

Quelques aspects de la formule KPZ

Olivier Peltre encadré par Christophe Garban et Jesper Jacobsen

2013

1 Introduction

L'équation KPZ a été introduite dans les années 80 par les trois physiciens Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov qui ont proposé une nouvelle façon d'étudier les systèmes statistiques à leur point critique. Elle met en relation un modèle sur réseau fixé, dans lequel les sommets par exemple interagissent entre eux, avec le modèle dans lequel les sommets d'un réseau tiré au hasard interagissent selon la même loi. Elle s'applique ainsi à des modèles comme la percolation, les marches aléatoires et le modèle d'Ising. On dit alors que l'on fait fluctuer la métrique ou que l'on couple le modèle à la gravité. Tirer au sort des graphes qui déterminent la métrique mais aussi les aires et les volumes est en effet le point de départ de la gravité quantique à boucles, tentative d'énoncer une théorie quantique cohérente avec la relativité générale.

L'équation KPZ donne des moyens détournés pour calculer des exposants critiques, qui, comparés aux estimations numériques, ont un succès d'autant plus surprenant qu'elle a longtemps été un mystère pour les mathématiciens. Tout cela avive les recherches à son sujet, et des résultats très récents permettent de lui ôter un peu de son mystère, comme celui de Duplantier et Sheffield en 2011. Il reste néanmoins à trouver une équation KPZ plus générale.

On appelle équation KPZ une équation quadratique reliant les "tailles" d'ensembles de configurations dans le modèle à métrique fixe et dans celui à métrique fluctuante. Pour chercher une équation KPZ, il faut donc réussir à définir :

- Une métrique fluctuante, qui peut-être une distance aléatoire ou, à défaut, une mesure aléatoire
- La taille d'un ensemble, comme la dimension de Hausdorff, des variantes de celle-ci ou un exposant d'échelle

La première tâche est la plus difficile, de celle là dépendra la notion de taille que l'on pourra adopter. Il n'existe par exemple pas de définition satisfaisante de distance aléatoire en dimension 2, on ne pourra donc pas parler de dimension de Hausdorff qui se définit dans un espace métrique.

Ce qui est le plus intéressant dans l'équation KPZ est qu'elle ne comporte aucun aléas : elle donne une taille presque sûre pour la métrique aléatoire.

Dans ce rapport, nous étudierons d'abord l'équation KPZ la plus simple et la plus précise démontrée par Benjamini et Schramm en 2009[1]. En se restreignant au cas uni-dimensionnel, ils parviennent à définir une distance aléatoire et montrent une équation KPZ reliant les dimensions de Hausdorff. Après avoir présenté le problème des méandres et la méthode employée par Jensen pour énumérer les nombres méandriques, nous verrons un exemple d'application de l'équation KPZ à l'étude de leur asymptotique.

2 Le cas uni-dimensionnel

Benjamini et Schramm ont montré dans [1] une équation KPZ dans le cas unidimensionnel. Travailler en dimension 1 offre l'avantage de pouvoir travailler indifféremment avec une mesure ou une métrique aléatoire. En revanche, en dimension plus élevée, si l'on arrive bien à définir des mesures aléatoires, il devient beaucoup plus difficile de caractériser les métriques qui permettent d'interpréter la variété comme une surface de Riemann car les géodésiques ne sont plus prévisibles. La dimension 1 a permis à Benjamini et Schramm de montrer une équation KPZ reliant les dimensions de Hausdorff d'un sous-ensemble du segment unité relativement à la distance canonique et à une distance aléatoire définie par cascades multiplicatives.

Dans cette section, nous étudierons quelques propriétés de la dimension de Hausdorff qui seront utiles à la démonstration de cette équation KPZ avant de procéder à la construction de la distance aléatoire et à la démonstration.

2.1 La dimension de Hausdorff

Fixons $(E, |\cdot|)$ un espace métrique séparable.

Définition 2.1.1. Soit F une partie de E , $s \geq 0$ et $\delta > 0$. On définit alors :

$$H_s^\delta(F) := \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\}$$

où $|U_i|$ est le diamètre de U_i , inférieur ou égal à δ

$$H_s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_s^\delta(F)$$

La séparabilité de E assure l'existence d'un δ -recouvrement dénombrable, donc H_s^δ est bien définie dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $0 < \epsilon < \delta$, les ϵ -recouvrements de F sont aussi des δ -recouvrements donc $H_s^\epsilon(F) \geq H_s^\delta(F)$. La monotonie assure que la limite $H_s(F)$ est bien définie dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Pour tout $\delta \in (0, 1)$, la fonction $s \mapsto \delta^s$ étant décroissante, on s'attend à ce que $s \mapsto H_s(F)$ soit décroissante aussi. Soient donc deux réels positifs s et t avec $s < t$. Pour tous $\delta > 0$ et $\{U_i\}$ δ -recouvrement de F on a :

$$H_t^\delta(F) \leq \sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

C'est vrai pour tout δ -recouvrement donc :

$$H_t^\delta(F) \leq \delta^{t-s} H_s^\delta(F)$$

En passant à la limite $\delta \rightarrow 0$ on obtient un résultat plus fort que la décroissance : si $H_s(F)$ est fini, alors la limite du terme de droite est nulle et $H_t(F)$ aussi. On vient donc de montrer :

Proposition 2.1.1. *La fonction $s \mapsto H_s(F)$ est décroissante. De plus, elle est infinie ou nulle sur \mathbb{R}^+ privé d'au plus un point.*

Ce qui permet de définir la dimension de Hausdorff.

Définition 2.1.2. *On appelle dimension de Hausdorff de F l'unique point de discontinuité de $s \mapsto H_s(F)$ quand il existe.*

On dit sinon que F est de dimension respectivement nulle ou infinie quand $H_s(F)$ est toujours nul ou infini.

On notera $\dim_H(F)$ la dimension de Hausdorff de F .

