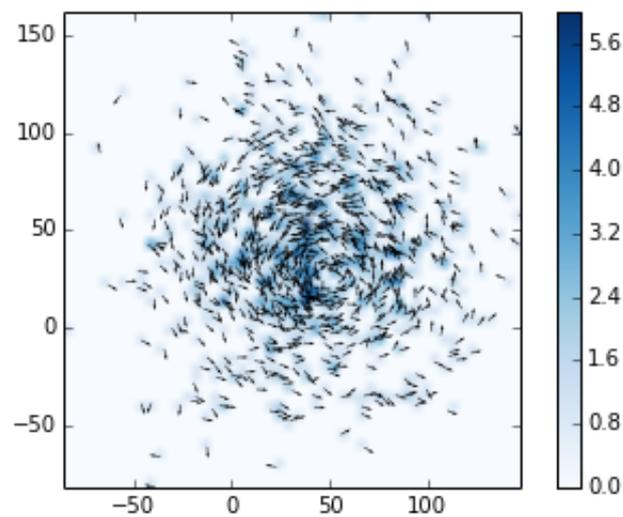


---

# Vers une limite hydrodynamique du modèle de COUZIN-VICSEK à champ moyen

---

MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES-BIOLOGIE, 1<sup>ère</sup> ANNÉE



Anna SONG  
ENS Maths 2015

*Tuteur* Gaël RAOUL  
*Jury* Bertrand MAURY

13 juin 2016

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction : le modèle de Couzin-Vicsek</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>CVA discret à temps discret</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>CVA discret à temps continu</b>	<b>3</b>
3.1	CVA déterministe . . . . .	3
3.2	CVA : cas général . . . . .	4
3.3	La fréquence $\nu$ . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Limite de champ-moyen pour le CVA</b>	<b>5</b>
4.1	Opérateurs sur une sphère . . . . .	5
4.2	Mesure empirique de N poissons . . . . .	5
4.3	Limite de champ-moyen . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Limite hydrodynamique</b>	<b>7</b>
5.1	Changement d'échelle . . . . .	7
<b>6</b>	<b>L'opérateur de collision</b>	<b>10</b>
6.1	Distribution de VMF . . . . .	10
6.2	Equilibres de $Q$ . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Les invariants de collision</b>	<b>13</b>
7.1	Invariants de collision généralisés . . . . .	14
7.2	Résolution . . . . .	16
7.3	Limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Simulations</b>	<b>19</b>
8.1	CVA discret . . . . .	19
8.2	SOH . . . . .	29
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

# 1 Introduction : le modèle de Couzin-Vicsek

La modélisation du déplacement d'un grand nombre d'êtres vivants, ou le *swarming* est un sujet actif qui intéresse des chercheurs en biologie et en physique. Parmi le grand nombre de modèles qui ont été proposés pour expliquer un comportement collectif macroscopique à partir d'une description microscopique, le plus connu et utilisé est le modèle de VICSEK introduit par lui-même en 1995. Il consiste à considérer chaque individu comme une particule autopropulsée (*self-propelled particle*), évoluant à vitesse de norme constante, et qui aligne sa direction à celle de ses voisins modulo un certain bruit.

Dans ce travail nous présentons une limite hydrodynamique dérivée d'une variante du modèle original, en reprenant les étapes proposées par les auteurs de [DeMo]. Ains, nous présentons d'abord l'algorithme de COUZIN-VICSEK à temps discret, que nous transformons en un modèle à temps continu; nous passons à une limite de champ-moyen, où le nombre d'individus tend vers l'infini; nous faisons des changements d'échelles, qui rendent le problème adimensionné, avec des unités de grandeur infiniment plus grandes que les échelles des individus, en faisant intervenir un facteur  $\epsilon$  qui représente le rapport entre une échelle de temps ou d'espace typique d'un individu et celle choisie; enfin, nous faisons tendre  $\epsilon$  vers 0, et nous obtenons une limite hydrodynamique qui constitue le modèle appelé SOH (Self-Organized Hydrodynamics). Nous illustrons nos propos par quelques simulations du modèle de COUZIN-VICSEK en fin de cet exposé.

## 2 CVA discret à temps discret

L'Algorithme de COUZIN-VICSEK (CVA) est le suivant :

soit  $N$  particules dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  indexées par  $k = 1, \dots, N$ , de positions  $X_k^n \in \mathbb{R}^3$  aux instants  $n\Delta t$  où  $\Delta t$  est un pas de temps. On suppose que toutes les particules se déplacent selon des vitesses de norme identique notée  $c > 0$ . Chacune a une vitesse  $c\omega_k^n$  où  $\omega_k^n \in \mathbb{S}^2$ , la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

A chaque pas de temps  $\Delta t$ , le CVA met à jour les nouvelles positions et les nouvelles vitesses selon les deux règles suivantes :

1. La position de la particule  $k$  au temps  $n$  devient

$$X_k^{n+1} = X_k^n + c\omega_k^n \Delta t \quad (1)$$

2. Nous faisons l'hypothèse qu'un poisson ne voit que ses voisins. Sa nouvelle vitesse s'aligne selon la vitesse moyenne des particules voisines de  $k$ , mais avec un bruit gaussien. Une particule est dite voisine de  $k$  si elle est contenue dans une boule centrée en  $X_k^n$  de rayon  $R > 0$  :  $R$  représente alors le rayon d'interaction d'un poisson avec ses voisins. Les poissons tendent à s'aligner avec leurs voisins les plus proches, mais du fait des erreurs de perception et de réaction, leur alignement n'est pas parfait. Nous modélisons ces effets par un bruit gaussien. Si on note

$$J_k^n = \sum_{i, |X_i^n - X_k^n| \leq R} \omega_i^n,$$

alors on définit la vitesse moyenne  $\bar{\omega}_k^n$  par

$$\bar{\omega}_k^n = \begin{cases} \frac{J_k^n}{|J_k^n|} & \text{si } J_k^n \neq 0 \\ \omega_k^n & \text{sinon} \end{cases}$$

et on ajuste la nouvelle direction  $\omega_k^{n+1}$  selon

$$\omega_k^{n+1} = \hat{\omega}_k^n$$

où  $\hat{\omega}_k^n$  est une variable aléatoire à valeurs dans la sphère  $\mathbb{S}^2$ , suivant une loi gaussienne centrée en  $\bar{\omega}_k^n$  et de variance  $2D\Delta t$ , avec  $D$  un coefficient homogène à une fréquence.

Dans le modèle original de VICSEK, les particules évoluent dans l'espace à deux dimensions  $\mathbb{R}^2$ , où les directions peuvent se réécrire sous la forme  $\omega_k^n = e^{i\theta_k^n}$ , et le bruit n'est pas de nature gaussienne, mais suit une loi uniforme sur une plage angulaire  $[-\alpha, +\alpha]$  avec  $0 \leq \alpha < \pi$ . Ainsi  $\theta_k^{n+1} = \bar{\theta}_k^n + \alpha_k^n$ , où les variables aléatoires  $\alpha_k^n$  sont indépendantes, de loi uniforme et à valeurs dans  $[-\alpha, +\alpha]$ , et  $\bar{\theta}_k^n$  est l'angle donnant la direction moyenne autour du poisson  $k$ .

On appelle **CVA déterministe** le modèle CVA dans lequel on suppose que le bruit est absent, et on peut remplacer  $\hat{\omega}_k^n$  par  $\bar{\omega}_k^n$  plus simplement.

La modélisation du mouvement des poissons par cet algorithme peut être discutée. En effet, les auteurs de l'article [KaTun] ont expérimentalement observé le mouvement d'un grand nombre de poissons. Ils ont constaté en particulier qu'une des dominantes du comportement des poissons est de changer de vitesse (en norme), et que ce changement influence les poissons devant et derrière. Cela ne paraît pas étonnant, et donc l'hypothèse de garder une vitesse constante ici n'est peut-être pas la plus réaliste. D'autre part, ils n'ont pas trouvé de preuve explicite d'un alignement de l'orientation d'un poisson avec ses voisins, mais l'alignement viendrait plutôt d'un phénomène d'attraction et de répulsion, et de l'imitation du changement d'orientation.

### 3 CVA discret à temps continu

Le but de ce paragraphe est de faire tendre  $\Delta t \rightarrow 0$  et obtenir une dynamique continue en temps. On remarque que, si l'on pose  $\omega_k^{n+1/2} = (\omega_k^{n+1} + \omega_k^n)/2$ , le vecteur  $(\omega_k^{n+1} - \omega_k^n)$  est orthogonal à  $\omega_k^{n+1/2}$ . En effet,  $(\omega_k^{n+1} - \omega_k^n) \cdot (\omega_k^{n+1} + \omega_k^n) = 0$  puisque les modules des  $\omega_k$  sont tous égaux à 1. On peut donc écrire

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (Id - \omega_k^{n+1/2} \otimes \omega_k^{n+1/2}) (\omega_k^{n+1} - \omega_k^n) \quad (2)$$

où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel entre deux vecteurs.  $u \otimes v$  est par définition l'application linéaire qui à  $w$  associe  $(v \cdot w)u$ .  $Id - \omega_k^{n+1/2} \otimes \omega_k^{n+1/2}$  est alors la projection linéaire sur le plan orthogonal à  $\omega_k^{n+1/2}$ . On notera parfois aussi  $P_{u^\perp} = Id - u \otimes u$  la projection sur le plan orthogonal au vecteur  $u$ .

On fait  $\Delta t \rightarrow 0$  (formellement) et on suppose que les positions  $X_k$  et les orientations  $\omega_k$  deviennent des fonctions continues en temps. Grâce à la relation (1) on a  $\frac{dX_k}{dt} = c\omega_k$ . Le membre de gauche dans (2) tend vers  $\partial_t \omega_k$  mais il n'est pas évident si celui de droite a une limite. A titre personnel, on s'attend peut-être à l'équation  $\partial_t \omega_k = P_{\bar{\omega}_k^\perp}(\partial_t \omega_k)$ , ce qui n'ajoute en soi pas d'information car cela dit simplement que  $\partial_t \omega_k$  est orthogonal à  $\omega$ , or on sait que  $\omega$  est astreint à rester sur la sphère unité donc cette relation d'orthogonalité est vraie de toute façon.

#### 3.1 CVA déterministe

Considérons d'abord le cas du CVA déterministe, où  $\omega_k^{n+1} = \bar{\omega}_k^n$ . Si on lance l'algorithme avec un pas de temps divisé par 2, cela implique qu'il y a deux fois plus d'interactions où le poisson s'aligne avec ses voisins, pour un même intervalle de temps. Le nombre de fois où il se réaligne par unité de temps devient alors infini, ce qui ne fait pas sens dans la réalité ; à la limite tous les poissons seront alignés. On va donc faire intervenir  $\nu$  une fréquence d'interaction entre

un poisson et ses voisins.  $\nu^{-1}$  désigne donc le temps typique entre deux alignements successifs. On obtient une nouvelle équation :

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\Delta t} = \nu (Id - \omega_k^{n+1/2} \otimes \omega_k^{n+1/2}) (\bar{\omega}_k^n - \omega_k^n)$$

Ainsi, à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , nous avons le système suivant :

$$\frac{dX_k}{dt} = c\omega_k \tag{3}$$

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \nu (Id - \omega_k \otimes \omega_k) \bar{\omega}_k \tag{4}$$

en utilisant le fait que  $(Id - \omega_k \otimes \omega_k)\omega_k = 0$ . Cette limite est formelle, et admise comme dans [DeMo].

### 3.2 CVA : cas général

Revenons au cas plus général d'un CVA où le bruit gaussien qui perturbe l'alignement est présent. Dans l'équation (2), les auteurs de [DeMo] choisissent de remplacer seulement le premier  $\frac{1}{\Delta t}$  par  $\nu$ .

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\Delta t} = \nu (Id - \omega_k^{n+1/2} \otimes \omega_k^{n+1/2}) (\bar{\omega}_k^n - \omega_k^n) + \frac{1}{\Delta t} (Id - \omega_k^{n+1/2} \otimes \omega_k^{n+1/2}) (\hat{\omega}_k^n - \bar{\omega}_k^n)$$

Nous admettons que si le bruit est ajouté nous obtenons à la limite continue

$$\begin{aligned} \frac{dX_k}{dt} &= c\omega_k \\ d\omega_k &= (Id - \omega_k \otimes \omega_k) \left( \nu \bar{\omega}_k dt + \sqrt{2D} dB_t^k \right) \end{aligned}$$

où  $dB_t^k$  est un mouvement brownien d'intensité  $\sqrt{2D}$ . Dans cet exposé nous ne rentrerons pas dans les détails des notions stochastiques qui interviennent, car c'est un domaine qui dépasse le cadre de notre sujet.

### 3.3 La fréquence $\nu$

On peut généraliser un peu plus le modèle en supposant que la fréquence à laquelle le poisson se réaligne selon ses voisins dépend de sa facilité à changer de direction.  $\nu$  devient donc une fonction  $\nu : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , que l'on peut supposer continue et croissante sur  $[-1, 1]$ , ce qui traduit le fait que le poisson change d'autant moins facilement de direction que l'angle entre sa direction et celle de ses voisins est grande. Le modèle s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{dX_k}{dt} &= c\omega_k \\ d\omega_k &= (Id - \omega_k \otimes \omega_k) \left( \nu(\omega_k \cdot \bar{\omega}_k) \bar{\omega}_k dt + \sqrt{2D} dB_t \right) \end{aligned}$$

## 4 Limite de champ-moyen pour le CVA

### 4.1 Opérateurs sur une sphère

**Définition 1.** Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^2$  muni de sa norme euclidienne. On lui associe un système de coordonnées cartésiennes  $x = (x_1, x_2, x_3)$  relatives à la base orthonormale  $(e_1, e_2, e_3)$ , et un système de coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$  de sorte que  $x_1 = \sin \theta \cos \phi$ ,  $x_2 = \sin \theta \sin \phi$ ,  $x_3 = \cos \theta$ . On note  $e_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$  et  $e_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$  la base locale sphérique.

