Représentations modulo p de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$

Anne-Edgar Wilke Hao Zhang

Mémoire de 1re année, sous la direction de Tony Ly

Juin 2015

Table des matières

Introduction

Soient p un nombre premier et q une puissance de p. L'objet de ce mémoire est l'étude des représentations du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique p. La raison de ce choix de caractéristique est claire : en effet, les actions linéaires les plus naturelles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ ne peuvent se définir que sur un corps de caractéristique p. C'est par exemple le cas de la représentation standard, et de toutes les représentations que l'on obtient à partir de cette dernière par les procédés habituels d'algèbre tensorielle.

Il importe de faire dès maintenant une remarque fondamentale : la caractéristique du corps sur lequel nous nous plaçons divise le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. En effet, le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1 est un p-groupe non trivial. Dans cette situation, la plupart des théorèmes usuels de la théorie des représentations sur $\mathbb{C}$ ne s'appliquent pas. En particulier, les sous-représentations n'admettent en général pas de supplémentaire stable, les représentations ne se décomposent pas en somme directe de représentations irréductibles, et la théorie des caractères est inopérante. Une autre particularité de cette situation, moins sensible, est le fait que le degré d'une représentation irréductible peut ne pas diviser l'ordre du groupe ; nous en verrons un exemple.

La première partie est consacrée au cas particulier $n = 2$. Nous y construisons de façon très explicite les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour calculer le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, nous nous appuyons sur une généralisation du théorème usuel, issu de la théorie des caractères, qui affirme que ce nombre est égal au cardinal de l'ensemble des classes de conjugaison du groupe.

Dans la seconde partie, nous construisons, de manière moins explicite, les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, en généralisant les observations faites lors de l'étude du cas $n = 2$. Le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est, cette fois, obtenu par des considérations intrinsèques sur les représentations.

Notations. Dans tout ce document, p désigne un nombre premier, r un entier supérieur à 1, et $q = p^r$ une puissance de p. On note $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{F}_p$, et on identifie $\mathbb{F}_q$ au sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui lui est isomorphe.

Convention. Soient G un groupe et $\mathbb{K}$ un corps. Il est équivalent d'étudier les représentations de G sur $\mathbb{K}$, ou les $\mathbb{K}[\mathrm{G}]$-modules à gauche. Dans la suite, nous utiliserons indifféremment ces deux langages.

Première partie
Représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$

1 Nombre de représentations irréductibles

Le but de cette section est d'obtenir une expression du nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle le théorème suivant, qui repose sur la théorie des caractères :

Théorème 1.1. *Soit* G *un groupe fini. Soit* $\mathbb{K}$ *un corps algébriquement clos dont la caractéristique ne divise pas le cardinal de* G*. Le nombre de représentations irréductibles de* G *sur* $\mathbb{K}$*, à isomorphisme près, est égal au nombre de classes de conjugaison de* G.

Ce théorème admet une généralisation valable pour tout corps de caractéristique positive, et que nous exposons ci-dessous.

Définition. Soit G un groupe fini. Soit p un nombre premier. Une classe de conjugaison de G est dite p-régulière si ses éléments sont d'ordre premier à p.

Théorème 1.2 ([1, p.161, corollaire 3])**.** *Soit* G *un groupe fini. Soit* $\mathbb{K}$ *un corps algébriquement clos de caractéristique* $p > 0$*. Le nombre de représentations irréductibles de* G *sur* $\mathbb{K}$*, à isomorphisme près, est égal au nombre de classes de conjugaison* p*-régulières de* G.

Nous ne démontrerons ce théorème que dans le cas particulier où l'ordre de G est une puissance d'un nombre premier. Pour cela, compte tenu du théorème 1.1, il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 1.3. *Soit* p *un nombre premier. Soient* G *un* p*-groupe et* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique* p*. Toute représentation irréductible de* G *sur* $\mathbb{K}$ *est triviale.*

Démonstration. Soit V une telle représentation. Soit $v \in \mathrm{V}\backslash\{0\}$ et soit A le sous-groupe additif de V engendré par $\mathrm{G}v$. Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique $p > 0$, $\mathrm{A} = \mathbb{F}_p[\mathrm{G}]v$ est un groupe fini. De plus, tous ses éléments non nuls sont d'ordre p ; c'est donc un p-groupe. La formule des classes appliquée à l'action de G sur A conduit à :

$$|\mathrm{A}| \equiv |\mathrm{A}^{\mathrm{G}}| \mod p.$$

$|\mathrm{A}^{\mathrm{G}}|$ est donc divisible par p. Or A^{G} contient le vecteur nul, donc est non vide. Il s'ensuit que $|\mathrm{A}^{\mathrm{G}}|$ est supérieur à 2, donc G fixe un vecteur non nul de A. Par conséquent, V contient une droite sur laquelle G agit trivialement. Comme V est irréductible, V est égale à cette droite ; c'est donc la représentation triviale. $\square$

Nous allons appliquer le théorème 1.2 au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ et au corps $\overline{\mathbb{F}}_p$. Nous démontrons pour cela le résultat suivant :

Proposition 1.4. *Le nombre de classes de conjugaison p-régulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est égal à q^2-q.*

Démonstration. Soit f un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ dont le terme constant est non nul. Nous allons montrer que f est le polynôme caractéristique d'une et une seule classe de conjugaison p-régulière de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Ceci conduira au résultat, car il y a q^2-q tels polynômes.

Supposons f scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_q$ et soit $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ une matrice dont f est le polynôme caractéristique. A est semblable à la matrice diagonale dont les valeurs propres sont les racines de f, ordonnées arbitrairement. L'ordre de A est égal au plus petit multiple commun des ordres de ses valeurs propres dans $\mathbb{F}_q^\times$; il divise donc l'ordre de $\mathbb{F}_q^\times$, qui vaut $q-1$ et est en particulier premier à p. Il s'ensuit que f est le polynôme caractéristique d'une unique classe de conjugaison de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, qui est p-régulière.

Supposons f irréductible sur $\mathbb{F}_q$. Comme $\mathbb{F}_q$ est parfait, f est séparable. Donc f est scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_{q^2}$. L'argument précédent montre que f est, dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$, le polynôme caractéristique d'une unique classe de conjugaison, qui est p-régulière. C'est également le cas dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ par inertie de la similitude.

Enfin, supposons que f a une racine double $a\in\mathbb{F}_q$ et soit $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ une matrice dont f est le polynôme caractéristique. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à a. Autrement dit, A est semblable au produit de $a\mathrm{I}_2$ et d'une matrice de transvection que nous noterons T. L'ordre de T est égal à 1 si $\mathrm{T}=\mathrm{I}_2$ et à p dans le cas contraire. Comme T commute à $a\mathrm{I}_2$ et que $a\mathrm{I}_2$ est d'ordre premier à p, A est d'ordre premier à p si et seulement si $\mathrm{T}=\mathrm{I}_2$, c'est-à-dire si et seulement si A est semblable à $a\mathrm{I}_2$. Donc f est le polynôme caractéristique d'une unique classe de conjugaison p-régulière de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$; cela conclut la démonstration. □

Corollaire 1.5. *Le nombre de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à isomorphisme près, est égal à q^2-q.*

Remarque. Le nombre de polynômes unitaires de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ dont le terme constant vaut 1 est égal à q. Le lemme 1.6 ci-dessous et la preuve de la proposition 1.4 permettent d'en déduire que le nombre de classes de conjugaison p-régulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ est égal à q. Il y a donc, à isomorphisme près, q représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Lemme 1.6. *Soit* C *une classe de conjugaison p-régulière de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ incluse dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Les éléments de* C *sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$.*

Démonstration. Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{C}$. Il s'agit de montrer que pour tout $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, il existe $\mathrm{Q}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ tel que $\mathrm{PAP}^{-1}=\mathrm{QAQ}^{-1}$, c'est-à-dire $(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P})\mathrm{A}=\mathrm{A}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P})$. Cela équivaut à montrer que pour tout $t\in\mathbb{F}_q^\times$, le commutant de A dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ contient une matrice de déterminant t.

Soit donc $t\in\mathbb{F}_q^\times$. La preuve de la proposition 1.4 montre que soit A est diagonalisable, soit son polynôme caractéristique est irréductible. Plaçons-nous tout d'abord dans le premier cas, et soit $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. La matrice

$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ commute à $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, de sorte que $\mathrm{P}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ est une matrice de déterminant t qui commute à A.

Supposons à présent que le polynôme caractéristique de A est irréductible. Ecrivons-le sous la forme $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 - \alpha\mathrm{X} - \beta$, et posons $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; comme χ_{A} est irréductible, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le polynôme minimal ponctuel $\mu_{\mathrm{A},v}$ de A en v est un diviseur unitaire de χ_{A} qui est distinct de 1. Comme χ_{A} est irréductible, on a $\mu_{\mathrm{A},v} = \chi_{\mathrm{A}}$, donc en particulier $\deg \mu_{\mathrm{A},v} = 2$; ceci implique que $(v, \mathrm{A}v)$ est une base de $\mathbb{F}_q^2$. Soit $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} x & ax+by \\ y & cx+dy \end{pmatrix}$ la matrice de $(v, \mathrm{A}v)$ dans la base canonique. On a $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Notons $f(x,y) = \det \mathrm{Q} = cx^2 + (d-a)xy - by^2$; c'est une application polynomiale homogène de degré 2, définie sur $\mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\}$ et à valeurs dans $\mathbb{F}_q^\times$. Nous allons montrer qu'elle est surjective. Par homogénéité, son image est stable par multiplication par tout élément de $\mathbb{F}_q^{\times 2}$, et il suffit donc de montrer qu'elle intersecte non trivialement toutes les classes de $\mathbb{F}_q^\times$ modulo $\mathbb{F}_q^{\times 2}$. C'est clair si $p = 2$, puisque dans ce cas, tout élément de $\mathbb{F}_q^\times$ est carré. Supposons donc $p \neq 2$; $\mathbb{F}_q^\times$ est alors composé de deux classes modulo $\mathbb{F}_q^{\times 2}$, de cardinal $\frac{q-1}{2}$.

Comme $c \neq 0$, le polynôme $c\mathrm{X}^2 + (d-a)\mathrm{X} - b$ est de degré 2 ; l'image de $x \mapsto f(x,1)$ est donc de cardinal $\frac{q+1}{2}$. Elle ne peut être incluse dans aucune des deux classes de $\mathbb{F}_q^\times$ modulo $\mathbb{F}_q^{\times 2}$, et il s'ensuit qu'elle les coupe toutes deux non trivialement. f est donc surjective. En particulier, il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ tel que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\det \mathrm{Q} = t \det \mathrm{P}$. La matrice QP^{-1} est alors de déterminant t et commute à A, ce qui achève la preuve du lemme. □

2 Représentations de dimension 1

Dans cette section, nous nous proposons de classifier les représentations de dimension 1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ou, ce qui revient au même, les morphismes de groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Nous commençons par rappeler sans démonstration un résultat classique.

Proposition 2.1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier naturel non nul. Le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, sauf si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. Le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.*

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 2.2. *Il y a, à isomorphisme près,* $q-1$ *représentations de dimension* 1 *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$*, qui correspondent aux morphismes*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) &\to \overline{\mathbb{F}}_p^\times \\ \mathrm{A} &\mapsto (\det \mathrm{A})^j \end{aligned}$$

pour $0 \leq j \leq q-2$.

Démonstration. Soit φ un morphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Tout d'abord, montrons que la restriction de φ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ est triviale. Si $q \neq 2$, c'est une conséquence du fait que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ est le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ (proposition 2.1). Dans le cas où $q = 2$, comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$, il s'agit de montrer que φ est triviale. φ se factorise par la projection canonique sur le quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)/\mathrm{D}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2))$, qui est d'ordre 2 d'après la proposition 2.1 ; on est donc ramené à montrer que tout morphisme d'un groupe d'ordre 2 dans $\overline{\mathbb{F}}_2^\times$ est trivial. Ce dernier point découle de la factorisation $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)^2$, qui implique que $\overline{\mathbb{F}}_2^\times$ ne possède pas d'élément d'ordre 2.

Ensuite, montrons que φ se factorise à droite par le morphisme $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^\times$. On factorise tout d'abord φ par la projection canonique sur le quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$:

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi.$$

On observe ensuite que det induit un isomorphisme $\widetilde{\det} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^\times$ vérifiant :

$$\det = \widetilde{\det} \circ \pi.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\det}^{-1} \circ \det,$$

d'où le résultat. Le diagramme suivant résume le raisonnement :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\det"'] \arrow[drr, two heads, "\pi"] & & \overline{\mathbb{F}}_p^\times \\
\mathbb{F}_q^\times & & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \arrow[ll, "\sim", "\widetilde{\det}"'] \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

Nous sommes maintenant ramenés à chercher les morphismes de $\mathbb{F}_q^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Un tel morphisme envoie tout générateur de $\mathbb{F}_q^\times$ sur une racine du polynôme $\mathrm{X}^{q-1} - 1$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, c'est-à-dire sur un autre élément de $\mathbb{F}_q^\times$. Ainsi, il s'agit en fait d'un endomorphisme de $\mathbb{F}_q^\times$. Ce dernier groupe étant cyclique d'ordre $q-1$, il possède $q-1$ endomorphismes qui sont les élévations aux puissances j pour $0 \leq j \leq q-2$.

Pour conclure, il reste à dire que par surjectivité du déterminant, étant donnés deux morphismes distincts de $\mathbb{F}_q^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, leurs composées par le déterminant sont encore distinctes. Finalement, il existe $q-1$ morphismes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, qui sont ceux donnés par le théorème. □

Nous utiliserons dans la suite les représentations de dimension 1 construites précédemment pour obtenir de nouvelles représentations irréductibles à partir de représentations irréductibles préexistantes. Ceci s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soient* G *un groupe et* $\mathbb{K}$ *un corps. Soient* V *et* W *deux représentations de* G *sur* $\mathbb{K}$ *telles que* V *soit de dimension* 1 *et que* W *soit irréductible. Le produit tensoriel* $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{W}$ *est une représentation irréductible de* G.

Démonstration. Soit $v \in \mathrm{V} \backslash \{0\}$. Considérons l'isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{W} &\to \mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{W} \\ w &\mapsto v \otimes w. \end{aligned}$$

Φ n'est pas un isomorphisme de représentations. Cependant, l'image directe par Φ de tout sous-espace G-invariant de W est un sous-espace G-invariant de $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{W}$, et l'image réciproque de tout sous-espace G-invariant de $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{W}$ est un sous-espace G-invariant de W. Il s'ensuit que $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{W}$ est une représentation irréductible de G, comme l'affirme le lemme. □

3 Action sur les polynômes homogènes

La représentation irréductible la plus naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est la représentation standard. Dans cette section, nous construirons d'autres représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ à partir de la représentation standard, par des procédés d'algèbre tensorielle.

Si $n \geq 2$, le produit tensoriel $\mathrm{V}^{\otimes n}$, où V est la représentation standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, n'est pas irréductible. En effet, il contient de nombreux sous-espaces de tenseurs symétriques, à savoir les noyaux des différents morphismes $\mathrm{V}^{\otimes n} \to \mathrm{S}^k\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^{\otimes(n-k)}$, pour $0 \leq k \leq n$.

