] pp. 124-129. Nous commençons par trois lemmes.

Lemme 3.1.1 (formule de Hopf-Lax, sans preuve). *Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$, la solution u du problème de minimisation* (PV) *est donnée par*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^d} \left\{ t \cdot L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}.$$

Lemme 3.1.2 (sans preuve)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et tous $0 \leq s < t$, la solution u donnée par le lemme 3.1.1 vérifie l'identité*

$$u(x,t) = \min_y \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}.$$

En d'autres termes, cette identité fonctionnelle nous indique que pour calculer $u(\cdot,t)$, nous pouvons d'abord calculer u au temps s puis utiliser $u(\cdot,s)$ comme condition initiale pour l'intervalle de temps restant $[t,s]$.

Lemme 3.1.3. *La solution u du lemme 3.1.1 est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d \times [0,+\infty)$, et elle vérifie $u(\cdot,0) = g$.*

Démonstration. Notons C la constante de Lipschitz de g. Fixons $t > 0$, et $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^d$. Choisissons $y \in \mathbb{R}^d$ de telle sorte que

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) = u(x,t).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} u(\hat{x},t) - u(x,t) &= \inf_z \left\{ tL\left(\frac{\hat{x}-z}{t}\right) + g(z) \right\} - tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - g(y) \\ &\leq g(\hat{x} - x + y) - g(y) \\ &\leq C\|\hat{x} - x\|. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de x et $\hat{x}$, nous obtenons

$$|u(\hat{x},t) - u(x,t)| \leq C\|\hat{x} - x\|.$$

D'autre part, nous pouvons estimer u supérieurement par

$$u(x,t) \leq tL(0) + g(x),$$

puis inférieurement par

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \min_y \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t} + g(y)\right) + g(y) \right\} \\ &\geq g(x) + \min_y \left\{ -C\|x-y\| + tL\left(\frac{x-y}{t}\right) \right\} \\ &= g(x) - t\max_z \{C\|z\| - L(z)\} \\ &= g(x) - t \max_{\|w\| \leq C} \max_z \{\langle w, z\rangle - L(z)\} \\ &= g(x) - t \max_{B(0,C)} H(\partial_x u(x,t)). \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $C' = \max\Big(|L(0)|, \max_{B(0,C)}|H|\Big)$,

$$|u(x,t) - g(x)| \le C't.$$

Finalement, en prenant $x \in \mathbb{R}^d$ et $0 < \hat{t} < t$, ce qui précède entraîne que

$$|u(x,t) - u(x,\hat{t})| \le C'|t - \hat{t}|.$$

□

Maintenant que nous avons prouvé que la fonction u donnée par la formule de Hopf-Lax (lemme 3.1.1) est lipschitzienne, le théorème de Rademacher implique qu'elle est presque partout différentiable. Nous savons aussi qu'elle satisfait la condition initiale. Il nous reste alors à montrer qu'elle vérifie bien l'équation différentielle (HJg), ce que nous faisons avec le théorème suivant.

Théorème 3.1.4. *Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$ tels que u soit différentiable en (x,t). Alors la fonction u définie dans le lemme 3.1.1 vérifie*

$$\partial_t u(x,t) + H(\partial_x u(x,t)) = 0.$$

Démonstration. Nous allons procéder par double inégalité. Considérons d'abord $q \in \mathbb{R}^d$ et $h > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} u(x+hq, t+h) &= \min_y \left\{ hL\left(\frac{x+hq-y}{h}\right) + u(y,t) \right\} \\ &\le hL(q) + u(x,t), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{u(x+hq,t+h) - u(x,t)}{h} \le L(q).$$

En laissant tendre h vers 0, nous obtenons pour tout $q \in \mathbb{R}^d$

$$\langle \partial_x u(x,t), q \rangle + \partial_t u(x,t) \le L(q).$$

Si l'on prend alors le maximum sur q, et que l'on se souvient que l'on passe de L à H par la transformée de Legendre, nous pouvons écrire

$$\partial_t u(x,t) + H(\partial_x u(x,t)) = \partial_t u(x,t) + \max_q \left(\langle \partial_x u(x,t), q \rangle - L(q) \right) \le 0.$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z).$$

Fixons $h > 0$, posons $s = t - h$ et $y = \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)z$, si bien que

$$\frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s},$$

Dès lors, nous avons

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(y,s) &\geq tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) - \left[sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)\right] \\ &= (t-s)L\left(\frac{x-z}{t}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{u(x,t) - u\left(\left(1 - \frac{h}{t}\right)x + \frac{h}{t}z, t-h\right)}{h} \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

En laissant à nouveau tendre h vers 0, nous obtenons

$$\left\langle \partial_x u(x,t), \frac{x-z}{t} \right\rangle + \partial_t u(x,t) \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right),$$

ce qui permet finalement de conclure que

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + H(\partial_x u(x,t)) &= \partial_t u(x,t) + \max_q \{\langle \partial_x u(x,t), q\rangle - L(q)\} \\ &\geq \partial_t u(x,t) + \left\langle \partial_x u(x,t), \frac{x-z}{t} \right\rangle - L\left(\frac{x-z}{t}\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

La solution u est donc en particulier une sous-solution, que nous pouvons régulariser avec des sous-solutions $\mathcal{C}^{1,1}$. C'est ce que nous allons maintenant faire, avec la régularisation de Lasry-Lions, pour le cas où l'hamiltonien est celui de la particule libre,

$$H(t,q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2.$$

Nous présenterons toutefois ces résultats dans le cadre plus général des espaces de Hilbert (de dimension arbitraire) plutôt que de rester dans $\mathbb{R}^d$.

