Grandes valeurs de formes modulaires

Podelski Constantin   Navarro Dimitri

10 juin 2016

Table des matières

Résumé

Les *formes modulaires* sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan complexe supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0\}$, qui se transforment d'une façon bien particulière pour l'action par homographies d'un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (par exemple, le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ des matrices qui se réduisent en une matrice triangulaire supérieure modulo N, pour $N \geq 1$). Bien que leur définition soit analytique, les formes modulaires interviennent dans de très nombreux problèmes de théorie des nombres et de géométrie arithmétique [10].

L'objet de ce texte est le problème d'apparence simple suivant : comment contrôler la taille de $|f(z)|$ (z variant dans $\mathbb{H}$), pour certaines formes modulaires f, en fonction du niveau N. Pour admettre une réponse, la question demande bien sûr à être précisée. Nous l'étudierons par le biais de méthodes analytiques, sans utiliser le point de vue plus avancé de la théorie des représentations sur ces objets (à l'exception notable d'un résultat fondamental que nous invoquerons sans démonstration).

Voici comment ce texte est organisé. La première partie contient les résultats fondamentaux de la théorie élémentaire des formes modulaires : en particulier, une démonstration de la finitude de la dimension de l'espace des formes de poids et niveau fixés (partie I) ; la définition et les propriétés des opérateurs de Hecke dont l'étude est fondamentale pour analyser la structure de l'espace des formes modulaires ; un résumé de la théorie d'Atkin-Lehner. Les formes modulaires admettent un développement de Fourier (ou q-développement), notion très utile pour leur étude et qui permet notamment de définir la fonction L d'une forme modulaire et la fonction L de Rankin-Selberg d'une paire de formes modulaires. L'analyse des coefficients des formes modulaires et des propriétés de leurs fonctions L est cruciale pour toute question analytique et c'est pourquoi la partie II du texte leur est consacrée. La partie III propose deux réponses au problème posé ci-dessus : l'une (théorème 10.1) est due à Abbes-Ullmo [1] et l'autre utilise la formule des pré-traces (théorème 11.1), suivant une méthode initiée par Iwaniec-Sarnak pour les formes de Maass. Ces deux réponses sont essentiellement équivalentes, comme nous le montrons dans la section 3. Enfin, nous améliorons la borne obtenue par la *méthode d'amplification* d'Iwaniec, d'après un article de Ye [13].

Première partie . Introduction aux formes modulaires

1 Préliminaires

On commence par définir une action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles 2x2 de déterminant strictement positif, sur $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Définition 1.1. Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$, on pose :

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Remarque 1.1. On a $\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{det(g)}{\mid cz+d \mid^2} \mathrm{Im}(z)$ ce qui assure la stabilité de $\mathbb{H}$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

Définition 1.2. Soit $\Gamma \subset \Gamma_0 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe. On appelle domaine fondamental un ouvert connexe $D \subset \mathbb{H}$ tel que tout point de $\mathbb{H}$ est congru modulo Γ à un point de $\overline{D}$, et tel que si deux points de $\overline{D}$ sont congrus modulo Γ, alors tous deux sont dans $\overline{D} \setminus D$.

Theorème 1.1. *$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H}\ ,\ |\mathrm{Re}(z)| < 1/2$ et $|z| > 1\}$ est un domaine fondamental pour Γ_0.*

Démonstration. On note :

(i) $\mathrm{S} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(ii) $\mathrm{T} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $G = \langle \mathrm{S}, \mathrm{T} \rangle$.

S et T sont dans Γ_0 et $\mathrm{S} \cdot z = \frac{-1}{z}$, $\mathrm{T} \cdot z = z + 1$. On peut aussi noter que $-\mathrm{I} \cdot z = z$.

On montre d'abord que $G \cdot \overline{\mathcal{D}} = \mathbb{H}$. Soit $z \in \mathbb{H}$. $\mathrm{Im}(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$. $|cz + d| \leq 1$ pour un nombre fini de valeurs seulment, il existe donc $g \in G$, tel que $\mathrm{Im}(gz)$ soit maximal, et quitte à composer par T ou T^{-1}, on peut supposer $-1/2 \leq \mathrm{Re}(gz) \leq 1/2$. Alors nécessairement, $|z| \geq 1$, sinon la composition par S contredit la maximalité de $\mathrm{Im}(gz)$. Cela fournit le premier résultat.

Montrons que si il existe $x, y \in \overline{\mathcal{D}}$ et $g \in \Gamma_0$ tels que $y = gx$, alors $x, y \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Soit donc x, y, g vérifiant ces conditions. On peut supposer, quitte à considérer g^{-1}, que $\mathrm{Im}(gx) \geq \mathrm{Im}(x)$. Vient alors

$$|cx + d| \leq 1 \text{ donc } c \in \{-1, 0, 1\}$$

(On rapelle que $\inf\{\mathrm{Im}(z)\ ,\ z \in \mathcal{D}\} = \sqrt{3}/2$ et que cette borne est atteinte pour $\rho = e^{2i\pi/3}$ et $-\overline{\rho} = e^{i\pi/3}$ uniquement)

(i) Si $c = 0$: Alors, $d = \pm 1$, $a = d$ (car $ad - bc = 1$) et donc $y = x \pm b$. Donc $b = \pm 1$, et $|\mathrm{Re}(x)| = |\mathrm{Re}(y)| = 1/2$

(ii) Si $c = 1$: Si $d = 0$, $|z| \leq 1$ donc $|z| = 1$. Sinon $|x + d|^2 = \mathrm{Im}(x)^2 + (d + \mathrm{Re}(x))^2 > 3/4 + (|d| - 1/2)^2 > 1$ déś lors que $x \neq \rho, -\overline{\rho}$. Dans ce dernier cas, $|x + d|$=1 et on peut répéter l'argument avec y, x, g^{-1} pour justifier que $y = \rho$ ou $-\overline{\rho}$.

(iii) Si $c = -1$ on se ramène au cas $c = 1$ en composant par $-\mathrm{I}$, d'action triviale.

Dans tous les cas, $x, y \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$, ce qui assure la preuve du théorème.

□

Corollaire 1.1. *$\{\mathrm{S}, \mathrm{T}\}$ engendre Γ_0.*

Démonstration. On prend un $z \in \mathcal{D}$. Soit $\gamma \in \Gamma_0$. Comme on l'a montré dans la preuve du théorème, il existe $g \in G = \langle \mathrm{S}, \mathrm{T} \rangle$ tel que $g \cdot (\gamma z) \in \overline{\mathcal{D}}$. Mais alors par le second point de la définition du domaine fondamental, $g\gamma z = z$ et donc $g\gamma = \pm \mathrm{I} \in G$. (On notera que $\mathrm{S}^2 = -\mathrm{I}$, et que les seuls élements de Γ_0 laissant stable tout $\mathcal{D}$ sont I et $-\mathrm{I}$) □

Remarque 1.2. On peut montrer avec les mêmes calculs que dans la démonstration du théorème 1.1 que les seuls points de $\overline{\mathcal{D}}$ ayant un stabilisateur différent de $\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$ sont ρ et $-\overline{\rho}$ de stabilisateurs $(\pm\mathrm{I}, \pm\mathrm{T\,S}, \pm(\mathrm{T\,S})^2)$ et $(\pm\mathrm{I}, \pm\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}, \pm(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S})^2)$, et i de stabilisateur $(\pm\mathrm{I}, \pm\mathrm{S})$.

Lemme 1.1. *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de Γ_0.*
On pose $\overline{\Gamma} \coloneqq \Gamma/\{\pm\mathrm{I}\}$ et $\overline{\Gamma_0} \coloneqq \Gamma_0/\{\pm\mathrm{I}\}$. Alors si $\{\overline{\gamma_1}, \ldots, \overline{\gamma_\nu}\}$ est un système de représentantss dans $\overline{\Gamma_0}$ de $\overline{\Gamma_0}/\overline{\Gamma}$ et γ_i un relèvement de $\overline{\gamma_i}$ dans Γ_0,

$$\mathcal{D}_\Gamma = \sqcup_{i\in\{1,\ldots,\nu\}}\gamma_i^{-1}\cdot\mathcal{D}$$

est un domaine fondamental de Γ

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}$. Alors par le théorème 1.1 il existe $\gamma \in \Gamma_0$ tel que $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$. De plus par définition des γ_i il existe un certain $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ et un certain $g \in \Gamma$ tels que $\gamma = \pm\gamma_i g$. Ainsi $\gamma_i \cdot g \cdot z = \gamma \cdot z \in \mathcal{D}$ et donc l'orbite de z sous Γ passe par $\gamma_i^{-1}\mathcal{D}$. A ce stade on a montré que l'orbite de tout élément de $\mathbb{H}$ sous l'action de Γ passe par $\mathcal{D}_\Gamma$. Supposons que deux élément $\gamma_i^{-1} \cdot z_i$ et $\gamma_j^{-1} \cdot z_j$ de $\mathcal{D}_\Gamma$ (avec z_i et z_j dans $\mathcal{D}$) soient congrus modulo Γ. Alors il existe $g \in \Gamma$ tel que $\gamma_i^{-1} \cdot z_i = g\gamma_j^{-1} \cdot z_j$. Ainsi par le théorème 1.1 on a $z_i = z_j$ car $z_i, z_j \in \mathcal{D}$ et z_j est dans l'orbite de z_i sous l'action de Γ_0.
Enfin l'union définissant $\mathcal{D}_\Gamma$ est bien disjointe car si l'on avait $\gamma_i^{-1} \cdot z_i = \gamma_j^{-1} \cdot z_j$ pour $z_i, z_j \in \mathcal{D}$ alors comme précédemment par le théorème 1.1 on a $z_i = z_j$ et puisque le stabilisateur sous Γ_0 d'un élément de $\mathcal{D}$ est $\{\pm\mathrm{I}\}$ alors $\gamma_i = \pm\gamma_j$. Ainsi modulo $\{\pm\mathrm{I}\}$ puis modulo $\overline{\Gamma}$ on obtient $\overline{\gamma_i} = \overline{\gamma_j}$ et donc $i = j$. Ainsi l'union est bien disjointe. □

Corollaire 1.2. *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de Γ_0.*
Si $-\mathrm{I} \in \Gamma$ alors en notant $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ un système de représentants de Γ_0/Γ, $\mathcal{D}_\Gamma = \sqcup_{i\in\{1,\ldots,m\}}\gamma_i^{-1} \cdot \mathcal{D}$ est un domaine fondamental de Γ.

Démonstration. Si $-\mathrm{I} \in \Gamma$ alors si l'on prend $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu\}$ un système de représentants de Γ_0/Γ alors $\{\overline{\gamma_1}, \ldots, \overline{\gamma_\nu}\}$ est un système de représentants dans $\overline{\Gamma_0}$ de $\overline{\Gamma_0}/\overline{\Gamma}$ où $\overline{\gamma_i}$ est la classe de γ_i dans $\overline{\Gamma_0}$. Ainsi par le lemme 1.1 on a bien $\mathcal{D}_\Gamma$ domaine fondamental de Γ. □

On retiendra aussi le corollaire suivant :

Corollaire 1.3. *Si Γ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_0 alors il existe $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu\}$ éléments de Γ_0 tels que $\mathcal{D}_\Gamma = \sqcup_{i\in\{1,\ldots,\nu\}}\gamma_i \cdot \mathcal{D}$ soit un domaine fondamental de Γ*

Démonstration. Immédiat avec le lemme 1.1. □

2 Formes modulaires sur un sous groupe d'indice fini

2.1 Définitions et q-développement

Dans cette section nous définissons la notion de forme modulaire sur un sous groupe d'indice fini de Γ_0 introduisons notamment la notion de q-développement d'une telle forme, qui est un outil très pratique.

Définition 2.1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé.
On définit l'*action de poids* k d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sur une fonction $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f_{|_k M}(z) = \det(M)^{\frac{k}{2}} \cdot (cz+d)^{-k} \cdot f(M \cdot z).$$

On a bien :

$$\forall M, N \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}), f_{|_k M|_k N} = f_{|_k MN}.$$

Remarque 2.1. Le centre de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ agit trivialement pour l'action de poids k quel que soit $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé et Γ un sous groupe d'indice fini de Γ_0.
On appelle *forme modulaire* de *poids* k sur Γ toute fonction $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(i) f est holomorphe sur $\mathbb{H}$;

(ii) $\forall \gamma \in \Gamma, f_{|_k \gamma} = f$;

(iii) $\forall M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}), \lim\limits_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} f_{|_k M}(z)$ existe.

L'ensemble des formes modulaires de poids k sur Γ constitue un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on notera $\mathscr{M}_k(\Gamma)$. L'ensemble des formes modulaires f de poids k sur Γ telles que :

$$\forall M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}), \lim_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} f_{|_k M}(z) = 0$$

constitue un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_k(\Gamma)$ et sera noté $\mathscr{S}_k(\Gamma)$, c'est l'espace des formes modulaires *paraboliques* de poids k sur Γ.

Remarque 2.2. Intéressons nous à la condition (iii). La condition (iii) de la définition précédente signifie que f est holomorphe sur les *pointes* de Γ. Les pointes de Γ sont les classes d'équivalence de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ sous l'action de Γ, montrons alors pourquoi la condition (iii) se ramène à l'holomorphie sur les pointes.
Tout d'abord observons que Γ étant d'indice fini les pointes sont en nombre fini. Prenons un système de représentant de $\Gamma \backslash \Gamma_0$ que l'on note $\{\gamma_i, i \in \{1, \dots, \mu\}\}$. Si $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ alors il existe $M \in \Gamma_0$telle que $M \cdot \infty = \lim\limits_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} M \cdot z = r$ car ou bien $r = \infty$ et dans ce cas $M = \mathrm{I}_2$ convient, ou bien $r = 0$ et alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient, ou bien $r = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et dans ce cas par le théorème de Bézout on peut trouver $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $M = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ et on a bien $r = M \cdot \infty$. De plus il existe $i \in \{1, \dots, \mu\}$ tel que $M = \gamma \cdot \gamma_i$ où $\gamma \in \Gamma$ et donc $r = \gamma \cdot \gamma_i \cdot \infty$ et donc $r \in \mathrm{Orb}_\Gamma(\gamma_i \cdot \infty)$ avec $\gamma_i \cdot \infty \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Il y a donc bien un nombre fini de pointes puisque $\{\mathrm{Orb}_\Gamma(\gamma_i \cdot \infty), i \in \{1, \dots, \mu\}\}$ contient toutes les pointes.
Ainsi la condition (iii) se ramène à demander simplement que :

$$\forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \lim_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} f_{|_k \gamma_i}(z)$$

existe, car si $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ alors $M \cdot \infty \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et donc il existe $i \in \{1, \dots, \mu\}$ et il existe $\gamma \in \Gamma$ tels que $M \cdot \infty = \gamma \cdot \gamma_i \cdot \infty$. Ainsi $\gamma_i^{-1}\gamma^{-1}M \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})}(\infty)$ et donc $\gamma_i^{-1}\gamma^{-1}M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ et donc $f_{|_k M}(z) = f_{|_k\gamma|_k\gamma_i|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}(z) = (ac)^{\frac{k}{2}} c^{-k} f_{|_k\gamma_i}(\frac{az+b}{c})$ car f vérifie (ii) et $\gamma \in \Gamma$. Enfin on a bien $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f_{|_k M}(z)$ existe puisque par (ii) $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} (ac)^{\frac{k}{2}} c^{-k} f_{|_k\gamma_i}(\frac{az+b}{c})$ existe car $ac > 0$.
On a donc montré que la condition (iii) se ramène à demander que :

$$\forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \lim_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f_{|_k\gamma_i}(z)$$

existe, ie que f est holomorphe sur les pointes puisque comme on l'a montré, $\{\mathrm{Orb}_\Gamma(\gamma_i \cdot \infty), i \in \{1, \dots, \mu\}\}$ contient toutes les pointes. Et pour que f soit parabolique il suffit simplement que :

$$\forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \lim_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f_{|_k\gamma_i}(z) = 0.$$

Lemme 2.1. *Soit $f \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ vérifiant :*

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z + \alpha) = f(z)$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors en posant :

$$\begin{array}{rccc} q\colon & \mathbb{H} & \to & \mathring{D}(0,1) \setminus \{0\} \\ & z & \mapsto & \exp \frac{2i\pi z}{\alpha} \end{array}$$

il existe une fonction $\tilde{f} : \mathring{D}(0,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathring{D}(0,1) \setminus \{0\}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \tilde{f}(q(z)) = f(z)$$

Démonstration. L'application q est une surjection holomorphe de $\mathbb{H}$ dans $\mathring{D}(0,1) \setminus \{0\}$ et est localement un biholomorphisme. En effet si $z_0 \in \mathbb{H}$ et $\theta_0 = arg(\exp \frac{2i\pi z_0}{\alpha})$, alors :

$$q : \left\{ z \in \mathbb{H}, |\mathrm{Re}\,(z - z_0)| < \frac{1}{2} \right\} \to \left\{ q \in \mathring{D}(0,1) \setminus \{0\}, arg(q) \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[\right\}$$

induit un biholomorphisme. Ce second ensemble est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \exp \frac{2i\pi z_0}{\alpha} \cdot \mathbb{R}^-$ sur lequel il existe une determination du logarithme, on peut donc obtenir un inverse local pour q. On définit $\tilde{f}(q) \coloneqq f(z)$ où $q \in \mathring{D}(0,1) \setminus \{0\}$ et $\exp \frac{2i\pi z}{\alpha} = q$. $\tilde{f}$ est bien définie puisque si $\exp \frac{2i\pi z}{\alpha} = q = \exp \frac{2i\pi z'}{\alpha}$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + k\alpha$ et donc $f(z) = f(z')$. De plus, $\tilde{f}$ est holomorphe puisque q est un biholomorphisme local et que f est holomorphe. □

Proposition 2.1. *Soit Γ un sous groupe d'indice fini de Γ_0 et $k \in \mathbb{Z}$ fixés.*
Il existe un plus petit entier positif non nul α tel que :

$$\forall f \in \mathscr{M}_k(\Gamma), \forall z \in \mathbb{H}, f(z + \alpha) = f(z)$$

Démonstration. Puisque Γ est d'indice fini il existe deux entiers m et n tels que $m > n$ et $\mathrm{T}^m \equiv \mathrm{T}^n \pmod{\Gamma}$. Ainsi $\mathrm{T}^{m-n} \in \Gamma$ et on pose α le plus petit entier positif non nul tel que $\mathrm{T}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Alors :

$$\forall f \in \mathscr{M}_k(\Gamma), \forall z \in \mathbb{H}, f_{|_k \mathrm{T}^\alpha}(z) = f(z) = f(z+\alpha)$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Nous allons maintenant montrer qu'une forme modulaire sur un sous groupe d'indice fini de Γ_0 de poids quelconque admet un q-développement.

Proposition 2.2. *Soit Γ un sous groupe d'indice fini de Γ_0 et $k \in \mathbb{Z}$ fixés.*
On pose α le plus petit entier positif non nul tel que :

$$\forall g \in \mathscr{M}_k(\Gamma), \forall z \in \mathbb{H}, g(z+\alpha) = g(z).$$

Soit f une forme modulaire sur Γ de poids k. Alors il existe une unique suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelés coefficients de Fourier de f, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(z)^n = \tilde{f}(q(z))$$

(où q et $\tilde{f}$ sont les fonctions introduites dans le lemme 2.1). Cette somme est le q-développement de f. De plus :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \exp\left(\frac{2\pi n y}{\alpha}\right) \int_0^1 f(\alpha x + iy) \exp(-2i\pi n x) dx$$

Démonstration. f est une forme modulaire de poids k sur Γ donc :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z+\alpha) = f(z),$$

ainsi on peut appliquer le lemme 2.1 à f. Il existe donc une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur $\mathring{D}(0,1) \setminus \{0\}$ telle que $\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \tilde{f}(q(z))$ où $q(z) = \exp\frac{(2i\pi z)}{\alpha}$. D'autre part f est une forme modulaire sur Γ donc $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f(z)$ existe (il suffit de prendre $M = \mathrm{I}$ dans le troisième point de la définition 2.2) et donc $\tilde{f}$ est bornée au voisinage 0. Par le théorème de prolongement de Riemann, 0 est une singularité éliminable de $\tilde{f}$ et donc $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert. Ainsi $\tilde{f}$ est développable en série entière de rayon de convergence 1 ce qui donne bien l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(z)^n$. Montrons l'unicité des $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\begin{array}{rccc} F_y\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f(\alpha x + iy) \end{array}$$

est une fonction indéfiniment dérivable et 1-périodique, il existe donc une unique suite de nombres complexes $(b_n(y))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(y) \exp(2i\pi nx).$$

Or par le raisonnement du début de preuve on a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\left(\frac{-2\pi ny}{\alpha}\right) \exp(2i\pi nx).$$

Ainsi par unicité des coefficients de Fourier de F_y on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, a_n = \exp\left(\frac{2\pi ny}{\alpha}\right) b_n(y) = \exp\left(\frac{2\pi ny}{\alpha}\right) \int_0^1 F_y(x) \exp(-2i\pi nx) dx.$$

Ainsi les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont déterminés de manière unique par f, d'où l'unicité. □

2.2 Le cas $\Gamma_0 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Dans cette section on va s'intéresser au cas particulier où $\Gamma = \Gamma_0$. On notera alors $\mathscr{M}_k := \mathscr{M}_k(\Gamma_0)$ et $\mathscr{S}_k := \mathscr{S}_k(\Gamma_0)$ et on parlera simplement de *formes modulaires* et de *formes modulaires paraboliques* de poids k.