Cette observation conduit à considérer le produit symétrique $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$, qui fournit au contraire des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ pour certaines valeurs de n. Il est commode de noter (X, Y) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de V ; $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$ s'identifie alors à l'espace des polynômes homogènes de degré n à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, en les indéterminées X et Y :

$$\mathrm{S}^n\mathrm{V} = \bigoplus_{k=0}^{n} \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^k \mathrm{Y}^{(n-k)}.$$

Si $f \in \mathrm{S}^n\mathrm{V}$ est un tel polynôme, l'action de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur f s'écrit :

$$\mathrm{A}f = f(a\mathrm{X} + c\mathrm{Y}, b\mathrm{X} + d\mathrm{Y}).$$

Théorème 3.1. *Soit n un entier compris entre* 0 *et* $p-1$. *La représentation* $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ *est irréductible.*

Démonstration. Soit $v \in \mathrm{S}^n\mathrm{V}\backslash\{0\}$. On écrit :

$$v = \sum_{k=d}^{n} a_k \mathrm{X}^k \mathrm{Y}^{n-k},$$

où $d \in [\![0;n]\!]$ vérifie $a_d \neq 0$. Soit $\mathrm{W} = \bigoplus_{k=d}^{n} \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^k\mathrm{Y}^{n-k}$, de sorte que $v \in \mathrm{W}$.

Soit, pour $t \in \mathbb{F}_p$, $\mathrm{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. L'ensemble des A_t, pour $t \in \mathbb{F}_p$, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, et W est invariant sous l'action de ce sous-groupe.

Soit $t \in \mathbb{F}_p$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_t v &= \sum_{k=d}^{n} a_k \mathrm{X}^k (t\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n-k} \\ &= \sum_{k=d}^{n} a_k \mathrm{X}^k \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} t^l \mathrm{X}^l \mathrm{Y}^{n-k-l} \qquad (1) \\ &= \sum_{l=0}^{n-d} t^l \sum_{s=l+d}^{n} a_{s-l} \binom{n-s+l}{l} \mathrm{X}^s \mathrm{Y}^{n-s} \end{aligned}$$

en posant $s = k + l$.

Soit, pour $0 \leq l \leq n-d$, $w_l = \sum_{s=l+d}^{n} a_{s-l} \binom{n-s+l}{l} \mathrm{X}^s\mathrm{Y}^{n-s}$. Les w_l appartiennent à W. La matrice des w_l dans la base $(\mathrm{X}^k\mathrm{Y}^{n-k})_{d\leq k\leq n}$ de W est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont :

$$a_d \binom{n-d}{0}, \ldots, a_d \binom{n-d}{n-d}.$$

Ils sont non nuls grâce à l'hypothèse $n < p$. Il s'ensuit que les w_l forment une base de W.

La formule (1) montre que la matrice des $\mathrm{A}_t v, 0 \leq t \leq n-d$, dans la base de W formée des w_l, est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & (n-d)^{n-d} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice de Vandermonde inversible, ce qui montre que les $\mathrm{A}_t v$, pour $t \in [\![0; n-d]\!]$, forment également une base de W. Ainsi, $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]v$ contient W.

Ensuite, on écrit le même vecteur v sous la forme :

$$v = \sum_{k=d'}^{n} a'_k \mathrm{X}^{n-k}\mathrm{Y}^k,$$

avec $a'_{d'} \neq 0$; et en raisonnant de même avec les $\mathrm{A}'_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, on obtient que $\mathrm{W}' = \bigoplus_{k=d'}^{n} \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^{n-k}\mathrm{Y}^k$ est contenu dans $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]v$. Finalement, $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]v = \mathrm{S}^n\mathrm{V}$ et $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$ est irréductible. □

Remarque. La preuve du théorème 3.1 montre en fait que pour tout $n \in [\![0; p-1]\!]$, $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$ est une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. En particulier, on en déduit le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)$ possède une représentation irréductible de dimension 5 sur $\overline{\mathbb{F}}_7$. Comme l'ordre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)$ est égal à 336, cela fournit un exemple de représentation irréductible dont le degré ne divise pas l'ordre du groupe.

Remarque. Soit $n \geq p$. On définit :

$$\mathrm{W}_{min} = \bigoplus_{\min(k,n-k)\geq p} \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^k \mathrm{Y}^{n-k},$$

$$\mathrm{W}_{max} = \bigoplus_{\max(k,n-k)\geq p} \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^k \mathrm{Y}^{n-k}.$$

W_{min} et W_{max} sont des sous-espaces $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-invariants de $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$; W_{min} est distinct de $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$ et W_{max} est non nul.

Si de plus $n \geq 2p$, W_{min} est non nul. Si $n < 2p$, W_{max} est distinct de $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$. Il s'ensuit que la conclusion du théorème 3.1 est fausse pour $n \geq p$, sauf peut-être si $n = 2p-1$.

Notation. La représentation $\mathrm{S}^n\mathrm{V}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ correspond à un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}(\mathrm{S}^n\mathrm{V})$, que nous noterons sym^n.

Le théorème 3.1 fournit p représentations irréductibles distinctes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Supposons $r = 1$, c'est-à-dire $q = p$. En prenant les produits tensoriels de ces p représentations avec les $p-1$ représentations de dimension 1 construites à la section 2, on obtient a priori, d'après le lemme 2.3, $p^2 - p$ représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Sous réserve que les représentations ainsi construites soient distinctes, ce qui sera prouvé à la section 5, le corollaire 1.5 montre que nous possédons actuellement toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

4 Autres représentations irréductibles

L'objectif de cette section est de construire, à partir des représentations fournies par la section précédente, de nouvelles représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ dans le cas où $q > p$.

La première idée est la suivante : étant donnée une représentation irréductible W correspondant à un morphisme de groupes $\rho : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}(\mathrm{W})$, on peut composer ρ à droite par un automorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$; cela fournit une nouvelle représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, qui est également irréductible. Si l'on choisit un automorphisme intérieur de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, cependant, la représentation obtenue par ce procédé est isomorphe à la représentation initiale.

A tout automorphisme de corps de $\mathbb{F}_q$ est associé un automorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$: celui qui, étant donnée une matrice, applique l'automorphisme de corps à chaque coefficient. Si l'automorphisme de corps considéré est distinct de l'identité, cet automorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ n'est pas intérieur, car sa restriction au centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est alors non triviale. Or, pour $q > p$, le groupe des automorphismes de corps de $\mathbb{F}_q$ n'est pas réduit à l'identité. Plus précisément :

Proposition 4.1. *Le groupe des automorphismes de corps de $\mathbb{F}_q$ est cyclique, d'ordre r et engendré par le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$.*

Démonstration. Le groupe des automorphismes de corps de $\mathbb{F}_q$ est le groupe des automorphismes $\mathbb{F}_p$-linéaires de $\mathbb{F}_q$. Comme l'extension $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ est de degré r, ce groupe est d'ordre inférieur à r. Or le morphisme de Frobenius est un automorphisme de $\mathbb{F}_q$, et en l'appliquant à un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$, on voit qu'il est d'ordre au moins r. La proposition en découle. $\square$

Notation. Nous noterons Fr le morphisme de Frobenius, et nous l'appliquerons indifféremment à des éléments de $\mathbb{F}_q$ et à des matrices à coefficients dans $\mathbb{F}_q$.

En appliquant ce qui précède aux représentations irréductibles construites à la section précédente, on obtient $r(p-1)$ représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$: les $\mathrm{sym}^n \circ \mathrm{Fr}^k$ pour $1 \leq n \leq p-1$ et $0 \leq k \leq r-1$, sous réserve bien sûr que ces représentations soient distinctes.

Nous allons maintenant considérer des produits tensoriels de ces représentations. Le lemme suivant indique lesquels de ces produits tensoriels sont susceptibles d'être irréductibles.

Lemme 4.2. *Si la représentation $\mathrm{sym}^{n_1} \circ \mathrm{Fr}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{sym}^{n_m} \circ \mathrm{Fr}^{k_m}$ est irréductible, avec $1 \leq n_i \leq p-1$ et $0 \leq k_i \leq r-1$ pour tout $i \in [\![1;m]\!]$, alors les entiers $k_1, \ldots, k_m$ sont deux à deux distincts.*

Démonstration. Supposons que deux de ces entiers soient égaux ; on peut supposer qu'il s'agit de k_1 et k_2. Quitte à composer à droite par une puissance appropriée du morphisme de Frobenius, ce qui ne modifie pas les sous-espaces $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-invariants de la représentation, on peut supposer que $k_1 = k_2 = 0$. Il s'agit alors de montrer que la représentation $\mathrm{S}^{n_1}\mathrm{V} \otimes \mathrm{S}^{n_2}\mathrm{V}$ n'est pas irréductible.

Ce dernier point se vérifie en considérant le noyau de la surjection canonique $\mathrm{S}^{n_1}\mathrm{V} \otimes \mathrm{S}^{n_2}\mathrm{V} \to \mathrm{S}^{n_1+n_2}\mathrm{V}$. C'est un sous-espace $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-invariant. Il est distinct de $\mathrm{S}^{n_1}\mathrm{V} \otimes \mathrm{S}^{n_2}\mathrm{V}$ car le morphisme est surjectif et l'espace d'arrivée non nul. Enfin, il n'est pas trivial car la dimension de l'espace de départ, $(n_1+1)(n_2+1)$, est strictement supérieure à celle de l'espace d'arrivée, n_1+n_2+1. $\square$

Les produits tensoriels vérifiant la condition donnée par le lemme 4.2 peuvent se mettre, à isomorphisme près, sous la forme $\mathrm{sym}^{n_0} \circ \mathrm{Fr}^0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{sym}^{n_{r-1}} \circ \mathrm{Fr}^{r-1}$, avec $0 \leq n_i \leq p-1$ pour tout $i \in [\![0;r-1]\!]$. Cette écriture montre qu'il y en a $p^r = q$, sous réserve qu'ils soient distincts. Ces produits tensoriels sont irréductibles, comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème 4.3. *Soient $n_1, \ldots, n_{r-1}$ des entiers compris entre 0 et $p-1$. La représentation $\mathrm{sym}^{n_0} \circ \mathrm{Fr}^0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{sym}^{n_{r-1}} \circ \mathrm{Fr}^{r-1}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est irréductible.*

Démonstration. La preuve que nous présentons est une adaptation de celle du théorème 3.1. Soit $v \in \bigotimes_{i=0}^{r-1} \mathrm{S}^{n_i}\mathrm{V} \backslash \{0\}$. On écrit :

$$v = \sum_{\substack{k_i = d_i \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i} a_{k_0,\ldots,k_{r-1}} \mathrm{X}^{k_0}\mathrm{Y}^{n_0-k_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{k_{r-1}}\mathrm{Y}^{n_{r-1}-k_{r-1}}$$

où $(d_0, \dots, d_{r-1}) \in \prod_{i=0}^{r-1} [\![0; n_i]\!]$ vérifie $a_{d_0,\dots,d_{r-1}} \neq 0$. On pose :

$$\mathrm{W} = \bigoplus_{\substack{k_i = d_i \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i} \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^{k_0}\mathrm{Y}^{n_0-k_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{k_{r-1}}\mathrm{Y}^{n_{r-1}-k_{r-1}}$$

et, pour $t \in \mathbb{F}_q$, $\mathrm{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Soit $t \in \mathbb{F}_q$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_t v &= \sum_{\substack{k_i = d_i \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i} a_{k_0,\dots,k_{r-1}} \mathrm{X}^{k_0}(t\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n_0-k_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{k_{r-1}}(t^{p^{r-1}}\mathrm{X}+\mathrm{Y})^{n_{r-1}-k_{r-1}} \\
&= \sum_{\substack{k_i = d_i \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i} \sum_{\substack{l_i = 0 \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i - k_i} a_{k_0,\dots,k_{r-1}} \binom{n_0-k_0}{l_0} \cdots \binom{n_{r-1}-k_{r-1}}{l_{r-1}} t^{l_0+\cdots+l_{r-1}p^{r-1}} \\
&\qquad\qquad \mathrm{X}^{k_0+l_0}\mathrm{Y}^{n_0-k_0-l_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{k_{r-1}+l_{r-1}}\mathrm{Y}^{n_{r-1}-k_{r-1}-l_{r-1}} \\
&= \sum_{\substack{l_i = 0 \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i - d_i} t^{l_0+\cdots+l_{r-1}p^{r-1}} \sum_{\substack{s_i = l_i + d_i \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i} a_{s_0-l_0,\dots,s_{r-1}-l_{r-1}} \binom{n_0 - s_0 + l_0}{l_0} \cdots \\
&\qquad\qquad \binom{n_{r-1} - s_{r-1} + l_{r-1}}{l_{r-1}} \mathrm{X}^{s_0}\mathrm{Y}^{n_0-s_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{s_{r-1}}\mathrm{Y}^{n_{r-1}-s_{r-1}} \\
&= \sum_{\substack{l_i = 0 \\ 0 \leq i \leq r-1}}^{n_i - d_i} t^{l_0+\cdots+l_{r-1}p^{r-1}} w_{l_0,\dots,l_{r-1}}.
\end{aligned}$$

Comme dans la preuve du théorème 3.1, la matrice des $w_{l_0,\dots,l_{r-1}}$ dans la base naturelle de W est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls, lorsque l'on munit les r-uplets d'indices de l'ordre lexicographique. Il s'ensuit que les $w_{l_0,\dots,l_{r-1}}$ forment une base de W.

Les exposants $l_0 + \cdots + l_{r-1}p^{r-1}$ sont deux à deux distincts et compris entre 0 et $q-1$ lorsque $(l_0, \dots, l_{r-1})$ parcourt $\prod_{i=0}^{r-1} [\![0; n_i - d_i]\!]$. Par inversibilité de la matrice de Vandermonde $(t^l)_{l \in [\![0;q-1]\!], t \in \mathbb{F}_q}$, on en déduit que la matrice des $\mathrm{A}_t v$, $t \in \mathbb{F}_q$, dans la base de W formée des $w_{l_0,\dots,l_{r-1}}$, est de rang maximal. Il s'ensuit que les $\mathrm{A}_t v$, $t \in \mathbb{F}_q$, engendrent W. Ainsi, $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]v$ contient W.

La fin de la preuve est similaire à ce qui a été fait pour le théorème 3.1. Finalement, $\mathrm{sym}^{n_0} \circ \mathrm{Fr}^0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{sym}^{n_{r-1}} \circ \mathrm{Fr}^{r-1}$ est irréductible. □

Remarque. Comme cela avait été remarqué à propos du théorème 3.1, la preuve du théorème 4.3 montre en fait que pour tout $(n_0, \dots, n_{r-1}) \in [\![0; p-1]\!]^r$, $\mathrm{sym}^{n_0} \circ \mathrm{Fr}^0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{sym}^{n_{r-1}} \circ \mathrm{Fr}^{r-1}$ est une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$.