La dimension de Hausdorff et la fonction H_s sont de très bonnes notions pour parler de "tailles" d'ensembles. Tout d'abord, on peut vérifier aisément qu'elles sont croissantes pour l'inclusion. Ce qui est peut-être plus intéressant est que pour n entier et $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme, H_n coïncide avec la mesure de Lebesgue. Cela se vérifie en remarquant que H_n définit sous ces hypothèses une mesure invariante par translation.

Proposition 2.1.2. *Soit A une partie de $E = \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons λA l'ensemble $\{\lambda x : x \in A\}$. Alors :*

$$H_s(\lambda A) = \lambda^s H_s(A)$$

On en déduit en particulier que A et λA ont même dimension.

Preuve. Si $\{U_i\}$ est un δ -recouvrement de A , $\{\lambda U_i\}$ est un $\lambda\delta$ -recouvrement de λA donc :

$$H_s^{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \sum_i |\lambda U_i|^s \leq \lambda^s \sum_i |U_i|^s$$

Et c'est vrai pour tout $\{U_i\}$:

$$H_s^{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \lambda^s H_s^\delta(A)$$

La symétrie $\lambda \mapsto 1/\lambda$ donne l'égalité et la limite $\delta \rightarrow 0$ le résultat.

En guise d'exemple, appliquons ces premiers résultats à l'ensemble triadique de Cantor :

Définition 2.1.3. *Soit (C_n) la suite ainsi définie par récurrence :*

$$C_0 := [0, 1]$$

$$1_{C_{n+1}}(x) = 1_{C_n}(3x) + 1_{C_n}(3x - 2)$$

L'ensemble de Cantor est alors :

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Comme C est autosimilaire, il est facile de déterminer sa dimension de Hausdorff en utilisant la preuve de la proposition ci-dessus. Fixons $\delta > 0$: C est égal à deux copies disjointes de lui-même réduites d'une homothétie de facteur $1/3$ donc pour tout $s \in [0, 1]$:

$$H_s^\delta(C) = \frac{2}{3^s} H_s^{\delta/3}(C) = \dots = \left(\frac{2}{3^s}\right)^n H_s^{\delta/3^n}(C)$$

Comme C est borné, $H_s^\delta(C)$ est fini et non nul — il suffit de le recouvrir par $\{[0, \delta] + k\delta : k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leq 1/\delta\}$. Le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ s'écrit :

$$H_s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^n H_s(C)$$

Donc $H_s(C)$ est nul si et seulement si $\frac{3^s}{2} > 1$ et $\dim_H(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$.

Il est en général facile de calculer les dimensions de Hausdorff des ensembles fractals autosimilaires de façon identique. Cependant nous ne disposons pas encore d'autre moyen, la définition ne permettant que de majorer la dimension de Hausdorff en exhibant des recouvrements. Le lemme de Frostman que nous faisons suivre est donc un outil indispensable.

Définition 2.1.4. Soient μ une mesure sur E , $s \in [0, \dim_H(E)]$ et $x \in E$. On définit :

$$\Phi_s^\mu(x) := \int \frac{d\mu(y)}{|x - y|^s}$$

le s -potentiel au point x dû à la distribution de masse μ puis :

$$I_s(\mu) := \int \Phi_s^\mu(x) d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x - y|^s}$$

la s -énergie de μ

Voici alors le résultat :

Proposition 2.1.3 (Frostman). Soit F une partie de E .

(a) S'il existe μ à support dans F avec $I_s(\mu) < \infty$, alors $H_s(F) = \infty$ — et donc $\dim_H(F) \geq s$.

(b) Si $H_s(F) > 0$ — soit $s \leq \dim_H(F)$ — alors il existe une distribution de masse μ sur F avec $I_t(\mu) < \infty$ pour tout $t \in (0, s)$

Preuve. (a) Supposons que la s -énergie de μ soit finie. Montrons que presque partout, $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} = 0$. Soit $x \in F$ tel que $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} > 0$.

Il existe alors $c > 0$ et une suite de rayons (r_n) décroissante vers zéro tels que pour tout n :

$$\mu(B(x, r_n)) > c \cdot r_n^s$$

Par continuité de μ , il existe une suite (q_n) telle que les couronnes $A_n = B(x, r_n) \setminus B(x, q_n)$ vérifient :

$$\mu(A_n) > \frac{c}{2} \cdot r_n^s$$

et quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que les couronnes A_n sont disjointes ou : pour tout n , $r_{n+1} < q_n < r_n$. Or :

$$\Phi_s^\mu(x) \geq \sum_n \frac{\mu(A_n)}{r_n^s} = \infty$$

Et par hypothèse, le s -potentiel en x est fini presque-partout.

Pour en conclure que $H^s(F) = \infty$, il faut utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Si pour tout $x \in F$,*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} < c$$

alors $\mu(F) \leq c \cdot H^s(F)$

Preuve du lemme. Soit $\delta > 0$. On pose :

$$F_\delta := \{x \in F : \exists \epsilon > 0 \quad \forall r \leq \delta \quad \mu(B(x, r)) < (c - \epsilon) \cdot r^s\}$$

Soit $\{U_i\}$ un δ -recouvrement de $F \supseteq F_\delta$. En notant toujours $|U_i|$ le diamètre de U_i , il est clair que $U_i \subseteq B(x, |U_i|)$. On a donc pour tout $x \in F_\delta$:

$$\mu(U_i) \leq \mu(B(x, |U_i|)) \leq c \cdot |U_i|^s$$

puis

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

C'est vrai pour tout δ -recouvrement donc :

$$\mu(F_\delta) \leq c \cdot H_\delta^s(F_\delta) \leq c \cdot H^s(F_\delta)$$

Et comme $F = \bigcup_\delta F_\delta$, on conclut en passant à la limite $\delta \rightarrow 0$.