Soient  $f$  une fonction de  $\omega \in \mathbb{S}^2$  et  $A$  un champ de vecteurs tangents à la sphère. Alors les opérateurs **gradient** et **divergence** s'écrivent en coordonnées sphériques comme suit :

$$\nabla_\omega f = \partial_\theta f e_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi f e_\phi, \quad \nabla_\omega \cdot A = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi A_\phi.$$

### 4.2 Mesure empirique de N poissons

Les poissons sont naturellement associés à une mesure empirique  $f^N$  définie sur les parties de l'espace  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . C'est une somme de masses de diracs de la forme  $\delta_{X_k(t), \omega_k(t)} dt$ , et normalisée de sorte que  $f^N$  est une mesure positive de masse finie égale à 1. Son expression est donnée par

$$f^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{X_k(t), \omega_k(t)} dt,$$

au sens où, si  $\varphi$  est une fonction continue à support compact de  $C_c^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  alors

$$\langle f^N, \varphi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int_{t \in \mathbb{R}} \varphi(X_k(t), \omega_k(t), t) dt$$

Nous montrons peu après que, du système ((3), (4)), nous pouvons déduire l'équation suivante :

$$\partial_t f^N + c\omega \cdot \nabla_x f^N + \nabla_\omega \cdot (F^N f^N) = 0 \tag{5}$$

où

$$F^N = \nu(\cos \theta^N) P_{\omega^\perp}(\bar{\omega}^N) \text{ avec } \cos \theta^N = \omega \cdot \bar{\omega}^N \tag{6}$$

et

$$\bar{\omega}^N(x, \omega, t) = \begin{cases} \frac{J^N(x, t)}{|J^N(x, t)|}, & \text{si } J^N(x, t) \neq 0 \\ \omega, & \text{sinon} \end{cases} \quad J^N(x, t) = \sum_{j: |X_j(t) - x| \leq R} \omega_j(t). \tag{7}$$

Ici nous changeons provisoirement la notation  $Id - \omega \otimes \omega$  en  $P_{\omega^\perp}$ .

On fera attention au fait que  $\theta^N$  et  $\bar{\omega}^N$  sont des fonctions en  $(x, \omega, t)$ .

Justifions l'égalité (5). Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \partial_t f^N + c\omega \cdot \nabla_x f^N + \nabla_\omega \cdot (F^N f^N), \varphi \rangle &= -\langle f^N, \partial_t \varphi + c\omega \cdot \nabla_x \varphi + F^N \cdot \nabla_\omega \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int_{t \in \mathbb{R}} (\partial_t \varphi + c\omega \cdot \nabla_x \varphi + F^N \cdot \nabla_\omega \varphi)(X_k(t), \omega_k(t), t) dt \end{aligned}$$

or on a

$$\frac{d}{dt}(t \mapsto \varphi(X_k(t), \omega_k(t), t)) = \dot{X}_k \cdot \nabla_x \varphi + \dot{\omega}_k \cdot \nabla_\omega \varphi + \partial_t \varphi$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{X}_k(t) &= c\omega_k(t) \\ \dot{\omega}_k(t) &= \nu(\omega_k(t) \cdot \bar{\omega}_k(t)) P_{\omega_k^\perp}(\bar{\omega}_k) \\ \bar{\omega}_k &= \bar{\omega}^N(X_k(t), \omega_k(t), t) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle \partial_t f^N + c\omega \cdot \nabla_x f^N + \nabla_\omega \cdot (F^N f^N), \varphi \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int_{t \in \mathbb{R}} \frac{d}{dt}(t \mapsto \varphi(X_k(t), \omega_k(t), t)) dt \\ &= 0 \quad \text{car } \varphi \text{ est à support compact.} \end{aligned}$$

Ainsi  $\langle \partial_t f^N + c\omega \cdot \nabla_x f^N + \nabla_\omega \cdot (F^N f^N), \varphi \rangle = 0$ . Ceci est vrai pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$  d'où l'équation (5).

### 4.3 Limite de champ-moyen

Dans ce paragraphe on veut faire tendre le nombre de poissons  $N \rightarrow \infty$  dans l'équation (5). On remarque que  $\bar{\omega}$  est en fait le vecteur normalisé de

$$\int_{|y-x| \leq R, v \in S^2} v f^N(y, v, t) dy dv$$

ce qui se généralise par

$$\int_{y \in \mathbb{R}^3, v \in S^2} K(x-y) v f^N(y, v, t) dy dv$$

où  $K$  est un "noyau de visibilité" autour de 0. Ici, c'était la fonction indicatrice de la boule centrée en l'origine et de rayon  $R$ , mais on peut prendre d'autres fonctions positives qui décroissent vers 0 à l'infini. On prendra toujours des fonctions  $C^\infty$ , positives bornées et à support compact; cette dernière condition montre que les individus trop éloignés ne sont pas pris en compte car le poisson ne les voit pas. On supposera de plus que le noyau  $K$  est isotrope, c'est-à-dire que  $\forall y \in \mathbb{R}^3, K(y) = K(|y|)$ , autrement dit ses lignes de niveau sont concentriques. Cela correspond au fait que le poisson tient en compte de façon égale tous ses voisins, qu'ils soient devant ou derrière lui, pour "estimer" la moyenne de leurs directions. On pourrait prendre un noyau anisotrope, mais nous nous contenterons du premier cas dans cet exposé.

Formellement, on admet, comme le font les auteurs de [DeMo], que si on ajoute la contribution du bruit aléatoire, la limite formelle de champ-moyen du système de particules défini par (5), (6) et (7) est :

$$\partial_t f + c\omega \cdot \nabla_x f + \nabla_\omega \cdot (Ff) = D\Delta_\omega f \tag{8}$$

$$F(x, \omega, t) = \nu(\omega \cdot \bar{\omega}(x, \omega, t)) P_{\omega^\perp}(\bar{\omega}(x, \omega, t)) \tag{9}$$

$$\bar{\omega}(x, \omega, t) = \frac{J(x, t)}{|J(x, t)|}, \quad J(x, t) = \int_{y \in \mathbb{R}^3, v \in S^2} K(|y-x|) v f(y, v, t) dy dv \tag{10}$$

Même si on suppose  $f$  régulière, prouver ce résultat nécessiterait une maîtrise des processus stochastiques qui sort du cadre de ce travail. La première équation est une équation de KOLMOGOROV-FOKKER-PLANCK.

Pour approfondir le sujet, on peut se reporter à [BoCaCa].

## 5 Limite hydrodynamique

### 5.1 Changement d'échelle

Nous nous intéressons aux dynamiques du système (8), (9), (10) pour de grandes échelles de temps et d'espace.

Jusqu'ici, les quantités qui apparaissent dans le système ont des dimensions physiques. Nous rendons le problème adimensionné, en introduisant des grandeurs typiques : soit  $\nu_0$  une fréquence d'interaction typique. Cela implique que  $\nu(\cos \theta) = \nu_0 \nu'(\cos \theta)$  où  $\nu'$  est bornée sur  $[-1, 1]$ . Nous introduisons aussi le temps typique  $t_0 = \nu_0^{-1}$  et la distance typique  $x_0 = ct_0 = c/\nu_0$ , de sorte qu'on utilisera  $t' = t/t_0$  et  $x' = x/x_0$ . Cela signifie que la nouvelle unité de temps est la durée moyenne entre deux interactions successives, et l'unité d'espace la distance moyenne parcourue par les particules entre deux interactions.

On introduit aussi le coefficient de diffusion adimensionné  $d = D/\nu_0$  ( $D$  a bien la dimension d'une fréquence, donc  $d$  est sans dimension). Le noyau de visibilité  $K$  devient  $K'(|x'|) := K(x_0|x')$ . Par exemple si  $K$  était l'indicatrice de la boule centrée à l'origine de rayon  $R$ , alors  $K'$  est l'indicatrice de la boule de rayon  $R' = R/x_0$ .

Dans le nouveau système de coordonnées  $(x', \omega, t')$ , (8), (9), (10) se réécrit (en enlevant les  $'$  par souci de clarté) :

$$\partial_t f + \omega \cdot \nabla_x f + \nabla_\omega \cdot (Ff) = d\Delta_\omega f \quad (11)$$

$$F(x, \omega, t) = \nu(\cos \bar{\theta})(Id - \omega \otimes \omega)\bar{\omega}(x, t) \text{ où } \cos \bar{\theta} = \omega \cdot \bar{\omega} \quad (12)$$

$$\bar{\omega}(x, t) = \frac{J(x, t)}{|J(x, t)|}, J(x, t) = \int_{y \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{S}^2} K(|x - y|)vf(y, v, t) dydv \quad (13)$$

Pour l'instant, nous avons décrit le problème seulement à l'échelle **microscopique**, avec des unités de temps et d'espace attachées aux caractéristiques des particules individuelles. Nous voulons maintenant regarder le système à l'échelle **macroscopique**, avec des échelles de temps et d'espace infiniment plus grandes que celles des individus. Nous prenons donc pour le temps et la distance typiques :  $\tilde{t}_0 = t_0/\epsilon$ ,  $\tilde{x}_0 = x_0/\epsilon$  avec  $\epsilon \ll 1$ . Cela fait que les nouvelles variables sont  $\tilde{x} = \epsilon x'$ ,  $\tilde{t} = \epsilon t'$ , du fait des relations  $t = \epsilon \tilde{t}_0 t' = \tilde{t}_0 \tilde{t}$ ,  $x = \epsilon \tilde{x}_0 x' = \tilde{x}_0 \tilde{x}$ .

Dans ce troisième système de coordonnées  $(\tilde{x}, \omega, \tilde{t})$ , le système (11), (12), (13) se réécrit (en enlevant les  $\tilde{\cdot}$ ) :

$$\epsilon(\partial_t f^\epsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\epsilon) = -\nabla_\omega \cdot (F^\epsilon f^\epsilon) + d\Delta_\omega f^\epsilon \quad (14)$$

$$F^\epsilon(x, \omega, t) = \nu(\omega \cdot \bar{\omega}^\epsilon)(Id - \omega \otimes \omega)\bar{\omega}^\epsilon(x, t) \quad (15)$$

$$\bar{\omega}^\epsilon(x, t) = \frac{J^\epsilon(x, t)}{|J^\epsilon(x, t)|}, J^\epsilon(x, t) = \int_{y \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{S}^2} K(|\frac{x - y}{\epsilon}|)vf^\epsilon(y, v, t) dydv \quad (16)$$

C'est avec celui-là que nous allons travailler désormais, et on n'écrira plus les  $\tilde{\cdot}$ .

**La limite hydrodynamique du problème consiste à faire tendre  $\epsilon$  vers 0** et déterminer quelles sont les distributions  $f$  qui sont la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0$  de fonctions  $f^\epsilon$  solutions du système 14, 15, 16, indexées par un  $\epsilon$  parcourant un voisinage de 0.

A partir d'ici, on suppose donc que les fonctions  $f, f^\epsilon$  sont dans  $C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ . On veut aussi donner un sens physique au vecteur

$$j^\epsilon(x, t) = \int_{v \in \mathbb{S}^2} v f^\epsilon(x, v, t) dv$$

qui désigne le flux de particules en  $(x, t)$ , c'est-à-dire une moyenne pondérée des vitesses en  $(x, t)$ , et à la quantité

$$\rho^\epsilon(x, t) = \int_{v \in \mathbb{S}^2} f^\epsilon(x, v, t) dv$$

qui est la densité de particules en  $(x, t)$ . On demande donc que  $f$  et  $f^\epsilon(x, \cdot, t)$  soient intégrables sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Comme on le verra dans le paragraphe 7.2 "Résolution", on demande aussi qu'elle soient dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$ . On impose que les toutes les dérivées à l'ordre 1 en temps  $t$ , celles à l'ordre 2 en espace  $x$  et celles à l'ordre 2 en vitesse  $v$  soient bornées sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

On notera  $F$  l'espace des fonctions

$$\{f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \mid f(x, \cdot, t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}^2) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2); f \text{ vérifie les conditions } \mathcal{C}\}$$

où  $\mathcal{C}$  :

- $\partial_t f$  est bornée ;
- $\forall \alpha$  un multi indice tel que  $|\alpha| \leq 2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha}$  est bornée ;
- $\forall \alpha$ ,  $|\alpha| \leq 2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial(\theta, \phi)^\alpha}$  est bornée (où  $(e_\theta, e_\phi)$  est un système de coordonnées sphériques).

Ainsi,  $f$  et  $f^\epsilon$  seront dans  $F$ .

Enfin, on demande même que la convergence des  $f^\epsilon$  vers  $f$  se fasse uniformément sur toutes les différentielles partielles (en  $x, v, t$ ), jusqu'à l'ordre 1 pour  $t$  et jusqu'à l'ordre 2 pour  $x, v$ .

Toutes ces hypothèses ne sont peut-être pas bien justifiées, au sens où les solutions n'ont pas forcément une si bonne régularité, mais cela nous permet de trouver les résultats importants de cet exposé.

Nous voulons écrire le système (14), (15), (16) à l'ordre 2 en  $\epsilon$ . Pour cela faisons d'abord un développement limité de  $\bar{w}$ .