En prenant les produits tensoriels des q représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ fournies par le théorème 4.3 avec les $q-1$ représentations de dimension 1, on obtient, sous réserve qu'elles soient distinctes, $q^2 - q$ représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Le corollaire 1.5 montre alors que nous avons construit toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

5 Classification des représentations irréductibles

Dans la section précédente, nous avons construit q^2-q représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, mais sans vérifier que ces représentations étaient distinctes. C'est là l'objet de la présente section. Pour ce faire, nous allons définir un invariant des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, qui s'avèrera également crucial dans la partie suivante pour étudier les représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Nous commençons par adopter une notation commode pour désigner les représentations construites précédemment.

Notations. Soient $j \in [\![0;q-2]\!]$ et $(n_0,\dots,n_{r-1}) \in [\![0;p-1]\!]^r$. Soit $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{r-1} n_i p^i$. Notons $\det^j$ le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) &\to \overline{\mathbb{F}}_p^\times \\ \mathrm{A} &\mapsto (\det \mathrm{A})^j \end{aligned}$$

dont il a été question dans le théorème 2.2.

La représentation $\det^j \otimes \mathrm{sym}^{n_0} \circ \mathrm{Fr}^0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{sym}^{n_{r-1}} \circ \mathrm{Fr}^{r-1}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sera désignée par le couple $(j,\mathrm{N}) \in [\![0;q-2]\!] \times [\![0;q-1]\!]$. L'espace associé à cette représentation sera identifié à $\mathrm{V}_\mathrm{N} = \bigotimes_{i=0}^{r-1} \mathrm{S}^{n_i}\mathrm{V}$.

Pour définir l'invariant dont nous avons parlé plus haut, nous avons besoin d'introduire deux sous-groupes importants de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Notations. On note B et U les sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ constitués respectivement des matrices triangulaires supérieures inversibles et des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1.

Remarque. U est un sous-groupe distingué de B. Il s'ensuit qu'étant donnée une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, l'espace des points fixes sous l'action de U est stable par B.

Théorème 5.1. *Soit* $(j,\mathrm{N}) \in [\![0;q-2]\!] \times [\![0;q-1]\!]$. *On fait agir* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ *sur* V_N *par la représentation* (j,N). *Le sous-espace de* V_N *constitué des points fixes sous l'action de* U *est une droite. De plus, tout élément* $\mathrm{A} \in \mathrm{B}$ *de la forme* $\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *agit sur cette droite par l'homothétie de rapport* $\chi_{(j,\mathrm{N})}(\mathrm{A}) = a^{j+\mathrm{N}} b^j$.

Démonstration. Soit $v \in \mathrm{V}_\mathrm{N} \setminus \{0\}$ un point fixe sous l'action de U. Ecrivons $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{r-1} n_i p^i$ et :

$$v = \sum_{\substack{k_i=0 \\ 0\le i\le r-1}}^{n_i} a_{k_0,\dots,k_{r-1}} \mathrm{X}^{n_0-k_0}\mathrm{Y}^{k_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{n_{r-1}-k_{r-1}}\mathrm{Y}^{k_{r-1}}.$$

Pour $t \in \mathbb{F}_q$, on pose $\mathrm{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}$. Soit $t \in \mathbb{F}_q$. Le coefficient de $\mathrm{A}_t v$ sur le vecteur $\mathrm{X}^{n_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{n_{r-1}}$ de la base canonique de V_N vaut :

$$\sum_{\substack{k_i=0 \\ 0\le i\le r-1}}^{n_i} a_{k_0,\dots,k_{r-1}} t^{k_0+\cdots+k_{r-1}p^{r-1}}.$$

Soit $f = \sum_{\substack{k_i=0 \\ 0\le i\le r-1}}^{n_i} a_{k_0,\dots,k_{r-1}} \mathrm{X}^{k_0+\cdots+k_{r-1}p^{r-1}} \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{X}]$. Comme v est un point fixe sous l'action de U, on a : $\forall t \in \mathbb{F}_q, f(t) = f(0)$. Il s'ensuit que $f - f(0)$ est divisible par $\mathrm{X}^q - \mathrm{X}$. Comme f est de degré inférieur à $q-1$, ceci implique $f = f(0)$. On en déduit que $a_{k_0,\dots,k_{r-1}} = 0$ pour tout $(k_0,\dots,k_{r-1}) \neq (0,\dots,0)$. Ainsi, $v \in \overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^{n_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{n_{r-1}}$.

Soit maintenant $\mathrm{A} \in \mathrm{B}$ de la forme $\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Soit $v = \mathrm{X}^{n_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{n_{r-1}}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}v &= \det(\mathrm{A})^j a^{n_0+\cdots+n_{r-1}p^{r-1}} \mathrm{X}^{n_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{n_{r-1}} \\ &= (ab)^j a^{\mathrm{N}} v \\ &= \chi_{(j,\mathrm{N})}(\mathrm{A})v. \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace des points fixes sous l'action de U est égal à $\overline{\mathbb{F}}_p \mathrm{X}^{n_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}^{n_{r-1}}$, et l'action de B sur cette droite est celle qui est donnée par le théorème. □

L'invariant que nous allons utiliser est le morphisme $\chi_{(j,\mathrm{N})}$ qui apparaît dans le théorème 5.1.

Lemme 5.2. *Soient (j_1,N_1) et (j_2,N_2) des éléments de $[\![0;q-2]\!] \times [\![0;q-1]\!]$ correspondant à des représentations isomorphes. On a $\chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)} = \chi_{(j_2,\mathrm{N}_2)}$.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathrm{V}_{\mathrm{N}_1} \to \mathrm{V}_{\mathrm{N}_2}$ un isomorphisme entre les représentations (j_1,N_1) et (j_2,N_2). Soit $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{N}_1}$ un vecteur non nul fixé par U et soit $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$. On a $\mathrm{A}v = v$, d'où $\varphi(\mathrm{A}v) = \mathrm{A}\varphi(v) = \varphi(v)$, ce qui montre que $\varphi(v)$ est un vecteur non nul fixé par U.

Soit maintenant $\mathrm{A} \in \mathrm{B}$, le théorème 5.1 implique que $\mathrm{A}v = \chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)}(\mathrm{A})v$ et $\mathrm{A}\varphi(v) = \chi_{(j_2,\mathrm{N}_2)}(\mathrm{A})\varphi(v)$. Mais en appliquant φ à la première égalité, il vient $\mathrm{A}\varphi(v) = \chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)}(\mathrm{A})\varphi(v)$. Comme $\varphi(v)$ est non nul, on a $\chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)}(\mathrm{A}) = \chi_{(j_2,\mathrm{N}_2)}(\mathrm{A})$, et finalement $\chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)} = \chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)}$, comme l'affirme le lemme. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Théorème 5.3. *Les représentations (j,N), pour $(j,\mathrm{N}) \in [\![0;q-2]\!] \times [\![0;q-1]\!]$, constituent l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Démonstration. D'après ce qui précède (corollaire 1.5, lemme 2.3 et théorème 4.3), il suffit de montrer que les représentations (j,N) sont deux à deux non isomorphes.

Soient donc (j_1,N_1) et (j_2,N_2) des éléments de $[\![0;q-2]\!] \times [\![0;q-1]\!]$ correspondant à des représentations isomorphes et montrons que $(j_1,\mathrm{N}_1) = (j_2,\mathrm{N}_2)$. D'après le lemme 5.2, on a $\chi_{(j_1,\mathrm{N}_1)} = \chi_{(j_2,\mathrm{N}_2)}$. En appliquant cette égalité à la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ où a est un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$, on obtient $a^{\mathrm{N}_1} = a^{\mathrm{N}_2}$ d'où $\mathrm{N}_1 \equiv \mathrm{N}_2 \mod (q-1)$.

Il y a alors trois possibilités : $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$, ou $\mathrm{N}_1 = 0$ et $\mathrm{N}_2 = q-1$, ou $\mathrm{N}_1 = q-1$ et $\mathrm{N}_2 = 0$. Les deux derniers cas sont exclus, car une représentation vérifiant $\mathrm{N} = 0$ est de dimension 1, et une représentation vérifiant $\mathrm{N} = q-1$ est de dimension q. On a donc $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$.

Ensuite, en utilisant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, on obtient de la même façon $a^{j_1} = a^{j_2}$, d'où $j_1 \equiv j_2 \mod (q-1)$ puis $j_1 = j_2$, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Remarque. Si l'on remplace $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ et B par $\mathrm{B} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$, le résultat du théorème 5.1 est encore vérifié. Le lemme 5.2 est encore vérifié si l'on considère les restrictions des représentations à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. La preuve du théorème 5.3 montre alors que les restrictions à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ des représentations $(0, \mathrm{N})$, pour $\mathrm{N} \in [\![0; q-1]\!]$, sont deux à deux non isomorphes.

Comme ces représentations sont irréductibles (remarque suivant le théorème 4.3) et que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ possède q représentations irréductibles sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à isomorphisme près (remarque suivant le corollaire 1.5), on en déduit que ce sont toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Deuxième partie

Représentations irréductibles de $GL_n(\mathbb{F}_q)$

A partir de maintenant, n désigne un entier supérieur à 2 fixé.

1 Préliminaires sur le groupe symétrique

Il est bien connu qu'il existe un plongement canonique du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$, dont l'image est constituée des matrices dites de permutation. Ces matrices jouent un rôle important dans l'étude du groupe linéaire. Nous consacrons cette section à certaines propriétés de $\mathfrak{S}_n$ dont nous aurons besoin par la suite.

Rappelons tout d'abord un fait très élémentaire.

Lemme 1.1. *Les transpositions $\tau_i = (i \;\; i+1)$, pour $i \in [\![1;n-1]\!]$, engendrent $\mathfrak{S}_n$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\langle \tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \rangle$ contient toutes les transpositions. Toute transposition de la forme $(1 \;\; j)$ où $2 \le j \le n$ s'obtient en conjuguant τ_1 par une puissance du cycle $(2 \;\; 3 \;\; \cdots \;\; n) = \tau_2 \cdots \tau_{n-1}$. Ensuite, une transposition quelconque $(i \;\; j)$ avec $i < j$ s'obtient en conjuguant $(1 \;\; j-i+1)$ par une puissance du cycle $(1 \;\; 2 \;\; \cdots \;\; n) = \tau_1 \cdots \tau_{n-1}$, d'où le résultat. □

Définition. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle longueur de σ, et on note $l(\sigma)$, le minimum des longueurs des expressions de σ en fonction des générateurs $\tau_i = (i \;\; i+1)$, $1 \le i \le n-1$ de $\mathfrak{S}_n$.

Définition. On pose :

$$\begin{aligned}
&\Phi = \{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \mid i \neq j\}, \\
&\Phi^+ = \{(i,j) \in \Phi \mid i < j\}, \\
&\Phi^- = \{(i,j) \in \Phi \mid i > j\} = \Phi \backslash \Phi^+.
\end{aligned}$$

Soit $(i,j) \in \Phi$. On note $|(i,j)| = (\min(i,j), \max(i,j)) \in \Phi^+$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\sigma((i,j)) = (\sigma(i), \sigma(j)) \in \Phi$. Pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$ on note $a_i = (i, i+1) \in \Phi^+$.

Etant donné $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit :

$$\begin{aligned}
&\Phi_\sigma^+ = \{a \in \Phi^+ \mid \sigma(a) \in \Phi^+\}, \\
&\Phi_\sigma^- = \{a \in \Phi^+ \mid \sigma(a) \in \Phi^-\} = \Phi^+ \backslash \Phi_\sigma^+, \\
&n(\sigma) = |\Phi_\sigma^-|.
\end{aligned}$$

Les deux propositions qui suivent établissent quelques propriétés des fonctions l et n, en particulier le fait important que ces fonctions coïncident sur $\mathfrak{S}_n$.

Proposition 1.2. *Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in [\![1;n-1]\!]$. On a :*

$$n(\sigma\tau_i) = \begin{cases} n(\sigma)+1 & si\ a_i \in \Phi^+_\sigma, \\ n(\sigma)-1 & si\ a_i \in \Phi^-_\sigma. \end{cases} \qquad n(\tau_i\sigma) = \begin{cases} n(\sigma)+1 & si\ a_i \in \Phi^+_{\sigma^{-1}}, \\ n(\sigma)-1 & si\ a_i \in \Phi^-_{\sigma^{-1}}. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(k,l) \in \Phi^+$.

Si k et l n'appartiennent pas au support de τ_i, $(k,l) \in \Phi^+_{\sigma\tau_i} \iff (k,l) \in \Phi^+_\sigma$.

Si $l > i+1$, $(i,l) \in \Phi^+_{\sigma\tau_i} \iff (i+1,l) \in \Phi^+_\sigma$ et $(i+1,l) \in \Phi^+_{\sigma\tau_i} \iff (i,l) \in \Phi^+_\sigma$.

Si $k < i$, $(k,i) \in \Phi^+_{\sigma\tau_i} \iff (k,i+1) \in \Phi^+_\sigma$ et $(k,i+1) \in \Phi^+_{\sigma\tau_i} \iff (k,i) \in \Phi^+_\sigma$.

Ainsi, il existe une bijection entre $\Phi^+_{\sigma\tau_i} \backslash \{a_i\}$ et $\Phi^+_\sigma \backslash \{a_i\}$. Par ailleurs, $a_i \in \Phi^+_{\sigma\tau_i} \iff a_i \notin \Phi^+_\sigma$. La première partie de la proposition en découle.

La seconde partie est plus simple. Soit $a \in \Phi^+$. Si $a \neq |\sigma^{-1}(a_i)|$, $a \in \Phi^+_{\tau_i\sigma} \iff a \in \Phi^+_\sigma$. Par ailleurs, $|\sigma^{-1}(a_i)| \in \Phi^+_{\tau_i\sigma} \iff |\sigma^{-1}(a_i)| \notin \Phi^+_\sigma \iff a_i \notin \Phi^+_{\sigma^{-1}}$; le résultat s'ensuit. □

Remarque. On peut définir la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par :

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } n(\sigma) \equiv 0 \mod 2, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme 1.1 et la propostition 1.2 montrent qu'il s'agit d'un morphisme de groupes.

Lemme 1.3. *Soit $\sigma = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_m} \in \mathfrak{S}_n$, avec $i_1, \dots, i_m \in [\![1;n-1]\!]$. Supposons $n(\sigma) < m$. Alors il existe des indices $j_1 < j_2$ dans $[\![1;m]\!]$ vérifiant :*

$$\sigma = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{j_1-1}} \tau_{i_{j_1+1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}} \tau_{i_{j_2+1}} \cdots \tau_{i_m}.$$

Démonstration. Comme $n(\sigma) < m$, la première partie de la proposition 1.2 montre qu'il existe un indice $j_2 > 1$ tel que $a_{i_{j_2}} \in \Phi^-_{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{j_2-1}}}$.

Soit alors j_1 le plus grand indice strictement inférieur à j_2 tel que l'on ait $a_{i_{j_2}} \in \Phi^-_{\tau_{i_{j_1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}}}$, de sorte que $a_{i_{j_2}} \in \Phi^+_{\tau_{i_{j_1+1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}}}$.