Remarque 2.3. (i) Par la remarque 2.2, toutes les pointes de Γ_0 sont contenues dans $\mathrm{Orb}_{\Gamma_0}(\mathrm{I}_2 \cdot \infty)$, ainsi pour que $f \in \mathscr{M}_k$ la condition (iii) de la définition 2.2 se ramène à demander l'existence de :

$$\lim_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f(z)$$

et pour que $f \in \mathscr{S}_k$ on doit simplement vérifier :

$$\lim_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f(z) = 0.$$

(ii) En posant $\mathrm{T} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a par le corollaire 1.1 $\Gamma_0 = \langle \mathrm{S}, \mathrm{T} \rangle$ et pour vérifier (ii) de la définition 2.2 il suffit donc d'avoir :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(\mathrm{S} \cdot z) = z^k f(z) = f(\frac{-1}{z})$$

et que :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(\mathrm{T} \cdot z) = f(z+1) = f(z)$$

(iii) Si k est impaire puisque $-\mathrm{I}_2 \in \Gamma_0$ alors si $f \in \mathscr{M}_k$ on a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(-\mathrm{I}_2 \cdot z) = (-1)^k f(z) = -f(z) = f(z)$$

et donc f est identiquement nulle. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathscr{M}_{2k+1} = \{0\}.$$

Ainsi on s'intéressera uniquement au cas où $k \in 2\mathbb{Z}$.

Dans le cas de Γ_0 le q-développement d'une forme modulaire s'énonce plus simplement que précédemment, par une application directe de la proposition 2.2 on a la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit $k \in 2\mathbb{Z}$ et $f \in \mathscr{M}_k$ fixés.*
Alors il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entièrement déterminés par f telle que :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(z)^n$$

où :

$$\forall z \in \mathbb{H}, q(z) = \exp(2i\pi z)$$

et vérifiant :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, a_n = \exp(2\pi n y) \int_0^1 f(x+iy)\exp(-2i\pi n x)dx.$$

On va maintenant donner un exemple d'une famille de formes modulaires non nulles, les séries d'Eisenstein.

Proposition 2.4. *Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier pair tel que $k \geq 4$.*
Alors :

$$G_k \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(mz+n)^k} \end{array}$$

définit une forme modulaire de poids k et vérifie $\lim\limits_{Im(z)\to+\infty} G_k(z) = 2\zeta(k)$.

Démonstration. Soit $A, B \in \mathbb{R}_+^*$, on va montrer que la série définie précédemment converge normalement sur $D_{(A,B)} \coloneqq \{z \in \mathbb{H}, |\mathrm{Re}\,(z)| < A, \mathrm{Im}\,(z) > B\}$.
Pour cela montrons dans un premier temps qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall z \in D_{(A,B)}, \forall(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, |\mu z + \nu| \geq \delta \sup(|\mu|, |\nu|).$$

Pour cela remarquons déjà que $\forall z \in D_{(A,B)}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, |z+\lambda| > B$. Puis remarquons que si $z \in D_{(A,B)}$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda z + 1| \geq \mathrm{d}(-1, \mathbb{R}\cdot z)$. Or :

$$\mathrm{d}(-1, \mathbb{R}\cdot z) = \|(-1,0) - (-1,0)\cdot \frac{1}{|z|}(x,y) \times \frac{1}{|z|}(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}$$

où $z = x+iy$, car $\mathbb{R}\cdot z$ est engendrée par le vecteur unitaire $\frac{1}{|z|}\cdot(x,y)$. De plus $z \in D_{(A,B)}$ donc $\frac{x^2}{y^2} \leq \frac{A^2}{B^2}$ et donc $d(-1, \mathbb{R}\cdot z) \geq \delta_0$ où $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}}$. On pose $\delta = \min(B, \delta_0, 1) \in \mathbb{R}_+^*$ et alors en distinguant les cas où μ ou ν est nul et le cas où les deux sont non nuls et en utilisant les deux inégalités $\forall z \in D_{(A,B)}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda z + 1| \geq \delta$ et $|z+\lambda| > \delta$ on obtient bien l'inégalité recherchée.
Montrons la convergence normale.
Pour $s \in \mathbb{N}, s \geq 1$, il y a 8 couples (m,n) d'entiers relatifs tels que $\sup(|m|,|n|) = s$ et donc :

$$\forall z \in D_{(A,B)}, \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{|mz+n|^k} \leq \frac{1}{\delta^k}\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{8s}{s^k} < +\infty$$

D'où la convergence normale.
Ainsi G_k définit une fonction holomorphe sur le demi-plan de Poincaré. Ensuite, les bijections $(m,n) \to (m, m+n)$ et $(m,n) \to (n,-m)$ de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ dans lui-même et la convergence absolue de la série sur le demi-plan de Poincaré permettent de réarranger les termes de la série, ce qui donne $G_k(z+1) = G_k(z)$ et $G_k(\frac{-1}{z}) = z^k G_k(z)$ pour $z \in \mathbb{H}$. Enfin la convergence uniforme de G_k sur $D_{(1,1)}$ et $G_k(z+1) = G_k(z)$permet d'inverser série et somme dans le calcul de $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} G_k(z)$. Puisque si $m \neq 0$, $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = 0$, on a bien $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} G_k(z) = 2\zeta(k)$. Et donc G_k est bien une forme modulaire non nulle de poids k.

□

Remarque 2.4. Soit $f \in \mathscr{M}_k$ (avec $k \geq 4$ un entier pair) et $l := \lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f(z)$, alors $f - l\cdot\frac{G_k}{2\zeta(k)} \in \mathscr{S}_k$. Ainsi on a $\mathscr{M}_k = \mathbb{C}\cdot G_k \bigoplus \mathscr{S}_k$.

Voici un autre exemple de forme modulaire.

Définition 2.3. Pour $k \geq 4$ entier pair, on définit la série d'Eisenstein normalisée $E_k := \frac{G_k}{2\zeta(k)}$.
On définit alors la fonction Δ de Jacobi par :

$$\Delta := \frac{1}{1728}\cdot(E_4^3 - E_2^6)$$

c'est une forme modulaire parabolique de poids 12.

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du fait que $\mathscr{M}_k(\Gamma)$ est de dimension finie quels que soitent $k \in \mathbb{Z}$ et Γ sous-groupe d'indice fini de Γ_0. Remarquons d'abord que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ alors en se servant du fait que la dérivée p-ème de $z \in \mathbb{H} \to (cz+d)^{-k} \in \mathbb{C}$ ne s'annule pas quel que soit p, on montre que si f est une forme modulaire, l'ordre de $z \in \mathbb{H}$ en tant que zéro de f est le même que l'ordre de $M\cdot z$ en tant que zéro de f. Ainsi, en notant $v_p(f)$ l'ordre de $p \in \mathbb{H}$ en tant que zéro de f, $v_p(f)$ est constant sur l'orbite de p sous l'action de Γ_0 et on parlera donc de $v_p(f)$ pour $p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}$.

On notera $v_\infty(f)$ l'ordre de 0 en tant que zéro de $\tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est la fonction du disque unité associée à la forme modulaire f. Ensuite notons e_p le cardinal du stabilisateur de $p \in \mathbb{H}$ sous $\Gamma_0/\{\pm \mathrm{I}_2\}$ qui est aussi constant sur l'orbite de p ; on notera donc e_p pour $p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}$.

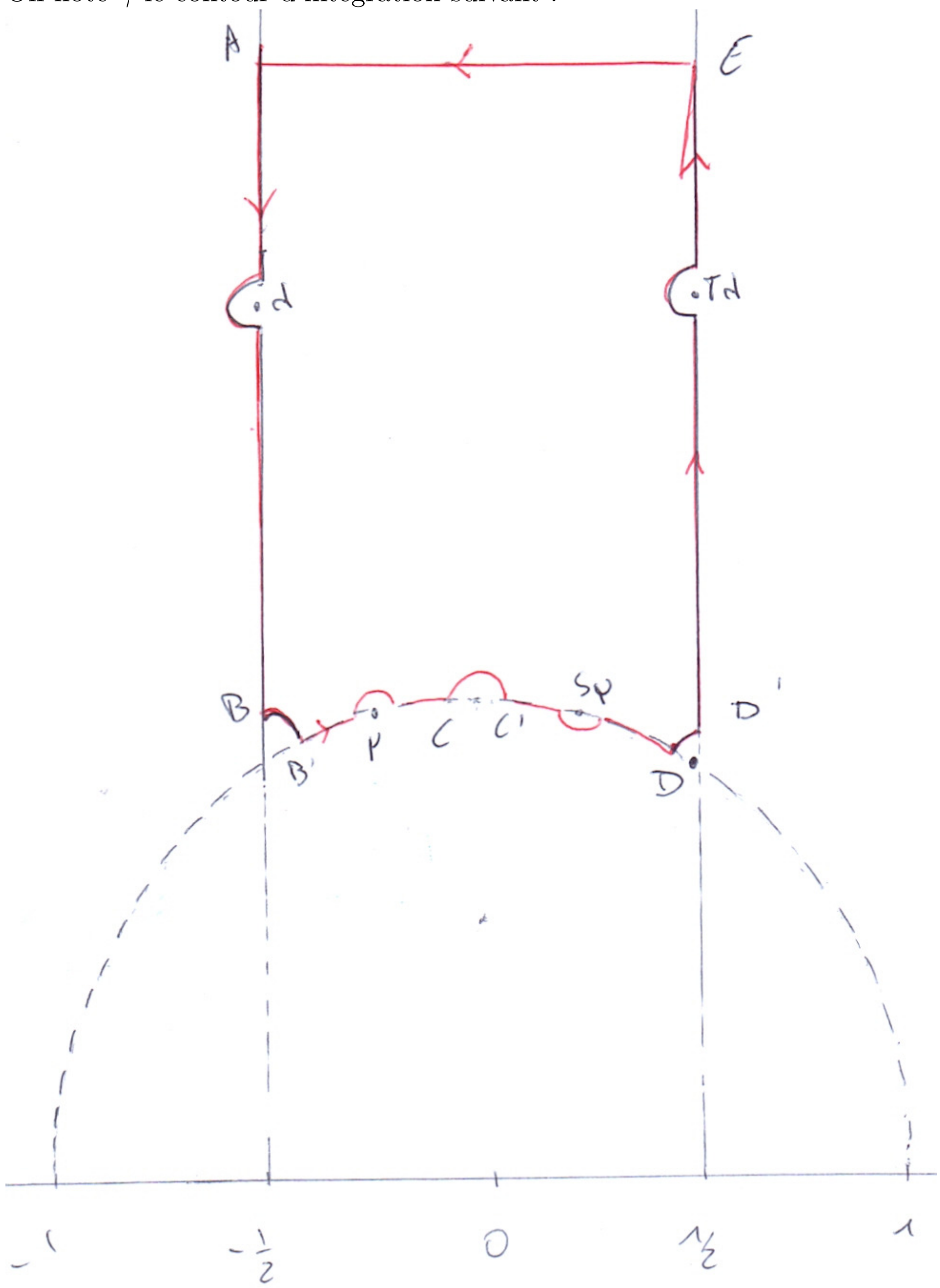
Theorème 2.1. *Soit $k \in \mathbb{Z}$ pair, et f une forme modulaire de poids k. Alors si f n'est pas identiquement nulle, on a la relation suivante, portant le nom de* formule $\frac{k}{12}$ *:*

$$v_\infty(f) + \sum_{p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}} \frac{v_p(f)}{e_p} = \frac{k}{12} = v_\infty(f) + \frac{v_i(f)}{2} + \frac{v_\rho(f)}{3} + \sum_{p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}}^{*} v_p(f)$$

où l'étoile dans la somme de la deuxième égalité signifie que l'on somme sur les $p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}$ tels que $i \notin \operatorname{orb}(p)$ et $\rho \notin \operatorname{orb}(p)$. (Cette deuxième egalité provenant simplement de la remarque 1.2 sur le domaine $\mathcal{D}$ en préliminaire qui montre que si p n'est pas dans l'orbite de ρ ni dans celle de i alors $e_p = 1$.)

Démonstration. Supposons que f ne soit pas identiquement nulle. Montrons d'abord que la quantité de gauche de l'égalité est bien définie. $\tilde{f}$ est holomorphe en zéro et n'est pas nulle donc il existe $0 < r < 1$ tels que $\tilde{f}$ ne s'annule pas sur $\mathring{D}(0,r) \setminus \{0\}$ et donc en posant $A = \frac{-\log(r)}{2\pi}$ on obtient que f ne s'annule pas dans la partie $\{\mathrm{Im}(z) > A\}$. Puis la partie $\overline{\mathcal{D}} \cap \{\mathrm{Im}\,(z) \leq A\}$ est une partie compacte du plan donc f admet un nombre fini de zéros dans cette zone. De plus si $p \in \mathbb{H}$ est un zéro de f on sait que son orbite sous Γ_0 passe par $\overline{\mathcal{D}}$ puisque $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental de $\mathbb{H}$ pour l'action de Γ_0 et par la remarque précédente son orbite est même dans la zone $\overline{\mathcal{D}} \cap \{\mathrm{Im}\,(z) \leq A\}$. Ainsi ce dernier ensemble contient au minimum un représentant de l'orbite de chaque zéro de f (de plus les orbites des éléments de son intérieur sont toutes disjointes ce qui nous servira dans l'application de la formule des résidus ensuite) et donc la somme de gauche de la formule $\frac{k}{12}$ est bien finie.

On note γ le contour d'intégration suivant :



Sur le schéma il n'y a qu'un seul zéro λ sur γ_{AB} et de même un seul zéro μ sur $\gamma_{B'C}$ mais le cas général où il y aurait plusieurs zéros se traite exactement pareil. D'après la formule des résidus et les remarques précédentes sur les représentants d'orbites de zéros on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = \sum_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}}^{*} v_p(f)$$

Simplifions cette expression. L'application $q\colon z \in \mathbb{H} \to \exp(2i\pi z) \in \mathring{D}(0,1) \setminus \{0\}$ envoie γ_{EA} sur le cercle de centre 0 et de rayon $r = \exp(-2\pi(A+1))$ parcouru dans le sens indirect ce qui donne en faisant le changement de variable $z \to q(z)$ et en combinaison la formule des résidus à $\tilde{f}$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{EA}} \frac{f'}{f}(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)^{opp}} \frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}(z)dz = -v_\infty(f)$$

où $C(0,r)^{opp}$ signifie que l'on intègre dans la sens indirect.
Ensuite $f(z) = f(z+1)$ d'où :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{AB}} \frac{f'}{f}(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{ED'}} \frac{f'}{f}(z)dz = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{D'E}} \frac{f'}{f}(z)dz$$

où $\gamma_{ED'} = \mathrm{T}\cdot\gamma_{AB}$.
Ensuite puisque f est une forme modulaire de poids k on a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \frac{f'}{f}(z) = \frac{-k}{z} + \frac{(f\circ \mathrm{S})'}{(f\circ \mathrm{S})}(z)$$

et donc :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{B'C}} \frac{f'}{f}(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{B'C}} \frac{-k}{z}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{S}\cdot\gamma_{B'C}} \frac{f'}{f}(z)dz$$

où $S\cdot\gamma_{B'C} = \gamma_{DC'} = \gamma_{C'D}^{opp}$.
On va maintenant faire tendre les rayons des arcs de cercle du contour d'intégration vers 0.
Par exemple regardons ce qu'il se passe lorsque l'arc de cercle BB' voit son rayon tendre vers 0. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel qu'au voisinage de ρ on ait $f(z) = (z-\rho)^p \cdot G(z)$ où G est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de ρ. Ainsi au voisinage de ρ on a $\frac{f'}{f}(z) = \frac{p}{(z-\rho)} + \frac{G'}{G}(z)$. Et donc quand le rayon de l'arc BB' tend vers 0 la limite de $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{BB'}} \frac{f'}{f}(z)dz$ est égale à la limite de $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{BB'}} \frac{p}{(z-\rho)}(z)dz$ par continuité de $\frac{G'}{G}$ au voisinage de ρ. Et donc cette limite vaut $\frac{1}{2i\pi}\cdot p\cdot\frac{-i\pi}{3} = \frac{-p}{6} = \frac{-v_\rho(f)}{6}$. Les autres morceaux se calculent de la même manière et donc si on récapitule, lorsque le rayon des arcs de cercle tend vers 0 on a la formule désirée.

□

Appliquons ce résultat à l'étude de l'espace $\mathscr{M}_k$.

Theorème 2.2. *(i)* $\mathscr{M}_k = \{0\}$ *pour* $k \le -1$ *et pour* $k = 2$.
(ii) $\mathscr{M}_0 = \mathbb{C}$ *et* $\mathscr{M}_k = \mathbb{C}\cdot G_k$ *pour* $k \in \{4,6,8,10\}$.
(iii) Δ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{H}$ *et admet un zéro simple à l'infini.*
(iv) $f \in \mathscr{M}_{k-12} \to \Delta\cdot f \in \mathscr{S}_k$ *pour est un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*
(v) $\mathscr{M}_k$ *est de dimension finie quel que soit* k.

Démonstration. Montrons (i)
Soit k un entier strictement négatif. Supposons qu'il existe une forme modulaire f non nulle de poids k. Alors par le théorème 2.1 on a $v_\infty(f)+\frac{v_i(f)}{2}+\frac{v_\rho(f)}{3}+\sum^*_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}} v_p(f)<0$ ce qui est impossible car tous les termes de la somme sont positifs. Ainsi dans ce cas $\mathscr{M}_k=\{0\}$. Ensuite si $k=2$ et que f était une forme modulaire de poids 2 non nulle alors par le théorème 2.1 on aurait $v_\infty(f)+\frac{v_i(f)}{2}+\frac{v_\rho(f)}{3}+\sum^*_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}} v_p(f)=\frac{1}{6}$ ce qui n'est pas possible car ou bien tous les termes de la somme sont nuls ou bien cette somme est supérieure ou égale à $\frac{1}{3}$. Ainsi $\mathscr{M}_2=\{0\}$.
Montrons (ii).
Soit $k\in\{0,4,6,8,10\}$ et supposons qu'il existe une forme parabolique non nulle de poids k que l'on note f. Alors par le théorème 2.1 on aurait $v_\infty(f)+\frac{v_i(f)}{2}+\frac{v_\rho(f)}{3}+\sum^*_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}} v_p(f)=\frac{k}{12}<1$ ce qui est impossible puisque $v_\infty(f)\geq 1$. Ainsi pour ces valeurs de k on a $\mathscr{S}_k=\{0\}$. Ainsi si $f\in\mathscr{M}_0$ alors $f-\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f(z)\in\mathscr{S}_0$ et donc $f=\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} f(z)$ et donc $\mathscr{M}_0=\mathbb{C}$. Ensuite si $k\in\{4,6,8,10\}$ alors par la remarque 2.4 on obtient bien $\mathscr{M}_k=\mathbb{C}\cdot G_k$.
Montrons (iii).
Remarquons d'abord que $E_6(i)=E_{6|_6S}(i)=\frac{1}{i^6}E_6(i)$ et donc $E_6(i)=0$. De la même manière $E_4(\rho)=E_{4|_4\mathrm{S}\cdot\mathrm{T}}(\rho)=\frac{1}{(\rho+1)^4}E_4(\rho)$ et donc $E_4(\rho)=0$. Appliquons maintenant le théorème 2.1 à E_4 et E_6 qui sont bien des formes modulaires non nulles :

$$v_\infty(E_4)+\frac{v_i(E_4)}{2}+\frac{v_\rho(E_4)}{3}+\sum^*_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}} v_p(E_4)=\frac{1}{3}$$

.

$$v_\infty(E_6)+\frac{v_i(E_6)}{2}+\frac{v_\rho(E_6)}{3}+\sum^*_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}} v_p(E_6)=\frac{1}{2}$$

. or $v_\rho(E_4)\geq 1$ et $v_i(E_6)\geq 1$ ainsi la seule possibilité est que E_4 ne s'annule qu'en ρ avec un zéro simple et de même pour E_6 en i. Ainsi $\Delta(\rho)\neq 0$ et donc Δ est une forme modulaire non nulle. On applique alors le théorème 2.1 à Δ ce qui donne $v_\infty(\Delta)+\frac{v_i(\Delta)}{2}+\frac{v_\rho(\Delta)}{3}+\sum^*_{p\in\Gamma_0\backslash\mathbb{H}} v_p(\Delta)=1$. Or $v_\infty(\Delta)\geq 1$ et donc on Δ admet un zéro simple à l'infini est ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$.
Montrons (iv).
Tous d'abord si f est une forme modulaire de poids $k-12$ alors $\Delta\cdot f$ est bien dans $\mathscr{S}_k$ donc l'application est bien définie. Ensuite si $\Delta\cdot f$ est identiquement nulle alors f est nulle puisque Δ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$ donc l'application introduite (évidemment linéaire) est injective. Enfin si on se fixe $f\in\mathscr{S}_k$ alors puisque $\frac{1}{\Delta}$ admet un pole simple à l'infini et que f s'annule a l'infini alors $\frac{f}{\Delta}$ définit bien une forme modulaire de poids $k-12$ donc l'application est bien surjective et est donc bien un isomorphisme.
Montrons (v).
On va procéder par récurrence. On a déjà montré que $\mathscr{M}_{2k}$ est de dimension finie pour $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ (on va s'intéresser uniquement aux cas paires positifs puisque les autres sont triviaux) ce qui va constituer notre initialisation. Soit $n>0$ fixé et supposons que pour toutes les valeurs inférieures $m<n$ on ai montré que $\mathscr{M}_{12m+2k}$ est de

dimension finie pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Alors on a $\forall k \in \{0,1,2,3,4,5\}, \dim(\mathscr{S}_{12n+2k}) = \dim(\mathscr{M}_{12(n-1)+2k})$ par (iv) et donc par la remarque 2.4 on a bien $\mathscr{M}_{12n+2k}$ est de dimension finie pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ ce qui conclut la démonstration par récurrence.

□

2.3 Dimension de $\mathscr{M}_k(\Gamma)$

Nous allons maintenant montrer que $\dim(\mathscr{M}_k(\Gamma)) < \infty$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$ et Γ sous groupe d'indice fini de Γ_0.