3.2 Opérateurs de régularisation de Lasry-Lions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (nous notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire, et $\|\cdot\|$ la norme induite ; par ailleurs, nous identifions $\mathcal{H}$ avec son dual). Nous considérons l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \frac{1}{2}\|(\partial_x u(x,t))\|^2 = 0, & x \in \mathcal{H}, \quad t > 0 \\ u(\cdot,0) = g \end{cases} \tag{HJE}$$

où g est une condition initiale dans $\mathcal{BUC}(\mathcal{H})$, c'est-à-dire bornée et uniformément continue.

Nous allons montrer qu'il est possible de régulariser toute fonctionnelle $u\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{BUC}(\mathcal{H})$ par une suite de fonctionnelles de classe $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$.

Les opérateurs utilisés pour cette régularisation ont la propriété de préserver les sous-solutions de (HJE), de la même manière que dans la proposition 2.2.4. Dès lors, si la fonction $u\colon \mathcal{H} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une sous-solution bornée et uniformément continue de (HJE), nous pourrons la régulariser en une sous-solution qui sera dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$ pour chaque $t > 0$ fixé.

Comme u est uniformément continue, elle admet un module de continuité, que nous notons m. Ainsi m est continu, croissant sur $[0,+\infty)$, tel que $m(0) = 0$, et il vérifie la relation suivante (dont la preuve est rappelée à l'annexe A.1) :

$$\forall t, s \geq 0, \quad m(t+s) \leq m(t) + m(s).$$

Par définition, il vérifie aussi

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad |u(x) - u(y)| \leq m\left(\|x - y\|\right).$$

Procédons alors à la définition de ces opérateurs de régularisation.

Proposition 3.2.1. *Soit $H(t,q,p) = h(p)$ un hamiltonien qui ne dépend que de p. Alors son action est donnée par*

$$S^t(q_0, q_1) = t h^*\left(\frac{q_1 - q_0}{t}\right),$$

où h^* est la transformée de Legendre de h.

Dans notre cas, $H(t,q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2$, et ce qui nous donne

$$S^t(q_0, q_1) = \frac{|q_1 - q_0|^2}{2t}.$$

Quitte à multiplier u par 2, nous prendrons

$$S^t(q_0, q_1) = \frac{1}{t}|q_1 - q_0|^2.$$

Pour tout $t > 0$, on considère les deux opérateurs de Lax-Oleinik associés à l'action hamiltonienne précédente

$$T_t u(x) = \inf_{y \in \mathcal{H}} \left(u(y) + \frac{1}{t}\|x - y\|^2 \right),$$
$$\check{T}_t u(x) = \sup_{y \in \mathcal{H}} \left(u(y) - \frac{1}{t}\|x - y\|^2 \right).$$

Nous les appelons les *opérateurs de régularisation de Lasry-Lions*. Outre le fait qu'ils préservent les sous-solutions de (HJE), ils vérifient les trois propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 3.2.2. *Ces opérateurs vérifient la suite d'inégalités*

$$\inf u \leq T_t u \leq u \leq \check{T}_t u \leq \sup u.$$

Démonstration. Il suffit d'encadrer u ou de minorer $\frac{1}{t}\|x-y\|^2$ par 0 avant de passer à l'infimum ou au supremum pour obtenir ces inégalités. □

Proposition 3.2.3. *Ces opérateurs préservent le module de continuité.*

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{H}$. Posons $v(x) = u(x+y)$, si bien que

$$u(x) - m\left(\|y\|\right) \leq v(x) \leq u(x) + m\left(\|y\|\right)$$

par l'inégalité triangulaire.

D'autre part, nous pouvons réécrire ces opérateurs de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T_t v(x) &= \inf_z \left(u(z+y) + \frac{1}{t}\|z-x\|^2 \right) \\ &= \inf_z \left(u(z) + \frac{1}{t}\|z-(x+y)\|^2 \right) \\ &= T_t u(x+y). \end{aligned}$$

Or les opérateurs de convolution préservent clairement l'ordre, ce qui permet d'écrire

$$T_t u(x) - m(\|y\|) \leq T_t u(x+y) \leq T_t u(x) + m(\|y\|).$$

On procède de même pour $\check{T}_t u$. □

Proposition 3.2.4. *$T_t u$ converge uniformément vers u quand t tend vers 0.*

Démonstration. Notons $\epsilon(t) = \sup_{r>0}\left(m(r) - \frac{r^2}{t} \right)$. Alors on a le

Lemme 3.2.5.

$$\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0.$$

Démonstration. Par des changements de variables, on a

$$\epsilon(t) = \sup_{r>0}\left(m\left(r\sqrt{t}\right) - r^2 \right) \leq \sup_{r>0}\left((r+1)m\left(\sqrt{t}\right) - r^2 \right) = m\left(\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}m\left(\sqrt{t}\right)^2$$

qui tend bien vers 0 quand t tend vers 0. □

Observons ensuite, à l'aide d'une nouvelle inégalité triangulaire, que

$$u(y) - \frac{1}{t}\|y-x\|^2 \geq u(x) - m(\|x-y\|) + \frac{1}{t}\|y-x\|^2 \geq u(x) - \epsilon(t).$$

Ainsi

$$u - \epsilon(t) \leq T_t u \leq u$$

et la convergence uniforme découle du fait que ϵ tend vers 0 en 0. □

Nous pouvons maintenant passer aux résultats de régularisation pour ces opérateurs.

3.3 Une régularisation particulière

Comme avant, $u\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne toujours une fonctionnelle dans $\mathcal{BUC}(\mathcal{H})$.