Fin de la preuve (a). On applique le lemme au sous-ensemble de F :

$$G := \{x \in F : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} = 0\}$$

D'après ce qui précède, $\mu(G) = \mu(F)$ et on a alors pour tout $c > 0$:

$$H^s(F) \geq H^s(G) \geq \mu(G)/c = \mu(F)/c$$

Donc $H^s(F) = \infty$

2.2 Cascades multiplicatives

Après avoir donné un sens particulier à la "taille" d'un ensemble, il nous reste à définir ici ce que sera pour nous une "métrique fluctuante" avant de pouvoir chercher une équation KPZ. En dimension 1, il est équivalent d'avoir une mesure ou une distance : après avoir défini une mesure aléatoire μ on définira la distance ρ par $\rho(x, y) = \mu[x, y]$. Une façon simple de définir une mesure aléatoire sur le segment unité est de procéder par cascades multiplicatives : l'idée est de découper le segment de plus en plus finement et à chaque étape de pondérer ses parties par des nouveaux poids. Cette construction permet d'obtenir facilement l'existence d'une mesure limite grâce aux résultats sur les martingales.

Notons \mathcal{I}_n l'ensemble des intervalles diadiques de taille 2^{-n} , $\mathcal{I} = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Définition 2.2.1. Soient W une variable aléatoire réelle et $(W_I)_{I \in \mathcal{I}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi que W . On définit le processus aléatoire (μ_n) par :

$$\mu_0 := W_{[0,1]} \cdot \lambda$$

μ_n est la mesure aléatoire qui coïncide avec $W_I \cdot \mu_{n-1}$ sur tout $I \in \mathcal{I}_n$

De façon équivalente, on peut définir μ_n par $d\mu_n(x) = w_n(x) \cdot d\lambda(x)$, où :

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^n W_{I_k(x)}$$

$I_k(x)$ étant l'intervalle de \mathcal{I}_k contenant x , en prenant $[\frac{p-1}{2^k}, \frac{p}{2^k}]$ si $x = \frac{p}{2^k}$.

On suppose de plus que W est d'espérance 1 et positive. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. Les processus $(\mu_n[0, s])$, pour $s = k/2^p$ diadique sont des martingales positives.

Preuve. Pour décrire la filtration, il faut être plus précis sur l'espace de probabilité utilisé. Le plus simple est sûrement de partir d'une variable aléatoire W définie sur l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Puis, on construit sur l'espace produit (Ω, \mathcal{F}, P) , où $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, les variables aléatoires W_I . Il suffit pour cela d'indexer les copies de $[0, 1]$ de Ω par les intervalles diadiques et de poser :

$$\forall x \in \Omega \quad \forall I \in \mathcal{I} \quad W_I(x) := W(x_I)$$

Posons \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les cylindres :

$$\prod_{I \in \bigcup_{k \leq n} \mathcal{I}_k} [a_I, b_I] \times \prod_{I \in \bigcup_{l > n} \mathcal{I}_l} [0, 1]$$

Une fonction de Ω dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ n'est alors \mathcal{F}_n -mesurable que si elle est constante sur toutes les coordonnées $I \in \mathcal{I}_{l, l > n}$. Les mesures μ_n ne dépendent que des W_I pour $I \in \bigcup_{k=0}^n \mathcal{I}_k$, les processus $(\mu_n[0, s])$ sont bien adaptés à la filtration (\mathcal{F}_n) .

Par construction, on a :

$$\mu_n[0, 1] = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{w_n(k/2^n)}{2^n}$$

Si $s = k/2^p$ et $n \geq p$ il suffit de restreindre la somme :

$$\mu_n[0, s] = \sum_{1 \leq k \leq n: k/2^n \leq s} \frac{w_n(k/2^n)}{2^n}$$

Et sinon, on peut écrire $s = k/2^n + r$, $r < 1/2^n$ et comme w_n est constante sur $[k/2^n, k/2^n + r]$ on obtient simplement :

$$\mu_n[0, s] = \mu_n[0, k/2^n] + r \cdot w_n[k/2^n, (k+1)/2^n]$$

Ce qui donne par exemple :

$$\mu_1[0, 1/2] = \frac{W_{[0,1]}W_{[0,1/2]}}{2}$$

$$\mu_2[0, 1/2] = \frac{W_{[0,1]}W_{[0,1/2]}W_{[0,1/4]} + W_{[0,1]}W_{[0,1/2]}W_{[1/2,1/4]}}{4} = \mu_1[0, 1/2] \cdot \frac{W_{[0,1/4]} + W_{[1/4,1/2]}}{2}$$

De là, on déduit facilement que $E[\mu_{n+1}[0, s] | \mathcal{F}_n] = \mu_n[0, s]$. Par exemple pour le cas $s = 1$, il suffit de remarquer que :

$$\mu_{n+1}[0, 1] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} w_n(k/2^n) \frac{W_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}]} + W_{[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}]}}{2}$$

Pour avoir l'espérance conditionnelle $E[\mu_{n+1}[0, 1] | \mathcal{F}_n]$ il faut moyenner $\mu_{n+1}[0, 1]$ par rapport aux coordonnées dans \mathcal{I}_{n+1} , ce qui donne bien :

$$\sum_{k=1}^{2^n} w_n(k/2^n) = \mu_n[0, 1]$$

dès que $E[W] = 1$. Le cas s diadique différent de 1 se montre de même.

On obtient donc l'existence d'une limite presque sûre pour toutes les suites $(\mu_n[0, s])$, s diadique.