Theorème 2.3. *Soit $k \in \mathbb{Z}$ et Γ sous groupe d'indice fini de Γ_0 fixés.*
On a $\dim(\mathscr{M}_k(\Gamma)) < \infty$. De plus si $k < 0$ alors $\mathscr{M}_k(\Gamma) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $m := [\Gamma_0 : \Gamma]$ et $N \in \mathbb{N}^*, N > \frac{mk}{12}$. Et considérons un ensemble $\mathcal{N}$ de N point distinct pris dans $\mathcal{D}$ où on rappelle que $\mathcal{D} := \left\{z \in \mathbb{H}, |\mathrm{Re}(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\right\}$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ_0 sur $\mathbb{H}$. Considérons l'application linéaire $\Phi : f \in \mathscr{M}_k(\Gamma) \to \{f(n), n \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{C}^N$. On va montrer que cette application est injective ce qui donnera bien $\dim(\mathscr{M}_k(\Gamma)) < \infty$.
Supposons que $\Phi(f) = 0$. Considérons alors $g : z \in \mathbb{H} \to \prod_{\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_0} f_{|_k\gamma}(z) \in \mathbb{C}$ où le produit porte sur un système quelconque de représentant de $\Gamma\backslash\Gamma_0$. Cette fonction est bien définie puisque si $\tilde{\gamma} \in \Gamma \cdot \gamma$ (c'est a dire que $\tilde{\gamma}$ et γ sont dans la même classe à gauche modulo Γ) alors $f_{|_k\gamma} = f_{|_k\tilde{\gamma}}$ car $f \in \mathscr{M}_k(\Gamma)$. Cette application est holomorphe et par la condition (iii) de la définition 2.2 on a que $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} g(z)$ existe. Enfin si $\tilde{\gamma} \in \Gamma_0$ alors $g_{|_{km}\tilde{\gamma}} = \prod_{\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_0} f_{|_k\gamma\cdot\tilde{\gamma}}$. Or si $\{\gamma_i, i \in \{1,\dots,m\}\}$ est un système de représentant de $\Gamma\backslash\Gamma_0$ alors $\{\gamma_i\tilde{\gamma}, i \in \{1,\dots,m\}\}$ est aussi un tel système de représentant. En effet si $M \in \Gamma_0$ alors $\exists i \in \{1,\dots,m\}, \tilde{\gamma}^{-1}M = \gamma\gamma_i$ où $\gamma \in \Gamma$ car $\tilde{\gamma}^{-1}M \in \Gamma_0$. Et donc $\gamma_i\tilde{\gamma}$ est bien un représentant de M. Ainsi donc on a $g_{|_{km}\tilde{\gamma}} = \prod_{\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_0} f_{|_k\gamma} = g$ et donc $g \in \mathscr{M}_{mk}$.
Supposons par l'absurde que g ne soit pas identiquement nulle. Remarquons que g est le produit de f par une fonction holomorphe car pour γ congru à l'identité modulo Γ on a $f_{|_k\gamma} = f$ donc f apparait dans le produit qui définit g. Ainsi puisque $\Phi(f) = 0$ on a que g admet au moins N zéro dans $\mathcal{D}$. Puisque on a supposé g non nulle on a par le théorème 2.1 :

$$\frac{km}{12} = v_\infty(g) + \frac{v_i(g)}{2} + \frac{v_\rho(g)}{3} + \sum_{p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}}^{*} v_p(g) \geq N > \frac{km}{12}$$

ce qui est absurde. Ainsi on a que $g = 0$. Or rappelons que si F et G sont deux fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ connexe alors $FG = 0$ implique $F = 0$ ou $G = 0$. Ainsi des facteurs de g est nulle c'est à dire $\exists \gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_0, f_{|_k\gamma} = 0$. Et donc $f_{|_k\gamma|_k\gamma^{-1}} = f = 0$ ce qui montre l'injectivité de Φ.
Montrons que si $k < 0$ alors $\mathscr{M}_k(\Gamma) = \{0\}$. Soit $k < 0$ fixé et $f \in \mathscr{M}_k(\Gamma)$, on pose g comme précédemment. Alors $g \in \mathscr{M}_{mk}$ comme on l'a montré précédemment. Ainsi si g n'est pas identiquement nulle on a par le théorème 2.1 :

$$0 > \frac{km}{12} = v_\infty(g) + \frac{v_i(g)}{2} + \frac{v_\rho(g)}{3} + \sum_{p \in \Gamma_0\backslash\mathbb{H}}^{*} v_p(g) \geq 0$$

ce qui est absurde et comme précédemment on a que $g = 0$ et donc $f = 0$. Ainsi $\mathscr{M}_k(\Gamma) = \{0\}$. $\square$

3 Produit scalaire de Petersson sur $\mathscr{S}_k(\Gamma)$

Dans cette section on fixe $k \in \mathbb{N}$ et Γ un sous groupe d'indice fini de Γ_0. On va introduire un produit hermitien sur $\mathscr{S}_k(\Gamma)$.

Proposition 3.1. *Soit* $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma)$.
Alors $z \in \mathbb{H} \to \mathrm{Im}\,(z)^{\frac{k}{2}}|f(z)| \in \mathbb{R}^+$ *est bornée sur* $\mathbb{H}$.

Démonstration. Γ étant d'indice fini dans Γ_0, par le corolaire 1.3 il existe $\mathcal{R}$ un sous ensemble fini de Γ_0 tel que $\mathcal{D}_\Gamma := \sqcup_{\gamma \in \mathcal{R}} \gamma \cdot \mathcal{D}$ est un domaine fondamental de Γ. De plus si $\gamma \in \mathcal{R}$ alors $f_{|_k\gamma} \in \mathscr{S}_k(\gamma^{-1} \cdot \Gamma \cdot \gamma)$ avec $\Gamma_\gamma := \gamma^{-1} \cdot \Gamma \cdot \gamma$ sous groupe d'indice fini de Γ_0 puisque Γ est d'indice fini et que $\gamma \in \Gamma_0$. Ainsi $f_{|_k\gamma}$ admet un q-développement par la proposition 2.2. Or $f_{|_k\gamma}$ est parabolique, ainsi, puisque $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} f_{|_k\gamma}(z) = 0$, on a $a_0 = 0$ (où a_0 est le premier terme du q-développement de $f_{|_k\gamma}$) et donc $f_{|_k\gamma}(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z) \to +\infty}{\mathcal{O}}(q(z))$ c'est à dire $f_{|_k\gamma}(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z) \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\exp \frac{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}{\alpha_\gamma}\right)$. On pose $\alpha = \max_{\gamma \in \mathcal{R}}(\alpha_\gamma)$ de manière à avoir :

$$\forall \gamma \in \mathcal{R}, f_{|_k\gamma}(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z) \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\exp \frac{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}{\alpha}\right)$$

On pose maintenant $\Phi : z \in \mathbb{H} \to \mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}}|f(z)|$ qui est Γ invariante (ie $\forall z \in \mathbb{H}, \forall \gamma \in \Gamma, \Phi(\gamma \cdot z) = \Phi(z)$). Pour la proposition il suffit donc de montrer que Φ est bornée sur $\overline{\mathcal{D}_\Gamma}$ et donc puisque Φ est continue il suffit de le prouver sur $\mathcal{D}_\Gamma$. Or si $\gamma \in \mathcal{R}$ et $z \in \gamma \cdot \mathcal{D}$ alors il existe $\tilde{z} \in \mathcal{D}$ tel que $z = \gamma \cdot \tilde{z}$ et donc $\Phi(z) = [\mathrm{Im}\,\tilde{z}]^{\frac{k}{2}}\,|f_{|_k\gamma}(\tilde{z})|$. Ainsi il suffit de montrer que $\forall \gamma \in \mathcal{R}$ on a $\Phi_\gamma : z \in \mathbb{H} \to \mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}}|f_{|_k\gamma}(z)|$ est borné sur $\mathcal{D}$ ce qui est vrai puisque Φ_γ est continue et que $\Phi_\gamma(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z) \to +\infty}{\mathcal{O}}(1)$ (puisque $f_{|_k\gamma}(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z) \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\exp \frac{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}{\alpha}\right)$). Cela conclut la preuve. $\square$

Remarque 3.1. On retiendra que si $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma)$ alors $\forall \gamma \in \Gamma_0$ il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_{|_k\gamma}(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z) \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\exp \frac{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}{\alpha}\right)$ (où la constante $C > 0$ telle que $f_{|_k\gamma}(z) \leq C \cdot \exp \frac{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}{\alpha}$ dépend de f).

Definition-Proposition 3.1. *Soit* $f, g \in \mathscr{S}_k(\Gamma)$ *fixées.*
On définit :

$$\langle f|g \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(z)\overline{g}(z) y^k d\mu_0(z),$$

où μ_0 *est la mesure image de la mesure* $\frac{dxdy}{y^2}$ *par la projection continue de* $\mathbb{H}$ *sur* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *munit de la topologie quotient. Par la formule de transfert, ce produit scalaire se ramène à :*

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathcal{D}_\Gamma} f(z)\overline{g}(z) y^{k-2} dxdy,$$

où $\mathcal{D}_\Gamma$ est un domaine fondamental quelconque pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$.
On notera $\|\|_2^\Gamma$ la norme induite par ce produit scalaire (on omettra le Γ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté).

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $z \in \mathbb{H} \to f(z)\overline{g}(z)y^k \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{H}$ et invariante sous l'action de poids 0 de Γ. Elle induit donc par passage au quotient une application continue sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ muni de la topologie quotient. Ainsi en munissant $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ de la tribu des Boréliens associée à la topologie quotient on obtient une application mesurable sur le quotient.
Pour montrer que le produit scalaire est bien définit il suffit donc (par la formule de transfert des mesures et puisque $\int_{\overline{\mathcal{D}_\Gamma}\backslash\mathcal{D}_\Gamma} \frac{dxdy}{y^2} = 0$) de montrer que la deuxième intégrale de l'énoncé converge. Γ est un sous groupe d'indice fini de Γ_0 ainsi on obtient par le corollaire 1.3 un domaine fondamental $\mathcal{D}_\Gamma = \sqcup_{i\in\{1,\dots,\nu\}}\gamma_i \cdot \mathcal{D}$ avec les γ_i dans Γ_0. Il suffit donc de montrer que $\forall i \in \{1,\dots,\nu\}$ on a :

$$\int_{\gamma_i\cdot\mathcal{D}} f(z)\overline{g}(z)y^{k-2}dxdy$$

existe. Mais en faisant le changement de variable $z = \gamma_i \cdot z'$ on obtient :

$$\int_{\gamma_i\cdot\mathcal{D}} |f(z)\overline{g}(z)y^{k-2}|dxdy = \int_{\mathcal{D}} |f_{|_k\gamma_i}(z)\overline{g_{|_k\gamma_i}}(z)y^{k-2}|dxdy$$

Or $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma)$ ainsi par la remarque 3.1 $f_{|_k\gamma_i}(z) = \underset{\mathrm{Im}\,(z)\to+\infty}{\mathcal{O}}(\exp(\frac{-2\pi y}{\alpha}))$ et de même pour $g_{|_k\gamma_i}$ avec α un entier strict positif. Ainsi $z \in \mathcal{D} \to f_{|_k\gamma_i}(z)\overline{g_{|_k\gamma_i}}(z)y^{k-2} \in \mathbb{C}$ est bornée. Enfin puisque $\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{y^2} < \infty$ on à bien :

$$\int_{\mathcal{D}} |f_{|_k\gamma_i}(z)\overline{g_{|_k\gamma_i}}(z)y^{k-2}|dxdy < \infty$$

Le fait que $\langle .,. \rangle$ soit sesquilinéaire et hermitien se vérifie trivalement. Enfin si $\langle f, f\rangle = 0$ alors f est nulle sur un domaine fondamental $\mathcal{D}_\Gamma$ et donc sur sa fermeture par continuité de f. Ainsi si $z \in \mathbb{H}$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot z \in \overline{\mathcal{D}_\Gamma}$ et donc $f_{|_k\gamma}(z) = f(z) = (cz+d)^{-k}f(\gamma\cdot z) = 0$ en écrivant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \gamma$. Donc $f = 0$ et $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire hermitien sur $\mathscr{S}_K(\Gamma)$, ce qui conclut la preuve. □

4 Sous-groupe de congruence

A partir de maintenant et jusqu'à la fin on ne s'intéressera plus qu'au cas où Γ est un sous-groupe de congruence principal de Γ_0.

Définition 4.1. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 1$ fixé.
On définit le *sous groupe de congruence principal d'indice* m de Γ_0 par :

$$\Gamma_0(m) = \left\{ M \in \Gamma_0, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, c \equiv 0 \pmod m \right\}$$

La proposition suivante donne un système de représentantss de $\Gamma_0(m) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 4.1 (Ensemble de réprésentants de $\Gamma_0(m) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)**.** *Soit m sans facteurs carrés. Pour $q|m$ on choisit β, γ tels que $\frac{m}{q}\beta - q\gamma = 1$ et on note*

$$B_q = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ q\gamma & m/q \end{pmatrix} \underset{si\ q \neq m}{=} W_{m/q} \begin{pmatrix} q/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } A_{q,j} = B_q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & j \end{pmatrix} \text{ pour } 0 \leq j \leq q-1$$

Alors $\{A_{q,j}\ ,\ q|m \text{ et } 0 \leq j \leq q-1\}$ est un système de représentantss de $\Gamma_0(m) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. On vérifie d'abord que les classes des $A_{q,j}$ sont distinctes. Soit q, j, q', j' tels que $A_{q,j}A_{q',j'}^{-1} \in \Gamma_0(m)$. Le calcul donne

$$A_{q,j}A_{q',j'}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{m}{q'}q\gamma - \frac{m}{q}q'\gamma' + \frac{mm}{qq'}(j-j') & * \end{pmatrix}$$

ce coefficient est divisible par m, donc qq' divise

$$q^2\gamma - q'^2\gamma' + m(j-j') = m\beta - q - m\beta' + q' + m(j-j')$$

Maintenant si $q \neq q'$ on peut supposer que $q \nmid q'$ or

$$q \mid m\beta - q - m\beta' + m(j-j') \text{ absurde}$$

Donc $q = q'$. Finalement q divise $\frac{m}{q}(j-j')$ donc q divise $|j-j'| < q$ puisque $q \wedge \frac{m}{q} = 1$, donc $j = j'$ et on a montré que les classes des $A_{g,j}$ sont distinctes.

Il reste à montrer que
$$|\Gamma_0(m) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})| = \sum_{q|m} q$$

Pour cela on considère le morphisme de la réduction modulo m $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Comme $\mathrm{Ker}(\pi) \subset \Gamma_0(m)$,

$$|\Gamma_0(m) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})| = \frac{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{|\pi(\Gamma_0(m)|}$$

$$\bullet|\pi(\Gamma_0(m))| = |\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } a \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \text{ et } x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}|$$
$$= m\varphi(m)$$

$\Gamma_0(m)$ est la préimage par π de cet ensemble pratiquement par définition, et la surjectivité est garantie par la surjectivité de π dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, qui est un résultat classique.

- m est sans facteurs premiers, d'après le théorème des restes chinois,

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}\,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &= \mathrm{SL}\prod_{p|m}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\\ &= \prod_{p|m}\mathrm{SL}\,Z/p\mathbb{Z}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|\mathrm{SL}\,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| &= \prod_{p|m}(p^2-1)(p^2-p)/(p-1)\\ &= \prod_{p|m}\underbrace{(p+1)}_{\sum_{q|m}q}\underbrace{(p-1)}_{\varphi(m)}\underbrace{p}_{m}\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. □

Proposition 4.2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé.*
Alors $[\Gamma_0 : \Gamma_0(m)] < \infty$.

Démonstration. Considérons le morphisme de réduction modulo m que l'on note :

$$\varphi : M \in \Gamma_0 \to \overline{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}),$$

alors en notant :

$$\Gamma_1(m) := \mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0, a \equiv d \equiv 1 \pmod m, c \equiv b \equiv 0 \pmod m\right\},$$

on a $\Gamma_0/\Gamma_1(m)$ isomorphe à $\mathrm{Im}(\varphi)$ et donc $\Gamma_1(m)$ est d'indice fini dans Γ_0 puisque $\mathrm{Im}(\varphi)$ est fini en tant que sous groupe du groupe fini $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Or $\Gamma_1(m)$ est un sous groupe de $\Gamma_0(m)$ donc $\Gamma_0(m)$ est bien d'indice fini dans Γ_0. □

On va aussi parler de forme de niveau fixée et de poids fixé qui sont définit ci-dessous.

Définition 4.2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$ fixés.
On appelle forme modulaire de niveau N et de poids k les éléments de $\mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$

5 Algèbre de Hecke

Dans cette section on va introduire les opérateurs de Hecke sur $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$.

5.1 Opérateurs de Hecke

Soient $k \geq 0$ et $N \geq 1$ des entiers fixés pour toute cette partie. Introduisons les sous-ensembles de matrices qui nous intéresseront par la suite.

Définition 5.1. On définit pour $l \in \mathbb{N}^*$:

$$G_l(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), ad-bc = l, a \wedge N = 1, c \equiv 0 \pmod N\right\}$$

Remarque 5.1. Remarquons que $\Gamma_0(N)$ agit par multiplication à gauche sur $G_l(N)$. En effet si $\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ N\tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ et si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in G_l(N)$ alors $\tilde{M} \cdot M = \begin{pmatrix} a\tilde{a} + Nc\tilde{b} & * \\ Na\tilde{c} + Nc\tilde{d} & * \end{pmatrix}$. On a $Na\tilde{c} + Nc\tilde{d} \equiv 0 \pmod N$ et $(a\tilde{a} + Nc\tilde{b}) \wedge N = 1$ car $\tilde{a}\tilde{d} - N\tilde{b}\tilde{c} = 1$ donc $\tilde{a} \wedge N = 1$ et donc $\tilde{a}a \wedge N = 1$ et ainsi si $p|(Na\tilde{c} + Nc\tilde{d}) \wedge N$ alors $p|\tilde{a}a \wedge N = 1$ d'où $\tilde{M}M \in G_l(N)$.

Donnons un système de représentants pour cette action.

Proposition 5.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
On pose :

$$\Delta_n(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, ad = n, a \wedge N = 1, 0 \le b < d \right\}$$

Alors $\Delta_n(N)$ est un système complet de représentants de $G_n(N)$ pour l'action à gauche de $\Gamma_0(N)$.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_n(N)$. Montrons qu'il existe $B \in \Gamma_0(N)$ tel que $BA \in \Delta_n(N)$.
On pose $\gamma := \frac{c}{a \wedge c}$ et $\delta := \frac{-a}{a \wedge c}$. On a $a \wedge c | c$ et $N|c$ or $(a \wedge c) \wedge N = 1$ car $a \wedge c | a$ et $a \wedge N = 1$ donc $(a \wedge c)N|c$ c'est à dire $N|\gamma$. D'autre part $\gamma \wedge \delta = 1$ donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et donc $B := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. En faisant le calcul on obtient $BA = \begin{pmatrix} -a \wedge c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c = 0 & \delta d + \gamma b = \frac{-n}{a \wedge c} \end{pmatrix}$ et on a $(-a \wedge c) \wedge N = 1$. Quitte à multiplier B par $-\mathrm{I}_2 \in \Gamma_0(N)$ on peut supposer que $BA = \begin{pmatrix} a \wedge c & -(\alpha b + \beta d) \\ 0 & \frac{n}{a \wedge c} \end{pmatrix}$ avec $a \wedge c \ge 1$.
Alors en multipliant par $\mathrm{T}^m \in \Gamma_0(N)$ (avec m que l'on déterminera plus tard) on obtient $\mathrm{T}^m BA = \begin{pmatrix} a \wedge c & -(\alpha b + \beta d) + m\frac{n}{a \wedge c} \\ 0 & \frac{n}{a \wedge c} \end{pmatrix}$ ainsi en posant $\tilde{a} := a \wedge c$ et $\tilde{d} := \frac{n}{\tilde{a}}$ et $m, r \in \mathbb{Z} \times \{0, \ldots, \tilde{d} - 1\}$ tels que $-(\alpha b + \beta d) + m\tilde{d} = r$ on a $\mathrm{T}^m BA = \begin{pmatrix} \tilde{a} & r \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \Delta_n(N)$.
Montrons maintenant que deux éléments distinct de $\Delta_n(N)$ ne sont pas dans la même orbite sous $\Gamma_0(N)$.
Supposons qu'il existe $A \in \Gamma_0(N)$ et $B, C \in \Delta_n(N)$ tels que $AB = C$ montrons alors que $A = \mathrm{I}_2$. On note $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$. Alors par le calcul on a $\gamma a = 0$ et donc $\gamma = 0$, de plus $\alpha\delta = 1$ car $A \in \Gamma_0(N)$ et donc $\alpha = \delta = \pm 1$. Or si $\alpha = \delta = -1$ alors $a = -x < 0$ ce qui est absurde puisque $B \in \Delta_n(N)$. Ainsi $\alpha = \delta = 1$. Donc $b + \beta d = y$ et alors $|\beta d| = |y - b| \in \{0, \ldots, d - 1\}$ puisque $y, b \in \{0, \ldots, d - 1\}$. Et donc $\beta = 0$ et $A = \mathrm{I}_2$ ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 5.2. Remarquons la chose suivante. Si on considère :

$$\mathcal{D}_{(a,d)} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Delta_n(N), b \in \{0, \ldots, d-1\} \right\}$$

partie à $d-1$ éléments de $\Delta_n(N)$ alors cette partie est équivalente modulo $\Gamma_0(N)$ à toute partie $\mathcal{D}_{(a,d,S_d)} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Delta_n(N), b \in S_d \right\}$ où S_d est un système quelconque de $d-1$ représentants de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ puisque si $b \equiv \tilde{b} \pmod d$ alors $b = \tilde{b} + dq$ et donc $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \mathrm{T}^q \begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ 0 & d \end{pmatrix} \pmod{\Gamma_0(N)}$.

Ainsi on peut noter $\mathcal{D}_{(a,d)} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Delta_n(N), b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \right\}$ et on a un système de représentant donné par :

$$\Delta_n(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, ad = n, a \wedge N = 1, b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \right\}$$

On va maintenant pouvoir introduire les opérateurs de Hecke de niveau N et de poids k.