Nous nous intéressons à l'opérateur de régularisation R_t, défini par

$$R_t u = \check{T}_t \circ T_{2t} \circ \check{T}_t u.$$

L'opérateur R_t préserve aussi les sous-solutions de (HJE), puisqu'il est composé d'opérateurs qui préservent les sous-solutions. Nous allons montrer qu'il vérifie quelques autres propriétés intéressantes, en particulier que la régularisée $R_t u$ de $u \in \mathcal{BUC}(\mathcal{H})$ est de classe $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$.

Proposition 3.3.1. *La fonction $R_t u$ vérifie*

$$\inf u \leq R_t u \leq \sup u.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
R_t u(x) &= \check{T}_t \circ T_{2t} \sup_{y\in\mathcal{H}} \left(u(y) - \frac{1}{t}\|x-y\|^2 \right) \\
&= \check{T}_t \inf_{z\in\mathcal{H}} \left(\sup_{y\in\mathcal{H}} \left(u(y) - \frac{1}{t}\|x-y\|^2 \right) + \frac{1}{2t}\|y-z\|^2 \right) \\
&= \sup_{s\in\mathcal{H}} \left(\inf_{z\in\mathcal{H}} \left(\sup_{y\in\mathcal{H}} \left(u(y) - \frac{1}{t}\|y-z\|^2 \right) + \frac{1}{2t}\|z-s\|^2 \right) - \frac{1}{t}\|s-x\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Nous voyons alors qu'il suffit de majorer u par $\sup u$ et de la minorer par $\inf u$ pour obtenir le résultat souhaité. □

Proposition 3.3.2. *En notant s_t la plus grande solution de l'équation $s^2 = t \cdot m(s)$ d'inconnue s, nous avons*

$$\sup_{x\in\mathcal{H}} |\nabla R_t u(x)| \leq \frac{s_t}{t}.$$

Nous montrerons seulement que $R_t u$ est lipschitzienne de constante $\frac{s_t}{t}$.

Démonstration. Nous commençons par un lemme.

Lemme 3.3.3. *Pour tout $x \in \mathcal{H}$, notons A l'ensemble des points y tels que*

$$\|y - x\|^2 \leq t \cdot m\left(\|y - x\|\right)$$

(ce qui équivaut à $\|y - x\| \leq s_t$, car s_t est la plus grande valeur qui satisfait l'équation). Alors nous avons

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in \mathcal{H}} \left(u(y) + \frac{1}{t}\|y - x\|^2\right) &= \inf_{y \in A} \left(u(y) + \frac{1}{t}\|y - x\|^2\right), \\
\sup_{y \in \mathcal{H}} \left(u(y) - \frac{1}{t}\|y - x\|^2\right) &= \sup_{y \in A} \left(u(y) - \frac{1}{t}\|y - x\|^2\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. On peut en effet restreindre l'infimum (respectivement le supremum) aux points y qui vérifient

$$u(y) + \frac{1}{t}\|x - y\|^2 \leq u(x),$$

ce qui suffit à impliquer le lemme. □

Nous déduisons du lemme que $T_t u$ et $\check{T}_t u$ sont lipschitziennes,

$$|T_t u(x) - T_t u(y)| \leq \frac{s_t}{t}\|x - y\|,$$

et donc que $R_t u$ est lipschitzienne de constante $\frac{s_t}{t}$, puisque les opérateurs T_t et $\check{T}_t$ préservent le module de continuité. □

Théorème 3.3.4. *Pour toute fonction $u \in \mathcal{BUC}(\mathcal{H})$, la régularisée $R_t u$ est dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{BUC}(\mathcal{H})$. Nous allons en fait montrer que $R_t u$ est à la fois semi-convexe et semi-concave, ce qui est équivalent au résultat voulu (par l'annexe A.4).

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
T_t u(x) + \frac{\|x\|^2}{t} &= \inf_{y \in \mathcal{H}} \left(u(y) + \frac{\|y - x\|^2}{t} - \frac{\|x\|^2}{t}\right) \\
&= \inf_{y \in \mathcal{H}} \left(u(y) + \frac{\|y\|^2}{t} - \frac{2}{t}\langle x, y\rangle\right).
\end{aligned}$$

L'infimum porte sur une fonction linéaire en x, on obtient donc une fonction concave. De manière analogue, on montre aussi que $\check{T}_t v$ est t-semi-convexe pour toute fonction $v\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi, $T_{2t}\check{T}_t u$ est $2t$-semi-convexe.

Montrons maintenant que si v est k-semi-convexe, alors pour $t < k$, $T_t v$ est $(k-t)$-semi-convexe. Pour $x, y \in \mathcal{H}$, posons

$$f(x,y) = v(y) + \frac{\|y-x\|^2}{t} + \frac{\|x\|^2}{k-t},$$

de sorte que $T_t u(x) + \dfrac{\|x\|^2}{k-t} = \inf\limits_{y \in \mathcal{H}} f(x,y)$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Remarquons que f peut être réécrite comme

$$f(x,y) = v(y) + \frac{\|y\|^2}{k} + \left\| \sqrt{\frac{k-t}{kt}}\, y - \sqrt{\frac{k}{t(k-t)}}\, x \right\|^2.$$

En effet, en développant le terme de droite, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x,y) &= v(y) + \frac{t}{kt}\|y\|^2 + \frac{k-t}{kt}\|y\|^2 + \frac{k}{t(k-t)}\|x\|^2 - \frac{2}{t}\langle y, x\rangle \\ &= v(y) + \frac{1}{t}(\|y\|^2 - 2\langle y, x\rangle + \|x\|^2) - \frac{k-t}{t(k-t)}\|x\|^2 + \frac{k}{t(k-t)}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Cette nouvelle expression pour f montre clairement qu'elle est convexe en (x, y), étant donné que $y \mapsto v(y) + \|y\|^2/k$ est convexe par hypothèse.