**Lemme 1.** Soient  $f^\epsilon \in F$ . En faisant un développement limité quand  $\epsilon \rightarrow 0$  à l'ordre 2 de la fonction  $\bar{w}^\epsilon$ , nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \bar{w}^\epsilon(x, t) = \Omega^\epsilon(x, t) + O(\epsilon^2)$$

où

$$\Omega^\epsilon(x, t) = \frac{j^\epsilon(x, t)}{|j^\epsilon(x, t)|} \text{ et } j^\epsilon(x, t) = \int_{v \in \mathbb{S}^2} v f^\epsilon(x, v, t) dv$$

**Preuve.** On rappelle que  $K$  est isotrope, c'est-à-dire  $K(y) = K(|y|)$ , et on note  $R$  le rayon d'une boule qui contient le support de  $K$ .

$$\begin{aligned} J^\epsilon(x, t) &= \int_{y \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{S}^2} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) v f^\epsilon(y, v, t) dy dv \\ &= \int_{v \in \mathbb{S}^2} \int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) v f^\epsilon(y, v, t) dy dv \end{aligned}$$

On développe  $f^\epsilon$  à l'ordre 2. Comme  $f^\epsilon$  est  $C^2$ , on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange, qui assure que :

$$\forall (v, t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^3, \exists \theta \in [0, 1],$$

$$f^\epsilon(y, v, t) = f^\epsilon(x, v, t) + \nabla_x f^\epsilon(x, v, t) \cdot (y - x) + \frac{1}{2} \mathbb{H}_x f^\epsilon(x + \theta(y - x), v, t) \cdot (y - x, y - x)$$

où  $\mathbb{H}_x f^\epsilon(z, v, t)$  est la matrice hessienne de  $f^\epsilon$  en  $(z, v, t)$  par rapport à la variable d'espace.  
En conséquence,

$$f^\epsilon(y, v, t) = f^\epsilon(x, v, t) + \nabla_x f^\epsilon(x, v, t) \cdot (y - x) + r_{x,v,t}^\epsilon(y - x).$$

où

$$|r_{x,v,t}^\epsilon(h)| \leq \frac{1}{2} \sup_{z \in \mathbb{R}^3} \|\mathbb{H}_x f^\epsilon(z, v, t)\| |h|^2 = M_{v,t}^\epsilon |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^3,$$

ce qui a un sens si  $f^\epsilon$  a une différentielle partielle en variable d'espace d'ordre 2 bornée. Si on suppose même que sa différentielle d'ordre 2 est uniformément bornée sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , alors les constantes  $M_{v,t}^\epsilon$  sont uniformément bornées par une constante  $M^\epsilon$  indépendante de  $v$  et de  $t$ . Enfin, si on ajoute l'hypothèse faite sur la convergence de  $f^\epsilon$  vers  $f$ , on peut majorer par une constante  $M$  indépendante de  $\epsilon$ ,  $(x, v, t)$ .

L'intégrale se scinde en trois morceaux. Grâce au théorème de Fubini le premier s'écrit

$$\begin{aligned} \left( \int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) dy \right) \int_{\mathbb{S}^2} v f^\epsilon(x, v, t) dv &= \epsilon^3 \left( \int_{|z| < R} K(z) dz \right) j^\epsilon(x, t) \\ &= \epsilon^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} K \right) j^\epsilon(x, t) \end{aligned}$$

Le second est

$$\int_{\mathbb{S}^2} v \nabla_x f^\epsilon(x, v, t) \cdot \left( \int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) (y-x) dy \right) dv$$

qui est nul, car

$$\int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) (y-x) dy = \epsilon^4 \int_{|z| < R} K(z) z dz = 0$$

puisque  $K$  est isotrope, que l'identité est impaire et que la boule est symétrique en 0.

Le troisième morceau est

$$\int_{v \in \mathbb{S}^2} v \left( \int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) r_{x,v,t}^\epsilon(|y-x|) dy \right) dv.$$

Sa norme est bornée par

$$\begin{aligned} M \int_{v \in \mathbb{S}^2} \left( \int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) |y-x|^2 dy \right) dv &\leq M \text{Vol}(\mathbb{S}^2) R^2 \epsilon^2 \left( \int_{|y-x| < R\epsilon} K\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) dy \right) \\ &\leq M \text{Vol}(\mathbb{S}^2) R^2 \epsilon^5 \left( \int_{\mathbb{R}^3} K \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$J^\epsilon(x, t) = \epsilon^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} K \right) j^\epsilon(x, t) + O(\epsilon^5)$$

En normalisant le vecteur nous obtenons

$$\bar{\omega}^\epsilon(x, t) = \frac{j^\epsilon(x, t) + O(\epsilon^2)}{|j^\epsilon(x, t) + O(\epsilon^2)|}$$

avec  $|j^\epsilon(x, t) + O(\epsilon^2)| = |j^\epsilon(x, t)| + O(\epsilon^2)$  d'où

$$\bar{\omega}^\epsilon(x, t) = \Omega^\epsilon(x, t) + O(\epsilon^2)$$

CQFD.

Le système (14), (15), (16) devient :

$$\epsilon(\partial_t f^\epsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\epsilon) = -\nabla_\omega \cdot (F_0^\epsilon f^\epsilon) + d\Delta_\omega f^\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

$$F_0^\epsilon(x, \omega, t) = \nu(\omega \cdot \Omega^\epsilon)(Id - \omega \otimes \omega)\Omega^\epsilon(x, t) \quad (18)$$

$$\Omega^\epsilon(x, t) = \frac{j^\epsilon(x, t)}{|j^\epsilon(x, t)|} \text{ avec } j^\epsilon(x, t) = \int_{v \in \mathbb{S}^2} v f^\epsilon(x, v, t) dv \quad (19)$$

On remarque que le noyau de visibilité  $K$  n'intervient plus, et que le problème à l'échelle macroscopique est en fait indépendant de lui tant qu'il est isotrope. Cette propriété est essentielle pour faire disparaître le terme à l'ordre 1, car s'il était anisotrope le problème changerait beaucoup.

## 6 L'opérateur de collision

On introduit un **opérateur de collision** noté  $Q$ , qui à toute fonction  $f \in F$  associe

$$\begin{aligned} Q(f) &= -\nabla_\omega \cdot (F_f f) + d\Delta_\omega f \\ \text{où } F_f(x, \omega, t) &= \nu(\omega \cdot \Omega_f)(Id - \omega \otimes \omega)\Omega_f(x, t) \\ \Omega_f(x, t) &= \frac{j_f(x, t)}{|j_f(x, t)|} \text{ et } j_f(x, t) = \int_{v \in \mathbb{S}^2} v f(x, v, t) dv \end{aligned}$$

Cela permet de réécrire l'équation (17) sous la forme :

$$\epsilon(\partial_t f^\epsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\epsilon) = Q(f^\epsilon) + O(\epsilon^2) \quad (20)$$

L'utilité d'introduire un tel opérateur est que, si la limite formelle  $f := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f^\epsilon$  existe, et en supposant que la convergence est de telle sorte que  $\forall(x, \omega, t), \partial_t f^\epsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\epsilon = O(1)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  (ce qui découle des hypothèses très fortes faites sur la convergence, et données par la partie précédente) alors elle vérifie nécessairement  $Q(f) = 0$ , pour tous  $x, \omega, t$ , à cause de l'équation (20). Nous allons donc étudier l'ensemble des fonctions qui annulent  $Q$ , que nous appellerons les **équilibres de  $Q$** . Comme  $Q$  n'opère que sur  $\omega$ , les variables  $x$  et  $t$  sont laissées en paramètres. Nous chercherons donc, à paramètres  $(x, t)$  fixés, les équilibres de  $Q$ .

On remarque que  $Q$  n'est pas un opérateur linéaire en  $f$ , car  $\Omega$  ne l'est pas (on a  $\Omega_{\lambda f} = \Omega_f$  si  $\lambda \geq 0$  par exemple). Nous verrons plus loin comment nous essaierons de rendre le problème linéaire.

### 6.1 Distribution de VMF

On rappelle que la fonction  $\nu : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  représente une fréquence de réajustement de la direction prise par un poisson. On suppose qu'elle est régulière et qu'elle admet une primitive notée  $\sigma$ . On définit la densité de probabilité suivante, relative à un vecteur  $\Omega \in \mathbb{S}^2$  fixé :

$$M_\Omega : \left( \begin{array}{l} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto C \exp\left(\frac{\sigma(\omega \cdot \Omega)}{d}\right) \end{array} \right)$$

avec la constante  $C$  définie par la condition de normalisation, et dépendant uniquement de  $d$  et de  $\sigma$  mais pas de  $\Omega$ .

$$\int_{\mathbb{S}^2} M_\Omega(\omega) d\omega = 1$$

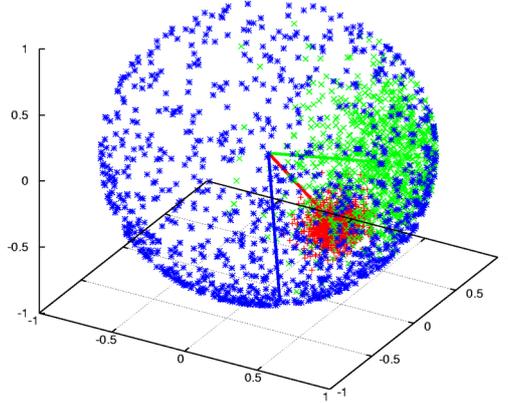


FIGURE 1 – Points répartis selon trois lois de VMF avec des directions moyennes et des paramètres de concentration différents :  $\kappa = 1$  en bleu,  $\kappa = 10$  en vert,  $\kappa = 100$  en rouge. Source : Wikipedia, "Von Mises Fisher distribution".

Quand  $\nu$  est une fonction constante on peut prendre  $\sigma = \nu Id$  et dans ce cas  $M_\Omega$  est une densité de probabilité pour une distribution de Von Mises-Fisher (VMF), qui est une analogue d'une distribution gaussienne sur une sphère, où le paramètre  $\Omega$  est la **direction moyenne** et  $\kappa = \frac{\nu}{d}$  est le **paramètre de concentration** : la masse totale est d'autant plus concentrée autour de la direction moyenne que  $\kappa$  est grand (cf. Figure (1)).

$\Omega$  désigne bien la direction moyenne de la distribution. En effet, si

$$j_{M_\Omega} = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} M_\Omega(\omega) \omega d\omega$$

alors en calculant avec les coordonnées sphériques on a bien  $\frac{j_{M_\Omega}}{|j_{M_\Omega}|} = \Omega$ .

## 6.2 Equilibres de $Q$

Dans ce paragraphe nous décrivons, à  $(x, t)$  fixés, l'ensemble des équilibres  $f$  de  $Q$ . Nous verrons qu'il s'agit d'une variété riemannienne de dimension trois, où un équilibre  $f$  est caractérisé seulement par la masse totale en  $(x, t)$

$$\rho = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} f(\omega) d\omega$$

et la direction locale en  $(x, t)$  des vitesses,

$$\Omega = \frac{j(f)}{|j(f)|} \text{ où } j(f) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \omega f(\omega) d\omega.$$

**Lemme 2.** 1. L'opérateur  $Q$  peut se réécrire sous la forme

$$\forall f \in F, \quad Q(f) = d\nabla_\omega \cdot \left[ M_{\Omega_f} \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{\Omega_f}} \right) \right]. \quad (21)$$

Nous définissons un **taux de dissipation**  $H$  par l'expression

$$H(f) := \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} Q(f) \frac{f}{M_{\Omega_f}} d\omega.$$

Alors il vérifie

$$H(f) = -d \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} M_{\Omega_f} \left\| \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{\Omega_f}} \right) \right\|^2 d\omega \leq 0.$$

2.  $f$  vérifie  $H(f) = 0$  si et seulement si  $Q(f) = 0$  et l'ensemble des fonctions qui vérifient cette condition forment une variété  $\mathcal{E}$  de dimension 3 caractérisée par

$$\mathcal{E} = \{ \rho M_\Omega \mid \rho \in \mathbb{R}_+, \Omega \in \mathbb{S}^2 \}$$

où  $\rho$  s'interprète comme la masse totale en  $(x, t)$  (fixés à l'avance) et  $\Omega$  comme la direction moyenne de la distribution.

**Preuve.** 1. On prend un repère sphérique tel que  $e_3 = \Omega_f$  dans lequel  $M_{\Omega_f}(\omega(\theta, \phi)) = C \exp(d^{-1}\sigma(\cos \theta))$ . Alors

$$\begin{aligned} \nabla_\omega(\ln M_{\Omega_f})(\omega) &= \nabla_\omega \left[ \ln(C \exp(\frac{\sigma(\cos \theta)}{d})) \right] \\ &= \frac{1}{d} \nabla_\omega \sigma(\cos \theta) \\ &= -\frac{1}{d} \nu(\cos \theta) \sin \theta e_\theta \\ &= \frac{1}{d} \nu(\cos \theta)(Id - \omega \otimes \omega)\Omega_f. \\ &= \frac{1}{d} F_f(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant que sur la sphère,  $\nabla_\omega(\frac{f}{g}) = \frac{\nabla_\omega f}{g} - f \frac{\nabla_\omega g}{g^2}$ ,

$$\begin{aligned} d\nabla_\omega \cdot \left[ M_{\Omega_f} \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{\Omega_f}} \right) \right] &= d\nabla_\omega \cdot \left[ \nabla_\omega f - f \frac{\nabla_\omega M_{\Omega_f}}{M_{\Omega_f}} \right] \\ &= d\Delta_\omega f - \nabla_\omega \cdot (F_f f) \\ &= Q(f). \end{aligned}$$

où on remplace  $\frac{\nabla_\omega M_{\Omega_f}}{M_{\Omega_f}} = \nabla_\omega(\ln M_{\Omega_f})$  par  $\frac{1}{d} F_f$ .

On reporte la nouvelle expression de  $Q$  dans celle de  $H$  :

$$H(f) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} d\nabla_\omega \cdot \left[ M_{\Omega_f} \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{\Omega_f}} \right) \right] \frac{f}{M_{\Omega_f}} d\omega$$

et on utilise la formule de Stokes énoncée dans le théorème qui suit, appliqué à des fonctions définies sur la sphère :

$$H(f) = -d \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} M_{\Omega_f} \left\| \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{\Omega_f}} \right) \right\|^2 d\omega.$$

2. Si  $Q(f) = 0$  alors  $H(f) = 0$ , et comme  $f$  est  $C^2$  la fonction à l'intérieur de l'intégrale  $M_{\Omega_f} \left\| \nabla_{\omega} \left( \frac{f}{M_{\Omega_f}} \right) \right\|^2$  est continue et positive. Alors nécessairement elle est nulle sur  $\mathbb{S}^2$ , c'est-à-dire que le gradient est nul :  $f$  est proportionnelle à  $M_{\Omega}$  sur la sphère. Mais au vu de l'expression de  $Q$  donnée par (21),  $Q(f) = 0$ , ce qui montre que les trois conditions sont équivalentes.

**Théorème 1** (Formules de Green et de Stokes). Soit  $U$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $w$  une fonction de  $C^1(\bar{U})$  à support borné dans le fermé  $\bar{U}$ . Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_U \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_{\partial U} w(x) n_i(x) ds,$$

où  $n_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de la normale extérieure unité de  $U$ .