Comme le montre la preuve de la seconde partie de la proposition 1.2, on a alors :

$$a_{i_{j_2}} = |(\tau_{i_{j_1+1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}})^{-1}(a_{i_{j_1}})|.$$

Donc le conjugué de $\tau_{i_{j_2}}$ par $\tau_{i_{j_1+1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}}$ est égal à $\tau_{i_{j_1}}$, ce qui s'écrit :

$$\tau_{i_{j_1+1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}} \tau_{i_{j_2}} \tau_{i_{j_2-1}} \cdots \tau_{i_{j_1+1}} = \tau_{i_{j_1}}.$$

Ainsi, $\tau_{i_{j_1+1}} \cdots \tau_{i_{j_2}} = \tau_{i_{j_1}} \cdots \tau_{i_{j_2-1}}$. En utilisant cette égalité dans la définition de σ, on aboutit à la conclusion du lemme. □

Proposition 1.4. *Les fonctions l et n sont égales. De plus, le maximum de l sur $\mathfrak{S}_n$ est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$ et est atteint uniquement sur la permutation* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ n)(2\ \ n-1)(3\ \ n-2)\cdots(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\ \ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1)$.

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La proposition 1.2 montre que $n(\sigma) \leq l(\sigma)$ et le lemme 1.3 montre $l(\sigma) \leq n(\sigma)$. Il s'ensuit que $l(\sigma) = n(\sigma)$, donc l et n sont égales.

Le maximum de n sur $\mathfrak{S}_n$ est inférieur à $|\Phi^+| = \frac{n(n-1)}{2}$. Une permutation σ atteint ce maximum si et seulement si elle vérifie $\Phi^-_\sigma = \Phi^+$, c'est-à-dire $\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(n)$, ce qui se produit uniquement pour la permutation donnée dans l'énoncé de la proposition. □

2 La décomposition de Bruhat

Dans cette section, nous établissons un résultat fondamental dans l'étude du groupe linéaire et de ses représentations, qui met en évidence le lien entre le groupe linéaire et le groupe symétrique.

Les résultats de cette section sont énoncés pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, parce que c'est ce cas dont nous avons besoin. Ce sont cependant des propriétés générales du groupe linéaire, valables quel que soit le corps sur lequel on se place.

Avant tout, voici quelques notations que nous utiliserons constamment.

Notations. B et U désignent les sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ constitués respectivement des matrices triangulaires supérieures inversibles et des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1. H désigne le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices diagonales inversibles. Nous noterons N le sous-groupe des matrices monomiales, c'est-à-dire des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte un unique coefficient non nul.

Si g et g' sont deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, la notation ${}^g g'$ désigne le conjugué de g' par g, c'est-à-dire l'élément $gg'g^{-1}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Si X est une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, ${}^g\mathrm{X}$ est l'ensemble des conjugués des éléments de X par g.

Remarque. On observe que U est distingué dans B, $\mathrm{B} = \mathrm{UH}$, et $\mathrm{U} \cap \mathrm{H} = \{\mathrm{I}_n\}$. Il s'ensuit que B est un produit semi-direct $\mathrm{U} \rtimes \mathrm{H}$.

Le lemme suivant met en évidence certaines propriétés importantes de N.

Lemme 2.1. *Le normalisateur de* H *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *est égal à* N *si* $q \neq 2$*, et à* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *si* $q = 2$*. En particulier,* H *est distingué dans* N*. Le quotient* $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{H}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Si $q = 2$, $\mathrm{H} = \{\mathrm{I}_n\}$ donc le normalisateur de H dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ est égal à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Supposons $q \neq 2$. Soit g un élément du normalisateur de H dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. On a pour tout $h \in \mathrm{H}$: $ghg^{-1} \in \mathrm{H}$. Comme $\mathbb{F}_q^\times$ contient deux éléments distincts, tout élément de $\mathbb{F}_q$ peut s'écrire comme somme de deux éléments de $\mathbb{F}_q^\times$ et toute matrice diagonale peut s'exprimer comme somme de deux éléments de H. On en déduit que pour toute matrice diagonale h, ghg^{-1} est diagonale. On applique ce résultat à la matrice diagonale dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice i, égal à 1. On obtient ainsi que la $i^{\text{ème}}$ colonne de g comporte un unique coefficient non nul. Par inversibilité de g, chaque ligne et chaque colonne de g comporte donc un unique coefficient non nul ; donc $g \in \mathrm{N}$.

Soit Π le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices de permutation. Pour tout $\pi \in \Pi$ et pour tout $h \in \mathrm{H}$, il existe $h' \in \mathrm{H}$ tel que $\pi h = h'\pi$. Cela montre que Π normalise H, et donc que $\mathrm{N} = \mathrm{H}\Pi$ normalise également H. Finalement, N est le normalisateur de H dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Quelle que soit la valeur de q, on a $\mathrm{N} = \mathrm{H}\Pi$, $\mathrm{H} \cap \Pi = \{\mathrm{I}_n\}$, et $\mathrm{H} \triangleleft \mathrm{N}$ d'après ce qui précède. Donc N est un produit semi-direct $\mathrm{H} \rtimes \Pi$. Il s'ensuit que $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{H} \simeq \Pi \simeq \mathfrak{S}_n$. □

Remarque. L'isomorphisme $\mathrm{W} \simeq \mathfrak{S}_n$ fourni par le lemme 2.1 peut être décrit explicitement de la façon suivante. Soit $w \in \mathrm{W}$; w est une classe à gauche de N modulo H, qui contient une unique matrice de permutation associée à un élément σ de $\mathfrak{S}_n$. L'image de w par l'isomorphisme du lemme 2.1 est σ.

Notations. L'isomorphisme $\mathrm{W} \simeq \mathfrak{S}_n$ fourni par le lemme 2.1 fait correspondre les générateurs $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ de $\mathfrak{S}_n$, définis dans la section 1, à des éléments de W que nous noterons $w_1, \ldots, w_{n-1}$. L'élément de $\mathfrak{S}_n$ de longueur maximale défini dans la proposition 1.4 correspond à un élément de W que nous noterons w_0.

Si $w \in \mathrm{W}$ correspond à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous noterons $l(w) = l(\sigma)$, $\Phi_w^+ = \Phi_\sigma^+$ et $\Phi_w^- = \Phi_\sigma^-$.

Convention. Si $g \in \mathrm{N}$, le sous-ensemble $\mathrm{B}g$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ ne dépend que de la classe w de g modulo H, puisque $\mathrm{H} \subset \mathrm{B}$. Nous nous autoriserons donc à écrire $\mathrm{B}g = \mathrm{B}w$. Dans la suite, cette convention sera appliquée, plus généralement, à toute expression faisant intervenir un élément de N, mais ne dépendant que de la classe de cet élément modulo H. Nous écrirons une telle expression en remplaçant l'élément en question par sa classe modulo H.

Nous énonçons maintenant le théorème de Bruhat sous sa forme classique. Une forme plus précise sera donnée à la section 3.

Définition. On appelle cellules de Bruhat les ensembles $\mathrm{B}w\mathrm{U}$, pour $w \in \mathrm{W}$.

Théorème 2.2 (Bruhat). *Le groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *est égal à l'union disjointe des cellules de Bruhat. Autrement dit, on a :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) = \coprod_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{B}w\mathrm{U}.$$

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Nous allons prouver que $g \in \bigcup_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{B}w\mathrm{U}$ en utilisant des opérations élémentaires.

Posons $g_0 = g$. Nous allons définir par récurrence une suite g_j, $0 \leq j \leq n$, d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Supposons $g_0, \ldots, g_{j-1}$ construits. Posons :

$$k_j = \max\{i \in [\![1;n]\!] \mid (g_{j-1})_{i,j} \neq 0\}.$$

On définit alors g_j comme la matrice g_{j-1} sur laquelle on a effectué les opérations suivantes :

1. Multiplier la $k_j^{\text{ième}}$ ligne par $\frac{1}{(g_{j-1})_{k_j,j}}$;

2. Pour $i < k_j$, soustraire la $k_j^{\text{ième}}$ ligne, multipliée par $(g_{j-1})_{i,j}$, à la $i^{\text{ième}}$;

3. Pour $j' > j$, soustraire la $j^{\text{ième}}$ colonne, multipliée par $\frac{(g_{j-1})_{k_j,j'}}{(g_{j-1})_{k_j,j}}$, à la $j'^{\text{ième}}$.

Les opérations 1 et 2 correspondent à une multiplication à gauche par des éléments de B. L'opération 3 correspond à une multiplication à droite par un élément de U. Il s'ensuit que pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $g_j \in \mathrm{B}g\mathrm{U}$. Par ailleurs, pour tout $j \in [\![0;n]\!]$ et pour tout $j' \geq j$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de $g_{j'}$ comporte un unique coefficient non nul : le coefficient situé à la $k_j^{\text{ième}}$ ligne, qui vaut 1. On en conclut que g_n est une matrice de permutation, et que l'élément $w \in \mathrm{W}$ associé à g_n vérifie $g \in \mathrm{B}w\mathrm{U}$.

Il reste maintenant à vérifier que la réunion des $\mathrm{B}w\mathrm{U}$, pour $w \in \mathrm{W}$, est disjointe. Pour cela, soient π_1 et π_2 deux matrices de permutation telles que $b\pi_1 = \pi_2 u$, avec $b \in \mathrm{B}$ et $u \in \mathrm{U}$, et montrons que $\pi_1 = \pi_2$. Soient σ_1 et σ_2 les permutations associées à π_1 et π_2, et supposons par l'absurde que $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Soit alors $j \in [\![1;n]\!]$ l'entier minimal tel que $\sigma_1(j) \neq \sigma_2(j)$; on peut supposer $\sigma_1(j) > \sigma_2(j)$. L'égalité des coefficients d'indices $\sigma_1(j), j$ de $b\pi_1$ et $\pi_2 u$ s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} b_{\sigma_1(j),k}\delta_{k,\sigma_1(j)} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{\sigma_1(j),\sigma_2(k)} u_{k,j}.$$

On a donc $b_{\sigma_1(j),\sigma_1(j)} = u_{\sigma_2^{-1}\sigma_1(j),j}$. Le premier membre de cette égalité est non nul, puisqu'il s'agit d'un coefficient diagonal d'un élément de B. Au contraire, le second membre est nul : en effet, pour tout $j' \leq j$, $\sigma_2(j') \neq \sigma_1(j)$, ce qui implique que $\sigma_2^{-1}\sigma_1(j) > j$. On aboutit à une contradiction, ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque. Le théorème de Bruhat est valable pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ quel que soit le corps $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les cellules de Bruhat sont de tailles très inégales d'un point de vue topologique. En particulier, la cellule associée à l'élément de longueur maximale w_0 de W, surnommée la « grosse cellule », est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En effet, la preuve du théorème montre que l'appartenance d'une matrice à cette cellule se traduit par un nombre fini de conditions de non-annulation de fractions rationnelles en les coefficients de la matrice.

3 Forme forte du théorème de Bruhat

Dans cette section, nous démontrons une forme forte du théorème de Bruhat énoncé précédemment (théorème 2.2). Cette forme forte fournit une décomposition plus précise de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, qui attribue à tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ une écriture unique.

Comme ceux de la section 2, les résultats de cette section, énoncés pour le corps $\mathbb{F}_q$, sont en fait des propriétés du groupe linéaire valables quel que soit le corps des coefficients.

Tout d'abord, voici un lemme qui permet de comprendre l'action par conjugaison des matrices de permutation sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Lemme 3.1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\pi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ la matrice de permutation correspondante. Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on a $({}^{\pi}g)_{i,j} = g_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$.*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. On a :

$$({}^{\pi}g)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} g_{k,l} \delta_{l,\sigma^{-1}(j)} = g_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}.$$

□

Nous définissons maintenant certains sous-groupes importants de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. L'équivalence entre les différentes définitions que nous donnons ci-dessous se prouve dans chaque cas en appliquant le lemme 3.1.

Définition. Soit $w \in \mathrm{W}$. On définit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_w^+ &= \mathrm{U} \cap {}^{w^{-1}}\mathrm{U} = \{u \in \mathrm{U} \mid \forall (i,j) \in \Phi_w^-, u_{i,j} = 0\},\\
\mathrm{U}_w^- &= \mathrm{U} \cap {}^{w^{-1}w_0}\mathrm{U} = \{u \in \mathrm{U} \mid \forall (i,j) \in \Phi_w^+, u_{i,j} = 0\}.
\end{aligned}$$

On note $\mathrm{V} = {}^{w_0}\mathrm{U}$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux égaux à 1.

Pour $i \in [\![1;n-1]\!]$, on pose $\mathrm{U}_i = \mathrm{U}_{w_i}^-$ et $\mathrm{V}_i = {}^{w_i}\mathrm{U}_i$. De façon équivalente, V_i est l'ensemble des transposées des matrices de U_i.

Remarque. Tous les sous-groupes introduits dans la définition précédente sont normalisés par H. Cela implique notamment que les expressions telles que ${}^{w}\mathrm{U}_{w'}^+$, pour $(w,w') \in \mathrm{W}^2$, ont un sens.

Les deux propositions suivantes établissent certaines propriétés de ces sous-groupes.

Proposition 3.2. *Soient $i \in [\![1;n-1]\!]$ et $w \in \mathrm{W}$.*

1. *Si $a_i \in \Phi_w^+$, alors $\mathrm{U}_{ww_i}^- = \mathrm{U}_i {}^{w_i}\mathrm{U}_w^-$ et $\mathrm{U}_i \cap {}^{w_i}\mathrm{U}_w^- = \{\mathrm{I}_n\}$.*
2. *Si $a_i \in \Phi_w^-$, alors $\mathrm{U}_w^- = \mathrm{U}_i {}^{w_i}\mathrm{U}_{ww_i}^-$ et $\mathrm{U}_i \cap {}^{w_i}\mathrm{U}_{ww_i}^- = \{\mathrm{I}_n\}$.*
3. *Ecrivons $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ avec $i_1, \dots, i_k \in [\![1;n-1]\!]$ et $l(w) = k$. On a alors :*

$$\mathrm{U}_w^- = \mathrm{U}_{i_k} {}^{w_{i_k}}\mathrm{U}_{i_{k-1}} {}^{w_{i_k}w_{i_{k-1}}}\mathrm{U}_{i_{k-2}} \cdots {}^{w_{i_k}\cdots w_{i_2}}\mathrm{U}_{i_1}.$$

Démonstration. Prouvons l'assertion 1. Nous allons pour cela expliciter ${}^{w_i}\mathrm{U}_w^-$. Déjà, comme $a_i \in \Phi_w^+$, toutes les matrices de U_w^- ont leur coefficient d'indices $i, i+1$ nul. Grâce au lemme 3.1, on en déduit que ${}^{w_i}\mathrm{U}_w^- \subset \mathrm{U}$. On écrit ensuite :

$$\begin{aligned}
{}^{w_i}\mathrm{U}_w^- &= {}^{w_i}\mathrm{U} \cap {}^{w_iw^{-1}w_0}\mathrm{U}\\
&= {}^{w_i}\mathrm{U} \cap {}^{w_iw^{-1}w_0}\mathrm{U} \cap \mathrm{U}\\
&= {}^{w_i}\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_{ww_i}^-\\
&= \{u \in \mathrm{U}_{ww_i}^- \mid u_{i,i+1} = 0\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Comme $a_i \in \Phi_{ww_i}^-$, $\Phi_{ww_i}^+ \subset \Phi_{w_i}^+$, donc $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{U}_{ww_i}^-$. On en déduit en utilisant les égalités (2) que $\mathrm{U}_i {}^{w_i}\mathrm{U}_w^- \subset \mathrm{U}_{ww_i}^-$.