Il reste alors à montrer que $x \mapsto \inf_y f(x,y)$ est convexe. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Pour tout $y_2 \in \mathcal{H}$, nous avons

$$\begin{aligned} & v(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \frac{1}{k-t}\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|^2 \\ &\quad = \inf_{y_1 \in \mathcal{H}} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \\ &\quad \leq \inf_{y_1 \in \mathcal{H}} \lambda f(x_1, y_1) + (1-\lambda) f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre l'infimum sur y_2, pour obtenir la $(k-t)$-semi-convexité de $T_t v$.

Ainsi, $-\check{T}_t(-v)$ est $(k-t)$-semi-concave, ce qui prouve le résultat analogue suivant :
si v est k-semi-concave, alors $\check{T}_t v$ est $(k-t)$-semi-concave pour tout $t < k$.

En appliquant ce résultat à $T_{2t}\check{T}_t u$, on obtient donc que $R_t u$ est à la fois t-semi-convexe et t-semi-concave, et donc $\mathcal{C}^{1,1}$ par l'annexe A.4. □

L'opérateur R_t vérifie aussi une certaine propriété de "pinching", comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.3.5. *Soit $f\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée. S'il existe une fonction continue k-semi-concave v et une fonction k-semi-convexe u telles que $v \leq f \leq u$, alors*

$$\forall t \in (0,k],\ v \leq R_t f \leq u.$$

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous montrons d'abord un lemme.

Lemme 3.3.6. *Pour toute fonction* $u\colon \mathcal{H} \longrightarrow (-\infty, +\infty]$, *nous avons l'inégalité*

$$\check{T}_t T_t u \leq u,$$

avec égalité si u *est* t*-semi-convexe et continue.*

De même, pour toute fonction $v\colon \mathcal{H} \longrightarrow [-\infty, +\infty)$, *nous avons l'inégalité*

$$T_t \check{T}_t v \geq v,$$

avec égalité si v *est* t*-semi-concave et continue.*

Démonstration. En effet,

$$\check{T}_t T_t u(x) = \sup_{y\in\mathcal{H}} \inf_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) + \frac{\|z-y\|^2}{t} - \frac{\|y-x\|^2}{t} \right).$$

En prenant $z = x$, nous obtenons

$$\check{T}_t T_t u(x) \leq \sup_{y\in\mathcal{H}} u(x) = u(x).$$

Il reste donc à montrer le cas d'égalité. Ainsi, supposons que u est continue et t-semi-convexe. Nous avons

$$\check{T}_t T_t u(x) + \frac{\|x\|^2}{t} = \sup_{y} \inf_{z} \left(u(z) + \frac{\|z\|^2}{t} + \left\langle \frac{2y}{t}, x - z \right\rangle \right).$$

Dès lors, en remplaçant y par $\frac{ty}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \check{T}_t T_t u(x) + \frac{\|x\|^2}{t} &= \sup_{y} \inf_{z} \left(u(z) + \frac{\|z\|^2}{t} + \langle y, x - z\rangle \right) \\ &= \sup_{y} \left\{ \inf_{z} \left(u(z) + \frac{\|z\|^2}{t} - \langle y, z\rangle \right) + \langle y, x\rangle \right\}. \qquad (\star) \end{aligned}$$

L'application $z \mapsto f(z) := u(z) + \|z\|^2/t$ est convexe et continue par hypothèse. Il en résulte que si l'on choisit $x_0 \in \mathcal{H}$, alors pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > \alpha_0$, l'épigraphe

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$$

est un convexe fermé de $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, ne rencontrant pas le convexe compact $\{(x_0, \alpha_0)\}$. Le théorème de Hahn-Banach nous donne alors l'existence de $p \in \mathcal{H}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall (x, \alpha) \in \operatorname{epi}(f), \quad \langle p, x\rangle + \beta \cdot \alpha < \langle p, x_0\rangle + \beta \cdot \alpha_0.$$

Nous avons donc $f > \alpha_0 + \langle (1/\beta) \cdot p, x_0 - x \rangle$. Notons que le membre de droite dans le bidual de Legendre ($\star$) s'interprète comme la borne supérieure des $g(x_0)$ sur les fonctions affines g telles que $g \leq f$. Dès lors, en faisant tendre α_0 vers $f(x_0)$, nous obtenons

$$\check{T}_t T_t u(x_0) + \frac{\|x_0\|^2}{t} \geq f(x_0),$$

autrement dit,

$$\check{T}_t T_t u(x_0) \geq u(x_0).$$

□

Montrons maintenant le théorème :

Démonstration du théorème 3.3.5. Soient u et v comme dans l'énoncé. Nous voulons montrer que nous avons $u \geq T_t \check{T}_t f \geq v$ et $u \geq \check{T}_t T_t f \geq v$ pour $t \leq k$, ce qui implique que

$$u \geq \check{T}_t T_{2t} T_t f = R_t f \geq v.$$

Pour montrer la seconde inégalité, il suffit d'observer que par le lemme 3.3.6, nous avons

$$u \geq f \geq \check{T}_t T_t f \geq \check{T}_t T_t v = v.$$

La première inégalité se montre de la même manière. □

Le théorème de "pinching" 3.3.5 entraîne le corollaire suivant :

Proposition 3.3.7. *Si $f \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$, alors $R_t f = f$ pour t assez petit.*

En effet, par l'annexe A.4, f est à la fois semi-convexe et semi-concave, nous pouvons donc l'encadrer par elle-même dans le théorème 3.3.5, d'où le corollaire.