On en déduit que si  $\phi$  est une fonction scalaire de  $C^1(\bar{U})$  et  $\sigma$  une fonction à valeurs vectorielles de  $C^1(\bar{U})$ , à supports bornés dans  $\bar{U}$ , alors elles vérifient la formule de Stokes

$$\int_U \nabla \cdot \sigma(x) \phi(x) dx = - \int_U \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx + \int_{\partial U} \sigma(x) \cdot n(x) \phi(x) ds.$$

Ainsi, si la limite formelle  $\epsilon \rightarrow 0$  existe, nous connaissons le comportement de  $f$  en fonction de la masse et la direction locales évaluées en  $(x, t)$ . Cependant, nous n'avons aucune information sur le comportement de  $f$  en fonction de  $(x, t)$ , c'est pourquoi nous souhaitons exprimer la dépendance des masses et les directions  $\rho$  et  $\Omega$  selon les variables d'espace et de temps. C'est ce que nous faisons dans le paragraphe suivant.

## 7 Les invariants de collision

Pour cela, nous introduisons maintenant une nouvelle notion : cherchons à déterminer les **invariants de collision** de  $Q$ , c'est-à-dire les fonction  $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} Q(f) \psi d\omega = 0 \quad (22)$$

pour toute fonction  $f \in F$ .

En utilisant l'expression de  $Q$  donnée dans le lemme par l'équation (21), et en intégrant deux fois par parties avec la formule de Stokes, ceci se réécrit :

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \frac{f}{M_{\Omega_f}} \nabla_{\omega} \cdot (M_{\Omega_f} \nabla_{\omega} \psi) d\omega = 0, \quad \forall f \in F. \quad (23)$$

L'étude des invariants de collision doit nous servir à préciser le comportement d'une limite formelle  $f$  selon les variables  $(x, t)$  sachant que lorsque celles-ci sont fixées  $f$  est un équilibre de  $Q$ . En reprenant l'équation (20), et intégrant contre un invariant de collision  $\psi$ , nous obtenons

$$\epsilon \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} (\partial_t f^\epsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\epsilon) \psi d\omega = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} Q(f^\epsilon) \psi d\omega + O(\epsilon^2) = O(\epsilon^2)$$

par définition de l'invariant de collision.

et nous espérons avoir à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  l'équation suivante :

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} (\partial_t f + \omega \cdot \nabla_x f) \psi d\omega = 0.$$

En exploitant l'expression de  $\psi$  cela donne une équation sur  $\rho$  et  $\Omega$  en fonction de  $(x, \omega, t)$ .

On remarque déjà que si  $\psi$  est une fonction constante alors  $\psi$  est un invariant de collision. En fait, si on travaille avec des mesures de masse finie, la masse totale est conservée à tout instant. Comme dans l'équation des gaz de Boltzmann, c'est un invariant de collision qui traduit la loi de conservation de la masse. Cependant, alors que dans le contexte des gaz nous avons aussi conservation du moment cinétique total  $mv$  et de l'énergie cinétique totale  $mv^2$ , ici nous n'avons pas de conservation autre que celle de la masse.

Appliquons la démarche mentionnée précédemment sur les constantes. On prend  $\psi = 1$ , ce qui ne change pas le problème :

$$\partial_t \rho^\epsilon + \nabla_x \cdot j^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} Q(f^\epsilon) d\omega + O(\epsilon) = O(\epsilon)$$

En fait l'égalité est même nulle, car il y avait conservation de la masse dans le modèle de l'équation (8). Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , on sait que  $f^\epsilon \rightarrow f = \rho\Omega$ ,  $\rho^\epsilon \rightarrow \rho$  et  $j^\epsilon \rightarrow j = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \rho M_\Omega(\omega) \omega d\omega = c_1 \rho \Omega$  où

$$c_1 = \int M_\Omega(\omega) \omega \cdot \Omega d\omega = \frac{\int_0^\pi \cos(\theta) \exp\left(\frac{\sigma(\cos(\theta))}{d}\right) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\sigma(\cos(\theta))}{d}\right) \sin(\theta) d\theta}$$

après quelques calculs dans les coordonnées sphériques.

Alors nous obtenons l'équation dite **de continuité** qui exprime la conservation de la matière à l'échelle locale :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho \Omega) = 0 \tag{24}$$

Cette équation comporte trois inconnues :  $\rho, \Omega_1, \Omega_2$  donc elle seule ne suffit pas à caractériser complètement ces fonctions.

Alors que l'espace des invariants de collision n'est que de dimension 1, l'idée de l'article de [DeMo] est d'introduire des **invariants de collision généralisés** qui forment un espace vectoriel de dimension égale à 3, pour décrire complètement les équilibres de  $Q$  relativement à tout  $(x, t)$ , qui sont eux aussi dans une variété de dimension 3.

## 7.1 Invariants de collision généralisés

Nous ne restreignons plus les invariants  $\psi$  à satisfaire l'équation (22) pour toutes les fonction  $f \in F$ , mais seulement celles dont la direction  $j_f$  est colinéaire à un même vecteur  $\Omega$  fixé à l'avance. Cela rend bien la contrainte moins forte. Le problème s'écrit donc :

**Problème 1.** *Trouver les  $GCI(\Omega)$  (Invariants de Collision Généralisés) notés  $\psi$  relatifs à un vecteur unitaire  $\Omega$  tels que*

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} Q(f) \psi d\omega = 0 \quad \forall f \in F \text{ telle que } j_f \text{ est colinéaire à } \Omega.$$

La condition de colinéarité se traduit par un produit vectoriel nul :

$$0 = j_f \times \Omega = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} f(\omega) \omega \times \Omega d\omega.$$

ce qui équivaut à  $f \in \ker(L)$  où  $L$  est une application linéaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ , avec

$$L(f) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} f(\omega) \omega \times \Omega d\omega.$$

Notons aussi

$$\Phi_\psi(f) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \frac{f}{M_\Omega} \nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) d\omega.$$

$\Phi_\psi$  dépend bien sûr de  $\Omega$  mais il est supposé fixé. De plus  $\Phi_\psi$  est linéaire en  $f$ , et cette propriété se révèle être très importante.

On remarque que  $\Phi_\psi(f) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} Q(f)\psi d\omega$  dès que  $\Omega_f = \Omega$ , à cause de l'expression (23). Ce n'est pas vrai *a priori* si on a  $\Omega_f = -\Omega$ . Cependant, si  $\psi$  satisfait au problème 1, alors pour toute fonction  $f$  telle que  $f \in \ker(L)$ ,  $-f$  est aussi dans  $\ker(L)$  donc ou bien  $\Omega_j = \Omega$  ou bien  $\Omega_{-f} = \Omega$ , et dans ce cas ou bien  $\Phi_\psi(f) = 0$  ou bien  $\Phi_\psi(-f) = 0$  ce qui est la même chose. **Nécessairement**, une solution  $\psi$  du problème 1 est aussi solution du problème 2 suivant, qui lui est linéaire :

**Problème 2.** *Trouver les  $\psi$  tels que*

$$\forall f \in F, f \in \ker(L) \Rightarrow \Phi_\psi(f) = 0.$$

*ou encore les  $\psi$  tels que*

$$\ker L = \bigcap_{i=1,2,3} \ker L_i \subset \ker \Phi_\psi.$$

où  $L_i$  est la projection de  $L$  selon la  $i^{\text{eme}}$  coordonnée.

On utilise le lemme suivant :

**Lemme 3** (Lemme des noyaux). Soit  $X$  un espace vectoriel et soient  $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n$  des formes linéaires sur  $X$  telles que, pour tout vecteur  $v$ ,

$$[\forall i = 1, \dots, n, \phi_i(v) = 0] \Rightarrow [\phi(v) = 0].$$

Alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ .

**Preuve.** On considère l'application  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  définie par

$$F(u) = (\phi(u), \phi_1(u), \dots, \phi_n(u)).$$

Il résulte de l'hypothèse que  $a = (1, 0, \dots, 0)$  n'appartient pas à  $\mathfrak{S}(F)$ . Par le théorème de Hahn-Banach géométrique on peut donc séparer  $\{a\}$  et  $\mathfrak{S}(F)$  par un hyperplan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de façon stricte : il existe  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que

$$\lambda < \alpha < \lambda\phi(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(u) \quad \forall u \in X.$$

Cela induit que

$$\lambda\phi(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(u) = 0 \quad \forall u \in X$$

et  $\lambda < 0$  d'où  $\lambda \neq 0$ .

Nous avons bien sûr la réciproque.

De là nous déduisons que le problème est équivalent à celui-ci :

**Problème 3.** *Trouver les  $\psi$  vérifiant*

$$\text{il existe } \beta \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \Phi_\psi = \beta \cdot L \in \text{Vect}(L_i)$$

*i.e.*

$$\text{il existe } \beta \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall f \in F, \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \frac{f}{M_\Omega} [\nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) - \beta \cdot (\omega \times \Omega) M_\Omega] d\omega = 0$$

On peut prendre  $\beta$  orthogonal à  $\Omega$  comme sa composante selon  $\Omega$  n'influe pas. La reformulation est remarquable car  $f$  n'a plus à vérifier de contraintes. Comme  $f$  est quelconque dans  $F$ , la différence sous l'intégrale est nulle, et le problème revient finalement au suivant :

**Problème 4.** *Trouver les  $\psi$  vérifiant*

$$\text{il existe } \beta \in \mathbb{R}^3, \quad \beta \cdot \Omega = 0, \quad \text{tel que } \forall \omega \in \mathbb{S}^2, \nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) = \beta \cdot (\omega \times \Omega) M_\Omega.$$

C'est un problème linéaire en  $\psi$  ce qui nous assure que  $\text{GCI}(\Omega)$  est un espace vectoriel.

## 7.2 Résolution

Il est utile d'introduire une base cartésienne  $(e_1, e_2, \Omega)$  et les coordonnées sphériques associées  $(\theta, \phi)$ . Alors  $\beta = (\beta_1, \beta_2, 0)$  et  $\beta \cdot (\Omega \times \omega) = (-\beta_1 \sin \phi + \beta_2 \cos \phi) \sin \theta$ , où  $\omega = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ . Résolvons d'abord les équations suivantes, où on a pris  $\beta = (1, 0, 0)$  et  $\beta = (0, 1, 0)$  :

$$\forall \omega \in \mathbb{S}^2, \nabla_\omega \cdot (M_{\Omega_f} \nabla_\omega \psi) = -\sin \phi \sin \theta M_\Omega \text{ et } \nabla_\omega \cdot (M_{\Omega_f} \nabla_\omega \psi) = \cos \phi \sin \theta M_\Omega.$$

Nous construirons des solutions notées  $\psi_1$  et  $\psi_2$ .

Pour donner un sens aux quantités macroscopiques construites en intégrant  $\psi$  contre la densité  $f$  sur la sphère il est naturel de les considérer dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$ .

**Lemme 4.** On peut définir  $\mathring{H}^1(\mathbb{S}^2)$ , qui est l'espace  $H^1(\mathbb{S}^2)$  quotienté par le sous-espace fermé des fonctions constantes, muni de la norme quotient  $|\cdot|_{\mathring{H}^1}$ , bien définie car le sous-espace est fermé : si  $\phi \in \mathring{H}^1(\mathbb{S}^2)$  est représentée par  $\Phi \in H^1$ ,  $|\phi|_{\mathring{H}^1} := \inf_{c \in \mathbb{R}} \|\Phi + c\|_{H^1}$  où  $\|\Phi\|_{H^1}^2 = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} |\Phi|^2 + \|\nabla_\omega \Phi\|^2 d\omega$ .

Soit  $\chi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{S}^2)$  tels que  $\int \chi d\omega = 0$ . Alors le problème

$$\nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) = \chi \tag{25}$$

a une unique solution faible  $\phi$  dans  $\mathring{H}^1(\mathbb{S}^2)$ .

**Preuve** (Preuve du Lemme). *Sous forme variationnelle, (25) se reformule par*

$$\forall \phi \in \mathring{H}^1(\mathbb{S}^2), \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) \phi d\omega = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \chi \phi d\omega.$$

Les deux membres sont bien définis quand on considère  $\phi$  à constante près, grâce à la formule de Stokes qui assure que l'intégrale  $\int \nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega) d\omega$  est nulle, et en sachant que la moyenne de  $\chi$  est nulle. On a encore :

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} M_\Omega \nabla_\omega \psi \cdot \nabla_\omega \phi d\omega = - \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \chi \phi d\omega$$

d'après la formule de Stokes. La fonction  $|M_\omega|$  est bornée sur  $\mathbb{S}^2$  donc la forme bilinéaire en  $\psi, \phi$  est continue sur  $\mathring{H}^1(\mathbb{S}^2)$  grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le fait que la moyenne de  $\chi$  sur  $\mathbb{S}^2$  est nulle assure la continuité de la forme linéaire en  $\phi$ . En effet si  $\phi$  est représentée par  $\Phi$ , pour toute constante  $c \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \chi \phi d\omega = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \chi (\Phi + c) d\omega$$

qui est bornée par  $\|\chi\|_{L^2} \|\Phi + c\|_{L^2} \leq \|\chi\|_{L^2} \|\Phi + c\|_{H^1}$  et on passe à l'infimum à constante près.

La coercivité de la forme bilinéaire provient de l'inégalité de Poincaré : il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute  $\Phi \in H^1(\mathbb{S}^2)$ ,

$$C \int |\Phi|^2 d\omega \leq \int \|\nabla\Phi\|^2 d\omega$$

d'où en prenant  $\epsilon$  assez petit pour que  $\epsilon(1 + 1/C) \leq 1$ , on a

$$\epsilon \|\Phi\|_{H^1}^2 = \epsilon \int (|\Phi|^2 + \|\nabla\Phi\|^2) d\omega \leq \int \|\nabla\Phi\|^2 d\omega.$$

et si  $M_\Omega$  est minorée positivement par un  $K$  on obtient

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}^2} M_\Omega \|\nabla\Phi\|^2 d\omega \geq K\epsilon \|\Phi\|_{H^1}^2.$$

En particulier  $\forall \phi \in \mathring{H}^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\int M_\Omega \|\nabla\phi\|^2 d\omega \geq K\epsilon \|\phi\|_{\mathring{H}^1}^2$ .

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Lax-Milgram sur l'espace de Hilbert  $\mathring{H}^1(\mathbb{S}^2)$ .