Réciproquement, soit $u \in \mathrm{U}^-_{ww_i}$, et soit $\lambda = u_{i,i+1}$. Soit $u_1 = \mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{i,i+1}$, où $\mathrm{E}_{i,i+1}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices $i, i+1$, égal à 1. On a $u_1 \in \mathrm{U}_i$. Soit $u_2 = u_1^{-1}u$. D'après ce qui précède, $u_2 \in \mathrm{U}^-_{ww_i}$. De plus, comme $(u_2)_{i,i+1} = 0$, les égalités (2) montrent que $u_2 \in {}^{w_i}\mathrm{U}^-_w$. Finalement, $u = u_1u_2 \in \mathrm{U}_i{}^{w_i}\mathrm{U}^-_w$, et on a donc bien $\mathrm{U}^-_{ww_i} = \mathrm{U}_i{}^{w_i}\mathrm{U}^-_w$. Le fait que $\mathrm{U}_i \cap {}^{w_i}\mathrm{U}^-_w = \{\mathrm{I}_n\}$ découle des égalités (2).

L'assertion 2 se prouve en appliquant l'assertion 1 à ww_i.

L'assertion 3 résulte d'une application répétée de l'assertion 1 : en effet, pour tout $j \in [\![0; k-1]\!]$, $l(w_{i_1} \cdots w_{i_{j+1}}) = l(w_{i_1} \cdots w_{i_j}) + 1$, donc la proposition 1.2 implique que $a_{j+1} \in \Phi^+_{w_{i_1} \cdots w_{i_j}}$. □

Proposition 3.3. *Soit* $w \in \mathrm{W}$. *On a* $\mathrm{U} = \mathrm{U}^+_w\mathrm{U}^-_w = \mathrm{U}^-_w\mathrm{U}^+_w$ *et* $\mathrm{U}^+_w \cap \mathrm{U}^-_w = \{\mathrm{I}_n\}$.

Démonstration. Le fait que $\mathrm{U}^+_w \cap \mathrm{U}^-_w = \{\mathrm{I}_n\}$ résulte des définitions et de l'égalité $\Phi^+ = \Phi^+_w \cup \Phi^-_w$.

Nous allons prouver que $\mathrm{U} = \mathrm{U}^-_w\mathrm{U}^+_w$. Le fait que $\mathrm{U} = \mathrm{U}^+_w\mathrm{U}^-_w$ s'en déduira alors en appliquant l'égalité à w_0w.

Pour montrer que $\mathrm{U} = \mathrm{U}^-_w\mathrm{U}^+_w$, nous allons raisonner par récurrence sur la longueur $l(w)$ de w. L'égalité est vraie si $l(w) = 0$, car dans ce cas, $w = 1$, donc $\mathrm{U}^+_w = \mathrm{U}$. Ensuite, soit $w \in \mathrm{W}$ un élément de longueur non maximale, et soit $i \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $a_i \in \Phi^+_{w^{-1}}$, de sorte que $l(w_iw) = l(w)+1$ (proposition 1.2). Supposons le résultat pour w et montrons-le pour w_iw.

L'assertion 3 de la proposition 3.2 implique que $\mathrm{U}^-_{w_iw} = \mathrm{U}^-_w\ {}^{w^{-1}}\mathrm{U}_i$. Par ailleurs, $\mathrm{U}^+_{w_iw} = {}^{(w_iw)^{-1}}\mathrm{U}^+_{(w_iw)^{-1}} = {}^{w^{-1}w_i}\mathrm{U}^-_{w_0w^{-1}w_i}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}^-_{w_iw}\mathrm{U}^+_{w_iw} &= \mathrm{U}^-_w\ {}^{w^{-1}}(\mathrm{U}_i{}^{w_i}\mathrm{U}^-_{w_0w^{-1}w_i}) \\ &= \mathrm{U}^-_w\ {}^{w^{-1}}\mathrm{U}^-_{w_0w^{-1}}\end{aligned}$$

en appliquant l'assertion 2 de la proposition 3.2. Mais ${}^{w^{-1}}\mathrm{U}^-_{w_0w^{-1}} = {}^{w^{-1}}\mathrm{U}^+_{w^{-1}} = \mathrm{U}^+_w$. Donc $\mathrm{U}^-_{w_iw}\mathrm{U}^+_{w_iw} = \mathrm{U}^-_w\mathrm{U}^+_w = \mathrm{U}$ par hypothèse de récurrence, ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons maintenant énoncer la forme forte du théorème de Bruhat.

Théorème 3.4. *On a l'union disjointe :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) = \coprod_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{B}w\mathrm{U}^-_w.$$

De plus, si $\{[w] \mid w \in \mathrm{W}\}$ *est un système de représentants des classes de* N *modulo* H*, l'écriture de tout élément* $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *sous la forme* $g = b[w]u$*, avec* $b \in \mathrm{B}, w \in \mathrm{W}$ *et* $u \in \mathrm{U}^-_w$*, est unique.*

Démonstration. Soit $w \in \mathrm{W}$ et soit π_w la matrice de permutation associée. D'après la proposition 3.3, $\mathrm{U} = \mathrm{U}^+_w\mathrm{U}^-_w$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}w\mathrm{U} &= \mathrm{B}w\mathrm{U}^+_w\mathrm{U}^-_w \\ &= \mathrm{B}\,{}^w\mathrm{U}^+_w\pi_w\mathrm{U}^-_w \\ &= \mathrm{B}\mathrm{U}^+_{w^{-1}}\pi_w\mathrm{U}^-_w \\ &= \mathrm{B}w\mathrm{U}^-_w.\end{aligned}$$

Le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)=\coprod_{w\in \mathrm{W}} \mathrm{B}w\mathrm{U}_w^-$ découle alors du théorème 2.2.

Ensuite, soit $g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et supposons que $g=b_1[w]u_1=b_2[w]u_2$, avec $(b_1,b_2)\in \mathrm{B}^2$, $w\in \mathrm{W}$ et $(u_1,u_2)\in(\mathrm{U}_w^-)^2$. Alors ${}^{[w]}(u_1u_2^{-1})=b_1^{-1}b_2\in \mathrm{B}$. Mais par ailleurs, ${}^{[w]}(u_1u_2^{-1})\in {}^{w}\mathrm{U}_w^-\subset \mathrm{V}$, ce qui montre que ${}^{[w]}(u_1u_2^{-1})=\mathrm{I}_n$, et donc que $u_1=u_2$. Il s'ensuit que $b_1=b_2$ Finalement, g admet une unique écriture sous la forme donnée par le théorème. □

4 Notion de poids

Dans cette section, nous définissons la notion de poids, qui sert à décrire les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Nous montrerons qu'il y a une correspondance bijective entre certains poids et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. L'observation qui conduit à définir la notion de poids est l'existence, dans tout $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module à gauche, d'une droite fixée par U et stable par B.

Nous commençons par un lemme qui permet de classifier entièrement les représentations irréductibles de B sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Lemme 4.1. *Soit* M *un* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{B}]$*-module à gauche irréductible. La dimension de* M *est égale à* 1*, et* U *agit trivialement sur* M*.*

Démonstration. Soit $\mathrm{M_U}$ un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{U}]$-module irréductible de M. Le lemme I.1.3 implique que U agit trivialement sur $\mathrm{M_U}$. Il s'ensuit que le sous-espace de M constitué des points fixes sous l'action de U est non nul. Or, comme U est distingué dans B, ce sous-espace est B-invariant ; puisque M est un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{B}]$-module irréductible, il est donc égal à M tout entier. Donc U agit trivialement sur M.

Puisque $\mathrm{B/U}\simeq \mathrm{H}$, l'action de B sur M induit par factorisation une action de H sur M qui en fait un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{H}]$-module irréductible. Comme H est abélien et que $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébriquement clos, tout $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{H}]$-module irréductible est de dimension 1. Il s'ensuit que M est de dimension 1, ce qui termine la preuve du lemme. □

Remarque. Les morphismes de B dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ correspondant aux représentations irréductibles de B s'obtiennent en composant les morphismes de H dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ avec la surjection canonique $\mathrm{B}\to\mathrm{B/U}\simeq\mathrm{H}$. Comme H est d'ordre premier à p, le théorème I.1.1 implique qu'il a autant de morphismes de H dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ que de classes de conjugaison dans H, c'est-à-dire $(q-1)^n$. On en déduit qu'il y a $(q-1)^n$ classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de B sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Dans le cas où $n=2$, le résultat suivant est une conséquence du théorème I.5.1.

Corollaire 4.2. *Soit* M *un* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$*-module à gauche. Alors* M *contient une droite fixée par* U *et stable par* B*.*

Démonstration. Soit $\mathrm{M_B}$ un sous $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{B}]$-module irréductible de M. D'après le lemme 4.1, $\mathrm{M_B}$ est de dimension 1 et fixé par U, et satisfait donc les conditions demandées. □

Nous allons maintenant fixer un système de représentants des classes de N modulo H. Le choix le plus naturel serait l'ensemble des matrices de permutation ; nous allons cependant choisir un autre système pour des raisons qui apparaîtront dans la suite (lemmes 4.3 et 5.1).

Définition. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. On définit :

$$\mathrm{H}_i = \{h \in \mathrm{H} \mid h_{i,i}h_{i+1,i+1} = 1; \forall i' \notin \{i; i+1\}, h_{i'} = 1\}.$$

On observe que $\mathrm{H}_i \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Soit $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$. On définit les sous-groupes :

$$\mathrm{W}_\mathrm{I} = \langle w_i, i \in \mathrm{I}\rangle \subset \mathrm{W}, \qquad \mathrm{H}_\mathrm{I} = \langle \mathrm{H}_i, i \in \mathrm{I}\rangle \subset \mathrm{H}.$$

On a $\mathrm{H}_\mathrm{I} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ et, comme les H_i sont en somme directe, $|\mathrm{H}_\mathrm{I}| = (q-1)^{|\mathrm{I}|}$.

Soit maintenant $i \in [\![1; n-1]\!]$. On note $[w_i]$ la matrice dont le coefficient d'indices $i, i+1$ est égal à -1, et dont les autres coefficients sont égaux à ceux de la matrice de permutation associée à τ_i. De cette façon, $w_i = [w_i]\mathrm{H}$ et $[w_i] \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Enfin, soit $w \in \mathrm{W}$. On choisit arbitrairement une écriture $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ avec $i_1, \ldots, i_k \in [\![1; n-1]\!]$ et $l(w) = k$. On pose ensuite $[w] = [w_{i_1}] \cdots [w_{i_k}]$. A nouveau, $w = [w]\mathrm{H}$ et $[w] \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Nous nous servirons à la section 7 du résultat suivant.

Lemme 4.3. *Soit* $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$. *Soient* $w_1, w_2 \in \mathrm{W}_\mathrm{I}$. *On a* $[w_1][w_2][w_1 w_2]^{-1} \in \mathrm{H}_\mathrm{I}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{S}_\mathrm{I} = \langle \tau_i, i \in \mathrm{I}\rangle \subset \mathfrak{S}_n$. Soient $i_1, \ldots, i_{m-1}$ les éléments de $[\![1; n-1]\!]\backslash \mathrm{I}$, rangés par ordre croissant. Soient $i_0 = 0$ et $i_m = n$. Pour $j \in [\![1; m]\!]$, soient $\mathrm{O}_j = [\![i_{j-1}+1; i_j]\!]$ et $l_j = |\mathrm{O}_j| = i_j - i_{j-1}$. Les O_j sont les orbites de $[\![1; n]\!]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_\mathrm{I}$; de plus, toute permutation dont le support est inclus dans l'un des O_j appartient à $\mathfrak{S}_\mathrm{I}$, de sorte que $\mathfrak{S}_\mathrm{I} \simeq \prod_{j=1}^m \mathfrak{S}_{l_j}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathrm{I}$, et écrivons $\sigma = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}$, avec $i_1, \ldots, i_k \in [\![1; n-1]\!]$ et $l(\sigma) = k$. Nous allons montrer que pour tout $j \in [\![1; k]\!]$, $i_j \in \mathrm{I}$. Supposons que ce ne soit pas le cas ; soit alors k' l'indice maximal tel que $i_{k'} \notin \mathrm{I}$. Soit $\sigma' = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{k'}}$; on a $\sigma' \in \mathfrak{S}_\mathrm{I}$ et $l(\sigma') = k'$. Soit j l'indice minimal tel que $a_{i_{k'}} \in \Phi^-_{\tau_{i_j} \cdots \tau_{i_{k'}}}$. La preuve de la seconde partie de la proposition 1.2 montre que $j = 1$; si ce n'était pas le cas, on aurait en effet $l(\tau_{i_{j-1}} \cdots \tau_{i_{k'}}) = l(\tau_{i_j} \cdots \tau_{i_{k'}}) - 1$, et cela contredirait $l(\sigma') = k'$.

Ainsi, $a_{i_{k'}} \in \Phi^-_{\sigma'}$. C'est absurde : en effet, comme $i_{k'} \notin \mathrm{I}$, $i_{k'}$ et $i_{k'}+1$ appartiennent à des orbites distinctes sous l'action de $\mathfrak{S}_\mathrm{I}$. Les éléments de l'orbite de $i_{k'}$ sont tous strictement inférieurs aux éléments de l'orbite de $i_{k'}+1$, et comme $\sigma' \in \mathfrak{S}_\mathrm{I}$, on ne peut donc pas avoir $a_{i_{k'}} \in \Phi^-_{\sigma'}$. Cette contradiction montre que pour tout $j \in [\![1; k]\!]$, $i_j \in \mathrm{I}$.

D'après ce qui précède, comme w_1, w_2 et $w_1 w_2$ sont des éléments de W_I, $[w_1]$, $[w_2]$ et $[w_1 w_2]$ s'expriment comme produits des $[w_i]$, $i \in \mathrm{I}$. Donc $[w_1][w_2][w_1 w_2]^{-1} \in \langle [w_i], i \in \mathrm{I}\rangle$. Notons G_I le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices diagonales par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & & & \\ & \mathrm{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{A}_m \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{A}_i \in \mathrm{SL}_{l_j}(\mathbb{F}_q)$ pour tout $j \in [\![1;m]\!]$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, $[w_i] \in \mathrm{G_I}$. Il s'ensuit que $[w_1][w_2][w_1w_2]^{-1} \in \mathrm{G_I}$. Par ailleurs, on a $[w_1][w_2][w_1w_2]^{-1} \in \mathrm{H}$.

Pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathrm{H}_i \subset \mathrm{G_I} \cap \mathrm{H}$. On en déduit que $\mathrm{H_I} \subset \mathrm{G_I} \cap \mathrm{H}$. De plus :

$$|\mathrm{G_I} \cap \mathrm{H}| = \prod_{j=1}^{m} (q-1)^{l_j-1} = (q-1)^{n-m} = (q-1)^{|\mathrm{I}|} = |\mathrm{H_I}|,$$

ce qui montre que $\mathrm{G_I} \cap \mathrm{H} = \mathrm{H_I}$. Finalement, $[w_1][w_2][w_1w_2]^{-1} \in \mathrm{H_I}$, comme l'affirme le lemme. □

Notations. Si $\mathrm{X} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, nous noterons $\overline{\mathrm{X}} = \sum_{x\in \mathrm{X}} x \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$. Si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, nous noterons $\mathrm{G}^* = \mathrm{G}\backslash\{\mathrm{I}_n\}$.