4 Quelques commentaires et observations

Tout d'abord notons qu'il existe des fonctions bornées uniformément continues qui ne s'approximent pas par des fonctions deux fois différentiables, c'est pourquoi $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$ est l'espace naturel pour régulariser les fonctions dans $\mathcal{BUC}(\mathcal{H})$. Le théorème de Rademacher montre que ces deux espaces ne sont pas si éloignés : les fonctions $\mathcal{C}^{1,1}$ sont deux fois dérivables presque partout.

D'ordinaire, régulariser des fonctions se fait par produit de convolution avec des approximations de la masse de Dirac en 0, cette méthode fournit des approchées $\mathcal{C}^\infty$ et n'a par exemple aucune chance de fonctionner pour montrer l'existence de sous-solutions $\mathcal{C}^{1,1}$ de l'équation d'Hamilton-Jacobi critique, puisque $\mathcal{C}^{1,1}$ est la meilleure régularité que l'on puisse obtenir dans le cas général (cf. fin de la section 2.2).

Une autre restriction de la convolution classique est sa limitation aux espaces de dimension finie. En effet, la mesure de Lebesgue est perdue dès que l'on passe en dimension infinie. La régularisation de Lasry-Lions est donc moins ambitieuse en termes de régularité, mais elle a le mérite de fonctionner dans les espaces de Hilbert de dimension quelconque. Cela étant dit, ces deux méthodes de régularisation partagent quelques propriétés : elles préservent l'ordre, commutent avec les translations, etc.

Remarquons aussi qu'un cadre naturel pour l'équation de Hamilton-Jacobi est celui des variétés. Il est possible d'étendre les idées de Lasry et Lions dans cette direction de la façon suivante.

Soit $\mathcal{M}$ une variété paracompacte de dimension d (elle admet alors une partition de l'unité). Notons $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Soient $(\phi_i)_{i\in\mathcal{I}}$ un atlas, avec des cartes $\phi_i\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M}$ qui sont telles que pour tout $i \in \mathcal{I}$, $\phi_i(\mathcal{B})$ soit relativement compact dans $\mathcal{M}$. Soit $(g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une partition de l'unité (localement finie) adaptée au recouvrement $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \phi_i(\mathcal{B})$.

Pour toute fonction $u\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit alors la fonction $G_t u$ par

$$G_t u = \sum_{i\in\mathcal{I}} \left[R_{ta_i}\left((g_i u)\circ\phi_i\right)\right]\circ\phi_i^{-1},$$

où les a_i sont des nombres réels strictement positifs, et où chaque terme

$$\left[R_{ta_i}\left((g_i u)\circ\phi_i\right)\right]\circ\phi_i^{-1}$$

est étendu à $\mathcal{M}$ par 0 en dehors de $\phi_i(\mathcal{B})$ (cela est possible puisque g_i est à support compact dans l'ouvert $\phi_i(\mathcal{B})$).

Une fonction $u\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *localement semi-convexe* si pour tout $i \in \mathcal{I}$, il existe $k_i > 0$ tel que $u \circ \phi_i^{-1}$ est k_i-semi-convexe. Elle est dite *localement semi-concave* si $-u$ est localement semi-convexe.

Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 4.0.8. *Soient f, u et v des fonctions de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}$, avec u localement semi-concave et v localement semi-convexe, telles que $v \le f \le u$. Alors on peut choisir les réels a_i de sorte que :*

- *la fonction $G_t f$ soit localement $\mathcal{C}^{1,1}$,*
- *si f est continue, alors $G_t f$ converge localement uniformément vers f quand t tend vers 0,*
- *nous ayons l'encadrement $v \le G_t f \le u$.*

Une preuve de ce résultat peut être trouvée dans [1].

A Annexe

A.1 Rappels sur les modules d'uniforme continuité

Soit V un espace vectoriel normé. Soit $u\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée et uniformément continue. Nous notons m son module d'uniforme continuité, c'est-à-dire que pour tout $t > 0$, nous posons

$$m(t) = \sup \left\{ |u(x) - u(y)|,\ (x, y) \in V \times V \text{ tq. } |x - y| \leq t \right\}.$$

Nous allons montrer que pour tous $t, t' > 0$,

$$m(t + t') \leq m(t) + m(t').$$

Pour cela, considérons pour chaque $t > 0$ l'ensemble

$$E(t) = \left\{ |u(x) - u(y)|, (x, y) \in V \times V \text{ tq. } |x - y| \leq t \right\}.$$

Prenons alors $t, t' > 0$ et $x, y \in V$ tels que $|x - y| \leq t + t'$, et posons

$$z = x + t\frac{y - x}{t + t'},$$

si bien que nous avons

$$\begin{aligned} |x - z| &= \left| \frac{t}{t + t'}(y - x) \right|, \\ |x - z| &\leq t. \end{aligned}$$

De même, nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned} |z - y| &= \left| \left(1 - \frac{t}{t + t'} \right) (x - y) \right| \\ &= \frac{t'}{t + t'} |x - y|, \\ |z - y| &\leq t'. \end{aligned}$$

D'autre part, par l'inégalité triangulaire,

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)|.$$

Nous venons de montrer que $|u(x) - u(z)| \in E(t)$ et $|u(z) - u(y)| \in E(t')$ c'est-à-dire que

$$|u(x) - u(y)| \leq m(t) + m(t'),$$

puis, en passant au supremum,

$$m(t + t') \leq m(t) + m(t').$$

A.2 Démonstration du semi-groupe de Lax-Oleinik

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sa norme induite est notée $\| \cdot \|$.