Definition-Proposition 5.1. *On définit l'opérateur de* Hecke *de niveau N et de poids k d'ordre n par :*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}_{k,N}(n) \colon & \mathscr{M}_k(\Gamma_0(N)) & \to & \mathscr{M}_k(\Gamma_0(N)) \\ & f & \mapsto & n^{\frac{k}{2}-1} \sum\limits_{y \in \Gamma_0(N) \backslash G_n(N)} f_{|_k y} \end{array}$$

De plus $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ est stable par les $T_{k,N}(n), n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Tout d'abord remarquons que puisque $f \in \mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$ alors cela a bien un sens de sommer sur $\Gamma_0(N)\backslash G_n(N)$ car la somme est indépendante du système de représentants choisi pour $\Gamma_0(N)\backslash G_n(N)$. De plus si $\gamma \in \Gamma_0(N)$ alors :

$$\mathrm{T}_{k,N}(n) f_{|_k \gamma} = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{y \in \Gamma_0(N) \backslash G_n(N)} f_{|_k y\gamma}$$

et si $\mathcal{R}$ est un système de représentant de $\Gamma_0(N)\backslash G_n(N)$ alors $\mathcal{R} \cdot \gamma$ en est aussi un. Donc on a bien $\mathrm{T}_{k,N}(n) f_{|_k \gamma} = \mathrm{T}_{k,N}(n) f$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$ et donc puisque $f \in \mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$ on a bien que :

$$\forall M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}), \lim_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} \mathrm{T}_{k,N}(n) f_{|_k M}(z) = \lim_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{y \in \Gamma_0(N) \backslash G_n(N)} f_{|_k yM}(z)$$

existe puisque $\forall y \in \Gamma_0(N)\backslash G_n(N), yM \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$. Ainsi on a bien $\mathrm{T}_{k,N}(n) f \in \mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$. Enfin si $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ on a bien :

$$\forall M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}), \lim_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} \mathrm{T}_{k,N}(n) f_{|_k M}(z) = \lim_{\mathrm{Im}(z) \to +\infty} n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{y \in \Gamma_0(N) \backslash G_n(N)} f_{|_k yM}(z) = 0$$

et donc $\mathrm{T}_{k,N}(n) f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 5.3. Pour la suite de cette section on travaille à poids $k \geq 0$ et niveau $N \geq 1$ fixés. Pour simplifier les notationss on notera pour le reste de cette section $\mathrm{T}_{k,N}(n) = \mathrm{T}(n)$.

Les opérateurs de Hecke vérifient la relation de composition suivante.

Theorème 5.1. *Soit $m, n \geq 1$.*
Alors on a :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} d^{k-1}\,\mathrm{T}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

La démonstration est longue et technique, nous la laissons en appendice.

On démontre aussi en appendice le théorème suivant :

Theorème 5.2. *La $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par les opérateur $\mathrm{T}(n), n \in \mathbb{N}^*$ que l'on appelle* algèbre de Hecke *de poids k et niveau N est commutative.*

5.2 Les opérateurs $\mathrm{T}(p)$ sont hermitiens

Dans cette section on travaille toujours à poids $k \geq 0$ et niveau $N \geq 1$ fixés, l'objectif va être de montrer que les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}(n)$ pour $n \wedge N = 1$ sont hermitiens pour le produit scalaire de Petersson. Cependant on va avant cela donner une nouvelle expression des opérateurs de Hecke qui nous servira pour atteindre l'objectif.

Remarque 5.4. Si $n \wedge N = 1$ alors $\mathrm{T}(n)$ est un produit de $\mathrm{T}(p_i^{\alpha_i})$ avec les p_i des nombres premiers ne divisant pas N (par la section précédente) et par récurrence sur r les $\mathrm{T}(p^r)$ pour p premier ne divisant pas N sont les objets suivantss en $\mathrm{T}(p)$ à coefficients entiers (on utilise la proposition proposition 14.2). Ainsi il suffit de démontrer le théorème suivant pour atteindre notre objectif.

Theorème 5.3. *Soit p un nombre premier ne divisant pas N. Alors :*

$$\forall f, g \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N)), \langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g\rangle = \langle f, g_{|\mathrm{T}(p)}\rangle$$

Fixons p premier ne divisant pas N. On choisit alors $\mathrm{U} := \begin{pmatrix} p\beta & 1 \\ N\gamma & 1 \end{pmatrix}$ avec $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $p\beta - N\gamma = 1$ c'est à dire $\mathrm{U} \in \Gamma_0(N)$ (ce qui est possible puisque $p \wedge N = 1$).

Definition-Proposition 5.2. *On définit :*

$$\Gamma_0(N,p) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0, b \equiv 0 \pmod p, c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

c'est un sous groupe de $\Gamma_0(N)$ et on obtient un système complet de représentant de $\Gamma_0(N,p)\backslash\Gamma_0(N)$ en considérant les :

$$\mathrm{T}^j, j \in \{0, \dots, p-1\}$$

et U.

Démonstration. Soit $V = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Alors ou bien $a \wedge p = 1$ et dans ce cas il existe $j \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $b \equiv aj \pmod p$ et donc $V \cdot \mathrm{T}^{-j} = \begin{pmatrix} * & b-aj \\ & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ avec $p|b-aj$ et donc $V \in \Gamma_0(N,p) \cdot \mathrm{T}^j$. Ou bien $a|p$ et dans ce cas $V \cdot \mathrm{U}^{-1} = \begin{pmatrix} * & -a+p\beta b \\ & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ avec $p|-a+p\beta b$ et donc $V \in \Gamma_0(N,p) \cdot \mathrm{U}$.
Enfin on vérifie facilement que les T^j ne sont pas congrus modulo $\Gamma_0(N,p)$ et que $\mathrm{T}^j \cdot \mathrm{U}^{-1} \notin \Gamma_0(N,p)$ ce qui conclut la preuve. □

Remarque 5.5. (i) En posant $\mathrm{A}_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on à que $\left\{\mathrm{A}_p^{-1} \cdot \mathrm{T}^j, j \in \{0, \dots, p-1\}\right\} \cup \{\mathrm{A}_p\}$ est le même système de représentants de $\Gamma_0(N) \backslash G_p(N)$ que celui donné par $\Delta_p(N)$, ainsi on a $f_{|\mathrm{T}(p)} = p^{\frac{k}{2}-1} \left[f_{|_k \mathrm{A}_p} + \sum_{j \in \{0,\dots,p-1\}} f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1} \cdot \mathrm{T}^j} \right]$. Or $\mathrm{A}_p^{-1} \cdot \mathrm{U} = M \cdot \mathrm{A}_p$ où $M = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ N\gamma & p \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ et donc $f_{|_k \mathrm{A}_p} = f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1} \cdot \mathrm{U}}$ ce qui se réécrit puisque $f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1}} \in \mathscr{M}_k(\mathrm{A}_p\, \Gamma_0(N)\, \mathrm{A}_p^{-1} \cap \Gamma_0(N))$ avec par le calcul $\mathrm{A}_p\, \Gamma_0(N)\, \mathrm{A}_p^{-1} \cap \Gamma_0(N) = \Gamma_0(N,p)$:

$$f_{|\mathrm{T}(p)} = p^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N,p) \backslash \Gamma_0(N)} f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1} \gamma}$$

(ii) Pour ne pas faire de confusion on notera $\langle f, g, \Gamma \rangle$ pour parler du produit scalaire de Petersson de deux forme paraboliques sur Γ sous-groupe d'indice fini de Γ_0(étant donné que la définition de celui ci dépend du groupe Γ considéré).

Démontrons maintenant le théorème 5.3.

Démonstration. On a :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N) \rangle = p^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N,p) \backslash \Gamma_0(N)} \int_{\mathcal{D}_{\Gamma_0(N)}} f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1} \gamma}(z) \overline{g}(z) \operatorname{Im}(z)^k \frac{dxdy}{y^2},$$

et donc en faisant les changement de variable $z_\gamma = \gamma \cdot z$ on obtient (et puisque $d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$ est invariante par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$)) :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N) \rangle = p^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N,p) \backslash \Gamma_0(N)} \int_{\gamma \cdot \mathcal{D}_{\Gamma_0(N)}} f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1}}(z) \overline{g_{|_k \gamma^{-1}}}(z) \operatorname{Im}(z)^k \frac{dxdy}{y^2},$$

et donc puisque $g_{|_k \gamma^{-1}} = g$ (car $g \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$) alors on a :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N) \rangle = p^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N,p) \backslash \Gamma_0(N)} \int_{\gamma \cdot \mathcal{D}_{\Gamma_0(N)}} f_{|_k \mathrm{A}_p^{-1}}(z) \overline{g}(z) \operatorname{Im}(z)^k \frac{dxdy}{y^2},$$

ce qui revient à :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N)\rangle = p^{\frac{k}{2}-1} \cdot \int_{\sqcup_{\gamma\in\Gamma_0(N,p)\backslash\Gamma_0(N)}\gamma\cdot\mathcal{D}_{\Gamma_0(N)}} f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}}(z)\overline{g}(z)\,\mathrm{Im}(z)^k\frac{dxdy}{y^2},$$

or $\sqcup_{\gamma\in\Gamma_0(N,p)\backslash\Gamma_0(N)}\gamma\cdot\mathcal{D}_{\Gamma_0(N)}$ est un domaine fondamental de $\Gamma_0(N,p)$ et puisque $f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N,p))$ et que $g \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N)) \subset \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N,p))$ on a :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N)\rangle = \langle f_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, g, \Gamma_0(N,p)\rangle,$$

On va maintenant montrer que $\langle f_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, g, \Gamma_0(N,p)\rangle = \langle f, g_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, \Gamma_0(N,p)\rangle$.
On introduit $\mathrm{W} := \begin{pmatrix}\alpha p & \beta p\\ N\gamma & \delta p\end{pmatrix}$ telle que $\alpha\delta p - N\beta\gamma = 1$ ce qui est possible puisque $p\wedge N = 1$. Alors par de simple calculs on montre :

(i) $\mathrm{W}^{-1}\cdot\Gamma_0(N,p)\cdot\mathrm{W} = \Gamma_0(N,p)$

(ii) $\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\mathrm{W} \in \Gamma_0(N)$

(iii) $\frac{1}{p}\cdot\mathrm{A}_p\cdot\mathrm{W} \in \Gamma_0(N)$

On pose maintenant $\tilde{\mathrm{W}} := \frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\mathrm{W} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ alors comme précédemment avec le changement de variable $z = \tilde{\mathrm{W}}\cdot\tilde{z}$ on obtient :

$$\int_{\mathcal{D}_{\Gamma_0(N,p)}} f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}}(z)\overline{g}(z)\,\mathrm{Im}(z)^k\frac{dxdy}{y^2} = \int_{\tilde{\mathrm{W}}^{-1}\cdot\mathcal{D}_{\Gamma_0(N,p)}} f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\tilde{\mathrm{W}}}(z)\overline{g_{|_k\tilde{\mathrm{W}}}}(z)\,\mathrm{Im}(z)^k\frac{dxdy}{y^2}$$

or par la condition (i) on a que si $z \in \mathbb{H}$ alors il existe $\mu \in \Gamma_0(N,p)$ et $\tilde{z} \in \mathcal{D}_{\Gamma_0(N,p)}$ tels que $\tilde{\mathrm{W}}\cdot z = \mu\cdot\tilde{z}$ c'est à dire $z = \tilde{\mu}\cdot\tilde{\mathrm{W}}^{-1}\cdot\tilde{z}$ avec $\tilde{\mu} = \tilde{\mathrm{W}}^{-1}\cdot\mu\cdot\tilde{\mathrm{W}} \in \tilde{\mathrm{W}}^{-1}\cdot\Gamma_0(N,p)\cdot\tilde{\mathrm{W}} = \mathrm{W}^{-1}\cdot\Gamma_0(N,p)\cdot\mathrm{W} = \Gamma_0(N,p)$ par la condition (i). Ainsi $\tilde{\mathrm{W}}^{-1}\cdot\mathcal{D}_{\Gamma_0(N,p)}$ est un domaine fondamental de $\mathbb{H}$ sous l'action de $\Gamma_0(N,p)$. De plus $f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\tilde{\mathrm{W}}} \in \mathscr{S}_k(\tilde{\mathrm{W}}^{-1}\cdot\Gamma_0(N,p)\cdot\tilde{\mathrm{W}})$ car $f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}} \in \Gamma_0(N,p)$ et donc par (i) $f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\tilde{\mathrm{W}}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N,p))$ et de même $g_{|_k\tilde{\mathrm{W}}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N,p))$ et donc :

$$\langle f_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, g, \Gamma_0(N,p)\rangle = \langle f_{|\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\tilde{\mathrm{W}}}, g_{|_k\tilde{\mathrm{W}}}, \Gamma_0(N,p)\rangle = \langle f_{|\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\mathrm{W}}, g_{|_k\mathrm{W}}, \Gamma_0(N,p)\rangle$$

la toute dernière égalité étant due au fait que W et $\tilde{\mathrm{W}}$ sont proportionnelle.
Alors par (ii) on a $f_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}\cdot\mathrm{W}} = f$ et par (iii) on a $g_{|_k\mathrm{W}} = g_{|_k\mathrm{A}_p^{-1}}$.
Ainsi on a donc :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N)\rangle = \langle f_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, g, \Gamma_0(N,p)\rangle = \langle f, g_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, \Gamma_0(N,p)\rangle$$

et donc :

$$\langle f_{|\mathrm{T}(p)}, g, \Gamma_0(N)\rangle = \overline{\langle g_{|\mathrm{A}_p^{-1}}, f, \Gamma_0(N,p)\rangle} = \overline{\langle g_{|\mathrm{T}(p)}, f, \Gamma_0(N)\rangle} = \langle f, g_{|\mathrm{T}(p)}, \Gamma_0(N)\rangle$$

ce qui conclut la démonstration. □

5.3 Action des opérateurs de Hecke sur les coefficients de Fourier

On va maintenant s'intéresser à l'action des opérateurs de Hecke sur les coefficients de Fourier d'une forme de $\mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$.

Proposition 5.2. *Soit $f \in \mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$ avec $\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n\geq 1} a_f(n)[q(z)]^n$. Alors on a :*

$$\forall l \geq 1, \mathrm{T}_{(k,N)}(l)f(z) = \sum_{n\geq 1} \mu_l(n)[q(z)]^n$$

où $\mu_l(n) = \sum\limits_{\substack{a|n,l\\ a\wedge N=1\\ a\geq 1}} a^{k-1}a_f\left(\frac{nl}{a^2}\right)$.

Démonstration. On a $\mathrm{T}_{(k,N)}(l)f(z) = l^{\frac{k}{2}-1}\sum\limits_{\substack{ad=l\\ 0\leq b\leq d-1\\ a\wedge N=1}} f_{|_k\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}}(z)$. C'est à dire :

$$\mathrm{T}_{(k,N)}(l)f(z) = l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ 0\leq b\leq d-1\\ a\wedge N=1}} d^{-k}f\left(\frac{az+b}{d}\right) = l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ 1\leq a,d\\ a\wedge N=1}} d^{-k}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_f(m)e^{\frac{2i\pi maz}{d}}\sum_{b=0}^{d-1}\left(e^{\frac{2i\pi m}{d}}\right)^b\right].$$

Or $\sum_{b=0}^{d-1}\left(e^{\frac{2i\pi m}{d}}\right)^b = 0$ si d ne divise pas m et $\sum_{b=0}^{d-1}\left(e^{\frac{2i\pi m}{d}}\right)^b = d$ sinon. Ainsi :

$$\mathrm{T}_{(k,N)}(l)f(z) = l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ 1\leq a,d\\ a\wedge N=1}} d^{-k+1}\sum_{m=0}^{\infty} a_f(md)(q(z))^{ma} = \sum_{\substack{ad=l\\ 1\leq a,d\\ a\wedge N=1\\ m\geq 0}} a^{k-1}a_f\left(\frac{ml}{a}\right)(q(z))^{ma}$$

et donc en réarrangeant selon les puissances croissantes de q :

$$\mathrm{T}_{(k,N)}(l)f(z) = \sum_{m\geq 0}\left[\sum_{\substack{a|l,m\\ 1\leq a\\ a\wedge N=1}} a^{k-1}a_f\left(\frac{ml}{a^2}\right)\right]q(z)^m,$$

ce qui conclut la preuve. □

6 Théorie d'Atkin-Lehner

On va introduire dans cette section une base particulièrement intéressante de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ en utilisant tous les résultats précédent sur les opérateurs de Hecke. Dans toute cette section on travaille à poids $k \geq 0$ fixé on notera donc les opérateurs de Hecke simplement par rapport à leurs niveau N et à leurs ordre n c'est à dire sous la forme $\mathrm{T}_N(n)$.

Définition 6.1. On définit les objets suivants :

(i) On rappelle $\mathrm{A}_n := \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) on notera W_Q toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} Qx & y \\ mz & Qw \end{pmatrix}$ où $Q|m,\ Q \wedge \frac{m}{Q} = 1$, $\det(\mathrm{W}_Q) = Q$ et $(x, y, z, w) \in \mathbb{N}^4$

Remarque 6.1. La plupart du temps on s'intéressera aux matrices W_{q^α} où q nombre premier qui divise m et α la plus grande puissance de q qui divise m. De plus puisque k étant fixé on ne notera plus $f_{|_k M}$ mais plutôt $f_{|M}$ pour $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$

Avec l'action des opérateurs de Hecke sur les coefficients de Fourier d'une forme modulaire de niveau N déterminée lors de la section précédente on a le résultat suivant :

Definition-Proposition 6.1. *Soit $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$, alors pour p premier ne divisant pas m et q premier divisant m on a :*

(i)

$$f_{|\mathrm{T}_m(q)}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a(nq)x(z)^n = q^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{j=0}^{q-1} f_{|\mathrm{A}_q^{-1}\mathrm{S}^j}$$

(ii)

$$f_{|\mathrm{T}_m(p)}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[a(np) + p^{k-1} a\left(\frac{n}{p}\right)\right] x(z)^n = p^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} f_{|\mathrm{A}_p^{-1}\mathrm{S}^j} + p^{\frac{k}{2}-1} f_{|\mathrm{A}_p}$$

(iii) On définit

$$f_{|\mathrm{B}_d} := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(z)^{nd} = \sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{n}{d}\right) x(z)^n = \frac{1}{d^k} f_{|\mathrm{A}_d}$$

où $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(z)^n$ avec $x(z) := \exp 2\pi i z$ et $a(\alpha) = 0$ lorsque α n'est pas entier. On prendra comme convention (et ce jusqu'à nouvel ordre) que la lettre p et la lettre q désignerons des nombres premiers tels que $p \wedge m = 1$ et $q|m$. La lettre d désigne un entier positif quelconque.

On énonce maintenant un lemme important qui concerne les opérateurs précédemment définit et que nous ne démontrerons pas, voir [2] pour une démonstration de ce lemme reposant sur du calcul matriciel.

Lemme 6.1. *Soient p et q tels que dans la convention précédente et $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$. On pose α la plus grande puissance de q divisant m. Alors :*

(i) $f_{|\mathrm{W}_{q^\alpha}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$

(ii) $T_m(p)$ *commute avec* W_{q^α}. *Et si* $p \wedge d = 1$ *alors* $T_m(p)$ *commute avec* B_d.

(iii) si $\alpha = 1$ *alors* $f_{|\mathrm{U}_q} + q^{\frac{k}{2}-1} f_{|\mathrm{W}_{q^\alpha}} \in \Gamma_0(\frac{m}{q})$

(iv) si $\alpha > 1$, $f_{|\mathrm{U}_q} \in \Gamma_0(\frac{m}{q})$

Démontrons maintenant un théorème sur l'existence d'une "base propre" qui constituera notre point de départ.

Theorème 6.1. *Il existe une base de* $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ *constituée de fonctions propres pour tous les opérateurs de Hecke* $\mathrm{T}_m(p)$ *(on rappelle que* p *désigne un nombre premier qui ne divise pas* m*).*
De plus on peut introduire une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions propres non nulles pour tous les opérateurs de Hecke d'ordre p *de niveau* m *en posant pour* f *et* g *dans* $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ *propres pour tous les opérateurs de Hecke non nulles :*

$$f \sim g \iff \forall p, \lambda_f(p) = \lambda_g(p)$$

où les $\lambda(p)$ *sont les valeurs propres respective de* f *et* g *pour les opérateurs* $\mathrm{T}_m(p)$*.*
Une telle base sera appelée base propre*.*

Démonstration. L'espace des formes sur $\Gamma_0(m)$ est de dimension finie (rappelons de nouveau que lorsque l'on parle de forme sur $\Gamma_0(m)$ on entend forme modulaire parabolique de poids k sur $\Gamma_0(m)$). Par le théorème 5.3 les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(n)$ sont hermitiens si $m \wedge n = 1$ et commutent, ainsi puisque que l'on est en dimension fini les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(p)$ sont codiagonalisable ce qui donne l'existence d'une base de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ constituée de fonctions propres pour tous les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(p)$. Et il est évident que la relation introduite est bien une relation d'équivalence.

□

Remarque 6.2. Etant donné que si $n \wedge m = 1$ alors par la section sur les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(n)$ est un polynôme à coefficients entiers en les $\mathrm{T}_m(p_i)$ où les p_i sont les diviseurs premiers de n on a donc que si $f \in \Gamma_0(m)$ est propre alors elle l'est pour tous les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(n)$ pour $m \wedge n = 1$.

Remarque 6.3. On parlera de formes propres pour désigner les fonctions propres pour tous les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(p)$ dans $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$. Remarquons la chose suivante qui nous servira énormément dans les prochaine démonstration : si f est une forme propre non nulle et que l'on écrit $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot f_i$ où les α_i sont non nuls et les f_i des forme propres linéairement indépendantes alors :

$$\forall p, f_{|\mathrm{T}_p} = \lambda_f(p) f = \sum_{i \in I} \alpha_i \lambda_f(p) \cdot f_i = \sum_{i \in I} \alpha_i \lambda_{f_i}(p) \cdot f_i$$

et donc :

$$\forall i \in I, \forall p, \lambda_{f_i}(p) = \lambda_f(p)$$

puisque les f_i sont linéairement indépendante et les α_i non nuls. Ainsi, les éléments apparaissant dans la combinaison linéaire précédente sont tous équivalents, autrement dit f est dans l'espace vectoriel engendré par une seule et même classe d'équivalence.

Remarque 6.4. Remarquons la chose suivante, soit $m \geq 1$ et m' un diviseur quelconque de m. Alors les opérateurs $\mathrm{T}_m(n)$ et $\mathrm{T}_{m'}(n)$ on la même expression si $m \wedge n = 1$. Par contre on n'a pas forcément la même expression pour $\mathrm{T}_m(n)$ et $\mathrm{T}_{m'}(n)$ sans cette condition.

Ainsi par exemple si $f \in \Gamma_0(m')$ est une forme propre pour tous les $\mathrm{T}_{m'}(p)$ lorsque p premier ne divisant pas m' alors on a $f \in \Gamma_0(m)$ puisque $m'|m$ et f propre pour tous les $\mathrm{T}_m(p)$ pour p premier ne divisant pas m.