Dans notre problème, les membres  $\chi_1 = -\sin\phi \sin\theta M_\Omega$  et  $\chi_2 = \cos\phi \sin\theta M_\Omega$  sont de moyenne nulle, donc il existe des solutions faibles  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de l'équation (7.2) au sens du lemme précédent, et uniques à constantes près si on leur impose d'être de moyenne nulle. On rappelle que le problème 4 est linéaire, et qu'il est donc satisfait par toutes les fonctions  $\psi$  de la forme  $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$ , en choisissant  $\beta = (a, b, 0)$ . Ainsi, en revenant à la description des  $\text{GCI}(\Omega)$ , nous trouvons

**Proposition 1.** *L'ensemble des invariants de collision généralisés relatifs à  $\Omega$ , qui appartiennent à l'espace  $H^1(\mathbb{S}^2)$ , forment un espace de dimension 3 engendré par les fonctions constantes,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ .*

Nous admettons que la famille engendre bien tous les invariants de collision généralisés dans  $H^1(\mathbb{S}^2)$ .

Les invariants  $\psi_1$  et  $\psi_2$  peuvent être explicités. On admet qu'ils sont de la forme

$$\psi_1(\omega) = -g(\cos\theta) \sin\phi, \quad \psi_2(\omega) = g(\cos\theta) \cos\phi$$

où  $g$  est l'unique solution du problème elliptique suivant, sur  $[-1, 1]$  :

$$-(1-x)^2 \partial_x (e^{\sigma(x)/d} (1-x^2) \partial_x g) + e^{\sigma(x)/d} g = -(1-x^2)^{3/2} e^{\sigma(x)/d} \quad (26)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (26) admet une unique solution dans l'espace

$$V = \{g; (1-x^2)^{-1/2} g \in \mathbb{L}^2(-1, 1), (1-x^2)^{1/2} \partial_x g \in \mathbb{L}^2(-1, 1)\}.$$

Nous introduisons la fonction  $h(x) := \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $h \in \mathbb{L}^2(-1, 1)$ , ce qui revient à poser

$$\forall \theta \in [0, \pi], h(\cos\theta) = \frac{g(\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

Nous définissons aussi l'**invariant de collision généralisé vectoriel**,

$$\vec{\psi}_\Omega(\omega) = h(\Omega \cdot \omega) \Omega \times \omega = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 \quad (27)$$

où comme précédemment,  $(e_1, e_2, \Omega)$  forme une base cartésienne.

### 7.3 Limite quand $\epsilon \rightarrow 0$

Nous rappelons l'équation de continuité qui avait été trouvée précédemment :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho \Omega) = 0.$$

En reprenant la démarche citée dans la partie 7, nous intégrons sur la sphère l'équation (20) contre l'invariant de collision généralisé vectoriel donné par (27), ce qui donne :

$$\epsilon \int (\partial_t f^\epsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\epsilon) \overrightarrow{\psi_\Omega} d\omega = \int Q(f^\epsilon) \overrightarrow{\psi_\Omega} d\omega + O(\epsilon^2) = O(\epsilon^2)$$

et à la limite, on suppose que  $f^\epsilon \rightarrow f$ ,  $\partial_t f^\epsilon \rightarrow \partial_t(\rho\Omega)$ ,  $\nabla_x f^\epsilon \rightarrow \nabla_x(\rho M_\Omega)$ , et que les intégrales convergent ; ce qui mène à

$$\Omega \times X = \int (\partial_t \rho \Omega + \omega \cdot \nabla_x(\rho \Omega)) h(\Omega \cdot \omega) \Omega \times \omega d\omega = 0$$

où

$$X = \int (\partial_t \rho \Omega + \omega \cdot \nabla_x \rho \Omega) h(\Omega \cdot \omega) \omega d\omega.$$

C'est une équation de colinéarité entre  $X$  et  $\Omega$ . En traduisant l'équation

$$(Id - \Omega \otimes \Omega)X = 0$$

, nous admettons qu'après des calculs, que l'on peut trouver explicitement dans [DeMo], nous obtenons la seconde équation du modèle SOH :

$$\rho(\partial_t \Omega + c_2(\Omega \cdot \nabla)\Omega) + \lambda(Id - \Omega \otimes \Omega)\nabla_x \rho = 0$$

avec

$$c_2 = \frac{\int_0^\pi \cos \theta \sin^3 \theta \nu(\cos \theta) h(\cos \theta) \exp(\frac{\cos \theta}{d}) d\theta}{\int_0^\pi \exp(\frac{\cos \theta}{d}) \sin \theta d\theta}$$

et

$$\lambda = d \frac{\int_0^\pi \sin^3 \theta \nu(\cos \theta) h(\cos \theta) \exp(\frac{\cos \theta}{d}) d\theta}{\int_0^\pi \exp(\frac{\cos \theta}{d}) \sin \theta d\theta}$$

où on rappelle que

$$\forall \theta \in [0, \pi], h(\cos \theta) = \frac{g(\cos \theta)}{\sin \theta}.$$

On peut les réexprimer en fonction de  $g$  grâce à un changement de variable  $x = \cos \theta$ , ce qui nous sera utile dans la suite pour calculer ces constantes numériquement. De même, le coefficient  $c_1$  de l'équation de continuité (24) peut se réécrire.

$$c_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \exp(x/d) dx}{\int_{-1}^1 \exp(x/d) dx} \quad (28)$$

$$c_2 = \frac{\int_{-1}^1 x \nu(x) g(x) (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \exp(x/d) dx}{\int_{-1}^1 \exp(x/d) dx} \quad (29)$$

$$\lambda = d \frac{\int_{-1}^1 \nu(x) g(x) (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \exp(x/d) dx}{\int_{-1}^1 \exp(x/d) dx} \quad (30)$$

Ainsi, nous sommes parvenus au modèle dit **SOH (Self-Organized Hydrodynamics)** :

**Théorème 2** (Self-Organized Hydrodynamics). *Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous avons  $f^\epsilon \rightarrow f$  formellement, où  $f$  est un équilibre :*

$$\forall(x, \omega, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, f(x, \omega, t) = \rho(x, t)M_{\Omega(x,t)}(\omega)$$

où la densité  $\rho$  et le champ vectoriel  $\Omega$  sont liés à  $f$  par les relations (6.2) et (6.2), et satisfont le système SOH suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho \Omega) = 0 \tag{31}$$

$$\rho(\partial_t \Omega + c_2(\Omega \cdot \nabla)\Omega) + \lambda(Id - \Omega \otimes \Omega)\nabla_x \rho = 0 \tag{32}$$

avec les constantes  $c_1, c_2, \lambda$  données par les expressions (28), (29), (30).

La première équation exprime la conservation de la masse : la densité  $\rho$  se déplace selon la direction  $\Omega$  avec une vitesse de norme constante  $c_1$ .

La seconde équation décrit l'évolution de la direction de  $\Omega$ , qui est astreinte à rester sur la sphère unité. Le terme de projection  $(Id - \Omega \otimes \Omega)$  assure que la norme reste égale à 1. Cette contrainte fait que l'équation n'est pas conservative, et reflète le fait qu'à l'échelle microscopique, la seule grandeur conservée est la masse. La perturbation de ce vecteur se propage à la vitesse  $c_2$ , influencée par un terme qui joue le rôle d'une pression due à la densité, et d'intensité  $\lambda$ . Une particule abandonnée dans le champ de vitesse  $c_2 \Omega$  "voit" (dans le référentiel lagrangien) le vecteur  $\Omega$  posséder une dérivée particulaire égale en  $(x, t)$  à  $\partial_t \Omega + c_2(\Omega \cdot \nabla)\Omega$ , là où elle passe.

Les vitesses de convection  $c_1$  et  $c_2$  sont différentes en général, ce qui signifie que les perturbations de la direction  $\Omega$  ne voyagent pas à la même vitesse que le "fluide" que représentent les poissons. C'est le cas pour les simulations du modèle SOH que nous avons faites.

## 8 Simulations

Dans cette partie, nous présentons les simulations que nous avons faites en 2D sur le modèle CVA et le modèle SOH. Nous avons l'intention de pouvoir comparer les deux et constater comme dans [DeFrou] que les deux modèles restent proches. L'idée était de retrouver des illustrations similaires à la page 22 de l'article. Nous y sommes parvenus dans le cas du CVA discret, mais pas dans le cas du modèle SOH.

### 8.1 CVA discret

Nous présentons ici le code Python que nous avons écrit pour représenter visuellement le déplacement des poissons. Les paramètres utilisés sont :

```
mm = 20 # longueur en abscisse
nn = 10 # longueur en ordonnée
N = 1000 # nombre de poissons
delta_t = 1 # pas de temps
n_max = 100 # nombre de pas à réaliser
c = 5 # norme de la vitesse de chaque poisson
R = 20 # rayon de vision de chaque poisson
alpha = pi/4 # angle maximal de bruit
```

Ici, nous avons légèrement modifié l'algorithme au niveau du bruit. Les directions sont données par  $w_k^n$ , et on suppose qu'à chaque pas de temps, la nouvelle direction est alignée selon la celle des voisins, modulo une perturbation uniforme sur une plage  $[-\alpha, +\alpha]$  :

$$w_k^{n+1} = \cos \theta_k^n \bar{w}_k^n + \sin \theta_k^n \phi_k^n$$

où  $\phi_k^n$  est tel que  $(w_k^n, \phi_k^n)$  forme une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\theta_k^n$  est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[-\alpha, +\alpha]$ . C'est la même hypothèse que prennent les auteurs de [DeFrou] à la page 4, transposée en dimension 2.

Les positions et les directions des poissons sont contenues dans un tableau `numpy` de dimensions  $N \times 2$ , appelés `X` et `w`. Elles sont initialisées dans `X_0` et `w_0`, en étant réparties selon une gaussienne d'écart-type `mm + nn` (pour avoir un ordre de grandeur contrôlé de l'étalement des poissons au début), ou bien selon une loi uniforme sur le carré.

`dessin(X,w)` affiche la densité calculée localement autour de chaque poisson grâce à `np.histogram` grâce aux positions `X`, et superpose le champ des directions donné par `w` affiché grâce à `plt.quiver`.

`dist(X)` calcule la distance entre deux poissons. Elle renvoie une matrice de taille  $N \times N$  contenant les distances mutuelles.

`wBar(X,w,R)` calcule pour chaque poisson  $k$  la moyenne des vitesses des voisins qui se trouvent à une distance de moins de  $R$  de lui.

`evo(X_0,w_0,delta_t,n_max,c,R,alpha)` calcule à partir des positions et directions initiales le déplacement des poissons pendant `n_max` itérations.

```
import numpy as np
from math import sqrt, cos, sin, pi
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import *
from matplotlib import cm
from scipy import spatial as spa
from scipy import ndimage

plt.ion()

mm = 20
nn = 20
N = 1000
delta_t = 0.1
n_max = 1000
c = 5
R = 20
alpha = pi/4

X_0 = np.array([(mm+nn)*np.random.randn(2) + (mm+nn) for k in range(N)])
#X_0 = np.array([[np.random.uniform(0,mm),np.random.uniform(0,nn)] for k in range(N)])
theta_0 = [np.random.uniform(-pi,pi) for k in range(N)]
w_0 = np.array([[cos(theta_0[k]), sin(theta_0[k])] for k in range(N)])

def normaliseMat2(U) : # normalise tout vecteur contenu dans le vecteur U quand il est n
    L = len(U)
    for i in range(L) :
        s = sum(U[i]**2)
        if s != 0 :
            U[i] = U[i]/sqrt(s)
    return U
```

```

def dessin(X,w,it):

    x,y = X[:,0],X[:,1]
    densite, xedges, yedges = np.histogram2d(x, y, bins=50)
    extent = [xedges[0], xedges[-1], yedges[0], yedges[-1]]
    fig = plt.figure()
    plt.quiver(x,y,w[:,0],w[:,1], scale = 40)
    plt.imshow(ndimage.rotate(densite, 90), extent = extent, cmap = cm.Blues)
    colorbar()
    label = "it = " + str(it)
    fig.savefig("{} .png".format(label))
    plt.show()
    plt.pause(0.01)
    plt.clf()

def dist(X) :
    return spa.distance.cdist(X,X)

def wBar(X,w,R) :
    D = dist(X)
    Voisin = D < R
    J = np.dot(Voisin, w)
    normaliseMat2(J)
    wbar = J + (J == np.array([0.0,0.0]))*w
    return wbar

def evo(X_0,w_0,delta_t,n_max,c,R,alpha) :
    X = X_0
    w = w_0
    wbar = wBar(X_0,w_0,R)
    N = len(X)

    directory_name = "evo6 " + " mm = " + str(mm) + " nn = " + str(nn) + " N = " + str(N)
    mkdir(directory_name)
    os.chdir(directory_name)

    dessin(X_0,w_0,0)
    for n in range(n_max) :
        X = X + c*delta_t*w
        Theta = np.array([np.random.uniform(-alpha,alpha) for k in range(N)])
        C = np.vectorize(cos)(Theta)
        S = np.vectorize(sin)(Theta)
        w[:,0] = C*wbar[:,0] + S*(-wbar[:,1])
        w[:,1] = C*wbar[:,1] + S*wbar[:,0]
        if n%10 == 0 :

```

```

    dessin(X,w,n)
    print("itération n° ", n, " temps = ", n*delta_t)
    wbar = wBar(X,w,R)