Nous pouvons à présent définir la notion de poids. Nous avons vu à la section I.5 que si M est un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible, alors M contient une unique droite stable par B, et le morphisme $\mathrm{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ donnant l'action de B sur cette droite fournit un invariant de la classe d'isomorphisme de M. C'est cependant un invariant incomplet, en ce sens que le théorème I.5.1 montre que certains $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)]$-modules non isomorphes ne sont pas distingués par cet invariant. La définition qui suit est conçue pour remédier à ce problème.

Définition. Soit χ un morphisme de groupes de B dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Soient μ_i, $i \in [\![1;n-1]\!]$, des éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Le n-uplet $(\chi, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ est appelé un poids.

Soit M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module à gauche. Soit $m \in \mathrm{M}$ un vecteur non nul. On dit que m est de poids $(\chi, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\forall b \in \mathrm{B}, bm = \chi(b)m, \qquad \forall i \in [\![1;n-1]\!], \overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m = \mu_i m.$$

Dans ce cas, le vecteur m est appelé un vecteur à poids.

Le théorème suivant met en évidence le lien entre poids et $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules irréductibles.

Théorème 4.4. *Soit* M *un* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$*-module à gauche.*

1. M *contient un vecteur à poids.*
2. *Si* $m \in \mathrm{M}$ *est un vecteur à poids,* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]m = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$.
3. *Si* M *est irréductible,* M *contient une unique droite fixée par* U *et stable par* B.
4. *Deux* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$*-modules irréductibles contenant des vecteurs de même poids sont isomorphes.*

Le théorème 4.4 permet d'associer de façon injective, à toute classe d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules irréductibles, un unique poids. La preuve de ce théorème est l'objet des deux sections suivantes.

5 Lemmes techniques

Le but de cette section est d'établir certains résultats nécessaires pour la preuve du théorème 4.4 énoncé à la fin de la section 4.

Le système de représentants des classes de N modulo H que nous avons défini à la section 4 a été choisi en vue du lemme suivant, qui jouera un rôle important dans la suite.

Lemme 5.1. *Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$. Il existe des applications bijectives $f_i : \mathrm{U}_i^* \to \mathrm{U}_i^*$ et $h_i : \mathrm{U}_i^* \to \mathrm{H}_i$ vérifiant :*

$$\forall u \in \mathrm{U}_i^*, [w_i]u[w_i] = f_i(u)h_i(u)[w_i]f_i(u).$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'identité matricielle suivante, vérifiée pour tout $a \in \mathbb{F}_q^\times$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Définition. Soit χ un morphisme de groupes de B dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, et soit $w \in \mathrm{W}$. Soit $b \in \mathrm{B}$. Comme B est un produit semi-direct $\mathrm{U} \rtimes \mathrm{H}$, il existe une unique écriture de b sous la forme $b = hu$, avec $h \in \mathrm{H}$ et $u \in \mathrm{U}$. Comme $\mathrm{U} \subset \ker \chi$, on a $\chi(b) = \chi(h)$.

On pose ${}^w\chi(b) = \chi({}^{w^{-1}}h)$. Cette définition fait de ${}^w\chi$ un morphisme de groupes ; de plus, pour tout $(w_1, w_2) \in \mathrm{W}^2$, ${}^{w_1}({}^{w_2}\chi) = {}^{w_1 w_2}\chi$.

Lemme 5.2. *Soit χ un morphisme de B dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Soit M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module et soit $m \in \mathrm{M}$ tel que pour tout $b \in \mathrm{B}$, $bm = \chi(b)m$. Alors, si $w \in \mathrm{W}$ et $m_w = \overline{\mathrm{U}_w^-}[w^{-1}]m$, pour tout $b \in \mathrm{B}$, $bm_w = {}^{w^{-1}}\chi(b)m_w$.*

Démonstration. Soit $h \in \mathrm{H}$. On a, comme H normalise U_w^- :

$$\begin{aligned} hm_w &= \overline{\mathrm{U}_w^-}h[w^{-1}]m \\ &= \overline{\mathrm{U}_w^-}[w^{-1}]\chi({}^w h)m \\ &= {}^{w^{-1}}\chi(h)m_w. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à montrer que U fixe le vecteur m_w. La proposition 3.3 affirme que $\mathrm{U} = \mathrm{U}_w^-\mathrm{U}_w^+$ et que $\mathrm{U}_w^- \cap \mathrm{U}_w^+ = \{\mathrm{I}_n\}$. Il s'ensuit que si u_0 est un élément fixé de U, pour tout $u \in \mathrm{U}_w^-$, $u_0 u$ admet une unique décomposition de la forme $u_0 u = u^- u^+$, avec

$u^- \in \mathrm{U}_w^-$ et $u^+ \in \mathrm{U}_w^+$; et l'application qui à u associe u^- est bijective. On a :

$$\begin{aligned} u_0 m_w &= u_0 \left(\sum_{u \in \mathrm{U}_w^-} u \right) [w^{-1}] m \\ &= \sum_{u \in \mathrm{U}_w^-} u^- u^+ [w^{-1}] m \\ &= \sum_{u \in \mathrm{U}_w^-} u^- [w^{-1}]^{[w]} u^+ m \\ &= \sum_{u \in \mathrm{U}_w^-} u^- [w^{-1}] m \\ &= m_w, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Lemme 5.3. *Soit χ un morphisme de* B *dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Soit* M *un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module et soit $m \in \mathrm{M}$ tel que pour tout $b \in \mathrm{B}$, $bm = \chi(b)m$. Soient $w \in \mathrm{W}$ et $i \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $a_i \in \Phi_w^-$. On a :*

$$\overline{\mathrm{U}}_i [w_i] \overline{\mathrm{U}_w^-} [w^{-1}] m = \left(\sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} {}^{w^{-1}}\chi(h_i(u)) \right) \overline{\mathrm{U}_w^-} [w^{-1}] m.$$

Démonstration. L'assertion 2 de la proposition 3.2 affirme que $\mathrm{U}_w^- = \mathrm{U}_i {}^{w_i}\mathrm{U}_{ww_i}^-$ et que $\mathrm{U}_i \cap {}^{w_i}\mathrm{U}_{ww_i}^- = \{\mathrm{I}_n\}$. Ceci implique que $\overline{\mathrm{U}_w^-} = \overline{\mathrm{U}}_i {}^{w_i}\overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{U}}_i [w_i] \overline{\mathrm{U}_w^-} [w^{-1}] m &= \overline{\mathrm{U}}_i [w_i] \overline{\mathrm{U}}_i [w_i] \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m \\ &= \overline{\mathrm{U}}_i \left([w_i]^2 + \sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} f_i(u) h_i(u) [w_i] f_i(u) \right) \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m, \end{aligned} \tag{3}$$

la seconde égalité provenant du lemme 5.1.

On a $[w_i]^{-1}[w^{-1}] \in [(ww_i)^{-1}]\mathrm{H}$; cela montre que $\overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-}[w_i]^{-1}[w^{-1}]m$ est colinéaire à $m_{ww_i} = \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-}[(ww_i)^{-1}]m$. En appliquant le lemme 5.2, on obtient alors que :

$$\forall u \in \mathrm{U}, u \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m = \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m.$$

Par conséquent, $\overline{\mathrm{U}}_i \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m = 0$, et comme $[w_i]^2 \in \mathrm{H}$, on a $[w_i]^2 \mathrm{U}_i = \mathrm{U}_i [w_i]^2$, d'où $\overline{\mathrm{U}}_i [w_i]^2 \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m = 0$. L'équation (3) se réécrit, en utilisant à nouveau le lemme 5.2 :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{U}}_i [w_i] \overline{\mathrm{U}_w^-} [w^{-1}] m &= \sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} \overline{\mathrm{U}}_i h_i(u) [w_i] \overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w_i]^{-1} [w^{-1}] m \\ &= \sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} {}^{(ww_i)^{-1}}\chi({}^{w_i}h_i(u)) \overline{\mathrm{U}}_i {}^{w_i}\overline{\mathrm{U}_{ww_i}^-} [w^{-1}] m \\ &= \sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} {}^{w^{-1}}\chi(h_i(u)) \overline{\mathrm{U}_w^-} [w^{-1}] m, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant d'une nouvelle application de l'assertion 2 de la proposition 3.2. On obtient bien la relation donnée dans l'énoncé du lemme. $\square$

La fin de cette section est consacrée à certaines propriétés de l'algèbre $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ lorsque G est un p-groupe. Nous en aurons besoin dans le cas particulier $\mathrm{G} = \mathrm{V}$.

Définition. Soit A un anneau. Le radical de Jacobson de A est l'intersection des idéaux à gauche maximaux de A. On le note $\mathrm{rad}\,\mathrm{A}$.

Lemme 5.4. *Soit* G *un p-groupe. Le sous-*$\overline{\mathbb{F}}_p$*-espace vectoriel* E *de* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ *engendré par les éléments de la forme* $g-1$, $g \in \mathrm{G}$*, est un idéal bilatère de* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ *et vérifie :* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}] = \overline{\mathbb{F}}_p \oplus \mathrm{E}$*. De plus, c'est l'unique idéal à gauche maximal de* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ *; en particulier,* $\mathrm{E} = \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$*. Enfin,* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ *possède un unique idéal à gauche minimal, qui est la droite engendrée par* $\overline{\mathrm{G}} = \sum_{g\in\mathrm{G}} g$*.*

Démonstration. La première partie de l'énoncé est valable sans aucune hypothèse sur G. Considérons l'unique morphisme de groupes de G dans le groupe trivial $\{1\}$; ce morphisme s'étend par linéarité en un unique morphismes d'algèbres de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p[\{1\}] \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$, que l'on appelle parfois le « trivialiseur », et que nous noterons t. Le noyau de t est constitué des éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ dont la somme des coordonnées, sur la base de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ constituée des éléments de G, est nulle. On en déduit que $\mathrm{E} = \ker t$; cela montre que E est un idéal bilatère de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$, et que sa codimension est égale à 1. Comme $\overline{\mathbb{F}}_p$ coupe trivialement $\ker t$, on obtient bien $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}] = \overline{\mathbb{F}}_p \oplus \mathrm{E}$.

Prouvons à présent la deuxième partie de l'énoncé. Déjà, E est bien un idéal à gauche maximal de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$, puisque sa codimension est égale à 1. Soit maintenant $\mathrm{I} \subset \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$ un idéal à gauche maximal de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$-module quotient $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]/\mathrm{I}$ est irréductible ; le lemme I.1.3 implique alors que l'action de G sur ce module est triviale, c'est-à-dire que :

$$\forall g \in \mathrm{G}, \forall v \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}], gv \equiv v \mod \mathrm{I}.$$

En particulier, I contient tous les éléments de la forme $g-1$, $g \in \mathrm{G}$. Comme E est engendré par ces éléments, I contient E ; et comme ces deux idéaux à gauche sont maximaux, ils sont en fait égaux. E est donc bien l'unique idéal à gauche maximal de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$.

Il reste à établir la troisième partie de l'énoncé. Soit I un idéal à gauche minimal de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$; d'après le lemme I.1.3, I est de dimension 1 et G agit trivialement sur I. Soit v un vecteur non nul de I et écrivons $v = \sum_{g\in\mathrm{G}} a_g g$. Soit $g \in \mathrm{G}$; l'égalité $gv = v$ implique que $a_g = a_1$. Ainsi, tous les a_g sont égaux ; cela montre que v est colinéaire à $\overline{\mathrm{G}}$, et donc que I est la droite engendrée par $\overline{\mathrm{G}}$. Réciproquement, cette droite est bien un idéal à gauche minimal de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{G}]$, ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

6 Preuve du théorème 4.4

Nous commençons maintenant la preuve du théorème 4.4 énoncé à la fin de la section 4.

Preuve de l'assertion 1. Soit M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module. D'après le corollaire 4.2, il existe un morphisme χ de B dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et un vecteur non nul $m \in \mathrm{M}$ tels que pour tout $b \in \mathrm{B}$, $bm = \chi(b)m$. Soit $w \in \mathrm{W}$. Si $l(w) = 0$, $w = 1$, donc $m_w = \overline{\mathrm{U}}_w^-[w^{-1}]m \neq 0$; choisissons w de longueur maximale tel que cette condition soit vérifiée. D'après le lemme 5.2, pour tout $b \in \mathrm{B}$, $bm_w = {}^{w^{-1}}\chi(b)m_w$.

Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Si $a_i \in \Phi_w^+$, en appliquant l'assertion 1 de la proposition 3.2, il vient :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m_w &= \overline{\mathrm{U}}_{ww_i}^-[w_i][w^{-1}]m \\ &\in \overline{\mathbb{F}}_p\overline{\mathrm{U}}_{ww_i}^-[(ww_i)^{-1}]m.\end{aligned}$$

Or, comme $l(ww_i) > l(w)$, par définition de w, $m_{ww_i} = \overline{\mathrm{U}}_{ww_i}^-[(ww_i)^{-1}]m = 0$.

Si $a_i \in \Phi_w^-$, le lemme 5.3 donne l'existence de $\mu_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m_w = \mu_i m_w$. Finalement, m_w est un vecteur à poids, ce qui prouve l'assertion 1 du théorème. □

Preuve de l'assertion 2. Soient M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module et $m \in \mathrm{M}$ un vecteur à poids, de poids $(\chi, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$. D'après le théorème de Bruhat (théorème 2.2), on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) &= w_0\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \\ &= w_0 \bigcup_{w\in\mathrm{W}} \mathrm{B}w\mathrm{U} \\ &= w_0 \bigcup_{w\in\mathrm{W}} \mathrm{U}w^{-1}\mathrm{B} \\ &= w_0 \bigcup_{w\in\mathrm{W}} \mathrm{U}w_0w\mathrm{B} \\ &= \bigcup_{w\in\mathrm{W}} \mathrm{V}w\mathrm{B}.\end{aligned}$$

Ainsi, si on prouve que, pour tout $w \in \mathrm{W}$, $[w]m \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$, on aura bien $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]m = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$.

Tout d'abord, soit $i \in [\![1; n-1]\!]$ et montrons que $[w_i]m \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}_i]m$. On a :

$$\begin{aligned}\mu_i m &= \overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m \\ &= [w_i]m + \sum_{u\in\mathrm{U}_i^*}[w_i]^{-1}f_i(u)h_i(u)[w_i]f_i(u)m \\ &= [w_i]m + \sum_{u\in\mathrm{U}_i^*} {}^{w_i}\chi(h_i(u))^{[w_i]^{-1}}f_i(u)m.\end{aligned}$$

Comme ${}^{w_i}\mathrm{U}_i = \mathrm{V}_i$, on a bien $[w_i]m \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}_i]m$.