Proposition 2.2.1. *Le processus μ_n converge presque sûrement vers une limite faible μ . Si de plus $E[W \log_2 W] < 1$, μ n'a presque sûrement pas d'atomes et $\mu[0, 1] > 0$ presque sûrement.*

Preuve. Notons, pour $K \in \mathbb{R}^+$, \mathcal{M}_K l'ensemble des mesures boréliennes sur $[0, 1]$ de masse totale inférieure à K . On peut identifier \mathcal{M}_1 à la boule unité du dual de $C([0, 1])$, et d'après le théorème de Banach-Alaoglu il est compact pour la topologie faible*. Comme μ_n est positive et $E[\mu_n[0, 1]] = 1$ on a :

$$P(\mu_n[0, 1] > K) \leq \frac{1}{K}$$

et ce pour tout n . Ainsi, pour K suffisamment grand, il est presque sûr que tous les μ_n soient dans \mathcal{M}_K sauf un nombre fini. Par compacité faible de \mathcal{M}_K , on peut donc presque sûrement extraire une valeur d'adhérence μ . Par densité des diadiques et convergence presque sûre des $(\mu_n[0, s])$, on conclut que μ est en fait une limite faible.

Pour la suite de la preuve, on peut se reporter à l'annexe de [1] où Benjamini et Schramm détaillent bien la démonstration. Ils utilisent surtout l'autosimilarité diadique du tirage, qui donne des conditions de point fixe sur μ . Par exemple, comme $\mu_n[0, 1/2]$ a la loi de $\frac{W}{2}\mu_{n-1}[0, 1]$, on a aussi que $\mu[0, 1/2]$ a la loi de $\frac{W}{2}\mu[0, 1]$. Par récurrence, on obtient alors que $\mu[0, 1/2^n]$ a la loi de $\frac{W^n}{2^n}\mu[0, 1]$, ce que l'on va utiliser dans la preuve suivante.

2.3 L'équation KPZ en dimension 1

Voici alors le résultat de Benjamini et Schramm :

Théorème 1. *On suppose que W vérifie pour tout $s \in [0, 1]$:*

$$E[W^{-s}] < \infty$$

et soient K une partie non-vide de $[0, 1]$, ζ_0 sa dimension de Hausdorff pour la métrique euclidienne et ζ sa dimension de Hausdorff pour la métrique aléatoire ρ . Alors ζ est presque sûrement l'unique solution de :

$$2^{\zeta_0} = \frac{2^\zeta}{E[W^\zeta]}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\phi(\zeta) = \zeta_0$$

en posant $\phi : s \mapsto s - \log_2(E[W^s])$.

Benjamini et Schramm commencent par montrer que ϕ est un homéomorphisme croissant de $[0, 1]$, assurant que la proposition fait sens. Le lemme suivant permettra de montrer facilement que la dimension de Hausdorff ζ est bornée par $\phi^{-1}(\zeta_0)$:

Lemme 2.3.1. *Soient $x, y \in [0, 1]$ et $s \in (0, 1)$. On a :*

$$E[\rho(x, y)^s] \leq 8|x - y|^{\phi(s)}$$

On commence par le montrer pour des diadiques a, b tels que $[a, b] \in \mathcal{I}_n$. Grâce à la relation d'autosimilarité montrée plus haut et à l'indépendance des W_I :

$$E[\rho(a, b)^s] = E[\mu[a, b]^s] = \frac{E[W^s]^n E[\mu[0, 1]^s]}{2^{ns}}$$

et :

$$2^{-ns} E[W^s]^n = 2^{-n(s - \log_2 E[W^s])} = |a - b|^{\phi(s)}$$

D'après l'inégalité de Jensen, $E[\mu[0, 1]^s] \leq E[\mu[0, 1]]^s$ et comme pour tout n , $E[\mu_n[0, 1]] = 1$ on obtient :

$$E[\rho(a, b)^s] \leq |a - b|^{\phi(s)}$$

Soient maintenant x et y tels que $2^{-n-1} < |x - y| \leq 2^{-n}$: on peut recouvrir $[x, y]$ par deux segments voisins de \mathcal{I}_n . Appelons $[a, b]$ et $[b, c]$ ces deux segments.

$$E[\rho(x, y)^s] \leq E[(\rho(a, b) + \rho(b, c))^s] \leq E[(2\rho(a, b))^s + (2\rho(b, c))^s] \leq 2^{1+s+\phi(s)} \left(\frac{|a-b|}{2}\right)^{\phi(s)}$$

Comme $\phi(s) \leq 1$, on a bien $2^{1+s+\phi(s)} \leq 8$.

On obtient alors le sens facile du théorème :

Proposition 2.3.1. *Sous les mêmes hypothèses, on a presque sûrement :*

$$\phi(\zeta) \leq \zeta_0$$

Soit $s \in [0, 1]$ tel que $t := \phi(s) > \zeta_0$. On a donc $H^t(K) = 0$ pour la distance euclidienne : pour tout ϵ , il existe un recouvrement dénombrable de K par des intervalles $[x_i, y_i]$ tel que :

$$\sum_i |x_i - y_i|^t \leq \epsilon$$

Alors d'après le lemme,

$$E\left[\sum_i \rho(x_i, y_i)^s\right] \leq 8\epsilon$$

Or :

$$E\left[\sum_i \rho(x_i, y_i)^s\right] \geq P\left[\sum_i \rho(x_i, y_i)^s > \epsilon^{1/2}\right] \cdot \epsilon^{1/2}$$

Ce qui donne :

$$P\left[\sum_i \rho(x_i, y_i)^s > \epsilon^{1/2}\right] \leq 8\epsilon^{1/2}$$

Ainsi il est presque sûr que $H^s(K) = 0$ pour la métrique ρ . Comme c'est vrai pour tout $s > \phi^{-1}(\zeta_0)$ on a bien le résultat attendu.