Introduisons maintenant deux espaces supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$.

Définition 6.2. Soit m' un diviseur propre de m en le sens où $m'|m$ et $m' \neq m$. Alors le théorème 6.1 donne l'existence d'une base de fonctions propres pour les opérateurs $\mathrm{T}_{m'}(p)$ (p premier ne divisant pas m') $\{g_j\}$ de $\Gamma_0(m')$. On fixe un certain g_j et on considère un diviseur quelconque d de $\frac{m}{m'}$, alors on a :

1. $g_{j|\mathrm{B}_d} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ car $g_{j|\mathrm{B}_d}$ est proportionnelle à $g_{j|\mathrm{A}_d}$ par le lemme 6.1 et $g_{j|\mathrm{A}_d} \in \mathscr{S}_k(\mathrm{A}_d^{-1} \cdot \Gamma_0(m') \cdot \mathrm{A}_d \cap \Gamma_0(m')) = \mathscr{S}_k(\Gamma_0(m'd)))$ (cette dernière égalité de sous groupes se prouvant de manière simple par un calcul matriciel) et donc à fortiori $g_{j|\mathrm{A}_d} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ puisque $(m'd)|m$.
2. Pour tout nombre premier p ne divisant pas m on a $g_{j\,|\,\mathrm{B}_d\,|\,\mathrm{T}_m(p)} = g_{j\,|\,\mathrm{T}_m(p)|\,\mathrm{B}_d} = \lambda_{g_j}(p) g_{j\,|\,\mathrm{B}_d}$ puisque g_j propre pour le $p \wedge m' = 1$ et donc à fortiori avec les $p \wedge m = 1$ et puisque les T_p commutent avec B_d car $d \wedge p = 1$ par le lemme 6.1.

Ainsi $g_{j\,|\mathrm{B}_d}$ est une forme propre sur $\Gamma_0(m)$.
On définit alors l'espace $\mathrm{C}^-(m)$ comme l'espace vectoriel engendré par les $g_{|B_d}$ quand g parcourt les formes propre sur $\Gamma_0(m')$ et m' parcourt les diviseurs propres de m puis d les diviseurs propres de $\frac{m'}{m}$. Alors par le début de cette définition $\mathrm{C}^-(m)$ est stable par tous les opérateurs $\mathrm{T}_m(p)$ où $p \wedge m = 1$ qui sont hermitiens, ainsi le supplémentaire orthogonal de cette espace que l'on note $\mathrm{C}^+(m)$ est lui aussi stable par les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_m(p)$. A priori cette espace vectoriel pourrait être réduit à 0 mais dans ce cas la structure de $\mathrm{C}+(m)$ est entièrement déterminée. On suppose donc pour la suite que $\mathrm{C}^+(m) \neq \{0\}$

On va définir les formes nouvelles mais avant cela nous auront besoin du théorème suivant que nous ne démontrerons pas mais qui repose sur des calculs avec les différents opérateurs introduit dans le lemme 6.1. Pour voir une démonstration voir *Hecke Operators on* $\Gamma_0(m)$ de Atkin et Lehner.

Theorème 6.2. *Si f est une forme sur $\Gamma_0(m)$ dont le q-développement est donné par $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q(z)^n$ avec les $a(n)$ vérifiant $n \wedge m = 1 \implies a(n) = 0$ alors :*

$$f = \sum_i f_{i|\mathrm{B}_{q_i}}$$

où $\forall i, f_i \in \Gamma_0(\frac{m}{q_i})$ et où les q_i sont les diviseurs premiers de m.

Definition-Proposition 6.2. *La démonstration du théorème 6.1 s'applique à $\mathrm{C}^+(m)$. On obtient alors une base de fonction propre de $\mathrm{C}^+(m)$. Dans $\mathrm{C}^+(m)$, les classes pour la relation d'équivalence précédemment définit sont exactement les sous espaces vectorielles de dimension 1 (privé de 0) engendrés par chaque élément de la base. De plus si f est une forme propre non nulle de $\mathrm{C}^+(m)$ alors le terme de degré 1 $a(1)$ de son q-développement* *est non nul ce qui permet de normaliser cette fonction en la divisant par ce terme. Ainsi, on peut définir de manière intrinsèque les* formes nouvelles sur $\Gamma_0(m)$ *comme l'ensemble des représentants normalisés des classes d'équivalences.*

Démonstration. Montrons d'abord que si $f \in \mathrm{C}^+(m)$ est une forme propre non nulle alors le coefficient $a(1)$ de son q-développement est non nul. Supposons par l'absurde que $a(1) = 0$. Dans ce cas on va monter que $n \wedge m = 1 \implies a(n) = 0$. Supposons que cette affirmation soit fausse. Dans ce cas on note n_1 les plus petit entier premiers avec m telle que $a(n_1) \neq 0$. Alors en prenant p un nombre premier divisant n_1 et ne divisant pas m on a :

$$f_{|\mathrm{T}_m(p)} = \left[\sum_{n\geq 1} a(np)x^n\right] + p^{k-1}\sum_{n\geq 1} a(n)x^{np} = \lambda_f(p)\cdot\sum_{n\geq 1} a(n)x^n$$

Dans la première égalité le terme devant $x^{\frac{n_1}{p}}$ est $a(n_1) + p^{k-1}a(\frac{n_1}{p^2})$ et par minimalité de n_1 on a $a(\frac{n_1}{p^2}) = 0$. Et dans la deuxiéme égalité le terme devant $x^{\frac{n_1}{p}}$ est $\lambda_f(p)a(\frac{n_1}{p}) = 0$ par minimalité de n_1. Ainsi par unicité des coefficient du q-développement on a $a(n_1) = 0$ ce qui est absurde.
Alors par le théoreme 6.2 on écrit $f = \sum_i f_{i|\mathrm{B}_{q_i}}$ avec les q_i et f_i comme dans le théorème. Ainsi puisque chaque f_i est combinaison linéaire de forme propre de $\Gamma_0(\frac{m}{q_i})$ on à que $f \in \mathrm{C}^-(m)$ or $f \in \mathrm{C}^+(m)$ et donc $f = 0$. Ainsi si f est une forme propre non nulle sur $\mathrm{C}^+(m)$ alors $a(1) \neq 0$.
Montrons maintenant que les classe d'équivalence sur $\mathrm{C}^+(m)$ sont exactement les sous espaces vectorielles de dimension 1 (privé de 0) engendrés par chaque élément d'une base propre de cet espace. Pour cela prenons une base propre normalisé F_i de $\mathrm{C}^+(m)$ (au sens où les coefficient $a(1)$ des élément de la base valent 1) et prenons une forme propre sur $\mathrm{C}^+(m)$ non nulle (remarquons que tous cela est possible puisque l'on suppose $\mathrm{C}^+(m) \neq \{0\}$). On à alors f combinaison linéaire des F_i et tout les F_i apparaissant dans la combinaison linéaire sont équivalent par la remarque 6.3. Pour conclure il suffit donc de montrer que si $F_i \sim F_j$ alors $F_i = F_j$. Supposons donc $F_i \sim F_j$. Alors faisons la remarque suivante :

$$\forall p, \forall n \geq 1, a(np) + p^{k-1}a\left(\frac{n}{p}\right) = \lambda(p)a(n) \tag{1}$$

et donc en prenant $n = 1$ dans l'égalité précédente on a que pour une forme propre normalisée de $\mathrm{C}^+(m)$:

$$\forall p, a(p) = \lambda(p)$$

ainsi les coefficient $a(p)$ de F_i et F_j sont égaux car $F_i \sim F_j$. Maintenant on va montrer que les coefficient $a(n)$ pour $n \wedge m = 1$ de F_i et F_j sont égaux. Pour cela remarquons que si prenons n un entier premier avec m et écrivons $n = \prod_{i\in\{1,\dots,\nu\}} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premier. Alors par l'equation 1 on a :

$$a\left(\prod_{i\in\{1,\dots,\nu\}} p_i^{\alpha_i}\right) = a(p_\nu)\cdot a\left(\left[\prod_{i\in\{1,\dots,\nu-1\}} p_i^{\alpha_i}\right]\cdot p_\nu^{\alpha_\nu-1}\right) - p_\nu^{k-1}\cdot a\left(\left[\prod_{i\in\{1,\dots,\nu-1\}} p_i^{\alpha_i}\right]\cdot p_\nu^{\alpha_\nu-2}\right)$$

Ainsi en réitérant ce procédé sur les termes :

$$a\left(\left[\prod_{i\in\{1,\ldots,\nu-1\}} p_i^{\alpha_i}\right]\cdot p_\nu^{\alpha_\nu-1}\right)$$

et

$$a\left(\left[\prod_{i\in\{1,\ldots,\nu-1\}} p_i^{\alpha_i}\right]\cdot p_\nu^{\alpha_\nu-2}\right)$$

on finit par montrer que $a(n)$ est un polynôme en les $a(p_i)$ dont les coefficient sont les même pour deux formes propres non nulles et normalisées de la même classe. Ainsi on a bien que les coefficient $a(n)$ pour $n \wedge m = 1$ de F_i et F_j sont égaux. Ainsi si on pose $h := F_i - F_j = \sum_{n\geq 1} a(n)x^n$ on a $n \wedge m = 1 \implies a(n) = 0$ et donc par application du théorème 6.2 on a $h \in \mathrm{C}^-(m)$ avec le même raisonnement que pour le début de la démonstration. Or $h \in \mathrm{C}^+(m)$ donc $h = 0$ ce qui conclut $F_i = F_j$. Ainsi dans la combinaison linéaire de F_i de la forme non nulle f dont il était question il ne peut y avoir qu'un terme non nul, autrement dit f est proportionnelle à l'un des F_i et les classes d'équivalence sont bien les sous espace vectoriels de dimension 1 (privés de 0) engendrés par les F_i. □

Remarque 6.5. Ce qu'on peut voir dans cette définission-proposition 6.2 est que dans le cas où $\mathrm{C}^+(m) \neq \{0\}$ alors $\mathrm{C}^+(m) = \bigoplus_{i\in 1,\ldots,\nu} \mathbb{C}F_i$ où les F_i sont les nouvelles formes sur $\Gamma_0(m)$ c'est à dire les représentant normalisés des classes d'équivalence sur $\mathrm{C}^+(m)$ ou alors (ce qui revient au même) les éléments d'une base propre normalisée de $\mathrm{C}^+(m)$. Ainsi si f est propre dans $\mathrm{C}^+(m)$ alors f est proportionnelle à une forme nouvelle.

On va maintenant pouvoir définir les formes anciennes.

Définition 6.3. Soit m' un diviseur propre de m et g une forme nouvelle sur $\Gamma_0(m')$ (ce qui dans le cas où $\mathrm{C}^+(m') \neq \{0\}$ revient à ne rien prendre) fixés. On définit alors l'*ancienne classe* associée à (m', g) comme l'ensemble des $g_{|\mathrm{B}_d}$ où d parcourt les diviseurs de $\frac{m}{m'}$. Les *anciennes classes* sont alors toutes les telles familles. Les *anciennes formes* sont alors les éléments des *anciennes classes*.

On va maintenant s'intéresser à la relation liant les anciennes formes à $\mathrm{C}^-(m)$.

Proposition 6.1. *On a les résultats suivants :*

(i) $\mathrm{C}^-(m)$ *est engendré par les anciennes formes.*

(ii) Si f est une forme propre non nulle sur $\Gamma_0(m)$ alors il existe une certaine nouvelle forme g sur $\Gamma_0(m')$ (où $m'|m$) telles que $f \sim g$.

Démonstration. Démontrons d'abord (i) par récurrence sur m.
Si $m = 1$ alors $\mathrm{C}^-(1)$ est nulle puisque 1 n'admet pas de diviseur propre et on a donc bien $\mathrm{C}^-(1)$ engendré par les formes anciennes puisqu'il n'y a pas de forme ancienne.
Soit $m > 1$ et supposons le résultat vrai pour toutes les valeurs inférieures. Alors prenons

un générateur de $\mathrm{C}^-(m)$ que l'on note $g_{|\mathrm{B}_d}$ où g est une forme propre non nulles sur $\Gamma_0(m')$ avec m' un diviseur propre de m. Alors on peut écrire $g = f + h$ où $f \in \mathrm{C}^+(m')$ et $h \in \mathrm{C}^-(m')$ puisque $\Gamma_0(m') = \mathrm{C}^+(m') \bigoplus \mathrm{C}^-(m')$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à h ce qui donne $h = \sum_j \alpha_j h_{j|\mathrm{B}_{d_j}}$ combinaison linéaire d'anciennes formes sur $\Gamma_0(m')$. De plus on peut aussi écrire $f = \sum_j \beta_j F_j$ où les F_j sont les nouvelles formes sur $\Gamma_0(m')$. Et donc $g_{|\mathrm{B}_d} = \sum_i \beta_i F_{i|\mathrm{B}_{d\cdot d_i}} + \sum_j \alpha_j h_{j|\mathrm{B}_{d\cdot d_j}}$ ce qui montre bien que f est combinaison linéaire de formes anciennes. Le théorème de recurrence conclut.
Montrons maintenant (ii).
On prend une base $\{g_{j|\mathrm{B}_{d_j}}\}$ de $\mathrm{C}^-(m)$ composée de formes anciennes sur $\Gamma_0(m)$. Soit f une forme propre non nulle de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N)) = \mathrm{C}^+(m) \bigoplus \mathrm{C}^-(m)$, on peut alors écrire :

$$f = \sum_i \alpha_i F_i + \sum_j \beta_j g_{j|\mathrm{B}_{d_j}}$$

où les F_i sont les nouvelles formes sur $\Gamma_0(m)$. Par la remarque 6.3 tous les termes non nuls de cette combinaison linéaire sont équivalent. Ainsi puisque f est non nulle tous les termes ne sont pas nuls et alors f est équivalent au moins à un des $g_{j|\mathrm{B}_{d_j}} \sim g_j$ (cette dernière équivalence étant due au fait que $\mathrm{T}_m(p)$ et B_{d_j} commutent) ou alors à un des F_i donc le résultat est prouvé. □

Montrons maintenant un résultat important sur l'équivalence entre anciennes formes et nouvelles formes qui nous permettra ensuite d'établir la relation entre ces formes et les différents opérateurs définit dans la définition 6.1.

Proposition 6.2. *Une nouvelle forme sur $\Gamma_0(m)$ ne peut pas être équivalente à une forme propre non nulle $g \in \mathrm{C}^-(m)$.*

Démonstration. Supposant par l'absurde que $F \sim g$ où F est une nouvelle forme sur $\Gamma_0(m)$ et g une forme propre non nulle $\mathrm{C}^-(m)$. Montrons que g est équivalente à une certaine nouvelle forme sur $\Gamma_0(m')$ pour un certain m' diviseur propre de m. Remarquons plus particulièrement que puisque g est dans $\mathrm{C}^-(m)$ alors elle est combinaison linéaire de forme ancienne appartenant toute à la même classe (ce qui se montre en prenant simplement une base de $\mathrm{C}^-(m)$ constituée de formes anciennes sur $\Gamma_0(m)$ et en utilisant la remarque 6.3 et la proposition 6.1) et donc g est equivalente à une ancienne forme h avec h forme nouvelle sur $\Gamma_0(m')$ où m' est un diviseur propre de m. Ainsi comme dans la démonstration de la proposition définition 6.2 on montre que les coefficient $a(n)$ pour $n \wedge m = 1$ des q-développement respectif de F et h sont égaux. Ainsi en combinaison le théorème 6.2 on obtient $F - h \in \mathrm{C}^-(m)$ et donc puisque $h \in \mathrm{C}^-(m)$ alors $F \in \mathrm{C}^-(m) \cap \mathrm{C}^+(m)$ et $F = 0$ ce qui est absurde. □

On va maintenant pouvoir relier les opérateurs aux nouvelles et anciennes formes.

Theorème 6.3. *Fixons F une nouvelle forme sur $\Gamma_0(m)$, p une nombre premier ne divisant pas m, q un nombre premier divisant m avec α la plus grande puissance de q divisant m. Alors en écrivant $F = x + \sum_{n\geq 2} a(n)x^n$ on à :*

(i) $F_{|\mathrm{T}_m(p)} = a(p) \cdot F$

(ii) $F_{|\mathrm{T}_m(q)} = a(q) \cdot F$

(iii) $F_{|\mathrm{W}_{q^\alpha}} = \lambda(q) \cdot F$ *avec* $\lambda(q) = \pm 1$

De plus si $\alpha \geq 2$ *alors* $a(q) = 0$ *et si* $\alpha = 1$ *alors* $a(q) = -q^{\frac{k}{2}-1}\lambda(q)$.
Enfin en terme de coefficients de Fourier on a les relations suivantes :

(iv) $a(np) - a(n)a(p) + p^{k-1}a\left(\frac{n}{p}\right) = 0$

(v) $a(nq) - a(n)a(q) = 0$

Démonstration. On a déja montré le (iii) ainsi que (v) dans la démonstration de la proposition-définition 6.2. Montrons (ii).
Puisque $p \wedge q = 1$ alors par le lemme 6.1 on a $F_{|\mathrm{T}_m(q)|\mathrm{T}_m(p)} = F_{|\mathrm{T}_m(p)|\mathrm{T}_m(q)} = \lambda_F(p) \cdot F_{|\mathrm{T}_m(q)} = a(p) \cdot F_{|\mathrm{T}_m(q)}$. Ainsi ou bien $F_{|\mathrm{T}_m(q)} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a(nq)x(z)^n$ et alors $a(q) = 0$ donc le résultat est vrai. Ou bien $F_{|\mathrm{T}_m(q)} \neq 0$ et dans ce cas on a $F \sim F_{|\mathrm{U}_q}$. Montrons alors que $F_{|\mathrm{T}_m(q)}$ est proportionnelle à F. En fixant une base de $\mathrm{C}^-(m)$ constituée de formes anciennes sur $\Gamma_0(m)$ on peut écrire $F_{|\mathrm{T}_m(q)}$ comme combinaison linéaire de formes nouvelles et anciennes linéairement indépendantes et alors par la remarque 6.3 tous les terme non nuls de la combinaison linéaire sont équivalents. Alors puisque une nouvelle forme ne peut pas être équivalente à une ancienne forme par la proposition 6.2 alors tout les coefficients devant les anciennes formes dans $\Gamma_0(m)$ sont nuls. Ainsi $F_{|\mathrm{T}_m(q)} \in \mathrm{C}^+(m)$ et puisque les classes d'équivalence sont engendrées par les nouvelles formes alors par la proposition-définition 6.2 on a $F_{|\mathrm{T}_m(q)} \in \mathrm{C}^+(m)$ proportionnelle à une nouvelle forme. Enfin puisque deux formes nouvelles distincte ne sont (par définition) pas équivalente, alors $F_{|\mathrm{T}_m(q)}$ proportionnelle à F, c'est à dire :

$$F_{|\mathrm{T}_m(q)} = \sum_{n=1}^{\infty} a(nq)x(z)^n = \mu \cdot F = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot a(n)x(z)^n$$

et donc par unicité des coeficients de Fourier on a $a(1) \cdot \mu = a(q) = \mu$ et donc $F_{|\mathrm{T}_m(q)} = a(q) \cdot F$.
Montrons maintenant (iii). Comme précédemment on a $F_{|\mathrm{W}_{q^\alpha}|\mathrm{T}_p} = F_{|\mathrm{T}_m(p)|\mathrm{W}_{q^\alpha}}$ et le raisonnement précédent s'applique à $F_{|\mathrm{W}_{q^\alpha}}$ ce qui donne $F_{|\mathrm{W}_{q^\alpha}}$ proportionnel à F. Alors puisque $\frac{1}{q^\alpha}\,\mathrm{W}_{q^\alpha}^2 \in \Gamma_0(m)$ alors :

$$F = F_{|\frac{1}{q^\alpha}\mathrm{W}_{q^\alpha}^2} = F_{|W_{q^\alpha}^2} = \lambda(q) \cdot F_{|W_{q^\alpha}} = \lambda(q)^2 \cdot F$$

et donc $F_{|W_{q^\alpha}} = \lambda(q) \cdot F$ avec $\lambda(q) = \pm 1$.
Traitons les cas $\alpha \geq 2$ et $\alpha = 1$. Si $\alpha \geq 2$ alors par le lemme 6.1 on a $F_{|\mathrm{T}_m(q)} \in \mathrm{C}^-(m)$ et donc donc $F_{|\mathrm{T}_m(q)} = 0$ par la proposition 6.2 car sinon F serait équivalente à une forme propre non nul dans $\mathrm{C}^-(m)$. Ainsi dans ce cas $a(q) = 0$. Si $\alpha = 1$ alors par le lemme 6.1 on a $F_{|\mathrm{T}_m(q)+q^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{W}_{q^\alpha}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(\frac{m}{q}))$ et puisque cette forme est propre et est dans $\mathrm{C}^-(m)$ on a comme précédemment $F_{|\mathrm{T}_m(q)+q^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{W}_{q^\alpha}} = 0$ et on a donc bien $a(q) = -q^{\frac{k}{2}-1}\lambda(q)$

en utilisant l'unicité des coefficients de Fourier.
Enfin les deux dernière relation (iv) et (v) se montre de même en utilisant l'unicité des coefficients.

□

Remarque 6.6. Par le théorème précédent on a que si f est une nouvelle forme sur $\Gamma_0(m)$ alors f est propre pour tous les opérateurs $\mathrm{T}_m(p)$ pour p premier ne divisant pas m aisi que pour les opérateurs $\mathrm{T}_m(q)$ pour q premier divisant m. Ainsi puisque tout opérateur $\mathrm{T}_m(n)$ est un polynôme en $\mathrm{T}_m(p)$ et $\mathrm{T}_m(q)$ (par la section sur l'algèbre de Hecke) alors f est propre pour tout les opérateurs de Hecke de niveau m.

Tous ces résultats permettent de se faire une bonne idée des différentes relations entre les opérateurs et les formes nouvelles et anciennes. Cependant il est possible d'aller encore plus loin comme le montre le théorème 5 de l'articleÊ[2] que l'on énonce ci-dessous sans démonstration.