```

```
evo(X_0,w_0,delta_t,n_max,c,R,alpha)
```

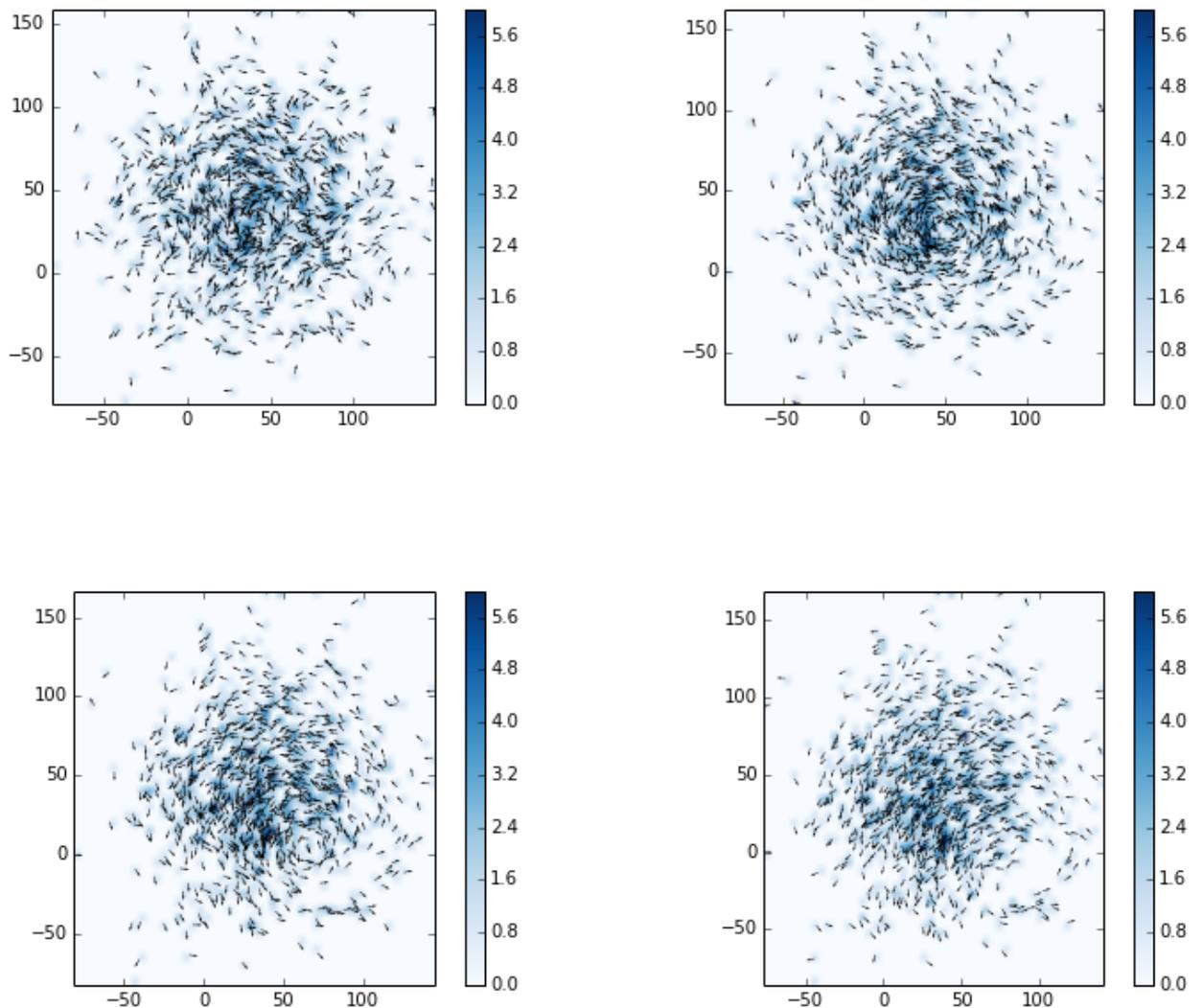
Les images sont les suivantes. Elles ont été générées avec les valeurs suivantes de paramètres :

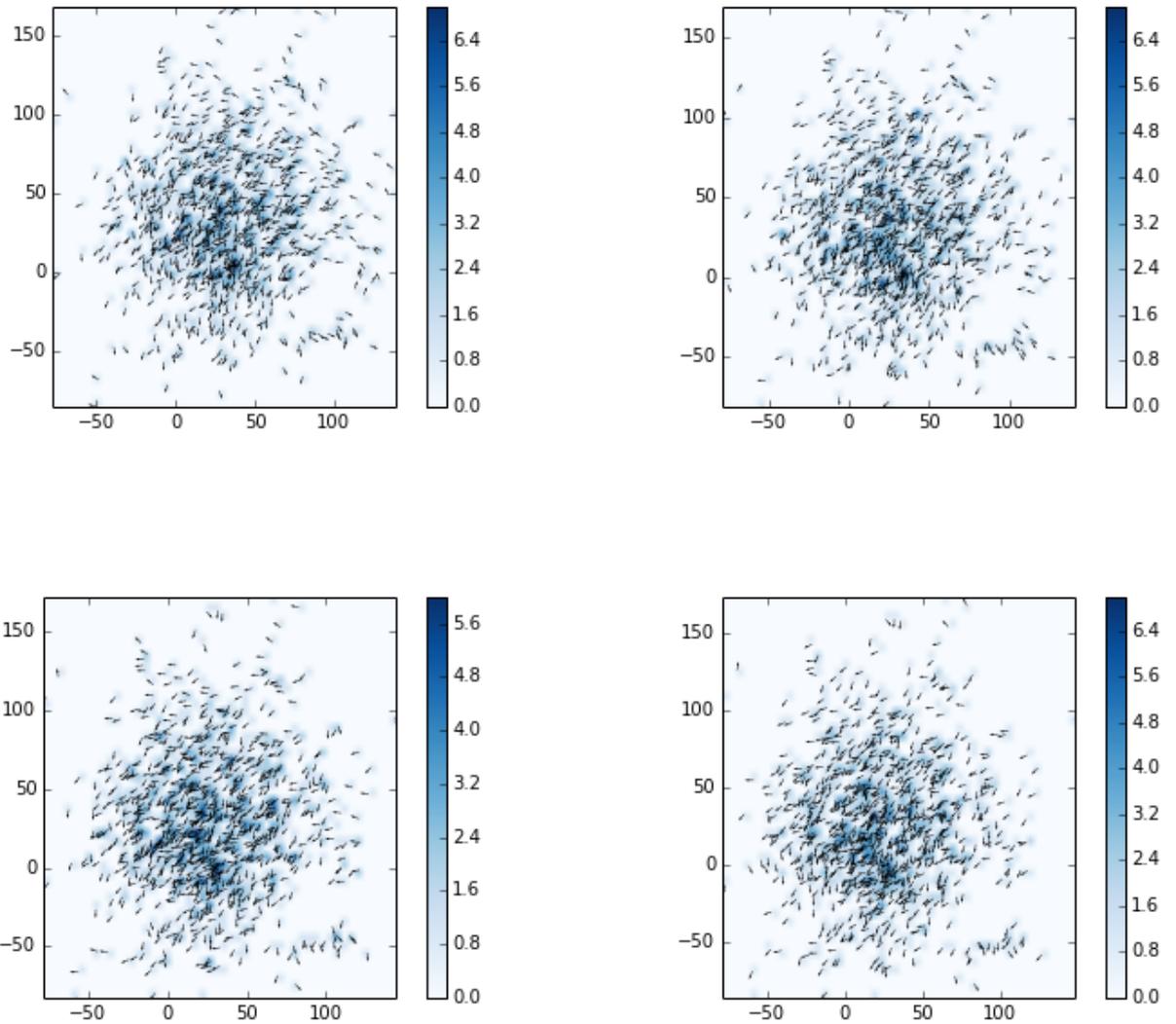
```

mm = 20
nn = 20
N = 1000
delta_t = 0.1
n_max = 1000
c = 5
R = 20
alpha = pi/4

```

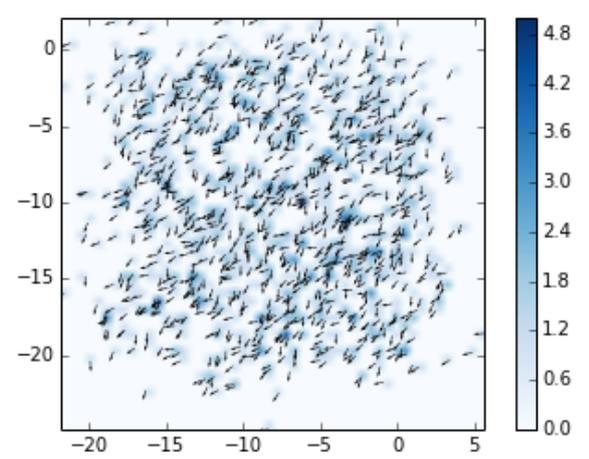
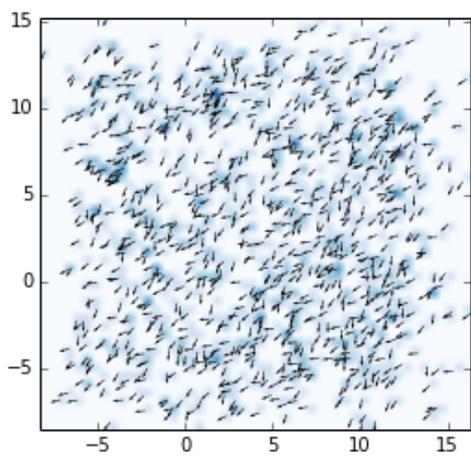
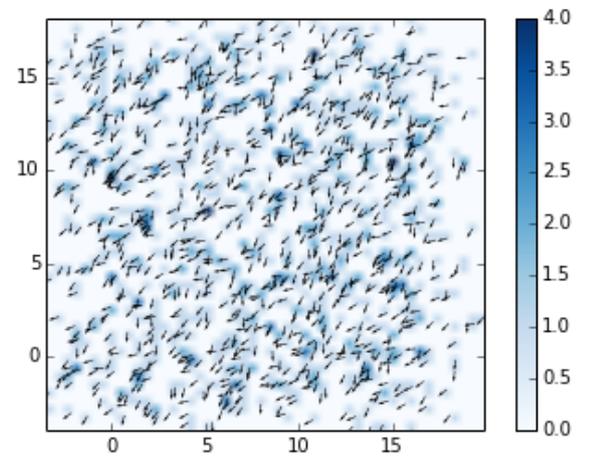
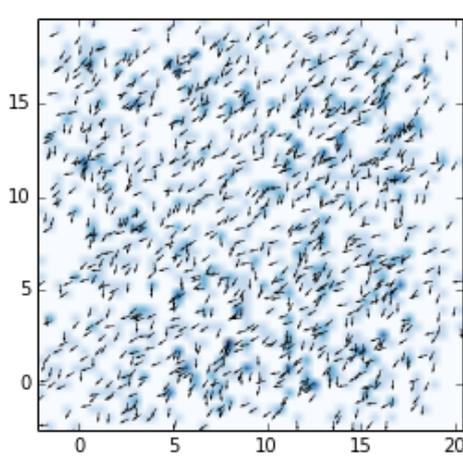
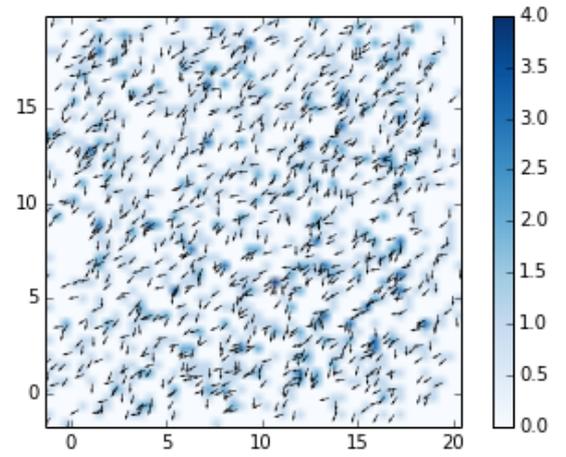
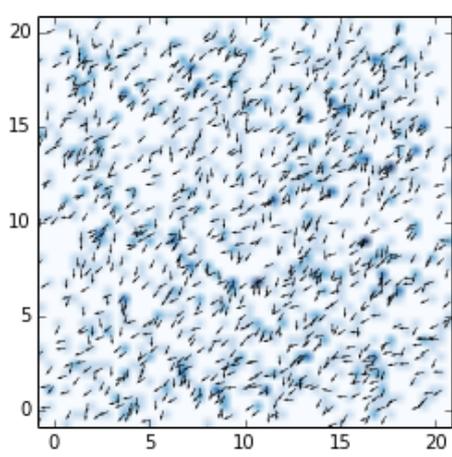
Avec une répartition initiale en gaussienne, aux itérations suivantes : 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70

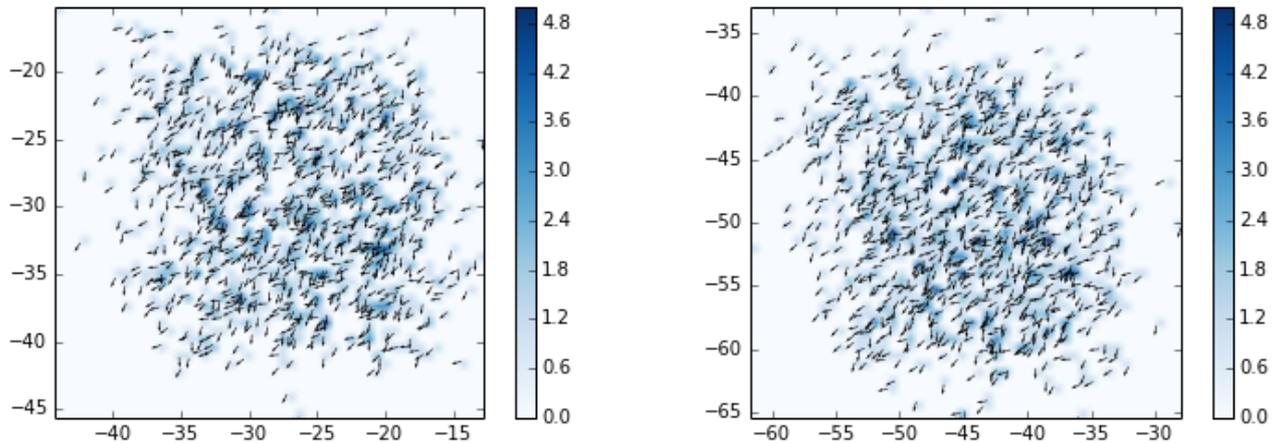




Quand on les affiche à la suite, on voit très bien la boule de poissons tourner dans le sens anti-horaire au début, puis elle change de comportement à partir de l'itération 50 et se diriger globalement vers le coin inférieur gauche. Le fait qu'il y a une boule qui tourne vient du fait que la répartition initiale était arbitrairement choisie comme une gaussienne.

Avec une répartition initiale uniforme, aux itérations suivantes : 0, 1, 2, 4, 10, 30, 60, 90.





Les poissons choisissent dès l'itération 1 une direction globale vers le coin inférieur gauche.