Comme le montrent ensuite Benjamini et Schramm, c'est bien la majoration optimale :

Proposition 2.3.2. *Sous les mêmes hypothèses, presque sûrement*

$$\zeta \geq \sup\{s \in (0, 1) : \phi(s) < \zeta_0, E[W^{-s}] < \infty\}$$

Cette preuve est plus technique et on la trouvera dans l'article. Elle repose sur le lemme de Frostman : l'idée est de construire une mesure telle que sa s -énergie soit finie pour la métrique ρ . On la construit récursivement à partir de celle de ζ_0 -énergie finie pour la métrique euclidienne donnée par le lemme de Frostman. Elle est construite par cascades multiplicatives comme la mesure μ .

Pour obtenir une véritable équation KPZ, quadratique en ζ , il faut faire des hypothèses supplémentaires sur W . En particulier, on voit facilement en évaluant $E[W^s]$ pour $\log W$ suivant une loi gaussienne que le théorème donne bien une équation quadratique en ζ . Ce que l'on doit pouvoir montrer aussi, c'est que $\log W$ doit être gaussien pour que le théorème donne une équation quadratique.

3 Le problème des méandres

3.1 Présentation

Le problème des méandres aurait été introduit au XVIII^{ième} siècle par Euler qui se demandait combien de promenades possibles il existait à Königsberg qui ne passent qu'une fois par chaque pont. Depuis, il n'a toujours pas été résolu.

Définition 3.1.1. *Etant donné une droite, que l'on appellera rivière, et un nombre n de ponts, on se demande combien il existe, à équivalence topologique près, de boucles sans croisement qui coupent la rivière n fois. Ce nombre est appelé $n^{\text{ième}}$ nombre méandrique, et il est noté M_n (parfois, M_n correspond au nombre de configurations à $2n$ ponts, sachant qu'il n'existe pas de boucles coupant une droite un nombre impair de fois).*

Le problème des méandres est surtout étudié en mécanique statistique, étant en lien avec d'autres modèles combinatoires qui ont des applications physiques, par exemple les repliements de polymères. Les physiciens s'intéressent aux exposants critiques, caractérisant l'évolution asymptotique des nombres méandriques. Cela a d'abord été fait empiriquement par énumération jusqu'à $n = 48$ [2] puis une première prévision théorique a été faite en utilisant une équation KPZ dans [3]. Assez curieusement, bien que l'usage de KPZ ne soit pas encore mathématiquement justifié, les deux prévisions sont en excellent accord. Pour fixer les idées, voici les premiers méandres :

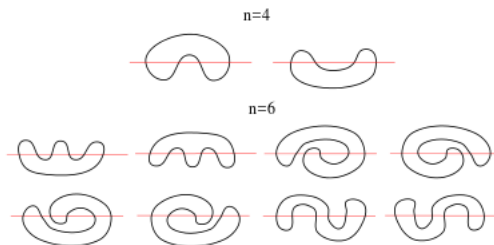


FIGURE 1 – Méandres à 4 et 6 ponts

3.2 Enumération des nombres méandriques

Les premiers nombres méandriques avaient déjà été énumérés directement, mais leur croissance exponentielle ne permettait pas d'aller très loin. Dans [2], Jensen présente un nouvel algorithme qui énumère les nombres méandriques sans énumérer les méandres eux-mêmes, ce qui lui permet d'aller pour la première fois jusqu'à :

$$M_{48} = 794'337'831'754'564'188'184 \approx 8 \cdot 10^{20}$$

L'idée de l'algorithme est d'abord de suivre la rivière pont par pont, en se donnant seulement la configuration d'un méandre sur l'amont, pour se demander combien il existe de façons autorisées de croiser la rivière. Pour cela, on coupe le méandre perpendiculairement à la rivière au niveau d'un pont, ce qui déconnecte la boucle en un ensemble de brins. Comme on impose à la boucle de ne pas se croiser, il faut conserver en mémoire leurs positions relatives. Avec la position de la rivière, c'est en fait la seule information nécessaire.

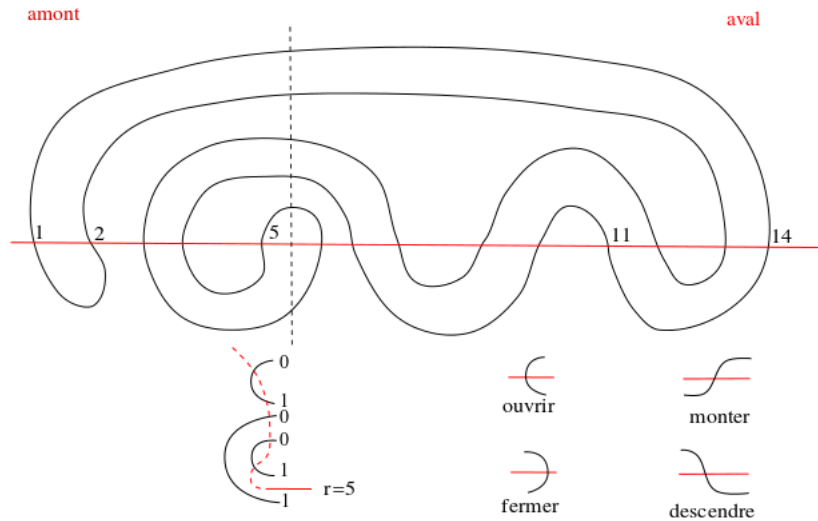


FIGURE 2 – Etat et opérations

En suivant le méandre à partir d'un croisement dans les deux directions, on tombe sur deux autres croisements. Il y a au plus 4 possibilités pour ces deux croisements voisins :

- Soit ils sont tous les deux en aval (1)
- Soit ils sont tous les deux en amont (14)
- Soit celui de la rive gauche est en amont et l'autre en aval (11)
- Soit celui de la rive droite est en amont et l'autre en aval (2)

Les numéros entre parenthèses renvoient aux ponts de la figure 2.

On appellera état la donnée minimale nécessaire pour décider comment on peut traverser la rivière au pont suivant, et respectivement "ouvrir", "fermer", "descendre", "monter" les quatre opérations ci-dessus qu'on peut lui faire subir pour passer au pont suivant. La boucle ne se croisant pas, seuls les brins les plus proches de la rivière peuvent subir ces opérations.