Nous montrons par un calcul explicite que les opérateurs de Lax-Oleinik forment un semi-groupe dans le cas de l'hamiltonien (autonome) pour la particule libre (potentiel identiquement nul), défini par

$$H(t, q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2.$$

Il s'agit de l'hamiltonien employé pour la régularisation de Lasry-Lions (c'est-à-dire par convolution inf-sup). Les opérateurs T_t et $\check{T}_t$ ici considérés sont donnés au début du paragraphe 3.2.

Théorème A.2.1. *Les opérateurs de convolution inf-sup forment un semi-groupe, c'est-à-dire qu'ils vérifient*

$$\forall t, s > 0, \quad T_t \circ T_s u = T_{t+s} u$$

$$\forall t, s > 0, \quad \check{T}_t \circ \check{T}_s u = \check{T}_{t+s} u$$

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme A.2.2. *Pour toute fonction $f \colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, les bornes inférieures commutent entre-elles (et de même pour les bornes supérieures), c'est-à-dire*

$$\inf_{y \in \mathcal{H}} \left(\inf_{z \in \mathcal{H}} \left(f(y, z) \right) \right) = \inf_{z \in \mathcal{H}} \left(\inf_{y \in \mathcal{H}} \left(f(y, z) \right) \right),$$

$$\sup_{y \in \mathcal{H}} \left(\sup_{z \in \mathcal{H}} \left(f(y, z) \right) \right) = \sup_{z \in \mathcal{H}} \left(\sup_{y \in \mathcal{H}} \left(f(y, z) \right) \right).$$

Par ailleurs, pour toute fonction $g \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, on a la relation

$$- \sup_{x \in \mathcal{H}} \left(g(x) \right) = \inf_{x \in \mathcal{H}} \left(-g(x) \right).$$

Démonstration. On procède en passant successivement à l'infimum.

$$\begin{aligned} \forall y, z \in \mathcal{H}, \qquad & f(y, z) \geq \inf_y f(y, z) \\ \forall y \in \mathcal{H}, \qquad & \inf_z f(y, z) \geq \inf_z \left(\inf_y f(y, z) \right) \\ & \inf_y \inf_z f(y, z) \geq \inf_z \inf_y f(y, z) \end{aligned}$$

On conclut par symétrie. Le résultat s'obtient de la même façon avec les bornes supérieures. En ce qui concerne le lien entre l'infimum et le supremum, on procède par double inégalité,

$$\begin{aligned} g &\leq \sup(g) \\ -g &\geq -\sup(g) \\ \inf(-g) &\geq -\sup(g). \end{aligned}$$

Pour l'autre inégalité,

$$\begin{aligned} g &\geq \inf(g) \\ -g &\leq -\inf(g) \\ \sup(-g) &\leq -\inf(g) \\ \sup(g) &\leq -\inf(-g) \\ \inf(-g) &\leq -\sup(g). \end{aligned}$$

Nous venons ainsi de montrer que

$$\inf_{x\in\mathcal{H}} \left(-g(x)\right) = -\sup_{x\in\mathcal{H}} \left(g(x)\right).$$

□

Passons maintenant à la preuve du théorème.

Démonstration du théorème A.2.1. Commençons par les opérateurs T_t. Nous avons

$$\begin{aligned} T_t \circ T_s u(x) &= \inf_{y\in\mathcal{H}} \left(T_t u(y) + \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right) \\ &= \inf_{y\in\mathcal{H}} \left(\inf_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) + \frac{1}{t}\|y-z\|^2\right) + \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right) \\ &= \inf_{y\in\mathcal{H}} \left(\inf_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) + \frac{1}{t}\|y-z\|^2 + \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right) \\ &= \inf_{z\in\mathcal{H}} \left(\inf_{y\in\mathcal{H}} \left(u(z) + \frac{1}{t}\|y-z\|^2 + \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right) \\ &= \inf_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) + \inf_{y\in\mathcal{H}} \left(\frac{1}{t}\|y-z\|^2 + \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right). \end{aligned}$$

Posons alors

$$\forall x,y,z \in \mathcal{H}, \quad f(y) = \frac{1}{t}\left\|y-z\right\|^2 + \frac{1}{s}\left\|x-y\right\|^2$$

et montrons que

$$\inf_{y\in\mathcal{H}} f(y) = \frac{1}{t+s}\left\|z-x\right\|^2.$$

Lemme A.2.3. *Nous allons en fait montrer que*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{H}, \quad \forall t, s > 0, \quad f(y) = \frac{t+s}{ts}\left\|y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\|^2 + \frac{1}{t+s}\|z-x\|^2 .$$

Démonstration. Il suffit de développer les normes au carré,

$$\begin{aligned}\frac{t+s}{ts}\left\|y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\|^2 &= \frac{t+s}{ts}\left\langle y - \frac{tx+sz}{t+s}, y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\rangle \\ &= \frac{1}{ts}\left\langle s(y-z) + t(y-x), y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\rangle .\end{aligned}$$

Par linéarité, on obtient une somme de 2 termes que l'on peut calculer séparément :

$$\begin{aligned}\left\langle s(y-z), y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\rangle &= \left\langle s(y-z), (y-z) + t\frac{z-x}{t+s}\right\rangle \\ &= s\|y-z\|^2 + \frac{st}{t+s}\langle y-z, z-x\rangle , \\ \text{et} \quad \left\langle t(y-x), y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\rangle &= \left\langle t(y-x), (y-x) + s\frac{x-z}{t+s}\right\rangle \\ &= t\|y-x\|^2 + \frac{ts}{t+s}\langle y-x, x-z\rangle .\end{aligned}$$