Maintenant, soit $w \in \mathrm{W}$ et écrivons $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ avec $i_1, \dots, i_k \in [\![1; n-1]\!]$ et

$l(w) = k$. On a :

$$\begin{aligned}[w]m &\in \overline{\mathbb{F}}_p[w_{i_1}]\cdots[w_{i_k}]m \\ &\in \overline{\mathbb{F}}_p[{}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-1}}}\mathrm{V}_{i_k}][w_{i_1}]\cdots[w_{i_{k-1}}]m \\ &\in \overline{\mathbb{F}}_p[{}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-1}}}\mathrm{V}_{i_k}]\overline{\mathbb{F}}_p[{}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-2}}}\mathrm{V}_{i_{k-1}}]\cdots\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}_{i_1}]m \\ &\in \overline{\mathbb{F}}_p[{}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-1}}}\mathrm{V}_{i_k}{}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-2}}}\mathrm{V}_{i_{k-1}}\cdots\mathrm{V}_{i_1}]m.\end{aligned}$$

D'après l'assertion 3 de la proposition 3.2, on a :

$$\mathrm{U}_w^- = \mathrm{U}_{i_k}{}^{w_{i_k}}\mathrm{U}_{i_{k-1}}\cdots{}^{w_{i_k}\cdots w_{i_2}}\mathrm{U}_{i_1}.$$

En conjuguant cette relation par w, il vient :

$${}^{w}\mathrm{U}_w^- = {}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-1}}}\mathrm{V}_{i_k}{}^{w_{i_1}\cdots w_{i_{k-2}}}\mathrm{V}_{i_{k-1}}\cdots\mathrm{V}_{i_1}.$$

Or ${}^{w}\mathrm{U}_w^- \subset \mathrm{V}$. On en déduit que $[w]m \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$; l'assertion 2 en résulte. □

Preuve de l'assertion 3. Soient M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible et $m \in \mathrm{M}$ un vecteur à poids. D'après l'assertion 2 du théorème 4.4, et par irréductibilité de M, on a $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$.

Le lemme 5.4 affirme que $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}] = \overline{\mathbb{F}}_p \oplus \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$; on a donc $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p m + \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$. De plus, comme $m \neq 0$, l'idéal annulateur de m est un idéal à gauche strict de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$. D'après le lemme 5.4, il est contenu dans $\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$. Cela montre que la somme précédente est directe ; on a donc en fait :

$$\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p m \oplus \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m.$$

Supposons maintenant que M contienne une droite fixée par U et distincte de $\overline{\mathbb{F}}_p m$. Cette droite est engendrée par un vecteur de la forme $\lambda m + \nu m$, avec $\nu \in \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$ tel que $\nu m \neq 0$. Le vecteur νm est fixé par U. Il s'ensuit que $\mathrm{M}' = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{H}]\nu m$ est un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{B}]$-module non nul de M ; et comme H normalise V, M′ est contenu dans $\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$. Donc, d'après le lemme 4.1, $\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$ contient une droite fixée par U et stable par B.

Nous allons montrer que $\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$ est stable par multiplication à gauche par les éléments $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]$, pour $i \in [\![1; n-1]\!]$. Il s'ensuivra, grâce à l'assertion 1 de la proposition 3.2, que $\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$ est en fait stable par multiplication à gauche par les éléments $\overline{\mathrm{U}_w^-}[w^{-1}]$, pour $w \in \mathrm{W}$. En répétant la preuve de l'assertion 1 du théorème 4.4, on en déduira que $\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$ contient un vecteur à poids m'. L'assertion 2 du théorème 4.4 entraînera alors que $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m' \subset \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$, ce qui est absurde.

Tout revient donc à montrer que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]\,\mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m \subset \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$. Pour cela, par linéarité, il suffit de vérifier que :

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], \forall v \in \mathrm{V}, \overline{\mathrm{U}}_i[w_i](v - \mathrm{I}_n)m \in \mathrm{rad}\,\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m.$$

Soient donc $i \in [\![1; n-1]\!]$ et $v \in \mathrm{V}$. Soit $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \cap {}^{w_i}\mathrm{V} = {}^{w_0}\mathrm{U}^+_{w_0 w_i}$. On observe que $\mathrm{V}_i = {}^{w_0}\mathrm{U}^-_{w_0 w_i}$. On en déduit, en appliquant la proposition 3.3 à ${}^{w_0}w_i$, que $\mathrm{V} = \mathrm{V}'\mathrm{V}_i$ et que $\mathrm{V}' \cap \mathrm{V}_i = \{\mathrm{I}_n\}$. Ainsi, pour tout $v_i \in \mathrm{V}_i$, $v_i v$ admet une unique décomposition de la forme $v_i v = v' v''$, avec $v' \in \mathrm{V}'$ et $v'' \in \mathrm{V}_i$; et l'application qui à v_i associe v'' est bijective. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{U}}_i[w_i](v - \mathrm{I}_n)m &= [w_i]\overline{\mathrm{V}}_i v m - \mu_i m \\
&= [w_i] \sum_{v_i \in \mathrm{V}_i} v_i v m - \mu_i m \\
&= [w_i] \sum_{v_i \in \mathrm{V}_i} v' v'' m - \mu_i m \\
&= [w_i] \sum_{v_i \in \mathrm{V}_i} v'' m + [w_i] \sum_{v_i \in \mathrm{V}_i} (v' - \mathrm{I}_n) v'' m - \mu_i m \\
&= \sum_{v_i \in \mathrm{V}_i} {}^{[w_i]}(v' - \mathrm{I}_n)[w_i] v'' m + [w_i]\overline{\mathrm{V}}_i m - \mu_i m \\
&= \sum_{v_i \in \mathrm{V}_i} {}^{[w_i]}(v' - \mathrm{I}_n)[w_i] v'' m.
\end{aligned}$$

Soit $v_i \in \mathrm{V}_i$; comme ${}^{w_i}\mathrm{V}' \subset \mathrm{V}$, ${}^{[w_i]}(v' - \mathrm{I}_n) \in \operatorname{rad} \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$. Par ailleurs, d'après l'assertion 2 du théorème 4.4, $[w_i]v'' m \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$. On en conclut que $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i](v - \mathrm{I}_n)m \in \operatorname{rad} \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$, ce qui achève la preuve. □

Preuve de l'assertion 4. Soient M_1 et M_2 deux $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules irréductibles contenant des vecteurs m_1 et m_2 de même poids. Alors $m = m_1 + m_2 \in \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$ est un vecteur à poids, de même poids que m_1 et m_2. Soit $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]m$.

Soient π_1 et π_2 les projecteurs associés à la somme directe $\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$, et ayant pour image respectivement M_1 et M_2. Ce sont des morphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules. Soit $i \in \{1; 2\}$; nous allons montrer que la restriction de π_i à M est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules entre M et M_i. Déjà, l'image de $\pi_{i|\mathrm{M}}$ contient m_i, qui est non nul. Comme M_i est irréductible, il s'ensuit que $\pi_{i|\mathrm{M}}$ est surjectif. Il reste à montrer que $\pi_{i|\mathrm{M}}$ est injectif.

Soit i' l'élément de $\{1; 2\} \backslash \{i\}$. On a $\ker \pi_{i|\mathrm{M}} = \mathrm{M} \cap \mathrm{M}_{i'}$. Comme $\mathrm{M}_{i'}$ est irréductible, $\ker \pi_{i|\mathrm{M}} = \{0\}$ ou $\ker \pi_{i|\mathrm{M}} = \mathrm{M}_{i'}$. Nous allons montrer que $m_{i'} \notin \mathrm{M}$, ce qui exclura la seconde éventualité.

Supposons par l'absurde $m_{i'} \in \mathrm{M}$. Comme dans la preuve de l'assertion 3 du théorème 4.4, on a $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p m \oplus \operatorname{rad} \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$. Ecrivons donc $m_{i'} = \lambda m + v m$ la décomposition de $m_{i'}$ sur cette somme directe. En appliquant π_i et $\pi_{i'}$ à cette égalité, on obtient :

$$0 = \lambda m_i + v m_i, \qquad\qquad m_{i'} = \lambda m_{i'} + v m_{i'}. \tag{4}$$

Mais $\mathrm{M}_1 = \overline{\mathbb{F}}_p m_1 \oplus \operatorname{rad} \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m_1$ et $\mathrm{M}_2 = \overline{\mathbb{F}}_p m_2 \oplus \operatorname{rad} \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m_2$; les égalités (4) conduisent alors à $\lambda = 0 = 1$, ce qui est absurde. Finalement, π_1 et π_2 sont des isomorphismes, donc $\mathrm{M}_1 \simeq \mathrm{M}_2$, comme l'affirme le théorème. □

7 Poids des représentations irréductibles

Le théorème 4.4, dont la preuve a été l'objet des sections précédentes, montre qu'à tout $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible correspond un unique poids, qui caractérise entièrement la classe d'isomorphisme du module. Le but de cette section est de déterminer l'ensemble des poids qui sont associés à un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible. Cela permettra en particulier de calculer le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Nous commençons par deux lemmes préliminaires.

Lemme 7.1. *Soit χ un morphisme de groupes de* B *dans* $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. *Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$. On a :*

$$\sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} \chi(h_i(u)) = \begin{cases} -1 & si\ \chi_{|\mathrm{H}_i} = 1, \\ \ \ 0 & si\ \chi_{|\mathrm{H}_i} \neq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Si $\chi_{|\mathrm{H}_i} = 1$, $\sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} \chi(h_i(u)) = |\mathrm{U}_i^*| = -1$, puisque U_i est un p-groupe non trivial.

Supposons $\chi_{|\mathrm{H}_i} \neq 1$. Le groupe H_i est isomorphe à $\mathbb{F}_q^\times$; soit donc $\varphi : \mathrm{H}_i \to \mathbb{F}_q^\times$ un isomorphisme. Soit $\widetilde{\chi} = \chi_{|\mathrm{H}_i} \circ \varphi^{-1}$, de sorte que $\chi_{|\mathrm{H}_i} = \widetilde{\chi} \circ \varphi$. On a $\widetilde{\chi} \neq 1$.

Les morphismes de $\mathbb{F}_q^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ ont été déterminés dans la preuve du théorème I.2.2. Ce sont les élévations aux puissances j, pour $0 \leq j \leq q-2$. Soit j l'exposant associé au morphisme $\widetilde{\chi}$; le fait que $\widetilde{\chi} \neq 1$ implique que $j \neq 0$.

Soit a un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$. On a $a^j \neq 1$. D'après le lemme 5.1, l'application h_i est bijective. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} \chi(h_i(u)) &= \sum_{h \in \mathrm{H}_i} \chi(h) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{F}_q^\times} \widetilde{\chi}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{q-2} \widetilde{\chi}(a^k) \\ &= \sum_{k=0}^{q-2} a^{jk} \\ &= \frac{a^{j(q-1)} - 1}{a^j - 1} = 0, \end{aligned}$$

puisque $a^j \neq 1$ et $a^{(q-1)} = 1$. On obtient bien l'égalité donnée dans l'énoncé du lemme. □

Lemme 7.2. *Soit* $\mathrm{I} \subset [\![1;n-1]\!]$. *Soit* $\chi : \mathrm{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *un morphisme de groupes tel que* $\mathrm{H}_\mathrm{I} \subset \ker \chi$. *Pour tout $w \in \mathrm{W}_\mathrm{I}$, ${}^w\chi = \chi$.*

Démonstration. Soient $i \in \mathrm{I}$ et $h \in \mathrm{H}$. D'après le lemme 3.1, ${}^{w_i}hh^{-1} \in \mathrm{H}_i \subset \mathrm{H}_\mathrm{I}$. Cela montre que ${}^{w_i}\chi(h) = \chi(h)$, et donc que ${}^{w_i}\chi$ et χ coïncident sur H. Comme $\mathrm{U} \subset \ker {}^{w_i}\chi$ et $\mathrm{U} \subset \ker \chi$, ${}^{w_i}\chi$ et χ coïncident également sur U, et donc sur B. Ainsi, ${}^{w_i}\chi = \chi$. On a prouvé le résultat pour les w_i, $i \in \mathrm{I}$; comme $\mathrm{W}_\mathrm{I} = \langle w_i, i \in \mathrm{I}\rangle$, le cas général s'en déduit. □

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour qu'un poids soit associé à un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible.

Proposition 7.3. *Soit $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ un poids associé à un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible. Les μ_i sont égaux à 0 ou -1 ; de plus :*

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], \mu_i = -1 \Rightarrow \chi_{|\mathrm{H}_i} = 1.$$

Démonstration. Soit M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible et soit $m \in \mathrm{M}$ un vecteur de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$ et supposons $\mu_i \neq 0$. Le lemme 5.3 implique que :

$$\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m = \left(\sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} {}^{w_i}\chi(h_i(u))\right)\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m.$$

Cela se réécrit $\mu_i^2 m = \left(\sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} {}^{w_i}\chi(h_i(u))\right)\mu_i m$. Comme $\mu_i \neq 0$, on en déduit :

$$\mu_i = \sum_{u \in \mathrm{U}_i^*} {}^{w_i}\chi(h_i(u)).$$

Le lemme 7.1 implique alors que $\mu_i = -1$ et que ${}^{w_i}\chi_{|\mathrm{H}_i} = 1$, d'où $\chi_{|\mathrm{H}_i} = 1$. La proposition en résulte. □

Nous énonçons maintenant un premier résultat en vue d'établir la réciproque de la proposition 7.3.

Proposition 7.4. *Soit* $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$. *Soit* $\chi : \mathrm{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *un morphisme de groupes tel que* $\mathrm{H}_\mathrm{I} \subset \ker \chi$. *Pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, soit $\mu_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ défini par :*

$$\mu_i = \begin{cases} -1 & \textit{si } i \notin \mathrm{I} \textit{ et } \chi_{|\mathrm{H}_i} = 1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Posons $\mathrm{H}_\chi = \sum_{h \in \mathrm{H}} \chi(h^{-1})h$ *et :*

$$m_{\mathrm{I},\chi} = \sum_{w \in \mathrm{W}_\mathrm{I}} \overline{\mathrm{U}}^-_{w_0 w}\mathrm{H}_\chi[w^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}} \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)].$$

Alors $m_{\mathrm{I},\chi}$ est un vecteur à poids, de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$.

Démonstration. Soit $\widetilde{\mathrm{H}}_\chi = \sum_{h\in \mathrm{H}} {}^{w_0w}\chi(h^{-1})h$. On a :

$$m_{\mathrm{I},\chi} = \sum_{w\in \mathrm{W}_\mathrm{I}} \overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0w}[w^{-1}][w_0]\widetilde{\mathrm{H}}_\chi\overline{\mathrm{U}}.$$

En développant cette expression, on obtient une combinaison linéaire à coefficients non nuls d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Ces éléments sont deux à deux distincts : cela découle, d'une part du théorème 3.4, et d'autre part du fait que tout élément de B s'exprime de façon unique comme produit d'un élément de U et d'un élément de H, puisque B est un produit semi-direct $\mathrm{U} \rtimes \mathrm{H}$. Comme les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sont linéairement indépendants dans $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$, on en conclut que $m_{\mathrm{I},\chi} \neq 0$.