Theorème 6.4. $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ *est somme directe orthogonale de classe, ces classes pouvant être nouvelles où anciennes.*
Chaque ancienne classe admet une base de la forme $\{g(dz), d|\frac{m}{m'}\}$ *où* m' *est un diviseur propre de* m *et* g *une nouvelle forme sur* $\Gamma_0(m')$ *et chaque telle famille est une base d'une ancienne classe.*
Deux élément de deux classes différentes admettent des valeurs propres différentes pour les $\mathrm{T}_m(p)$ *pour une infinité de valeurs de* p.

Remarque 6.7. Ce théorème permet de construire une base orthogonale de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ que l'on note $\{f_i, i \in \{1, \ldots, N\}\} \cup \{g_i, i \in \{N+1, \ldots, \mu\}\}$ (en prenant une base orthogonale de chaque classe) telle que les f_i soient propres pour tous les opérateurs $\mathrm{T}_m(p)$ pour p premier ne divisant pas m et donc pour tous les $\mathrm{T}_m(n)$ pour $m \wedge n = 1$ et les g_i propre pour TOUS les opérateurs de Hecke ainsi que pour les opérateurs W_{q^α}.

Deuxième partie . Fonctions L et majoration des coefficients de Fourier

7 Majoration des coefficients de Fourier

Commençons par une majoration simple des coefficients de Fourier d'une forme parabolique.

Proposition 7.1. *Soit* $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma(N))$. *On écrit* $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n [\exp 2i\pi z]^n$.
Alors on a :

$$a_n = \underset{n \to +\infty}{\mathcal{O}_f} (n^{\frac{k}{2}})$$

Démonstration. Soit $y > 0$ fixé pour l'instant. On a :

$$\int_0^1 f(t+iy) \exp(-2i\pi nt) dt = a_n \exp(-2\pi ny)$$

et donc avec $C > 0$ tels que $\forall z \in \mathbb{H}, |f(z)| \leq \frac{C}{[\operatorname{Im} z]^{\frac{k}{2}}}$ (ce qui est possible par la proposition 3.1) on a :

$$\forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq \frac{C \exp(2\pi n y)}{y^{\frac{k}{2}}}$$

On conclut alors en prenant $y = \frac{1}{n}$ dans l'inégalité précédente. $\square$

Remarque 7.1. Dans la proposition précédente le coefficient $C > 0$ tel que $a_n \leq C n^{\frac{k}{2}}$ dépend de f.

On énonce maintenant un théorème demontré par Deligne, conjecturé par Ramanujan et Petersson, la majoration de Ramanujan-Petersson, qui améliore la majoration précédente. On ne démontrera pas ce théorème qui utilise des notions bien plus complexes que celles qui interviennent dans ce mémoire.

Theorème 7.1 (Deligne)**.** *Soit f une forme nouvelle sur $\Gamma_0(N)$ où :*

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \exp(2i\pi n z).$$

Alors on a :

$$|a_n| \leq d(n) n^{\frac{k-1}{2}},$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Remarque 7.2. On a la majoration suivante démontrée en Appendice (lemme 14.1).

$$d(n) \ll_\epsilon n^\epsilon$$

pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que :

$$\forall n \geq 1, |a_n| \ll_\epsilon n^{\epsilon + \frac{k-1}{2}}$$

indépendamment de f.

On utilisera ce théorème uniquement lorsqu'il nous sera indispensable et on essaiera de toujours utiliser des résultats élémentaires pour nos futures majorations.

8 Fonction L de formes paraboliques

Definition-Proposition 8.1. *Soit $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ où le développement de f est donné par :*

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n \left[\exp(2i\pi z)\right]^n.$$

On définit la fonction L associée à f *par :*

$$L(f, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

définie pour $s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1\right\}$*. Cette série converge uniformément sur tout ensemble de la forme* $\left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1 + \delta\right\}$ *avec* $\delta > 0$*. Elle définit ainsi une fonction holomorphe sur le demi plan* $\left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1\right\}$*.*

Démonstration. Par la proposition 7.1 il existe $C > 0$ tels que $\forall n \geq 1, |a_n| \leq C \cdot n^{\frac{k}{2}}$.
Fixons alors $\delta > 0$ et montrons que la série définissant la fonction L converge normalement sur $\mathcal{U}_\delta := \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1 + \delta\right\}$.
Soit $s \in \mathcal{U}_\delta$ et $\sigma := \mathrm{Re}(s)$. On a :

$$|\frac{a_n}{n^s}| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq \frac{C}{n^{\sigma - \frac{k}{2}}} \leq \frac{C}{n^{\delta+1}}$$

et :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^{\delta+1}} < \infty$$

ainsi on a bien convergence normale de la fonction L sur $\mathcal{U}_\delta$ ce qui conclut la preuve. □

Montrons maintenant qu'une telle fonction L peut être prolongée de manière holomorphe à tout le plan complexe.

Theorème 8.1. *Soit* $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ *(*$k \geq 0$*)*
Alors $L(f, .)$ *peut être prolongée de manière holomorphe à tout le plan complexe. De plus en notant aussi* $L(f, .)$ *la fonction prolongée, on a que :*

$$\begin{array}{rccc} \Lambda(f,s): & \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s) L(f,s) \end{array}$$

(avec Γ *la fonction spéciale d'Euler) se prolonge en une fonction entière du plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Lambda(f,s) = N^{\frac{k}{2} - s} \cdot i^k \Lambda(f_{|_k \mathrm{W}}, k - s)$$

où $\mathrm{W} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$*.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord $\Lambda(f, .)$: $s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1\right\} \to (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s) L(f, s)$ est bien défini par la définition-proposition 8.1 et puisque $\frac{k}{2} + 1 \geq 1$ assure que $\Gamma(s)$ est bien définit. On va maintenant montrer que $\Lambda(f, .)$ est à peu de chose près la transformée de Mellin de f.
Soit $\epsilon > 0$ fixé pour le moment. Remarquons alors que :

$$\forall y > 0, |f(iy)| = |\sum_{n \geq 1} a_n \exp(-2\pi n y)| \leq \sum_{n \geq 1} |a_n| \exp(-2\pi n y) \leq C \cdot \sum_{n \geq 1} n^{\frac{k}{2}} \exp(-2\pi n y) \leq D_\epsilon \exp(-\pi y)$$

avec C tel que $\forall n \geq 1, |a_n| \leq C \cdot n^{\frac{k}{2}}$ et $D_\epsilon := C \cdot \sum_{n\geq 1} n^{\frac{k}{2}} \cdot \exp(-\pi n \epsilon)$. Ainsi :

$$\int_\epsilon^\infty f(iy)y^{s-1}dy = \int_\epsilon^\infty \sum_{n\geq 1} a_n \exp(-2\pi n y) \cdot y^{s-1}dy$$

est bien définie pour $s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2}+1\right\}$. De plus par la majoration précédente on peut intervertir série et intégrale ce qui donne :

$$\int_\epsilon^\infty f(iy)y^{s-1}dy = \sum_{n\geq 1} a_n \int_\epsilon^\infty y^{s-1}\exp(-2\pi n y)dy = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(2\pi n)^s} \int_{n\epsilon}^\infty u^{s-1}\exp(-u)du$$

On va faire tendre ϵ vers 0. Posons $b_n(\epsilon) := \frac{a_n}{(2\pi n)^s} \int_{n\epsilon}^\infty u^{s-1}\exp(-u)du$. Alors on a que $\sum_{n\geq 1} b_n(\epsilon)$ converge normalement sur $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ puisque :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, |b_n(\epsilon)| \leq \frac{Cn^{\frac{k}{2}}}{(2\pi n)^\sigma} \int_0^\infty u^{\sigma-1}\exp(-u)du = \Gamma(\sigma)\frac{C}{(2\pi)^\sigma n^{\sigma-\frac{k}{2}}}$$

(avec $\sigma := \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}+1 \geq 1$) avec :

$$\sum_{n\geq 1} \Gamma(\sigma)\frac{C}{(2\pi)^\sigma n^{\sigma-\frac{k}{2}}} < \infty$$

puisque $\sigma - \frac{k}{2} > 1$. Ainsi on a :

$$\forall s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2}+1\right\}, \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(2\pi n)^s} \int_{n\epsilon}^\infty u^{s-1}\exp(-u)du = (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s)L(f,s)$$

D'autre part montrons que $\int_0^1 f(iy)y^{s-1}$ est bien défini pour $s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2}+1\right\}$. Remarquons que W (introduit dans l'énoncé du théorème) vérifie $\mathrm{W}^{-1} \cdot \Gamma_0(N) \cdot \mathrm{W}$ ainsi en faisant le changement de variable $y = \frac{1}{Nu}$ on a :

$$\int_0^1 |f(iy)|y^{\sigma-1} = \int_{\frac{1}{N}}^\infty N^{\frac{k}{2}-\sigma}|f_{|_k \mathrm{W}}(iu)|u^{(k-\sigma)-1}du$$

avec $f_{|_k\mathrm{W}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$. De plus, on a par la remarque 3.1 $f_{|_k\mathrm{W}}(iu) = \underset{u\to+\infty}{\mathcal{O}}(\exp -2\pi u)$ et on a que $\int_0^1 f(iy)y^{s-1}$ est bien défini pour $s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2}+1\right\}$. Ainsi :

$$\forall s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2}+1\right\}, \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^\infty f(iy)y^{s-1}dy = \int_0^\infty f(iy)y^{s-1} = (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s)L(f,s) = \Lambda(f,s)$$

Montrons que $\Lambda(f,.)$ en prolongeable en une fonction entière.
On a $\forall s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2}+1\right\}, \Lambda(f,s) = \Lambda_1(f,s) + \Lambda_2(f,s)$ où :

$$\Lambda_1(f,s) = \int_1^\infty f(iy)y^{s-1}$$

et :

$$\Lambda_2(f,s) = \int_0^1 f(iy)y^{s-1}$$

Observons ces deux termes. Etant donné que $|f(iy)| \leq D_1 \exp(-\pi y)$ (majoration du début de preuve) la fonction $\Lambda_1(f,.)$ définit une fonction entière du plan complexe. De plus avec le même changement de variable $y = \frac{1}{Nu}$ on a :

$$\forall s \in \left\{ \mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1 \right\}, \Lambda_2(f,s) = \int_{\frac{1}{N}}^{\infty} N^{\frac{k}{2}-s} |f_{|_k \mathrm{W}}(iu)| u^{(k-s)-1} du$$

avec (en utilisant la même méthode que la première majoration de la preuve) $|f_{|_k \mathrm{W}}(iy)| \leq \tilde{D}_1 \exp(-\pi y)$ puisque $f_{|_k \mathrm{W}} \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$. Ainsi on a $\Lambda_2(f,.)$ qui définit une fonction entière et donc $\Lambda(f,.)$ prolongeable en une fonction entière. Et avec le changement de variable $y = \frac{1}{Nu}$ on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Lambda(f,s) = N^{\frac{k}{2}-s} \cdot i^k \cdot \int_0^{\infty} f_{|_k \mathrm{W}}(iu) u^{(k-s)-1} du = N^{\frac{k}{2}-s} \cdot i^k \cdot \Lambda(f_{|_k \mathrm{W}}, k-s)$$

Enfin puisque $\frac{1}{\Gamma}$ définit une fonction entière du plan complexe on a bien que $L(f,.)$ est prolongeable en une fonction entière ce qui conclu la preuve. □

Nous terminerons ce paragraphe par la preuve que les fonctions L attachées aux formes nouvelles sur $\Gamma_0(N)$ sont développables en produit Eulerien (tout comme la fonction ζ de Riemann). Ce résultat illustre l'intérêt de l'étude des opérateurs de Hecke et est en fait à l'origine de leur introduction par Hecke.

Proposition 8.1. *Soit f une forme nouvelle de poids $k \geq 0$ de niveau $N \geq 1$ avec $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)[q(z)]^n$.*
Alors en notant $\lambda(n)$ la valeur propre de f pour l'opérateur $\mathrm{T}(n)$ on a :

$$\forall n \geq 1, \lambda(n) = a(n)$$

Démonstration. Observons tout d'abord que le coefficient devant q dans le q-développement de $\mathrm{T}(n)f$ est par la proposition 5.2 $\sum_{\substack{a|1,n \\ a \wedge N = 1 \\ a \geq 1}} a^{k-1} a_f\left(\frac{l}{a^2}\right) = a(1)$ et puisque $\mathrm{T}(n)f = \lambda(n)f$ on a ce premier coefficient qui vaut $\lambda(n)a(1) = \lambda(n)$ puisque $a(1) = 1$ car f est normalisée. Ainsi on a $a(n) = \lambda(n)$. □

Proposition 8.2. *Soit f une forme nouvelle de poids $k \geq 0$ de niveau $N \geq 1$ avec $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)[q(z)]^n$.*
Alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a(n)a(m) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d \wedge N = 1}} d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Démonstration. Par le théorème 5.1 on a :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} d^{-1}\,\mathrm{T}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

De plus f est une forme nouvelle, elle est propre pour tous les opérateurs de Hecke. On a donc :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n)f = \lambda(n)\lambda(m) = k\sum_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} d^{-1}\lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

c'est-à-dire (puisque par la proposition 8.1 on a $\lambda(n) = a(n)$) :

$$a(n)a(m) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} d^{k-1}a\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

□

Corollaire 8.1. *Soit f une forme nouvelle de poids $k \geq 0$ de niveau $N \geq 1$ avec $f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)[q(z)]^n$.*
Alors si $m \wedge n = 1$ on a $a(mn) = a(n)a(m)$ (autrement dit les $a(n)$ sont multiplicatifs).

Démonstration. Par la proposition 8.2 on a :

$$a(n)a(m) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} d^{k-1}a\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Or le seul diviseur commun de m et n est 1 ce qui ramène l'égalité précédente à :

$$a(mn) = a(n)a(m)$$

ce qui conclut la preuve. □

Theorème 8.2. *Soit f une forme nouvelle de poids $k \geq 0$ de niveau $N \geq 1$.*
Alors la fonction L associée à f est développable en produit Eulerien, en d'autre terme on a :

$$\forall s \in \left\{\mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1\right\}, L(f,s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

Démonstration. Ce résultat découle directement du fait que les $a(n)$ sont multiplicatifs et du fait que $L(f,.)$ converge localement uniformément sur $\left\{|\mathrm{Re}(z)| > \frac{k}{2} + 1\right\}$ □

Remarque 8.1. Une autre manière d'écrire le q développement d'une forme modulaire est la suivante, si $f \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} exp(2i\pi nz).$$

De cette manière pour une forme nouvelle de niveau N la majoration de Ramanujan-Petersson s'énonce plus simplement :

$$|\psi_f(n)| \leq d(n).$$

De plus ces coefficient $\psi_f(n)$ ont eux aussi des propriétés arithmétiques particulièrement intéressantes que l'on va énoncé. On définit l'opérateur de Hecke normalisé sur les formes paraboliques de niveau N et de poids k par :

$$\tilde{T}_{k,N}(n) = \frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}} T_{k,N}(n)$$

de cette manière on retrouve des résultats analogue sur les $\tilde{T}_{k,N}$ à ceux trouver sur les $T_{k,N}$ que l'on énonce ci dessous et qui se démontrent immédiatement par application des formules de composition sur les opérateurs de Hecke :

(i) $\tilde{T}_{k,N}(n)\tilde{T}_{k,N}(m) = \sum\limits_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} \tilde{T}_{k,N}(\frac{mn}{d^2})$.

(ii) Pour toute forme nouvelle $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} exp(2i\pi nz)$ on a :

$$\psi_f(n)\psi_f(m) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d\wedge N=1}} \psi_f\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Pour éviter d'utiliser trop de notation on notera de la même manière les $\tilde{T}_{k,N}(n)$ et les $T_{k,N}(n)$ et pour éviter toute confusion on comprendra que lorsqu'ils s'appliquent à $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} exp(2i\pi nz)$ alors les $T_{k,N}(n)$ sont normalisés et lorsqu'il s'appliquent à $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n exp(2i\pi nz)$ alors ils ne sont pas normalisés.

Les deux prochaines sections concernent la methode de Rankin-Selberg, qui étudie les series d'Eisenstein pour extraire des information sur la série L associée à $f \otimes f$. Cette methode sera le point clé dans la démonstration du théorème 13.1, sur la borne du produit scalaire de Petersson.

9 Rankin-Selberg

9.1 Résultats préparatoires

On notera

$$P = \langle \pm T \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Définition 9.1 (Série d'Eisenstein)**.** La définition des séries d'Eisenstein ici diffère légèrement de celle vue plus tôt :

Soit $m \in \mathbb{N}$, et $s \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. On définit la fonction de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ par

$$E_s^m(z) = \sum_{\gamma \in P \backslash \Gamma_0(m)} \mathrm{Im}(\gamma z)^s.$$

La proposition suivante eclaircit le lien avec la définition précédente des series d'Eisenstein.

Proposition 9.1 (système de représentantss de $P \setminus \Gamma_0(m)$)**.** *On note que pour tout couple $c \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Z}$ premier entre eux, il existe un unique couple $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$ad - bc = 1 \text{ et } 0 \leq a \leq c - 1.$$

L'ensemble $\{I\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m) \text{ tels que } 1 \leq c \text{ et } 0 \leq a \leq c-1 \right\}$ *fournit alors un système de représentantss.*

Démonstration. La multiplication par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laisse c et d constants, et la multiplication par $-I$ change les deux signes, d'où la liberté de la famille donnée.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m)$. Quitte à multiplier par $-I$ on peut supposer $c \geq 0$ (resp $d = 1$ si $c = 0$).

$$T^n \gamma = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Il existe un unique n tel que $0 \leq a + nc \leq c - 1$ (resp $b + nd = 0$). □

On remarque alors que

$$E_s^m(z) = y^s + \sum_{\substack{c>0 \\ (mc,d)=1}} \frac{y^s}{|mcz + d|^{2s}}.$$

Remarque 9.1. La série d'Eisenstein définie au début du mémoire est égale à $2\zeta(2s)E_s(z)/y^s$. On remarquera que la multiplication par $\zeta(2s)$ rajoute tous les terms c, d non premiers entre eux, et le facteur 2 correspond aux termes $c \leq 0$.

Remarque 9.2. La convergence uniforme sur tout compact pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ a donc déjà été justifiée, et cela assure donc l'holomorphie de $E_s(z)$ en s dans $\mathrm{Re}(s) > 1$.

La proposition suivante relie la série d'Eisentstein de niveau m à celle de niveau 1.

Proposition 9.2. *Pour tous $m \geq 1$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, $z \in \mathbb{H}$,*

$$\zeta_m(2s)E_s^m(z) = m^{-s} \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^{2s}} \zeta(2s) E_s(\frac{mz}{d}),$$

où

$$\zeta_m(s) = \sum_{n \text{ premier avec } m} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \prod_{p|m} (1 - p^{-s}).$$

Remarque 9.3. On démontrera plus loin un prolongement méromorphe de E_s à $\mathbb{C}$, avec cette formule, il en existe donc aussi un pour E_s^m, et par le principe du prolongement, cette formule reste valable sur la partie prolongée.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
2\zeta_m(2s)E_s^m(z) &= \sum_{\substack{(c,d)\neq(0,0)\\(d,m)=1}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \\
&= \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \sum_{l|(d,m)} \mu(l) \\
&= \sum_{l|m} \mu(l) \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{y^s}{|cz+dl|^{2s}} \\
&= \sum_{l|m} \mu(l) l^{-2s} m^{-s} 2\zeta(2s) E_s(mz/l).
\end{aligned}$$

□

9.2 Prolongement analytique de E_s

On va chercher dans cette section à prolonger la série à $\mathbb{C}$. Pour cela il nous faut d'abord introduire le fonction Θ :

Définition 9.2 (La fonction Θ)**.** Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$\Theta(g) = \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi|(c,d)g|^2},$$

où $(c,d)g$ est le produit matriciel.

La proposition suivante assure la convergence et donne une majoration utile pour la suite.

Proposition 9.3. *Si $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble compact, alors il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $g \in K$, pour tout $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$*

$$|(c,d)g| \geq \lambda\,|(c,d)|$$

et alors, pour tout $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
\Theta(tg) - 1 &\leq \sum_{(c,d)\neq(0,0)} e^{-\pi(\lambda t)^2(c^2+d^2)} \\
&\leq C_\lambda e^{-\pi(\lambda t)^2}.
\end{aligned}$$

Le théorème suivant donne un prolongement analytique à $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

Theorème 9.1 (Prolongement analytique)**.** *On a le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ suivant, avec pour seuls pôles 0 et 1 :*

$$G(z,s) \underset{def}{=} \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)E_s(z) = \int_1^\infty (t^{2s}+t^{2-2s})(\Theta(tg_z)-1)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2s-2} - \frac{1}{2s}.$$

où $g_z = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$*. On a donc avec cette identité et la* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*-invariance de* $E_s(z)$*, l'equation fonctionnelle suivante :*

$$G(z,s) = G(z, 1-s) = G(\gamma z, s)$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*.*

Remarque 9.4. g_z a été choisi de façon à envoyer i sur z. Dans ce cas,

$$\sum_{(c,d)\neq(0,0)} |(c,d)g_z|^{-2s} = \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{y^s}{|cz+d|^2} = 2\zeta(2s)E_s(z).$$

Cela se vérifie rapidement par le calcul.

Lemme 9.1. *Pour tout* s *tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *on a*

$$G(z,s) = \int_0^\infty t^{2s}(\Theta(tg_z) - 1)\frac{dt}{t}.$$

Démonstration. Soit s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, par le théorème d'inversion série-intégrale (convergent pour $s > 1$ réel)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{2s}(\Theta(tg_z) - 1)\frac{dt}{t} &= \sum_{v\neq(0,0)} \int_0^\infty t^{2s} e^{-\pi|tvg_z|^2}\frac{dt}{t} \\
&\underset{t'=\pi(t|vg_z|)^2}{=} \sum_{v\neq(0,0)} \frac{1}{2}\pi^{-s}|vg_z|^{-2s}\int_0^\infty t^s e^{-t}\frac{dt}{t} \\
&= G(z,s)
\end{aligned}$$

□

L'intégrale de 1 à $+\infty$ est clairement une série entière en s (l'holomorphie sous le signe intégrale assure l'holomorphie de $\int_1^A$, et la majoration de Θ assure la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$). Le point délicat est donc l'étude de l'intégrale entre 0 et 1.