La somme est donc égale à

$$\begin{aligned}\frac{t+s}{ts}\left\|y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\|^2 &= \frac{1}{ts}(s\|y-z\|^2 + t\|y-x\|^2 + \frac{st}{t+s}\langle y-z, z-x\rangle \\ &\qquad + \frac{ts}{t+s}\langle y-x, x-z\rangle) \\ &= \frac{1}{ts}(s\|y-z\|^2 + t\|y-x\|^2 + \frac{st}{t+s}\langle (y-z)-(y-x), z-x\rangle) \\ &= \frac{1}{t}\|y-z\|^2 + \frac{1}{s}\|y-x\|^2 - \frac{1}{t+s}\|z-x\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(y) = \frac{1}{t+s}\|z-x\|^2 + \frac{t+s}{ts}\left\|y - \frac{tx+sz}{t+s}\right\|^2 .$$

□

Cela montre le théorème (pour le cas des opérateurs T_t) puisque le minimum de f est atteint en

$$y = \frac{tx+sz}{t+s}$$

et vaut

$$\frac{1}{t+s}\|z-x\|^2.$$

Pour les opérateurs $\check{T}_t$ la démonstration est identique à partir d'un certain point :

$$\begin{aligned}
\check{T}_t \circ \check{T}_s u(x) &= \sup_{y\in\mathcal{H}} \left(\check{T}_t u(y) - \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right) \\
&= \sup_{y\in\mathcal{H}} \left(\sup_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) - \frac{1}{t}\|y-z\|^2\right) - \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right) \\
&= \sup_{y\in\mathcal{H}} \left(\sup_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) - \frac{1}{t}\|y-z\|^2 - \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right) \\
&= \sup_{z\in\mathcal{H}} \left(\sup_{y\in\mathcal{H}} \left(u(z) - \frac{1}{t}\|y-z\|^2 - \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right) \\
&= \sup_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) + \sup_{y\in\mathcal{H}} \left(-\frac{1}{t}\|y-z\|^2 - \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right) \\
&= \sup_{z\in\mathcal{H}} \left(u(z) - \inf_{y\in\mathcal{H}} \left(\frac{1}{t}\|y-z\|^2 + \frac{1}{s}\|x-y\|^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Nous sommes à nouveau amenés à montrer que

$$\inf_{y\in\mathcal{H}} (\frac{1}{t}\|y-z\|^2 + \frac{1}{s}\|x-y\|^2) = \frac{1}{t+s}\|z-x\|^2,$$

ce qui est exactement ce dont nous nous sommes convaincus auparavant, avec le lemme A.2.3. □

A.3 Théorèmes de Rademacher et Alexandrov

Nous rappelons ici deux résultats d'analyse sans les redémontrer.

Théorème A.3.1 (Rademacher)**.** *Soit Ω un ouvert d'une variété riemannienne lisse $\mathcal{M}$, munie de sa mesure de volume ν. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application localement lipschitzienne.*
Alors f est dérivable ν-presque partout sur Ω.

Une preuve de ce résultat peut être trouvée dans [6] pp. 222-228.

Nous donnons aussi le théorème d'Alexandrov (ci-après) puisqu'il ne nous a pas paru indifférent dans le contexte de notre travail.

Théorème A.3.2 (Alexandrov)**.** *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe.*
Alors f est deux fois dérivable Lebesgue-presque partout sur Ω.

Pour la preuve, on pourra par exemple se référer à [6] pp. 402-409.

Il est aussi possible de généraliser ce théorème aux ouverts Ω d'une variété riemannienne $\mathcal{M}$, munie de sa mesure de volume, et à des fonctions f qui ne sont que semi-convexes mais qui respectent une autre condition de régularité suffisante pour se ramener au cas $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$. Le lecteur intéressé trouvera les détails dans [6] pp. 363-364.

Mentionnons enfin un résultat classique de théorie de la mesure.

Proposition A.3.3 (Intégration par parties)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dans $\mathcal{L}^1_{loc}$ (c'est à dire boréliennes et intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}$). Si $\alpha, \beta \in I$, on définit F et G par*

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt, \qquad G(x) = \int_\beta^x g(t)\,dt.$$

Alors, F et G sont continues et pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, nous avons

$$\int_a^b f \cdot G + \int_a^b F \cdot g = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

A.4 Caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^{1,1}$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (comme d'habitude, nous notons $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ son produit scalaire, et $\|\cdot\|$ la norme induite).

Dans cette section, nous montrons la caractérisation suivante des applications de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$, c'est-à-dire continûment différentiables de gradient lipschitzien.