Nous avons aussi produit des images comme à la page 22 de [DeFrou].

```
import numpy as np
from math import sqrt, cos, sin, floor
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from pylab import *
from scipy import spatial as spa
import os

plt.ion()

mm = 20
nn = 20

N = 1000

X_0 = np.array([(mm+nn)/4*np.random.randn(2) + (mm+nn)/4 for k in range(N)])
#X_0 = np.array([[np.random.uniform(0,mm),np.random.uniform(0,nn)] for k in range(N)])
theta_0 = [np.random.uniform(-pi,pi) for k in range(N)]
w_0 = np.array([[cos(theta_0[k]), sin(theta_0[k])] for k in range(N)])

delta_t = 0.1
n_max = 10000
c = 2
R = 5
alpha = pi/4

def normaliseMat2(U) : # le modifie, on s'en fiche. Pour chaque vecteur contenu, normalise
    L = len(U)
    for i in range(L) :
        s = sum(U[i]**2)
        if s != 0 :
```

```

        U[i] = U[i]/sqrt(s)
    return U

def normaliseMat3(U) : # le modifie. matrice rectangulaire dont chaque élément est un ve
    K,L = len(U),len(U[0])
    for k in range(K) :
        for l in range(L) :
            s = sum(U[k,l]**2)
            if s != 0 :
                U[k,l] = U[k,l]/sqrt(s)
    return U

def dessin(X,w,it):
    densite = np.zeros((nn,mm)) #s'affiche visuellement par imshow comme la matrice, ici
    vitesse = np.array([[0.0,0.0]]*nn*mm) # attention c'est la vitesse pour la grille

    for k in range(N) :
        x = floor(X[k,0])
        y = floor(X[k,1])
        if (0 <= x < mm) and (0 <= y < nn) :
            densite[y,x] += 1
            vitesse[x,y] = vitesse[x,y] + w[k]

    normaliseMat3(vitesse)

    fig, ax = plt.subplots(1, 1)

    ax.grid(True, which='minor', axis='both', linestyle='-', color='k')

    ax.set_xticks(np.linspace(0,mm,mm+1), minor=True)
    ax.set_yticks(np.linspace(0,nn,nn+1), minor=True)

    ax.set_xlim(0.0, mm)
    ax.set_ylim(0.0, nn)

    label = " it = " + str(it) + " mm = " + str(mm) + " nn = " + str(nn) + " N = " + str
    " dt = " + str(delta_t)
    x,y = np.mgrid[0.5:(mm-0.5):mm*1j, 0.5:(nn-0.5):nn*1j] #pour les complexes à la fin,
    plt.quiver(x,y,vitesse[:, :,0],vitesse[:, :,1], scale = 30, label = label)
    imshow(densite, cmap=cm.Blues, extent = [0, mm, 0, nn], origin='lower') #'lower' dés
    #inférieur (ou supérieur si 'upper')
    colorbar()

    fig.savefig("{} .png".format(label))

plt.show()

```

```

plt.pause(0.01)
plt.clf()

def dist(X) :
    return spa.distance.cdist(X,X)

def wBar(X,w,R) :
    D = dist(X)
    Voisin = D < R
    J = np.dot(Voisin, w)
    normaliseMat2(J)
    wbar = J
    wbar = wbar + (wbar == np.array([0.0,0.0]))*w
    return wbar

def evo(X_0,w_0,delta_t,n_max,c,R,alpha) :
    X = X_0
    w = w_0
    wbar = wBar(X_0,w_0,R)
    N = len(X)
    dessin(X_0,w_0,0)
    directory_name = "mm = " + str(mm) + " nn = " + str(nn) + " N = " + str(N) + " c = "
    mkdir(directory_name)
    os.chdir(directory_name)

    for n in range(1,n_max) :
        X = X + c*delta_t*w
        Theta = np.array([np.random.uniform(-alpha,alpha) for k in range(N)])
        C = np.vectorize(cos)(Theta)
        S = np.vectorize(sin)(Theta)

        w[:,0] = C*wbar[:,0] + S*(-wbar[:,1])
        w[:,1] = C*wbar[:,1] + S*wbar[:,0]

        if n <= 10 or n%10 == 0 :
            dessin(X,w,n)
            print("ci-dessus, itération n° ", n, "au temps t = ", n*delta_t)
            wbar = wBar(X,w,R)

evo(X_0,w_0,delta_t,n_max,c,R,alpha)

```

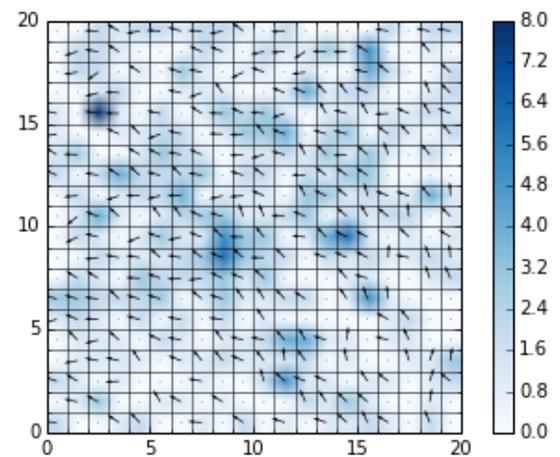
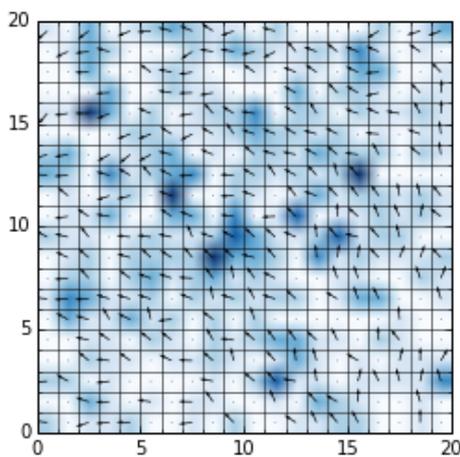
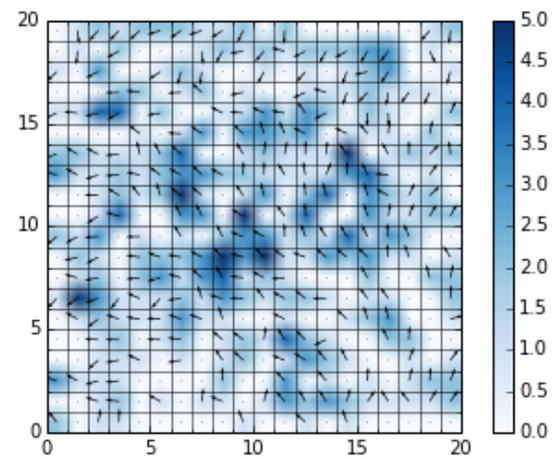
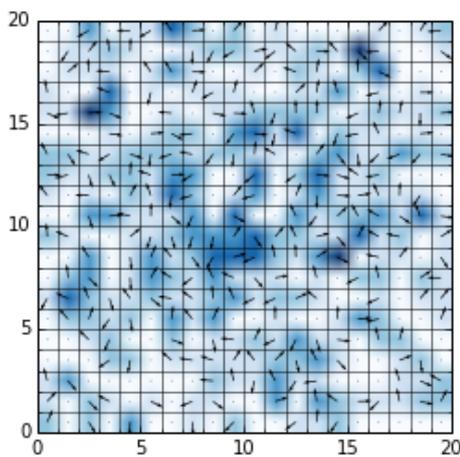
Ici, densité et vitesse sont relatives à une grille, on calcule la moyenne des directions dans chaque carré et la densité désigne le nombre de poissons par carré. L'algorithme prend donc

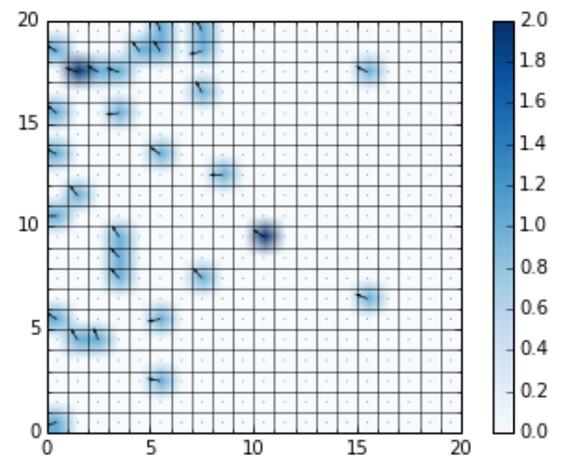
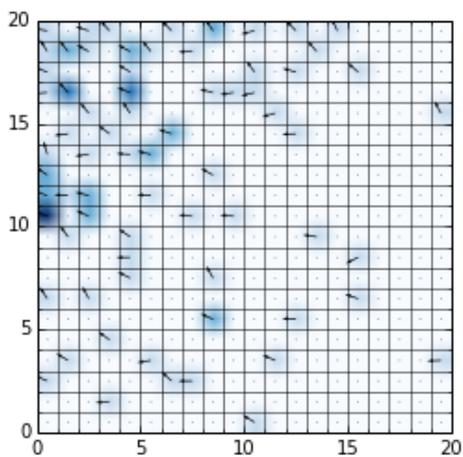
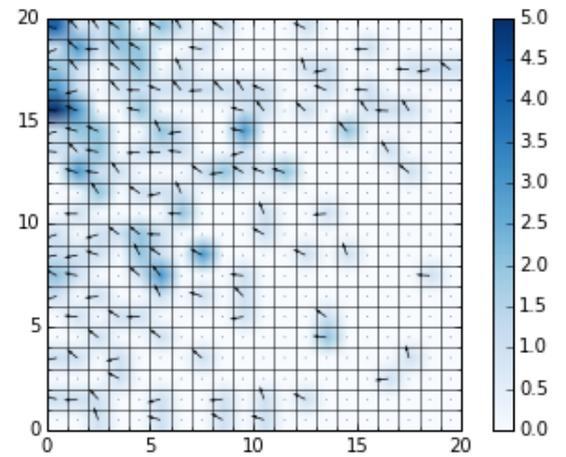
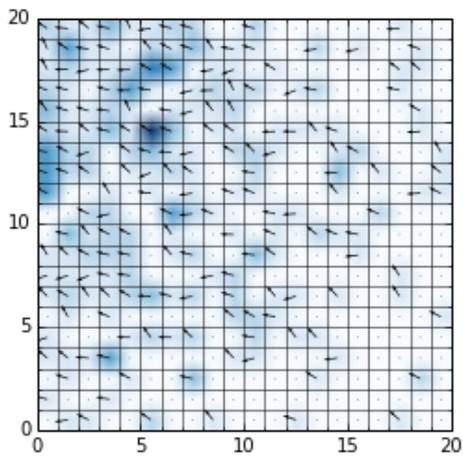
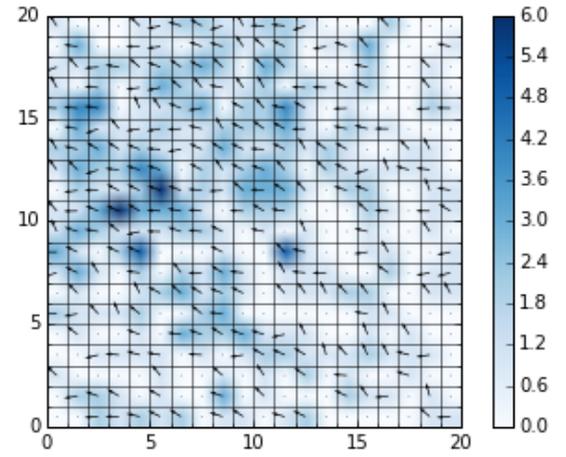
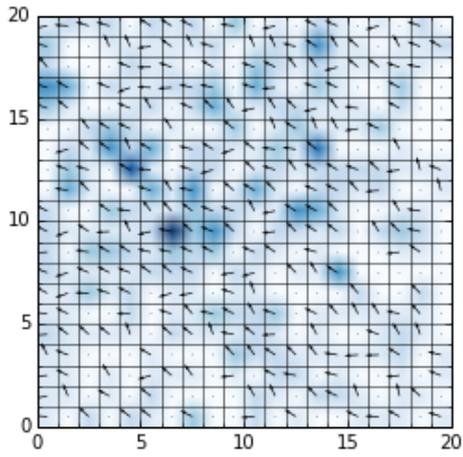
plus de temps pour tourner, car il faut ajouter le temps de calcul de la direction sur chaque carré où se trouve au moins un poisson.

Cela donne les images suivantes, où

```
mm = 20  
nn = 20  
N = 1000  
delta_t = 0.1  
c = 2  
R = 5  
alpha = pi/4
```

avec les itérations  $it = 0, 1, 2, 3, 4, 10, 20, 40, 60, 80, 100$ .





## 8.2 SOH

Nous avons voulu implémenter le modèle en résolvant les équations par la méthode des éléments finis grâce au langage FreeFem++.

D'abord nous avons calculé les constantes  $c_1, c_2, \lambda$  en résolvant l'équation elliptique (26) avec une formulation variationnelle.

Dans un second temps, on a résolu le système SOH selon le schéma suivant :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{dt} = c_1 \nabla \cdot (\rho^n \Omega^n) = 0 \quad (33)$$

$$\rho^{n+1} \frac{D\Omega^{n+1}}{Dt} = -\lambda \nabla_x(\rho^{n+1}) \quad (34)$$

où  $\frac{D\Omega^{n+1}}{Dt}$  désigne la dérivée particulaire de  $\Omega$ , c'est-à-dire  $\partial_t \Omega + c_2(\Omega \cdot \nabla)\Omega$ . On discrétise cette dernière par

$$\frac{D\Omega^{n+1}}{Dt} \simeq \frac{\Omega(x, t) - \Omega(x - dt\Omega, t - dt)}{dt}.$$

On calcule d'abord  $\rho^{n+1}$  puis on exprime la seconde équation sous forme variationnelle, avec  $\Omega = (u, v)$  :

$$\alpha \int \rho^{n+1} u^{n+1} testu \, dx = \alpha \int \rho^{n+1} convect(c_2\Omega, -dt, u^n) testu \, dx - \lambda \int \nabla_x(\rho^{n+1}) testu \, dx \quad (35)$$

$$\alpha \int \rho^{n+1} v^{n+1} testv \, dx = \alpha \int \rho^{n+1} convect(c_2\Omega, -dt, v^n) testv \, dx - \lambda \int \nabla_x(\rho^{n+1}) testv \, dx \quad (36)$$

où la méthode `convect([c2pu, c2pv], -dt, pu)` permet de calculer la grandeur scalaire `pu` (c'est-à-dire  $u^{n+1}$ ) convectée par le champ de vecteurs  $c_2\Omega$  et au pas de temps précédent.