Lemme 9.2. *Pour tout* $s \in \mathbb{C}$*, tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *on a*

$$\int_0^1 t^{2s}(\Theta(tg_z) - 1)\frac{dt}{t} = \int_1^\infty t^{2-2s}(\Theta(tg_z) - 1)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2-2s} - \frac{1}{2s}.$$

La démonstration utilise le théorème suivant :

Theorème 9.2 (Formule de sommation de Poisson)**.** *Soit* f *dans la classe de Schwartz, i.e.* f *est* C^∞*, et (ici en dimension 2) pour tout* $n \geq 0$*, pour tous* $i, j \geq 0$*,*

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^n \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| \underset{\|a,b\|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors

$$\sum_{a,b\in\mathbb{Z}} f(a,b) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} \hat{f}(a,b),$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Preuve du lemme 9.2. On vérifie immédiatement avec la proposition 9.3 que φ est de la classe de Schwartz. La transformée de Fourier de $\varphi(x,y) = e^{-\pi|(x,y)|}$ est elle même, et le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t\ {}^{\intercal}g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

amène que la transformée de Fourier de $\Phi(v) = \varphi(tvg)$ (aussi dans la classe de Schwartz) est

$$t^{-2}\det(g)^{-1} \cdot \varphi(t^{-1}v\ {}^{\intercal}g^{-1}).$$

Avec la formule de sommation de Poisson on obtient donc

$$\Theta(tg) = t^{-2}\det(g)^{-1} \cdot \Theta(t^{-1}\ {}^{\intercal}g^{-1}),$$

d'où

$$\Theta(tg) - 1 = t^{-2}\det(g)^{-1}[\Theta(t^{-1}\ {}^{\intercal}g^{-1}) - 1] + t^{-2}\det(g)^{-1} - 1.$$

Rappelons que g est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et donc

$$\det(g) = 1 \text{ et } {}^{\intercal}g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = wgw^{-1}$$

où $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. w laissant stable $\mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)$, on a donc

$$\Theta(tg) - 1 = t^{-2}[\Theta(t^{-1}g) - 1] + t^{-2} - 1.$$

On intègre, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{2s}(\Theta(tg) - 1)\frac{dt}{t} &= \int_0^1 t^{2s}(t^{-2}[\Theta(t^{-1}g) - 1] + t^{-2} - 1)\frac{dt}{t} \\ &\underset{t=1/t}{=} \int_1^\infty t^{2-2s}[\Theta(tg) - 1]dt + \int_1^\infty t^{2-2s-1}dt - \int_1^\infty t^{-2s-1}dt \\ &= \int_1^\infty t^{2-2s}[\Theta(tg) - 1]dt + \frac{1}{2-2s} + \frac{1}{2s}.\end{aligned}$$

□

Finalement, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)E_s(z) = \int_1^\infty (t^{2s} + t^{2-2s})(\Theta(tg_z) - 1)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2s-2} - \frac{1}{2s}.$$

Le membre de droite admet visiblement un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec pour seules pôles 0 et 1, de résidus 1 et -1, il en est donc de même pour :

$$G(z,s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)E_s(z).$$

On a la methode de Rankin et Selberg pour étudier la série L de Rankin-Selberg associée à une forme primitive. Celle-ci admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec un pôle en 1, donc le résidu est lié à $\langle f, f\rangle$.

9.3 Série L de Rankin-Selberg associée à $f \otimes g$

Notation 1 (Série L de Rankin-Selberg)**.** *Soit* $f = \sum_{n\geq 1} \psi_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e^{2i\pi nz}$ *et* $g = \sum_{n\geq 1} \psi_g(n) n^{\frac{k-1}{2}} e^{2i\pi nz}$ *deux formes primitives de* $\mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$*. On définit la série L associée par*

$$L(f\otimes g, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\psi_f(n)\overline{\psi_g(n)}}{n^s}.$$

Cette série est absolument convergente sur le démi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ (avec Ramanujan-Petersson on a que $\psi_f(n) = O(n^\epsilon)$). On va montrer grâce aux séries d'Eisentstein que la série admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$.

Theorème 9.3 (Equation fonctionnelle de la fonction L)**.** *Soit m sans facteurs carrés, et $f, g \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$ deux formes primitives. Pour $p \mid m$ on note*

$$c_p = \psi_f(p)\psi_g(p) = \pm 1$$

en vertu de la théorie d'Atkin-Lehner. La série L se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe, vérifiant

$$\prod_{p\mid m}(1-c_p p^{-2s})^{-1}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{(m)}}\right)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta_m(2s)L(f\otimes g, s) = (4\pi)^{k-1}\langle fG(m\cdot, s), g\rangle,$$

où

$$\zeta_m(s) = \sum_{n\geq 1\ ,\ (n,m)=1} n^{-s} = \zeta(s)\prod_{p\mid m}(1-p^{-s}).$$

Cette expression est clairement invariante sous $s \mapsto 1-s$ (rappelons que dans théorème 9.1 on montre que $G(z,s) = G(z, 1-s)$).

Remarque 9.5. Cette formule devient, si $f = g$,

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{(m)}}\right)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta(2s)L(f\otimes f, s) = (4\pi)^{k-1}\langle fG(m\cdot, s), f\rangle.$$

On commence par relier la série L, les séries d'Eisenstein et le produit scalaire de Petersson

Lemme 9.3. *Soit $s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1$, $N \geq 0$, et $f, g \in \mathscr{S}_k(\Gamma_0(m))$ deux formes paraboliques. On note*

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{2i\pi nz} \text{ et } g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n e^{2i\pi nz},$$

alors

$$\langle f E_s^m(\cdot), g \rangle = (4\pi)^{-(s+2k-1)} \Gamma(s + 2k - 1) L(f \otimes g, s).$$

Corollaire 9.1. *Soit f une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$, notée $f(z) = \sum_{n \geq 1} \psi(n) n^{\frac{k-1}{2}} e^{2i\pi nz}$. Alors*

$$\langle f E_s^m, f \rangle = (4\pi)^{-(s+2k-1)} \Gamma(s + 2k - 1) L(f \otimes f, s).$$

On rappelle $\psi_f(n) = \frac{a_n}{n^{(k-1)/2}}$ désigne les coefficients normalisés. Si f est une forme primitive, alors $\psi_f(n)$ est la valeur propre de f pour l'opérateur de Hecke $T(n)$ normalisé.

Pour montrer le Lemme, il faut d'abord un argument de croissance sur $G(x + iy, s)$ lorsque $y \to \infty$.

Proposition 9.4. *Il existe une constante C, tel que pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$|s(s-1)G(z,s)| \leq C(y+1)^{|\mathrm{Re}(s)|+1}(|s|^2 + 1)$$

Remarque 9.6. C'est donc aussi valable pour E_s^m, pour tout m, avec la proposition 9.2.

Démonstration. On le montre d'abord pour $\mathrm{Re}(s) > 2$. Notons $\sigma = \mathrm{Re}(s)$.

$$\begin{aligned} |E_s(z)| &\leq \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{y^\sigma}{|cz + d|^{2\sigma}} \\ &= y^\sigma \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(c^2 y^2 + (cx + d)^2)^\sigma}. \end{aligned}$$

Si $y \geq 2$ on a

$$\sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(c^2 y^2 + (cx + d)^2)^\sigma} \leq \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(c^2 + (cx + d)^2)^2} \leq C,$$

où C est indépendante de x. D'où le résultat voulu pour $\mathrm{Re}(s) > 2$. Le facteur $\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$ est majoré sur $\mathrm{Re}(s) \geq 2$ par une constante. L'invariance de $G(z, s)$ sous $s \to 1 - s$ assure le résultat pour $\mathrm{Re}(s) < -1$.

On note ensuite que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$s \mapsto t^{2s} + t^{2-2s}$$

est décroissante sur $]-\infty\ ,\ 1/2]$ et croissante sur $[1/2\ ,\ +\infty[$. On en déduit que si $-1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$, d'après théorème 9.1 (en notant que $\Theta - 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$)

$$\begin{aligned}|s(s-1)G(z,s)| &\leq |s(s-1)| \int_0^\infty (t^{\mathrm{Re}(s)} + t^{2-\mathrm{Re}(s)})(\Theta(tg_z)-1)dt + \left|s(s-1)(\frac{1}{2s-2} - \frac{1}{2s})\right| \\ &\leq |s(s-1)| \int_0^\infty (t^2 + t^{2-2})(\Theta(tg_z)-1)dt + \text{ cste} \\ &= |s(s-1)|\, G(z,2) + \text{ cste.}\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat.

□

On passe à la preuve du lemme :

Démonstration. On fixe $m \geq 1$ et $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. Soit $f, g \in \mathscr{S}_k(m)$. L'intégrale définissant $\langle fE_s^m, g\rangle$ est absolument convergente d'après la proposition 9.4. On a alors

$$\begin{aligned}\langle fE_s^m, g\rangle &= \int_{\Gamma_0(m)\backslash\mathbb{H}} \sum_{\gamma\in P\backslash\Gamma_0(m)} \mathrm{Im}(\gamma z)^s y^k f(z)\overline{g(z)}d\mu(z) \\ &= \int_{\Gamma_0(m)\backslash\mathbb{H}} \sum_{\gamma\in P\backslash\Gamma_0(m)} \mathrm{Im}(\gamma z)^{s+k} f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}d\mu(z) \\ &= \sum_{\gamma\in P\backslash\Gamma_0(m)} \int_{\gamma\cdot\Gamma_0(m)\backslash\mathbb{H}} y^{s+k} f(z)\overline{g(z)}d\mu(z) \\ &= \int_{P\backslash\mathbb{H}} y^{s+k} f(z)\overline{g(z)}d\mu(z).\end{aligned}$$

La deuxième égalité étant garantie par le fait que $y^{k/2}f(z)$ est $\Gamma_0(m)$-invariante, la troisième par Fubini et la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariance de $d\mu$ et la dernière resulte du fait que le domaine fondamental pour P vérifie $D_P = \bigsqcup_{\gamma\in P\backslash\Gamma_0(m)} \gamma\cdot D_{\Gamma_0(m)}$.

On peut prendre comme domaine fondamental pour P le rectangle $\{x+iy,\ 0<x<1,\ 0<y\}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\langle fE_s^m, g\rangle &= \int_0^\infty \int_0^1 y^{s+k} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}dx\ \frac{dy}{y^2} \\ &= \int_0^\infty y^{s+k-1} \left(\sum_{n,l\geq 1} a_n\overline{b_l}e^{-2\pi(n+l)y} \int_0^1 e^{2i\pi(n-l)x}dx\right)\frac{dy}{y} \\ &= \sum_{n\geq 1} a_n\overline{b_n}(4\pi n)^{-(s+k-1)} \int_0^\infty y^{s+k-1}e^{-y}\frac{dy}{y} \\ &= (4\pi)^{-(s+k-1)}\Gamma(s+k-1)\sum_{n\geq 1}\frac{a_n\overline{b_n}}{n^{s+k-1}} \\ &= (4\pi)^{-(s+k-1)}\Gamma(s+k-1)L(f\otimes g, s).\end{aligned}$$

Les différentes étapes étant correctement justifiés par Fubini (on rappelle que $a_n = O(n^{k/2})$). □

En multipliant l'expression du lemme 9.3 par $\left(\frac{m}{\pi}\right)^s \Gamma(s)\zeta_m(2s)$ on obtient

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-2s} \Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta_m(2s)L(f\otimes g,s) = \pi^{k-1}\langle f\zeta_m(2s)E_s^m(\cdot),g\rangle,$$

puis en appliquant la proposition 9.2

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-2s} \Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta_m(2s)L(f\otimes g,s) = \pi^{k-1}\sum_{d|m}\frac{\mu(d)}{d^{2s}}\langle fG(m\cdot/d,s),g\rangle\ .$$

Finalement, on va utiliser les W_p, p divisant m, pour se débarasser de la dépendance en d à l'intérieur de G dans la dernière somme.

Lemme 9.4. *Soit $p \mid m$ et $d \mid (m/p)$. On rappelle que $f_{|W_p} = \psi_f(p)f = \pm f$. On note*

$$c_p = \psi_f(p)\psi_g(p) = \pm 1.$$

Bien sûr c_p vaut 1 si $f = g$. On a

$$\langle fG(m\cdot/(pd),g\rangle = c_p\langle fG(m\cdot/d),g\rangle.$$

Démonstration. Notons

$$W_p = \begin{pmatrix} xp & -y \\ m & p\end{pmatrix} \in \Gamma_0(\frac{m}{p})\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On rappelle que W_p est de déterminant p. Soit $d \mid \frac{m}{p}$, il vient

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{pd} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} W_p \begin{pmatrix} \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \frac{-ym}{dp} \\ d & p\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

et donc

$$G\left(\frac{m(W_pz)}{pd},s\right) = G\left(\frac{mz}{d},s\right).$$

On rappelle la formule, valable pour $g \in \mathrm{GL}_+(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Im}(gz)^{k/2}f(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)^{k/2}\det(g)}{(cz+d)^k}f(gz) = y^{k/2}f_{|g}(z).$$

Appliquant cela à $y^{k/2}f_{|W_p}$ et $y^{k/2}g_{|W_p}$, on obtient ($d\mu_0$ étant $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R})$-invariante)

$$\begin{aligned}\langle fG(\frac{m\cdot}{pd},s),g\rangle &= \int_{D_{\Gamma_0(m)}} y^k f(z)\overline{g(z)}G(\frac{mz}{pd},s)d\mu_0 \\ &= \int_{W_p^{-1}D_{\Gamma_0(m)}} c_p y^k f(z)\overline{g(z)}G(\frac{mz}{d},s)d\mu_0 \\ &= \int_{D_{\Gamma_0(m)}} c_p y^k f(z)\overline{g(z)}G(\frac{mz}{d},s)d\mu_0 \\ &= c_p\langle fG(\frac{m\cdot}{d},s),g\rangle\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $W_p^{-1}D_{\Gamma_0(m)}$ est un domaine fondamental pour $W_p^{-1}\Gamma_0(m)W_p = \Gamma_0(m)$. $\square$

On finit la preuve du théorème :

Démonstration. Soit $p \mid m$. En utilisant le lemme 9.4 on a

$$\sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^{2s}} \langle fG(\frac{m\cdot}{d}, s), g\rangle = \sum_{d|\frac{m}{p}} \frac{\mu(d)}{d^{2s}} \langle fG(\frac{m\cdot}{d}, s), g\rangle + \sum_{d|\frac{m}{p}} \frac{\mu(pd)}{(pd)^{2s}} c_p \langle fG(\frac{m\cdot}{d}, s), g\rangle$$
$$= (1 - c_p p^{-2s}) \sum_{d|\frac{m}{p}} \frac{\mu(d)}{d^{2s}} \langle fG(\frac{m\cdot}{d}, s), g\rangle.$$

Et en itérant pour $p \mid m$ on obtient

$$\sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^{2s}} \langle fG(\frac{m\cdot}{d}, s), g\rangle = \prod_{p|m} (1 - c_p p^{-2s}) \langle fG(m\cdot, s), g\rangle$$

puis

$$\prod_{p|m} (1 - c_p p^{-2s})^{-1} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-2s} \Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta_m(2s)L(f \otimes g, s) = (4\pi)^{k-1} \langle fG(m\cdot, s), g\rangle.$$

□

Troisième partie . Bornes sur $\| \|_\infty$ et $\| \|_2$

On s'intéresse dans cette partie à l'étude de deux normes sur $\mathscr{S}^k(m)$:

$$\left\| y^{k/2} f(z) \right\|_\infty \text{ et } \|f\|_2 .$$

On peut déjà remarquer que si $g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Im}(gz)^{k/2} f(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)^{k/2} \det(g)}{(cz+d)^{2k}} f(gz) = y^{k/2} f_{|_k g}(z).$$

Si f est dans $\mathscr{S}^k(m)$, $y^{k/2} f(z)$ est donc $\Gamma_0(m)$-invariante, et comme $f(z) = O(e^{-2\pi y})$ lorsque $y \to \infty$ (on peut regarder le q-développement en 0), $\left\| y^{k/2} f(z) \right\|_\infty$ est bien défini. Rappelons qu'on définit $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. On a donc deux normes sur $\mathscr{S}^k(m)$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Elles sont donc équivalentes. Un problème intéressant consiste à étudier les coéfficients d'équivalence entre ces deux normes. On obtient facilement un des deux sens :

Proposition 9.5. *Soit $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_{k,\epsilon} > 0$ dépendante de k, ϵ uniquement telle que pour tout m sans facteurs carrés,*

$$\forall f \in \mathscr{S}^k(m),\ C_{k,\epsilon} m^{-1/2-\epsilon} \|f\|_2 \le \left\| y^{k/2} f(z) \right\|_\infty .$$

Démonstration. On a $\langle f, f\rangle \leq \left\|y^{k/2}f(z)\right\|_\infty \mathrm{Vol}_{d\mu}(D_{\Gamma_0(m)})$ où $\mathrm{Vol}_{d\mu}(D_{\Gamma_0(m)})$ est l'intégrale

$$\int_{D_{\Gamma_0(m)}} \frac{dz}{y^2}.$$

On sait que si $\gamma_1, \cdots, \gamma_l$ sont des représentants de $\Gamma_0(m) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

$$D_{\Gamma_0(m)} = \bigcup_i \gamma_i D_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

et par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariance de la mesure $d\mu$ on a donc

$$\mathrm{Vol}_{d\mu}(D_{\Gamma_0(m)}) \leq C_k[\Gamma_0(m) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})].$$

Avec la proposition 4.1, on a

$$[\Gamma_0(m) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})] = \prod_{p|m}(1+p) = O_\epsilon(m^{1+\epsilon})$$

d'où la propriété voulue. $\square$

On peut se demander si la borne marche aussi de l'autre sens, càd

$$\left\|y^{k/2}f(z)\right\|_\infty \ll_{k,\epsilon} m^{-1/2+\epsilon} \|f\|_2 .$$

Templier démontre dans [12], que ce n'est pas le cas lorsque $k = 2$ et m ne contient pas de facteurs carrés, autrement dit, il existe m arbitrairement grand, tel qu'il existe $f \in \mathscr{S}^2(m)$ vérifiant

$$\|yf(z)\|_\infty \geq Cm^{-1/4} \|f\|_2 .$$

Nous allons démontrer une première borne sur $\left\|y^{k/2}f(z)\right\|_\infty$ (sans relation avec la $\|f\|_2$) en section 10, puis :

$$\left\|y^{k/2}f(z)\right\|_\infty \ll_{k,\epsilon} \|f\|_2$$

en section 11 qvec lq formule des pré-traces, et une amélioration en utilisant la méthode d'amplification sur la formule des pré-traces pour obtenir

$$\left\|y^{k/2}f(z)\right\|_\infty \ll_{k,\epsilon} m^{-1/6+\epsilon} \|f\|_2 .$$

Dans la dernière section nous majorons le produit scalaire de Petersson.

10 Une borne par étude des coefficients

La démonstration de cette première borne asymptotique en m utilise principalement la conjecture de Ramanujan-Petersson sur les coefficients d'une forme primitive (théorème 7.1) et l'analyse des coefficiens des formes primitives. Elle a été faite par Abbes et Ullmo dans [1], dans le cas $k = 2$.

Theorème 10.1 (Abbes et Ullmo)**.** *Soit $k \geq 2$, et $\epsilon > 0$. Il existe $C_{\epsilon,k}$ tel que pour tout m sans facteurs carrés et toute forme primitive f pour $\Gamma_0(m)$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{H}} \left| y^{k/2} f(z) \right| \leq C_{\epsilon,k} m^{1/2+\epsilon}.$$

Notation 2. *Si $a < b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on définit le rectangle*

$$\mathcal{S}_a^b = \{z \in \mathbb{H} \textit{ tels que } |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2 \textit{ et } a \leq \mathrm{Im}(z) \leq b\}.$$

$\mathcal{S}_a$ désignera $\mathcal{S}_a^\infty$.

La proposition suivante est utilisée dans toutes les bornes que nous allons exposer, elle ramène la recherche du suprémum de $y^{k/2}|f(z)|$ à un translaté du domaine fondamental vers le bas. La proposition d'après montre que dans la partie supérieure de ce rectangle, la majoration ne pose pas de problème. C'est sur la partie du rectangle qui est translatée vers le bas que la majoration sera délicate.

Proposition 10.1 (Simplification du domaine d'étude)**.** *Soit m sans facteurs carrés et $f \in \mathscr{S}^k(m)$ une forme parabolique pour $\Gamma_0(m)$.*

On a alors

$$\sup_{z\in\mathbb{H}} y^{k/2} |f(z)| = \sup_{z\in\mathcal{S}_{\frac{\sqrt{3}}{2m}}} y^{k/2} |f(z)|.$$

Démonstration. Soit m sans facteurs carrés et $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2i\pi nz}$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$. La preuve utilise le système de représentantss de $\Gamma_0(m)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ définit dans la proposition 4.1. On en rappelle l'expression :

Pour $q|m$ on choisit β, γ tels que $\frac{m}{q}\beta - q\gamma = 1$ et on note

$$B_q = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ q\gamma & m/q \end{pmatrix} \underset{\text{si } q\neq m}{=} W_{m/q} \begin{pmatrix} q/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } A_{q,j} = B_q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & j \end{pmatrix} \text{ pour } 0 \leq j \leq q-1$$

Alors $\{A_{q,j}\ ,\ q|m \text{ et } 0 \leq j \leq q-1\}$ est un système de représentantss de $\Gamma_0(m) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

On note $\mathbb{D}$ le domaine fondamental usuel pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ c'est à dire tel que $|\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ et $|z| \geq 1$. Alors on alors on rappelle que

$$\bigcup_{q|m\ ,\ 0\leq j\leq q-1} A_{q,j} \cdot \mathbb{D}$$

est un domaine fondamental pour $\Gamma_0(m)$. (On a besoin que m soit sans facteurs carrés pour utiliser ce système de représentantss, c'est ici que l'hypothèse intervient.)