La donnée du type de chaque croisement détermine de façon univoque un méandre, mais une collection arbitraire de croisements ne correspond pas forcément à un méandre. Par exemple, le premier croisement est forcément du premier type : les deux brins qui en partent vont toujours vers l'aval. Pour calculer les nombres méandriques, il faut donc déterminer les collections de croisements admissibles.

La manière la plus économe en mémoire, qu'adopte Jensen, pour coder un état est de lui associer une suite de bits signifiant

- 0 : on ouvre un brin, son extrémité est en dessous,
- 1 : on ferme un brin, son extrémité est au dessus.

Pour la position de la rivière, on se donne un entier r en plus de cette chaîne de bits représentant sa position en partant du haut.

On demande ensuite à l'ordinateur de calculer les états admissibles, associant à chacun d'eux le nombre de chemins qui y mènent au temps t . On doit aussi lui imposer de retomber sur l'état vide (une seule boucle) après n croisements. L'algorithme fonctionne donc ainsi :

- On parcourt chaque état obtenu au temps $t - 1$
- On essaie de lui appliquer chacune des 4 opérations
- Si l'opération conduit à un état déjà connu à l'instant t : on rajoute au poids de cet état celui de l'état qui y mène
- Si l'opération conduit à un état nouveau pour l'instant t : on le garde en mémoire, en lui transférant le poids de l'état qui y mène

Pour n'avoir que des boucles fermées à l'instant n , il y a plusieurs possibilités. On peut arrêter l'algorithme précédent à l'instant $n/2$, puis vérifier qu'en le mettant bout à bout avec un autre état au même nombre de brins et à la même position de rivière, on obtient un méandre acceptable : il ne doit avoir qu'une seule composante connexe. Il faut alors ajouter au compte des méandres le produit de leurs poids. On aurait aussi pu faire travailler l'algorithme suivant jusqu'à l'instant n avec une interdiction d'ouvrir des brins qu'il n'aurait pas le temps de fermer, en le forçant à fermer quand il a $n - t$ brins et en le faisant jeter les états non refermables. Cette méthode semble néanmoins moins efficace.

L'étape la plus coûteuse en temps est celle où l'ordinateur parcourt les états en mémoire pour les comparer à celui qu'il vient d'obtenir. Si l'on stockait naïvement les états dans une liste, la complexité à l'instant t serait comme le carré du nombre d'états à cet instant. Pour effectuer la recherche plus vite on peut utiliser un tableau de hachage. Pour ranger les états dans un tableau de hachage de longueur p , il faut d'abord se donner une manière d'associer un nombre m à chaque état. Par exemple on peut ici définir m comme le nombre représenté par la chaîne de bits. On range ensuite l'état dans la case d'indice

$m \bmod p$ du tableau de hachage. Ainsi, lorsque l'on veut savoir si un état est déjà dans le tableau, on sait dans quelle case il est nécessaire de le chercher. En choisissant p de l'ordre du nombre d'états que l'on s'attend à manipuler, et avec un peu de chance, il n'y aura que de l'ordre de un état par case et la recherche sera bien plus rapide. Pour plus d'efficacité, il faut choisir p premier.

4 Application de la formule KPZ à l'asymptotique des nombres méandriques

Di Francesco, Golinelli et Guitter ont eu l'idée dans [3] que le problème des méandres serait le pendant en gravité quantique du modèle de polymères compacts FPL^2 , pour lequel Jacobsen et Kondev ont calculé les exposants critiques dans [4]. En montrant que l'énumération des méandres revient à énumérer les configurations de deux boucles remplissant un graphe mais avec une métrique fluctuante, di Francesco, Golinelli et Guitter ont pu utiliser les résultats sur le réseau carré pour prévoir l'asymptotique des nombres méandriques.

Ils utilisent pour cela un modèle de matrices aléatoires qui génère des graphes planaires.

4.1 Le modèle à une matrice

On considère l'intégrale suivante sur l'ensemble des matrices hermitiennes de taille $N \times N$:

$$Z(g, N) := \frac{\int dM e^{-N \operatorname{Tr}(\frac{M^2}{2} - g \frac{M^4}{4})}}{\int dM e^{-N \operatorname{Tr}(\frac{M^2}{2})}}$$

où la mesure sur les matrices est :

$$dM := \prod_{i=1}^n dM_{ii} \prod_{i < j} d\Re(M_{ij}) d\Im(M_{ij})$$

L'idée est ensuite de voir le terme $-Ng \operatorname{Tr}(\frac{M^4}{4})$ comme une perturbation et de développer $Z(g, N)$ suivant les puissances de g .

$$Z(g, N) = \frac{\int dM e^{-N \operatorname{Tr}(\frac{M^2}{2})} \sum_{V=0}^{+\infty} \left(\frac{Ng \operatorname{Tr} M^4}{4}\right)^V}{\int dM e^{-N \operatorname{Tr}(\frac{M^2}{2})}}$$

Tout se passe alors comme si l'on avait seulement un hamiltonien gaussien : la matrice M étant hermitienne, on peut aussi la voir plus simplement comme une collection de N^2 réels indépendants, la mesure dM n'étant alors que la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{N^2} et la norme $\operatorname{Tr}(M^2/2)$ est à peu de choses près la norme euclidienne sur \mathbb{R}^{N^2} (modulo une dilatation des axes correspondant aux coefficients de la diagonale). On remarque donc que tous les M_{ij} sont indépendants entre eux et surtout que $\Re(M_{ij})$ est indépendant de $\Im(M_{ij})$. En

utilisant aussi la symétrie par rapport à 0 de la gaussienne on en déduit par exemple que :

$$\langle M_{ij}M_{kl} \rangle_{Gauss.} := \frac{\int dM e^{-N \text{Tr}(\frac{M^2}{2})} M_{ij}M_{kl}}{\int dM e^{-N \text{Tr}(\frac{M^2}{2})}} = 0 \quad \text{si } (k, l) \neq (j, i)$$

et sinon, on obtient en intégrant par parties :

$$\langle |M_{ij}|^2 \rangle_{Gauss.} = \frac{\int x \cdot 2x e^{-\frac{Nx^2}{2}} dx}{\int e^{-\frac{Nx^2}{2}} dx} = \frac{1}{N}$$