Théorème A.4.1. *Une application $u\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ localement bornée qui est à la fois k-semi-convexe et k-semi-concave est dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$, et son gradient ∇u est $6/k$-lipschitzien. Réciproquement, si $v\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$, alors elle est à la fois semi-convexe et semi-concave.*

Démonstration. Remarquons d'abord que comme $x \mapsto u(x) + \|x\|^2/k$ est convexe et localement bornée, elle est continue, et donc u aussi. De plus, comme elle est convexe, elle domine une certaine application linéaire (de même, une fonction concave est dominée par une certaine application linéaire). Plus précisément, notons $f(y) = u(x+y) - u(x)$ pour un certain $x \in \mathcal{H}$ fixé. Elle est clairement k-semi-convexe et k-semi-concave et nous avons par conséquent

$$\exists l_x^1 \in \mathcal{H} \text{ tq. } \forall y \in \mathcal{H},\ f(y) + \frac{\|y\|^2}{k} \geq \left\langle y, l_x^1 \right\rangle,$$

et

$$\exists l_x^2 \in \mathcal{H} \text{ tq. } \forall y \in \mathcal{H},\ f(y) - \frac{\|y\|^2}{k} \leq \left\langle y, l_x^2 \right\rangle.$$

De plus, $l_x^1 = l_x^2$. En effet, en soustrayant ces inégalités, et en remarquant que l'on peut changer y en $-y$, on obtient

$$2 \cdot \frac{\|y\|^2}{k} \geq \left| \left\langle y, l_x^1 - l_x^2 \right\rangle \right|,$$

ce qui implique que

$$\left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, l_x^1 - l_x^2 \right\rangle \right| \leq \frac{2}{k} \|y\|.$$

Dès lors, la forme linéaire continue $y \mapsto \langle y, l_x^1 - l_x^2 \rangle$ s'annule sur la sphère unité de $\mathcal{H}$ (on fait tendre $\|y\|$ vers 0 dans l'inégalité précédente), et on en déduit que

$$l_1^x = l_2^x =: l_x.$$

Par définition de l_x, nous avons

$$\begin{aligned} u(x+y) - u(x) - \langle y, l_x \rangle &\leq \frac{\|y\|^2}{k}, \\ u(x+y) - u(x) - \langle y, l_x \rangle &\geq -\frac{\|y\|^2}{k}, \end{aligned}$$

donc

$$|u(x+y) - u(x) - \langle y, l_x \rangle| \leq \frac{\|y\|^2}{k}.$$

Cette dernière estimation nous dit que u est différentiable en x pour tout $x \in \mathcal{H}$, de gradient $\nabla_x u = l_x$. Il reste donc à prouver que ce dernier est lipschitzien, de constante $6/k$.

Pour tous $x, y, z \in \mathcal{H}$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \langle l_x, y+z \rangle - \dfrac{\|y+z\|^2}{k} \leq & u(x+y+z) - u(x) & \leq \langle l_x, y+z \rangle + \dfrac{\|y+z\|^2}{k}, \\ \langle l_{x+y}, -y \rangle - \dfrac{\|y\|^2}{k} \leq & u(x) - u(x+y) & \leq \langle l_{x+y}, -y \rangle + \dfrac{\|y\|^2}{k}, \\ \langle l_{x+y}, -z \rangle - \dfrac{\|z\|^2}{k} \leq & u(x+y) - u(x+y+z) & \leq \langle l_{x+y}, -z \rangle + \dfrac{\|z\|^2}{k}. \end{array}$$

En sommant ces inégalités, nous obtenons

$$|\langle l_{x+y} - l_x, y+z \rangle| \leq \frac{\|y+z\|^2}{k} + \frac{\|y\|^2}{k} + \frac{\|z\|^2}{k},$$

puis, en remplaçant z par $z - y$,

$$|\langle l_{x+y} - l_x, z \rangle| \leq \frac{\|z\|^2 + \|y\|^2 + \|z-y\|^2}{k} \leq \frac{2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 + 2\,|\langle y, z \rangle|}{k}.$$

Il suffit alors de prendre $\|y\| = \|z\|$ pour voir que

$$|\langle l_{x+y} - l_x, z\rangle| \leq \frac{6\|y\|}{k} \cdot \|y\|,$$

c'est-à-dire, que

$$\|l_{x+y} - l_x\| \leq \frac{6}{k} \cdot \|y\|.$$

Réciproquement, soit $v\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{H})$. Il existe donc une constante $L > 0$ telle que

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \|\nabla_x v - \nabla_y v\| \leq L\|x - y\|.$$

Soient $k > 0$ et f la fonction qui à $x \in \mathcal{H}$ associe $f(x) = v(x) + \dfrac{\|x\|^2}{k}$. Fixons $x, y \in \mathcal{H}$; nous avons

$$\langle \nabla_x f - \nabla_y f, x - y\rangle = \langle \nabla_x v - \nabla_y v, x - y\rangle + \frac{2}{k}\|x - y\|^2.$$

Or par hypothèse, $|\langle \nabla_x v - \nabla_y v, x - y\rangle| \leq L\|x - y\|^2$, donc en prenant $k < 2/L$, nous avons

$$\langle \nabla_x f - \nabla_y f, x - y\rangle \geq 0,$$

et donc f est convexe, c'est-à-dire que v est k-semi-convexe.

On montre de même que v est k-semi-concave. $\square$

Références

[1] P. Bernard. Lasry-Lions regularization and a lemma of Ilmanen. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova., Vol. 124, pp. 221-229,* 2010.

[2] P. Bernard. Existence of $C^1, 1$ critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation on compact manifolds. *Annales Scient. E. N. S., Vol. 40, No. 3, pp. 445-452,* 2007.

[3] P. Bernard. The Lax-Oleinik semi-group : a Hamiltonian point of view. *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, Vol. 142, No. 6, pp. 1131-1177,* 2012.

[4] A. Fathi. Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics. *(En préparation.)*

[5] J. M. Lasry, P. L. Lions. A remark on regularization in Hilbert Spaces. *Israel J. Math., Vol. 55, No. 3, pp. 257-266,* 1986.

[6] C. Villani. Optimal Transport : Old and New. *Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften 338. Springer-Verlag,* 2009.

[7] L.C. Evans. Partial Differential Equations *American Mathematical Society - Graduate Studies in Mathematics vol.19,* 1997