Dans l'équation (34), nous avons gardé un problème linéaire, sans projeter le gradient sur le plan. Le champ  $\Omega$  calculé pour le temps suivant n'est donc pas unitaire a priori, il faut le normaliser, ce que nous faisons avec `normer`. En effet, quand le pas de temps  $dt$  tend vers 0, le champ calculé au pas suivant puis normalisé est d'autant plus proche du champ réel.

```

macro norme(X) sqrt(X(0)^2 + X(1)^2) //
macro normer(X) 1/norme(X)*X //

// CALCUL DES CONSTANTES EN FONCTION DE d

real kappa = 10, d = 1/kappa, Cnormalisation, c1, c2, lambda, nu0 = 1 ;
border A1 (t = -1, 1) {x = t ; y = 0 ; label = 1 ;}
border B1(t = 0,1) {x = 1 ; y = t ; label = 2 ;}
border C1 (t = -1, 1) {x = - t ; y = 1 ; label = 3 ;}
border D1 (t = 0,1) {x = -1 ; y = 1 - t ; label = 2 ;}

mesh Thc = buildmesh (A1(100) + B1(25) + C1(100) + D1(25)) ;
fespace Vhc(Thc, P1) ;

Vhc g, tg, f1, f2, f3, nu;
f1 = exp(x/d) * (1-x^2) ;
f2 = exp(x/d) * (1-x^2)^2 ;
f3 = exp(x/d) * (1-x^2)^(3/2) ;
nu = nu0 ;

problem Elliptique(g,tg) =
- int2d(Thc)((1-x^2) * dx(f1) * dx(g) * tg)
+ int2d(Thc)(dx(g) * dx(f2) * tg)
+ int2d(Thc)(dx(g) * f2 * dx(tg))
+ int2d(Thc)(exp(x/d) * g * tg)
+ int2d(Thc)(f3 * tg)
+ on(2, g = 0) ;

Elliptique ;
plot(g, wait = 1, value = 1) ;

Cnormalisation = int1d(Thc,1)(exp(x/d)) ;
cout << "Cnormalisation = " << Cnormalisation << " " ;
c1 = int1d(Thc,1)(x * exp(x/d)) / Cnormalisation ;
cout << "c1 = " << c1 << " " ;
c2 = int1d(Thc,1)(x * nu * g * (1-x^2)^(3/2) * exp(x/d)) / Cnormalisation ;
cout << "c2 = " << c2 << " " ;
lambda = d * int1d(Thc,1)(nu * g * (1-x^2)^(3/2) * exp(x/d)) / Cnormalisation ;
cout << "lambda = " << lambda << " " ;

// ALGORITHME SOH

real t = 0, dt = 0.001, alpha = 1/dt, scale = 0.02 ;

int mm = 40, nn = 40, nmax = 1000 ;

mesh Th = square(mm,nn) ;
fespace Vh(Th,P1) ;
Vh ro, pro, u, v, pu, pv, c2pu, c2pv, testu, testv, uscale, vscale, angle ;

```

```

// Omega = [u,v]
// plot(Th, wait = 1) ;

ro = 30*exp(-((x)^2+(y)^2)/2) ;
plot(ro, fill = 1, value = 1, wait = 1, nbiso = 20) ;
// plot(ro, fill = 1, value = 1, wait = 1, nbiso = 20, bb = [[-3,3],[-4,4]]) ;

//for (int i=0; i < Vh.ndof; ++i) u[] [i]= 1;
//for (int i=0; i < Vh.ndof; ++i) v[] [i]= 0;

for (int i=0; i < Vh.ndof; ++i) angle[] [i] = 2*pi*randreal2() ;
u[] = cos(angle[]) ;
v[] = sin(angle[]) ;

real [int,int] champ(Vh.ndof,2) ;

champ(:,0) = u[] ; champ(:,1) = v[] ;
for (int i = 0 ; i < Vh.ndof ; ++i) champ(i,:) = normer(champ(i,:)) ;
u[] = champ(:,0) ; v[] = champ(:,1) ;
uscale = scale * u ;
vscale = scale * v ;
plot([uscale,vscale], value = 1, wait = 1, cmm = "initialisation") ;

problem U(u,testu) =
int2d(Th)(alpha * ro * u * testu)
- int2d(Th)(alpha * ro * convect([c2pu,c2pv],-dt,pu) * testu)
+ int2d(Th)(lambda * dx(ro) * testu) ;

problem V(v,testv) =
int2d(Th)(alpha * ro * v * testv)
- int2d(Th)(alpha * ro * convect([c2pu,c2pv],-dt,pv) * testv)
+ int2d(Th)(lambda * dy(ro) * testv) ;

string legend ;

for (int n = 0 ; n < nmax ; n++){
t += dt ;

pro = ro ;
ro = pro-c1*dt*(dx(pro)*u + pro*dx(u) + dy(pro)*v + pro*dy(v)) ;

pu = u ; pv = v ;
c2pu = c2*pu ; c2pv = c2*pv ;

```

```

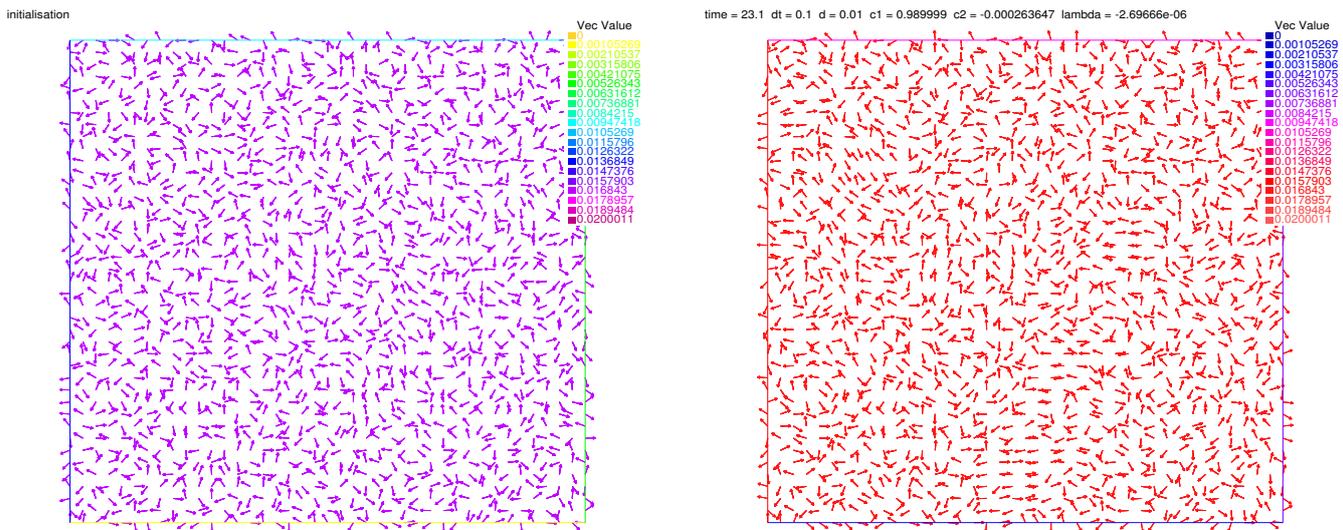
U ;
V ;

champ(:,0) = u[] ; champ(:,1) = v[] ;
for (int i = 0 ; i < Vh.ndof ; ++i) champ(i,:) = normer(champ(i,:)) ;
u[] = champ(:,0) ; v[] = champ(:,1) ;

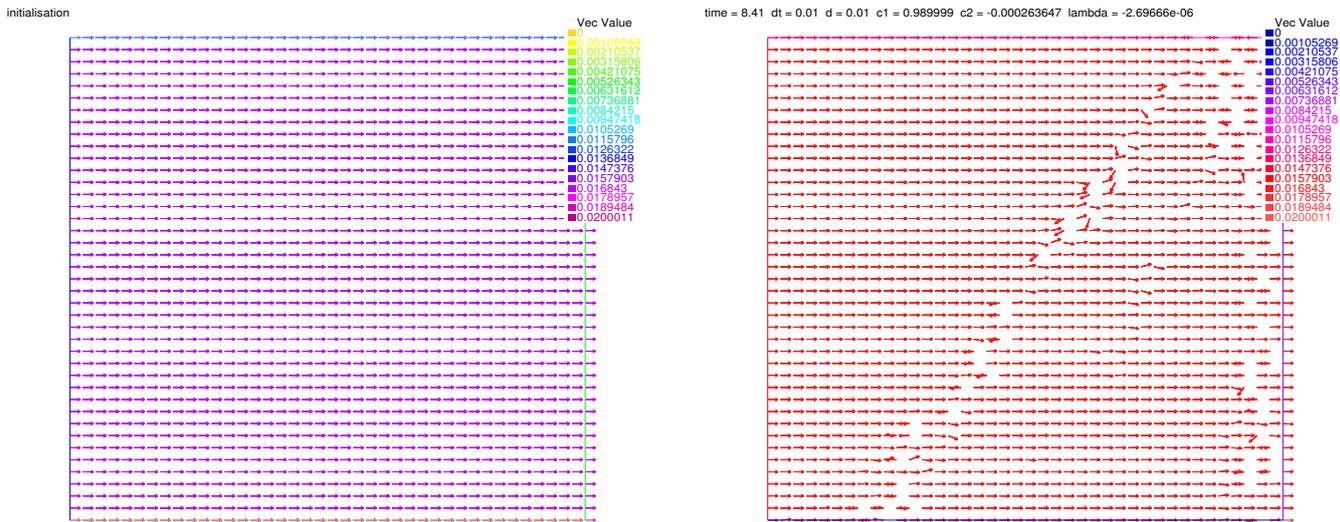
if(n%10 == 0) {
//plot(ro, fill = 1, value = 1, wait = 1, nbiso = 20) ;
uscale = scale * u ;
vscale = scale * v ;
    legend = "time = " + t + " dt = " + dt + " d = " + d + " c1 = "
    + c1 + " c2 = " + c2 + " lambda = " + lambda ;
plot([uscale,vscale], value = 1, wait = 0, hsv = colorhsv, cmm = legend, ps = "SOH.eps")
}
//plot(ro, [uscale,vscale], value = 1, wait = 1, fill = 1) ;}

```

Les images obtenues ne sont pas vraiment concluantes, comme on peut le voir...



Conditions initiales : densité gaussienne, directions réparties de façon uniforme. Paramètres :  $dt = 0.1$ ,  $d = 1/100$ . Les directions ont à peine changé, et dans certaines zones on constate que les vitesses voisines s'alignent sans tenir compte du sens, en pointant vers des directions opposées.



Conditions initiales : densité gaussienne, directions pointant toutes vers la droite. Paramètres :  $dt = 0.01$ ,  $d = 1/100$ . Le caractère constant de la direction se détruit peu à peu, de façon non régulière, ce qui est surprenant.

La piste à considérer pour résoudre ce problème est sans doute celle proposée dans l'article [MoNa] : il faut utiliser une méthode de *splitting* pour traiter séparément le terme conservatif et le terme de relaxation.

## 9 Conclusion

Nous avons étudié la dynamique de l'algorithme de COUZIN-VICSEK à grande échelle. Pour cela, nous avons d'abord rendu le problème continu en temps et l'avons reformulé sous forme d'une équation cinétique de FOKKER-PLANCK. Ensuite, nous avons fait un changement d'échelle dans le problème, passant ainsi d'un système cinétique microscopique à un comportement macroscopique, en introduisant un paramètre  $\epsilon$ . En faisant tendre celui-ci vers 0, nous avons montré que la solution d'une telle limite hydrodynamique, sous réserve de définition et d'existence, est entièrement définie par la densité et le champ des directions. L'idée forte de l'article principal était d'utiliser des invariants de collision généralisés pour pouvoir caractériser les solutions de la limite hydrodynamique.

Nous avons ensuite implémenté le modèle de COUZIN-VICSEK et le modèle SOH dans l'optique de pouvoir les comparer ; cependant cela a été un peu compromis dans le deuxième cas. Il existe des méthodes numériques qui résolvent ce problème ; leur étude est laissée à un travail futur.

Enfin, une question intéressante est de modifier un peu le modèle cinétique et faire en sorte que l'alignement des poissons devienne peu effectif quand la concentration des poissons est faible. Il doit y avoir une concentration critique, en-dessous de laquelle il n'y a plus d'alignement. Si l'on refait une limite macroscopique avec ce modèle modifié, nous nous attendons à deux équations hydrodynamiques différentes : on retrouverait le modèle SOH lorsque la densité est importante, et une diffusion dans l'autre cas. Nous pourrions étudier l'interface entre les deux régimes, ce qui relèvera d'un approfondissement à venir.

## Références

- [DeMo] P. Degond, S. Motsch, *Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction* (2007). <http://arxiv.org/pdf/0710.0293v1.pdf>
- [DeFrou] Pierre Degond, Amic Frouvelle, Jian-Guo Liu, Sebastien Motsch, Laurent Navoret, *Macroscopic models of collective motion and self-organization* (2013). <https://arxiv.org/pdf/1304.6040v1.pdf>
- [Spo] Herbert Spohn, *Large Scale Dynamics of interacting Particles* (1991). Springer
- [MoNa] Matthieu Calvez, *Numerical simulations of a non-conservative hyperbolic system with geometric constraints describing swarming behavior*.
- [BoCaCa] F. Bolley, J. A. Canizo, J. A. Carrillo, *Mean-field limit for the stochastic Vicsek model*. Appl. Math Lett. (2011), 339-343.
- [KaTun] Y. Katz, K. Tunstrom, C. C. Ioannou, C. Huepe, I. D. Couzin *Inferring the structure and dynamics of interactions in schooling fish*, Version 5.0, Princeton University Press, Princeton and Oxford, (2011)