Tout cela rend plus aisé l'évaluation des termes de la somme, que l'on récrit :

$$Z(g, N) = \sum_{V=0}^{+\infty} (Ng)^V \langle \text{Tr}(\frac{M^4}{4})^V \rangle_{Gauss.}$$

On peut interpréter la somme dans $\text{Tr}(\frac{M^4}{4})^V$ comme une somme sur l'ensemble des graphes à V sommets, en adoptant les règles de Feynman. C'est ce qui permettra de faire le lien avec les méandres après avoir légèrement modifié le modèle.

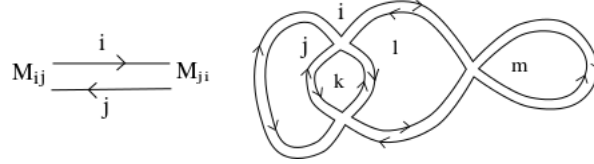


FIGURE 3 – Un graphe ruban à 3 sommets

Il faut interpréter ce graphe par $\langle |M_{ij}^2| |M_{li}|^4 |M_{im}|^2 |M_{kj}|^2 |M_{kl}|^2 \rangle_{Gauss.}$

Tout d'abord, lorsque l'on développe $\text{Tr}(\frac{M^4}{4})^V$, on doit choisir V quadruplets d'indices qui donneront chacun lieu à un terme de la forme $M_{ij}M_{jk}M_{kl}M_{li}$. Chacun de ces termes sera représenté par un sommet d'un graphe-ruban, c'est à dire un carré dont les sommets représentent les indices i, j, k, l et les arêtes les coefficients $M_{ij}, M_{jk}, M_{kl}, M_{li}$. Quand on relie deux sommets entre eux par des arêtes doubles, on signifie par là que les indices de chaque côté de l'arête sont les mêmes. On oriente de plus les bords des arêtes ainsi : si une extrémité représente M_{ij} , on fait partir une flèche de i et en arriver une autre en j . Comme on vient de le montrer, chaque terme M_{ij} doit apparaître au moins 2 fois pour que la moyenne soit non nulle. Ainsi, tous les sommets doivent être 4-valents. Chaque bord d'arête représente donc un indice qui se transmet le long des arêtes. Comme tous les sommets sont 4-valents, les arêtes forment des boucles et l'on associe à chaque boucle un indice.

En résumé, à tout terme du développement ayant une contribution non nulle correspond un unique graphe-ruban dont les faces sont indexées. Pour l'illustrer, la figure 3 montre un graphe-ruban et son interprétation.

En notant L le nombre de boucles, chaque graphe apparaît alors N^L fois dans la somme avec des indices différents dans chaque boucle. En prenant en compte les autres termes qui viennent de la moyenne gaussienne et le $(Ng)^V$, il sort un poids par graphe de N^{V-E+L} . En identifiant l'exposant à la caractéristique d'Euler-Poincaré, on a donc un poids par graphe de :

$$N^{2-2h}$$

où h est le genre du graphe. Ainsi, quand N tend vers l'infini, la contribution des graphes de genre $h > 0$ sont négligeables, et c'est ce qui permet de considérer que le modèle énumère les graphes planaires uniquement.

Ce qui manque à ce modèle pour parler de méandres est qu'il ne donne des graphes que d'une seule couleur, et qu'il n'impose pas aux composantes connexes d'être des boucles.

4.2 Le modèle $O(n_1, n_2)$

Le modèle $O(n_1, n_2)$ est une généralisation du précédent où au lieu d'une seule matrice on se donne deux ensembles de n_1 matrices blanches et de n_2 noires $\{B_i\}, \{N_j\}$. On considère :

$$Z_{n_1, n_2}(N, g) := \int \prod_{i=1}^{n_1} dB_i \prod_{j=1}^{n_2} dN_j e^{-NH(\{B_i\}, \{N_j\})}$$

$$H(\{B_i\}, \{N_j\}) := \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_i B_i^2 + \sum_j N_j^2 - g \sum_{i,j} B_i N_j B_i N_j \right)$$

Après développement en puissance de g :

$$Z_{n_1, n_2}(N, g) := \sum_{V=0}^{+\infty} (Ng)^V \text{Tr} \left(\sum_{i,j} B_i N_j B_i N_j \right)^V$$

On pourra donc aussi le voir comme une somme sur des graphes dont chaque sommet sera représenté par un carré d'arêtes noires et blanches alternées. Pour qu'un terme contribue, il faudra que chaque coefficient d'une matrice apparaissant soit en face de son conjugué, et l'on aura ainsi des boucles blanches et noires se coupant en chaque sommet. L'intérêt de prendre plusieurs matrices noires et blanches est de pondérer chaque graphe en fonction de son nombre de boucles, car l'on pourra choisir sur chaque boucle laquelle des n_1 matrices blanches l'on prend, ce qui soulèvera un poids $n_1^{L_1}$, L_1 étant le nombre de boucles blanches.

4.3 Le lien avec le modèle $FPL^2(n_1, n_2)$

Une configuration pour le modèle $FPL^2(n_1, n_2)$ (pour "two-flavour fully packed loop model") est un remplissage du réseau carré $N \times N$ par des boucles de deux couleurs, telle qu'en chaque sommet passent une boucle blanche et une

boucle noire. Il donne alors un poids n_1 par boucle blanche et un poids n_2 par boucle noire. On considère donc :

$$Z_{n_1, n_2}(N) := \sum_{\text{configurations}} L_1^{n_1} L_2^{n_2}$$

en notant L_1 et L_2 le nombre de boucles blanches et noires respectivement.