Si $h \in \mathrm{H}$, on a $h\widetilde{\mathrm{H}}_\chi = {}^{w_0w}\chi(h)\widetilde{\mathrm{H}}_\chi$. Il s'ensuit que :

$$\forall b \in \mathrm{B},\, b\widetilde{\mathrm{H}}_\chi\overline{\mathrm{U}} = {}^{w_0w}\chi(b)\widetilde{\mathrm{H}}_\chi\overline{\mathrm{U}}.$$

Le lemme 5.2 montre alors que pour tout $b \in \mathrm{B}$, $bm_{\mathrm{I},\chi} = \chi(b)m_{\mathrm{I},\chi}$.

Soient $i \in [\![1;n-1]\!]$ et $w \in \mathrm{W}_\mathrm{I}$. L'assertion 1 de la proposition 3.2 et le lemme 5.3 conduisent à :

$$\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]\overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0w}\mathrm{H}_\chi[w^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}} = \begin{cases} \overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0ww_i}[w_i]\mathrm{H}_\chi[w^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}} & \text{si } a_i \in \Phi^+_{w_0w}, \\ \displaystyle\sum_{u\in \mathrm{U}_i^*}\chi(h_i(u))\overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0w}\mathrm{H}_\chi[w^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}} & \text{si } a_i \in \Phi^-_{w_0w}. \end{cases} \quad (5)$$

Supposons que $i \notin \mathrm{I}$. Dans ce cas, la preuve du lemme 4.3 montre que pour tout $w \in \mathrm{W}_\mathrm{I}$, $a_i \in \Phi^+_w$. Il s'ensuit que pour tout $w \in \mathrm{W}_\mathrm{I}$, $a_i \in \Phi^-_{w_0w}$. La formule (5) permet d'en déduire que $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m_{\mathrm{I},\chi} = \left(\sum_{u\in\mathrm{U}_i^*}\chi(h_i(u))\right)m_{\mathrm{I},\chi}$. D'après le lemme 7.1, on a donc bien $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m_{\mathrm{I},\chi} = \mu_i m_{\mathrm{I},\chi}$.

Supposons maintenant que $i \in \mathrm{I}$. Soit $w \in \mathrm{W}_\mathrm{I}$ tel que $a_i \in \Phi^+_{w_0w}$, de sorte que $a_i \in \Phi^-_{w_0ww_i}$. Comme $\chi_{|\mathrm{H}_i} = 1$, on obtient grâce à la formule (5) :

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]\overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0w}\mathrm{H}_\chi[w^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}} = \overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0ww_i}[w_i]\mathrm{H}_\chi[w^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}}, \\ &\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]\overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0ww_i}\mathrm{H}_\chi[(ww_i)^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}} = -\overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0ww_i}\mathrm{H}_\chi[(ww_i)^{-1}][w_0]\overline{\mathrm{U}}. \end{aligned}$$

La somme de ces deux termes est nulle. En effet, le lemme 7.2 montre que $\mathrm{H}_\chi[w^{-1}] = [w^{-1}]\mathrm{H}_\chi$ et $\mathrm{H}_\chi[(ww_i)^{-1}] = [(ww_i)^{-1}]\mathrm{H}_\chi$. Ensuite, $[w_i][w^{-1}] \in [(ww_i)^{-1}]\mathrm{H}_\mathrm{I}$ d'après le lemme 4.3 ; comme $\chi_{|\mathrm{H}_\mathrm{I}} = 1$, il s'ensuit que $[w_i][w^{-1}]\mathrm{H}_\chi = [(ww_i)^{-1}]\mathrm{H}_\chi$.

En écrivant W_I comme la réunion disjointe des classes à gauche $\{w; ww_i\}$ modulo le sous-groupe $\langle w_i\rangle$, et en appliquant ce qui précède à chaque classe, on obtient que $\overline{\mathrm{U}}_i[w_i]m_{\mathrm{I},\chi} = 0 = \mu_i m_{\mathrm{I},\chi}$. Finalement, $m_{\mathrm{I},\chi}$ est bien un vecteur à poids, de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème qui caractérise les poids des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Théorème 7.5. *Soit $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ un poids. Il existe un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ si et seulement si tous les μ_i sont égaux à 0 ou à -1, et que de plus :*

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], \mu_i = -1 \Rightarrow \chi_{|\mathrm{H}_i} = 1.$$

Démonstration. Le fait que ces conditions soient nécessaires est précisément le contenu de la proposition 7.3. Supposons qu'elles soient satisfaites, et posons :

$$\mathrm{I} = \{i \in [\![1; n-1]\!] \mid \mu_i = 0; \chi_{|\mathrm{H}_i} = 1\}.$$

Le morphisme χ et l'ensemble I vérifient les hypothèses de la proposition 7.4 ; celle-ci montre alors qu'il existe un vecteur $m \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$ de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$.

Soient $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]m$ et M_0 un sous-module maximal de M ne contenant pas m. Soient $\mathrm{M}' = \mathrm{M}/\mathrm{M}_0$ et m' la classe de m modulo M_0. Comme $m' \neq 0$, m' est un vecteur à poids de M', de même poids que m. De plus, M' est irréductible : en effet, tout sous-module de M' contenant m' est égal à M' par définition de M, et tout sous-module de M' ne contenant pas m' est nul par maximalité de M_0. Il s'ensuit que M' est un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$; les conditions données par le théorème sont donc bien nécessaires et suffisantes. □

8 Applications

Dans cette dernière section, nous utilisons les résultats obtenus dans les sections précédentes, et en particulier le théorème 7.5, pour obtenir des informations de nature diverse sur les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Une première application du théorème 7.5 est l'énoncé suivant, qui généralise celui qui a été donné, pour le cas $n = 2$, dans le corollaire I.1.5.

Proposition 8.1. *Le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est égal à $q^n - q^{n-1}$.*

Démonstration. D'après le théorème 4.4, il y a autant de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que de poids associés à un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible.

Soit $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$. Pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, posons $\mu_i = -1$ si $i \in \mathrm{I}$ et $\mu_i = 0$ sinon. D'après le théorème 7.5, le nombre de poids de la forme $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ associés à un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible est égal au nombre de morphismes χ de B dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tels que $\chi_{|\mathrm{H}_\mathrm{I}} = 1$. Un tel morphisme vérifie $\chi_{|\mathrm{U}} = 1$; il y en a donc autant que de morphismes $\chi : \mathrm{H} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ vérifiant $\chi_{|\mathrm{H}_\mathrm{I}} = 1$. Finalement, il y en a autant que de morphismes de $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\mathrm{I}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

Or $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\mathrm{I}$ est abélien d'ordre $(q-1)^{n-|\mathrm{I}|}$ premier à p ; le théorème I.1.1 montre donc qu'il y a $(q-1)^{n-|\mathrm{I}|}$ tels morphismes.

Le nombre total de poids associés à un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible s'obtient en sommant le résultat précédent sur toutes les parties $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$. Il vaut donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{I} \subset [\![1;n-1]\!]} (q-1)^{n-|\mathrm{I}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (q-1)^{n-k} \\ &= (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (q-1)^{n-1-k} \\ &= (q-1) q^{n-1}.\end{aligned}$$

Finalement, il y a $q^n - q^{n-1}$ classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, comme l'affirme la proposition. □

Remarque. On peut démontrer le résultat de la proposition 8.1 en procédant comme dans la section I.1. En effet, $q^n - q^{n-1}$ est le nombre de polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ dont le terme constant est non nul. D'après le lemme 8.2 ci-dessous, c'est aussi le nombre de classes de conjugaison p-régulières de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Le théorème I.1.2 permet d'en conclure que c'est également le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Lemme 8.2. *Tout polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ dont le terme constant est non nul est le polynôme caractéristique d'une unique classe de conjugaison p-régulière de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Démonstration. Soit f un tel polynôme, et écrivons $f = \prod_{i=1}^m f_i^{\alpha_i}$ la factorisation de f en éléments irréductibles de $\mathbb{F}_q[\mathrm{X}]$. Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines de f, répétées selon leur multiplicité. Les invariants de similitude de D sont de la forme $\prod_{i=1}^m f_i^{\varepsilon_i}$, avec $\varepsilon_i \in \{0; 1\}$ pour tout $i \in [\![1; m]\!]$. En particulier, ils appartiennent à $\mathbb{F}_q[\mathrm{X}]$; il existe donc une matrice $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ semblable à D dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Le polynôme caractéristique de A_0 est f, et l'ordre de A_0 est premier à p.

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ une autre matrice vérifiant ces conditions. En utilisant la décomposition en espaces caractéristiques, on obtient que A est semblable, dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, au produit de D et d'un élément de U qui commute à D. Comme l'ordre de A est premier à p, cet élément de U est I_n ; il s'ensuit que A est semblable, dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, à D, donc à A_0. Par inertie de la similitude, A est semblable à A_0 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Finalement, f est le polynôme caractéristique d'une unique classe de conjugaison p-régulière de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, qui est celle de A_0. □

La proposition 8.1 montre que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est divisible par $q-1$. La proposition suivante explique et améliore cette observation.

Proposition 8.3. *Il y a, à isomorphisme près, $q-1$ représentations de dimension 1 de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$*, qui correspondent aux morphismes*

$$\begin{aligned}\det{}^j : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) &\to \overline{\mathbb{F}}_p^\times \\ \mathrm{A} &\mapsto (\det \mathrm{A})^j\end{aligned}$$

pour $0 \leq j \leq q-2$. De plus, si ρ est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, les représentations $\det^j \otimes \rho$, pour $0 \leq j \leq q-2$, sont irréductibles et deux à deux non isomorphes. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de degré d est divisible par $q-1$.

Démonstration. La preuve de la première partie de l'énoncé est similaire à celle du théorème I.2.2. Pour tout $j \in [\![0; q-2]\!]$, on notera D_j le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module obtenu en faisant agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ par le morphisme $\det^j$.

Prouvons à présent la deuxième partie de l'énoncé. Soit M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$, et soit $m \in \mathrm{M}$ un vecteur à poids. Pour $j \in [\![0; q-2]\!]$, soient $\mathrm{M}_j = \mathrm{D}_j \otimes \mathrm{M}$ et $m_j = 1 \otimes m \in \mathrm{M}_j$. D'après le lemme I.2.3, les M_j sont des $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules irréductibles.

Soit $j \in [\![0; q-2]\!]$. Soit $b \in \mathrm{B}$; on a $bm_j = (\det b)^j \chi(b) m_j = (\det^j \chi)(b) m_j$. Par ailleurs, soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Comme $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $[w_i] \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\overline{\mathrm{U}}_i [w_i] m_j = \mu_i m_j$. On en déduit que m_j est un vecteur à poids, de poids $(\det^j \chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$.

Il s'ensuit que pour tout $j \in [\![0; q-2]\!]$, M_j est de poids $(\det^j \chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$. Comme ces poids sont deux à deux distincts, les modules M_j sont deux à deux non isomorphes.

Il reste à prouver la troisième partie de l'énoncé. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et soit X_d l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de degré d. Soit G l'ensemble des morphismes de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. La loi multiplicative naturelle sur G, induite par celle de $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le munit d'une structure de groupe abélien. G agit sur X_d par produit tensoriel, et d'après ce qui précède, les éléments de $\mathrm{G} \backslash \{1\}$ ne fixent aucun point de X_d. Les orbites de X_d sous l'action de G sont donc de cardinal $|\mathrm{G}| = q-1$. On en conclut que $|\mathrm{X}_d|$ est divisible par $q-1$, ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Voici un énoncé qui apporte des informations sur la dimension des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Dans le cas $n = 2$, il se déduit du théorème I.5.3.

Proposition 8.4. *Toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont de dimension inférieure à $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Il y a, à isomorphisme près, $q-1$ représentations irréductibles de dimension $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.*

Démonstration. Soit M un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-module irréductible, de poids $(\chi, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$, et soit $m \in \mathrm{M}$ un vecteur à poids. D'après l'assertion 2 du théorème 4.4, $\mathrm{M} = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]m$. Comme $|\mathrm{V}| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, cela montre que $\dim \mathrm{M} \leq q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

L'égalité est atteinte si et seulement si l'idéal annulateur de m dans $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$ est nul. Or, d'après le lemme 5.4, $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$ possède un unique idéal à gauche minimal, à savoir la droite $\overline{\mathbb{F}}_p \overline{\mathrm{V}}$. On en déduit que l'idéal annulateur de m dans $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{V}]$ est nul si et seulement s'il ne contient pas cette droite, c'est-à-dire si et seulement si $\overline{\mathrm{V}} m \neq 0$.

Ecrivons $w_0 = w_{i_1} \cdots w_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}}$, avec $i_1, \ldots, i_{\frac{n(n-1)}{2}} \in [\![1; n-1]\!]$. Comme $\Phi^-_{w_0} = \Phi^+$, d'après la preuve du lemme 4.3, pour tout $\mathrm{I} \subsetneq [\![1; n-1]\!]$, $w_0 \notin \mathrm{W}_\mathrm{I}$; ceci implique

$\{i_j \mid j \in [\![1; \frac{n(n-1)}{2}]\!]\} = [\![1; n-1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{V}}m \neq 0 &\Longleftrightarrow \overline{{}^{w_0}\mathrm{U}}m \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{U}}[w_0]^{-1}m \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{U}}^{-}_{w_0}[w_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}}]\cdots[w_{i_1}]m \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{U}}_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}}[w_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}}]\cdots\overline{\mathrm{U}}_{i_1}[w_{i_1}]m \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \mu_{i_1}\cdots\mu_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}}m \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \mu_{i_1} = \cdots = \mu_{i_{\frac{n(n-1)}{2}}} = -1 \\
&\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1; n-1]\!], \mu_i = -1,
\end{aligned}$$

la quatrième équivalence provenant de l'assertion 1 de la proposition 3.2. Ainsi, M est de dimension $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ si et seulement si tous les μ_i sont égaux à -1. Il y a donc autant de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de dimension $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, que de morphismes $\chi : \mathrm{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ vérifiant $\chi_{|\mathrm{H}_{[\![1;n-1]\!]}} = 1$. Il y en a donc $q-1$, comme l'affirme la proposition. □

Pour terminer, nous mentionnons sans démonstration un résultat qui fournit une construction des $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules irréductibles, plus explicite que celle donnée par la preuve du théorème 7.5.

Théorème 8.5 ([2, p.37, corollaire 6.12]). *Soit* $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$. *Soit* $\chi : \mathrm{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ *un morphisme de groupes tel que* $\mathrm{H}_\mathrm{I} \subset \ker\chi$. *L'idéal à gauche* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]m_{\mathrm{I},\chi}$, *engendré par le vecteur à poids* $m_{\mathrm{I},\chi}$ *défini dans l'énoncé de la proposition 7.4, est un idéal à gauche minimal de* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$.

Le théorème 8.5 et la preuve du théorème 7.5 montrent que les $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]m_{\mathrm{I},\chi}$, pour $\mathrm{I} \subset [\![1; n-1]\!]$ et $\chi : \mathrm{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ tel que $\mathrm{H}_\mathrm{I} \subset \ker\chi$, constituent, à isomorphisme près, l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)]$-modules irréductibles. On obtient ainsi une construction explicite des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, comme sous-représentations de la représentation régulière.

Références

[1] Serre J. P., *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998.

[2] Curtis C. W., *Modular representations of finite groups with split* (B, N)*-pairs*, Lecture Notes in Mathematics 131, 1970.