Dans [5], Jacobsen et Kondev calculent un exposant critique pour ce modèle en l'interprétant comme un modèle de hauteur, c'est à dire qu'à une configuration de boucles ils associent une fonction de hauteur définie sur les faces du réseau carré. Pour cela, on associe aux quatre types d'arêtes — blanche ou noire, horizontale ou verticale — des vecteurs A, B, C et D selon la figure 4. On choisit définit ensuite la fonction de hauteur :

- quand on passe une arête verticale de gauche à droite, on ajoute à la hauteur le vecteur correspondant à l'arête si elle est orientée vers le bas, sinon on le lui ôte ;
- quand on passe une arête horizontale de haut en bas, on ajoute à la hauteur le vecteur correspondant à l'arête si elle est orientée vers la droite, sinon on le lui ôte.

Pour que la fonction de hauteur soit bien définie, il faut choisir $A+B+C+D = 0$.

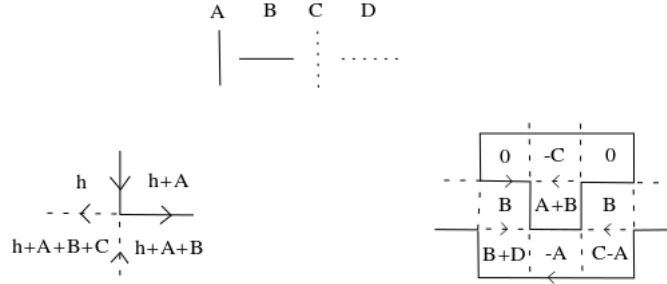


FIGURE 4 – définition de la fonction de hauteur

Pour obtenir une fonction de partition qui ressemble à celle du modèle FPL^2 non-orienté, on pondère chaque boucle par un facteur de phase $e^{i\pi e_1}$ pour les boucles blanches orientées dans le sens horaire, $e^{-i\pi e_1}$ pour les boucles blanches anti-horaires, et de même avec e_2 pour les boucles noires. Dans la somme sur les configurations orientées, restreignons nous à un groupe de termes qui ne diffèrent que par leur orientation et fixons une boucle blanche. On peut regrouper les termes par paires de configurations où seule l'orientation de cette boucle diffère. On peut donc factoriser la somme par $e^{i\pi e_1} + e^{-i\pi e_1} = 2 \cos(\pi e_1)$. En procédant ainsi boucle par boucle, on voit donc que pour une configuration non-orientée donnée, avec ce choix de poids par orientation, l'ensemble de ses orientations possibles contribue par $(2 \cos(\pi e_1))^{L_1} \cdot (2 \cos(\pi e_2))^{L_2}$.

On peut alors identifier les fonctions de partition de ces deux modèles sous

réserve de choisir e_1 et e_2 dans \mathbb{C} tels que :

$$n_1 = 2 \cos(\pi e_1)$$

$$n_2 = 2 \cos(\pi e_2)$$

C'est ce qui leur permet ensuite d'utiliser les résultats connus sur les champs libres et gaz de Coulomb, associés au modèle de hauteur, pour calculer des exposants critiques du modèle FPL^2 , en particulier l'exposant γ défini comme :

$$\frac{C(N)}{C_0(N)} \sim N^\gamma$$

où $C_0(N)$ est le nombre de polymères compacts sur le réseau carré de taille N (*i.e.* le remplissant), et $C(N)$ le nombre de polymères bouclés compacts. Ils montrent dans la suite de l'article que $\gamma = \frac{117}{112}$.

Les modèles $O(n_1, n_2)$ et $FPL^2(n_1, n_2)$ sont en ceci semblables qu'ils énumèrent des configurations de boucles avec des fugacités n_1 et n_2 par boucle. Dans les deux cas, ce sont des boucles de deux couleurs qui remplissent toutes les arêtes du graphe, de telle sorte que chaque sommet 4-valent soit lié à deux arêtes de chaque couleur. La seule différence est que dans le modèle $O(n_1, n_2)$, on somme sur tous les graphes planaires à V sommets 4-valents possibles. C'est pourquoi di Francesco, Golinelli et Guitter font la conjecture que le modèle $O(n_1, n_2)$ est le modèle $FPL^2(n_1, n_2)$ couplé à la gravité.

A la limite n_1, n_2 tendant vers zéro, les configurations à plus d'une boucle par couleur ne contribuent plus. On peut alors considérer que les configurations pour le modèle $O(n_1, n_2)$ sont les méandres. L'exposant critique qu'ils calculent alors grâce à l'équation KPZ est en excellent accord avec l'estimation de Jensen, ce qui semble confirmer la conjecture.

5 Remerciements

Je tiens à remercier mes encadrants Christophe Garban et Jesper Jacobsen pour leur conversation enrichissante et leur aide précieuse.

6 Bibliographie

- [1], Benjamini et Schramm, KPZ in one dimensional geometry of random multiplicative cascades, *Comm. Math. Phys.*, 289(2), 653-662, 2009.
- [2], Jensen, Enumeration of plane meanders, arXiv : cond-mat/9910313
- [3], di Francesco, Golinelli et Guitter, Meanders : Exact Asymptotics, arXiv : cond-mat/9910453
- [4], Jacobsen et Kondev, Field Theory of Compact Polymers on the Square Lattice *Nucl. Phys*, B532, 635-688, 1998.

[5]di Francesco, Golinelli et Guitter, Meander, folding and arch statistics
Mathl. Comp. Modelling, 26, 97-147, 1997.

[6]Garban, Quantum gravity and the KPZ formula, arXiv : cond-mat/1206.0212