On rapelle que si $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\left|y^{k/2} f(z)\right|$ est $\Gamma_0(m)$-invariante, on peut donc se ramener de $\mathbb{H}$ à $\bigcup_{q|m\ ,\ 0\leq j\leq q-1} A_{q,j}\cdot \mathbb{D}$. On a aussi l'invariance de $\left|y^{k/2} f(z)\right|$ sous l'action de W_q, pour $q \mid m$, puisque $f_{|_k W_q}(z) = \pm f(z)$ (théorème 6.3). Soit q un diviseur de m, différent de m, on constate que

$$\begin{aligned} A_{q,j} \underset{def}{=} W_{m/q} &\begin{pmatrix} q/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & j \end{pmatrix} \\ = W_{m/q} &\begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et que

$$A_{m,j} = \underbrace{B_m}_{\in \Gamma_0(m)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/m & -j/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il vient donc, par invariance, que pour tout $q \mid m$

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{Im}(A_{q,j} z)^{k/2} f(A_{q,j} z)\right| &= \left|\mathrm{Im}(\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & q \end{pmatrix} z)^{k/2} f(\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & q \end{pmatrix} z)\right| \\ &= \left|\mathrm{Im}(\frac{z-j}{q})^{k/} f(\frac{z-j}{q})\right|. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \sup_{z\in\mathbb{H}} y^{k/2} |f(z)| &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}\ ,\ q|m\ ,\ j\leq q} \left|\mathrm{Im}(\frac{z-j}{q})^{k/2} f(\frac{z-j}{q})\right| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{H}\ ,\ \mathrm{Im}(z)\geq\sqrt{3}/(2m)} \left|y^{k/2} f(z)\right| \\ &= \sup_{z\in\mathcal{S}_{\frac{\sqrt{3}}{2m}}} \left|y^{k/2} f(z)\right|. \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $\inf\{\mathrm{Im}(z)\ ,\ z\in\mathbb{D}\} = \mathrm{Im}(e^{2i\pi/3}) = \sqrt{3}/2$) □

On passe maintenant à la preuve du théorème :

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Soit m sans facteurs carrés et $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2i\pi nz} \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$ une forme primitive de poid k pour $\Gamma_0(m)$. D'après l'estimation de Ramanujan-Petersson, $a_n \leq d(n) n^{(k-1)/2} \leq B_\epsilon n^{(k-1)/2+\epsilon}$. D'après proposition 10.1,

$$\begin{aligned} \sup_{z\in\mathbb{H}} y^{k/2} |f(z)| &\leq \sup_{z\in\mathcal{S}_{\sqrt{3}/(2m)}} \left|y^{k/2} f(z)\right| \\ &\leq \sup_{y\geq\frac{1}{2m}} B_\epsilon y \sum_{n\geq 1} n^{1/2+\epsilon} e^{-2\pi ny}. \end{aligned}$$

Le théorème se ramène alors au résultat suivant :

Il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$,

$$\sup_{y\in[x,\infty)} y^{k/2} \sum_{n\geq 1} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi ny} \leq Ax^{-1/2-\epsilon)}.$$

La preuve de cette inégalité consiste à couper la somme en $n_k = \left\lceil \frac{k-1+2\epsilon}{4\pi x} \right\rceil$. Le terme $y^{k/2} \sum_{n\geq n_k} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi ny}$ est négligeable pour tout $y \geq x$, et une étude sur le maximum en y des autres termes donne une majoration suffisante.

On étudie, pour $t \geq 0$, $f_y(t) = t^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi ty}$. On a alors

$$f_y'(t) = ((k-1)/2 + \epsilon - 2\pi yt)\, t^{-1/2+\epsilon} e^{-2\pi ty} \leq 0 \iff t \geq \frac{1/2+\epsilon}{2\pi y},$$

donc $f_y(t)$ est décroissante pour pour tout y si $t \geq n_k = \left\lceil \frac{k-1+2\epsilon}{4\pi x} \right\rceil$. D'où

$$\begin{aligned} y^{k/2} \sum_{n>n_0} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi yn} &\leq y^{k/2} \int_{\frac{(k-1)+2\epsilon}{4\pi x}}^{\infty} t^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi ty} dt \\ &\underset{s=yt}{=} y^{-1/2-\epsilon} \int_{\frac{y(k-1+2\epsilon)}{4\pi x}}^{\infty} s^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi s} ds \\ &\leq x^{-1/2-\epsilon} \int_{\frac{k-1+2\epsilon}{4\pi}}^{\infty} s^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi s} ds. \end{aligned}$$

On étudie ensuite $g_n(y) = y^{k/2} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi ny}$.

$$g_n'(y) = (\frac{k}{2y} - 2\pi n) y^{k/2} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi yn} \geq 0 \iff y \leq \frac{k}{4\pi n}.$$

g_n admet donc un maximum en $y = \frac{k}{4\pi n}$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq n\leq n_k} y^{k/2} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi ny} &\leq \left(\frac{k}{4\pi e}\right)^{k/2} \sum_{1\leq n\leq n_k} n^{-1/2+\epsilon} \\ &\leq \left(\frac{k}{4\pi e}\right)^{k/2} (1/2+\epsilon) n_k^{1/2+\epsilon} \\ &\leq Cx^{-1/2-\epsilon} \end{aligned}$$

pour un certain C dépendant de k, ϵ uniquement. En combinant les deux inégalités, on obtient bien le résultat voulu, et donc le théorème.

□

En fait, en analysant les coefficients de Fourier (avec le conjecture Ramanujan-Petersson), on obtient une majoration sur $\mathcal{S}_k$ dépendant de k uniquement.

Proposition 10.2 (Borne sur $\mathcal{S}_k$)**.** *Il existe $A(k) > 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour toute forme primitive f pour $\Gamma_0(m)$,*

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_{2/k}} y^{k/2} |f(z)| \leq A(k).$$

Remarque 10.1. En fait, on n'utilise qu'un corollaire trivial de Ramanujan-Petersson : l'indépendance de la constante C dans la majoration $a_n \leq Cn^{k/2}$. Cette majoration peut s'obtenir avec des moyens bien plus élémentaires (proposition 7.1), mais cela ne donne pas une constante uniforme pour toutes les formes primitives de tous les niveaux. La majoration $|a_n| \leq d(n)n^{k/2-1/2}$ elle, la donne.

Remarque 10.2. Nous ne le redémontrons pas, mais on sait que $\langle f, f \rangle \geq C_\epsilon m^{1-\epsilon}$ [7]. Avec cela on obtient donc que sur $\mathcal{S}_k$,

$$y^{k/2} |f(z)| \leq Cm^{-1/2+\epsilon} \|f\|_2 ,$$

ce qui correspond (à m^ϵ près) au coéfficient d'équivalence des normes optimal, comme nous l'avons vu dans l'introduction de la partie 3.

Démonstration. Soit k un entier positif et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$ une forme primitive et $z \in \mathcal{S}_k$. On écrit

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} n^{(k-1)/2} \psi(n) e^{2i\pi nz}.$$

D'après la conjecture de Ramanujan-Petersson(théorème 7.1) on a $\psi(n) \leq d(n) \leq n^{1/2}$, d'où

$$y^{k/2} |f(z)| \leq \sum_{n \geq 1} n^{k/2} e^{-2\pi ny}$$

Or, pour $y \geq k$, la fonction $t \mapsto (yt)^{k/2} e^{-2\pi ty}$ est décroissante sur $[1/(4\pi); \infty[$ ($[1; \infty[$ était suffisant). On peut donc faire une comparaison série-intégrale :

$$\begin{aligned} y^{k/2} |f(z)| &\leq \int_{t \geq 1} (ty)^{k/2} e^{-2\pi ty} dt \\ &\underset{s=ty}{\leq} \int_{s \geq y} s^{k/2} e^{-2\pi s} \frac{ds}{y} \\ &\leq \int_{s \geq 1} s^{k/2} e^{-2\pi s} ds \\ &\leq A(k). \end{aligned}$$

□

On peut aussi facilement minorer $\langle f, f \rangle$ lorsque $a_1 = 1$. Cela sera utile dans de futures démonstrations donc on le montre maintenant.

Proposition 10.3 (Minoration de $\langle f, f\rangle$)**.** *Soit* $k \geq 0$*,* $m \geq 0$ *et* $f = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2i\pi nz} \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$ *une forme primitive (ou plus généralement une forme parabolique normalisée par* $a_1 = 1$*. Alors*

$$\langle f, f\rangle \geq \frac{e^{-4\pi}(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &\geq \int_{y=1}^{\infty}\int_{x=-1/2}^{1/2} y^k f(z)\overline{f(z)}dxdy \\
&= \int_{y\geq 1} y^{k-2}\sum_{n,l\geq 1} a_n\overline{a_l}e^{-2\pi(n+l)y}\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(n-l)x}dxdy \\
&= \int_{y\geq 1} y^{k-2}\sum_{n\geq 1} a_n^2 e^{-4\pi ny}dy \\
&\geq a_1^2 \int y \geq 1 y^{k-2}e^{-4\pi y}dy \\
&\geq \frac{e^{-4\pi}(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}}.
\end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini pour intervertir les signes somme est correcte car $a_n = O(n^{k/2})$. □

11 Borne via la formule des pré-traces

Cette borne utilise les propriétés de la formule des pré-traces pour établir la même borne que le théorème précédent, mais que le degré k est supérieur ou égal à 4. Elle ne fonctionne que dans un rectangle $\mathcal{S}^b_{1/(2q)}$ borné (c'est à dire $b < \infty$). Mais comme on a la proposition 10.2, on peut l'étendre à tout $\mathcal{S}_{\sqrt{3}/(2m)}$, et donc à $\mathbb{H}$ avec la proposition 10.1.

Theorème 11.1 (Borne par la formule des pré-traces)**.** *Soit* $0 < T < \infty$*. Il existe une constante* $C_{k,\epsilon,T}$ *dépendant de* k*,* ϵ *et* T *uniquement, telle que pour tout* $z \in \mathcal{S}^T_{\sqrt{3}/(2m)}$

$$y^{k/2}\left|f(z)\right| \leq C_{k,\epsilon,T}\left\|f\right\|_2.$$

Corollaire 11.1. *On a donc*

$$\sup_{\mathbb{H}} y^{k/2}\left|f(z)\right| \leq C_{k,\epsilon}\left\|f\right\|_2$$

Démonstration. On applique le théorème avec $T = k$, puis on utilise la proposition 10.2 pour borner $y^{k/2}\left|f(z)\right|$ par une constante sur $\mathcal{S}_k$, et on utilise la proposition 10.3 , qui minore $\left\|f\right\|_2$ par une constante. □

Remarque 11.1. Cette borne est donc equivalente à la borne trouvée dans le théorème 10.1, lorsqu'on a l'encadrement $M_1 m^{1-\epsilon} \leq \langle f, f\rangle \leq M_2 m^{1+\epsilon}$. La majoration de $\langle f, f\rangle$ sera démontrée plus loin (théorème 13.1) et la minoration est démontrée par P.J. Hoffstein dans [7].

Remarque 11.2. Ce résultat sur la formule des pré-traces (théorème 11.1), donne une borne constante en moyenne sur une bon : Si $(f_i)_{1\leq i\leq g}$ est une base orthonormée de $\mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$, on a

$$1/g \sum_i y^k \left|f_i(z)\right|^2 \ll_k 1.$$

On utilise la majoration sur $y^k h(w,z)$ obtenue dans la preuve pour le montrer.

Theorème 11.2 (Formules des pré-traces)**.** *Si* , $z, w \in \mathbb{H}$*, alors*

$$h(z,w) \underset{déf}{=} \sum_{\rho\in\Gamma_0(m)} \frac{1}{j(\rho,z)^k (w+\rho z)^k} = C_k \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\langle f_j, f_j\rangle} \overline{f_j(-\overline{w})} f_j(z),$$

où f_i est une base orthogonale de $\mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$, et C_k une constante dépendante de k, qui est fixé ici.

La preuve se fait en deux étapes. D'abord on montre que pour tout $w \in \mathbb{H}$, $h(\cdot, w)$ est une forme parabolique de poids k. Puis on montre que si $f \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$ est une autre forme parabolique de poids k,

$$\langle h(\cdot,w), f\rangle = C_k \overline{f(-\bar{w})}$$

où $C_k = \frac{(-1)^{k/2}\pi}{2^{k-3}(k-1)!}$. Intuitivement, la formule des traces "fonctionne" un peu comme la série L de Rankin-Selberg (h joue le rôle de la série d' Eisentstein $E_s^N(z)$) : h est une série portant sur des éléments de $\Gamma_0(m)$, conçue de façon à ce que lorsqu'on fait le produit scalaire de Petersson avec f, l'intégrale portant sur $\Gamma_0(m)\setminus\mathbb{H}$ devient une intégrale sur un produit cartésien (ici une intégrale sur $\mathbb{H}$, dans le cas de Rankin-Selberg une intégrale sur $\mathcal{S}_0$), pour laquelle on a une formule simple.

Démonstration. On montre d'abord l'holomorphie de h en z. Soit $w_0 \in \mathbb{H}$ et $0 < \delta \leq 1$, tel qu'il éxiste ϵ tel que $B(w_0,\delta) \subset \mathbb{H} + i\epsilon$. Montrons que la convergence est normale sur $\mathcal{S}_\epsilon \times B(w_0,\delta)$ (on rappelle que $\mathcal{S}_\epsilon = \{z \in \mathbb{H},\ -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2,\ \mathrm{Im}(z) > \epsilon\}$).

On va d'abord sommer sur c, d, puis sur les matrices de $\mathrm{SL}\,\mathbb{Z}$ ayant c et d en 3èmes et 4èmes coéfficients. On fixe $c, d \in \mathbb{Z}$. Soit $n \geq 1$. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,\mathbb{Z}$ tel que

$$|w + \gamma z| \leq n$$

On a alors $\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| \leq n + |w|$ donc $|a| \leq \frac{1}{\epsilon}\left|cz+d\right|(n+|w|) \leq A\left|cz+d\right| n$ pour une certaine constante A dépendant de w_0 et ϵ uniquement. Il existe donc (puisque le choix de a, c, d détermine γ) une constante A, dépendant de w_0 uniquement, telle que pour tout $w \in B(w_0,\delta)$, $z \in \mathcal{S}_\epsilon$, $c, d \in \mathbb{Z}$

$$\#\left\{\gamma = \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,\mathbb{Z} \text{ tels que } |w+\gamma z| \leq n\right\} = \#E_{c,d}(n) \leq A\,|cz+d|\,n$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \frac{1}{|j(\gamma,z)(w+\gamma z)|^k} &\leq \sum_{\gamma\in\mathrm{SL}\,\mathbb{Z}} \frac{1}{|j(\gamma,z)(w+\gamma z)|^k} \\
&\leq \sum_{c,d\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{|cz+d|^k}\left(\sum_{E_{c,d}(1)} \frac{1}{|w+\gamma z|^k} + \sum_{n\geq 1}\sum_{\gamma\in E_{c,d}(n+1)\setminus E_{c,d}(n)} \frac{1}{|w+\gamma z|}\right) \\
&\leq \sum_{c,d\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{|cz+d|^k}\left(\frac{A\,|cz+d|}{\mathrm{Im}(w)} + \sum_{n\geq 1} \frac{A\,|cz+d|\,(n+1)}{n^k}\right) \\
&\leq A' \sum_{c,d} \frac{1}{|ci\epsilon+d|^{k-1}}
\end{aligned}$$

qui converge puisque $k \geq 4$, d'après les théorèmes de sommation sur les réseaux, d'où la convergence normale sur $\mathcal{S}_\epsilon \times B(w_0,\delta)$, et donc l'holomorphie (en w et z) de h sur tout $\mathbb{H}$.

Soit $\gamma_0 \in \Gamma_0(m)$. On a

$$h(\gamma_0 z, w) = \frac{1}{j(\gamma_0,z)^k} \sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \frac{1}{j(\gamma\gamma_0,z)^k(w+\gamma\gamma_0 z)^k} = j(\gamma_0,z)^{-k} h(z,w),$$

et donc

$$h_{|_k\gamma}(\cdot,w) = h(\cdot,w).$$

Soit $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0(m)$,

$$|j(\gamma\alpha,z)(w+\gamma\alpha z)| \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et donc, la convergence étant normale sur $\mathcal{S}_1$,

$$\left|h_{|_k\alpha}(z,w)\right| = \left|\sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \frac{1}{j(\gamma\alpha,z)^k(w+\gamma\alpha z)^k}\right| \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a bien $h(\cdot,w) \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$ comme voulu. Cela termine la première partie de la preuve

□

Passons à la deuxième partie de la preuve.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$. On remarque que

$$\begin{aligned} y^k f(z)\overline{h(z,w)} &= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \frac{y^k f(z)}{(c\bar{z}+d)^k(\bar{w}+\gamma\bar{z})^k} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \frac{\mathrm{Im}(\gamma z)^k f(\gamma z)}{(\bar{w}+\gamma\bar{z})^k} \end{aligned}$$

où l'on a étendu l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à $-\mathbb{H}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \langle f, h(\cdot,\overline{-w})\rangle &= \int_{D_{\Gamma_0(m)}} \sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \frac{\mathrm{Im}(\gamma z)^k f(\gamma z)}{(-w+\gamma\bar{z})^k} d\mu \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \int_{\gamma D_{\Gamma_0(m)}} \frac{y^k f(z)}{(-w+\bar{z})^k} d\mu \\ &= 2\int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=-\infty}^{+\infty} y^{k-2} f(x+iy)\frac{1}{(-w+x-iy)^k}dxdy, \end{aligned}$$

où $D_{\Gamma_0(m)}$ est un domaine fondamental pour $\Gamma_0(m)$, et donc $\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0(m)} \gamma\mathcal{D}_{\Gamma_0(m)} = \mathbb{H}$. La mesure des bords par $d\mu$ est nulle et le facteur 2 provient du fait que le noyau de l'action de $\Gamma_0(m)$ sur $\mathbb{H}$ est $\{\pm I\}$, d'indice 2 dans $\Gamma_0(m)$. L'interversion par Fubini est correcte car $y^k\,|f(z)|$ est bornée sur $\mathbb{H}$ (on utilise pour $y \geq 1$ que $f(z) \underset{y\to\infty}{=} O(e^{-2\pi y})$ et pour $y \leq 1$ la bornitude de $y^{k/2}f(z)$ élaborée plus tôt).

À y fixé on applique ensuite la formule de Cauchy à $\frac{f(z)}{(z-(w+iy))^k}$, sur le rectangle délmitié par $-x+iy$, $-x+iT$, $x+iT$, $x+iy$. En faisant tendre T vers l'infini, comme f est une forme parabolique elle est bornée sur $\{z,\ \mathrm{Im}(z)\geq y\}$ et donc la contribution des segments partants à l'infini tend vers 0, et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+iy)}{(x-w-iy)^k}dx = \frac{2i\pi}{(k-1)!}f^{(k-1)}(2iy+w).$$

Puis, avec une intégration par partie itérée (on notera que $f^{(d)}(z) = O(e^{-2\pi y})$ pour tout d)

$$\int_0^{\infty} y^{k-2} f^{(k-1)}(2iy+w)dy = \frac{-1}{(2i)^{k-2}}f(w).$$

Finalement, on obtient que

$$\langle h(\cdot,-\bar{w}), f\rangle = C_k\overline{f(-\bar{w})},$$

où $C_k = \frac{(-1)^{k/2}\pi}{2^{k-3}(k-1)!}$. Si l'on prend f_i une base orthogonale de $\mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$, on a bien

$$h(z,w) = C_k\sum_i \frac{f_i(z)\overline{f_i(-\bar{w})}}{\|f_i\|_2^2}$$

□

En prenant $w = -\overline{z}$ on obtient :

$$C_k \sum_j \frac{1}{\|f_j\|_2^2} |f_j(z)|^2 = \sum_{\rho \in \Gamma_0(m)} \frac{1}{j(\rho, z)^k (\rho z - \overline{z})^k},$$

d'où, en prenant $f_1 = f$ et en complétant en une base orthogonale,

$$\begin{aligned} y^k |f(z)|^2 &= y^k |f_1(z)|^2 \\ &\leq \|f_1\|_2^2 \, y^k \sum_j \frac{1}{\|f_j\|_2^2} |f_j(z)|^2 \\ &\leq \|f\|_2^2 \frac{1}{C_k} \sum_{\rho \in \Gamma_0(m)} \frac{y^k}{j(\rho, z)^k (\rho z - \overline{z})^k}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'étudier la somme

$$\sum_{\rho \in \Gamma_0(m)} \frac{1}{(u_\rho(z))^k} \text{ où } u_\rho(z) = \left| \frac{j(\rho, z)(\rho z - \overline{z})}{y} \right|.$$

D'après proposition 10.1, on peut restreindre l'étude de celle-ci à $\mathcal{S}_{\sqrt{3}/(2m)}$. Par un calcul immédiat on obtient, si $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$u_\rho(z) = \frac{1}{y} \left| b - c|z|^2 + (a - d)x + i(a + d)y \right| \tag{2}$$

Proposition 11.1 (Minoration de $u_\rho(z)$)**.** *Pour tous $\rho \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $z \in \mathcal{S}_{\sqrt{3}/(2m)}$,*

$$u_\rho(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Démonstration. En prenant la partie imaginaire dans (2) on a $u_\rho(z) \geq |a + d|$.

- Si $a \neq -d$ la proposition est vérifiée : a, d sont entiers donc $|a + d| \geq 1$
- Si $a = -d$, alors $c \neq 0$ donc $|c| \geq m$ puisque $m \mid c$. En remplaçant $b = -\frac{d^2+1}{c}$ dans (2) on a

$$\begin{aligned} u_\rho(z) &= \left| \frac{d^2 + 1 + c^2 |z|^2 + 2cdx}{cy} \right| \\ &= \left| \frac{1 + (cx + d)^2 + c^2 y^2}{cy} \right| \\ &\geq |cy| \\ &\geq m \frac{\sqrt{3}}{2q} \\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

□

Notation 3. *Pour $\delta \geq \sqrt{3}/2$ on note*

$$M(z,\delta) = \{\rho \in \Gamma_0(m) \text{ tels que } |u_\rho(z)| \leq \delta\}.$$

Une bonne majoration de $|M|$, le cardinal de M, lorsque δ tend vers l'infini, fournira, en passant par une intégrale, la borne voulue.

Proposition 11.2 (Majoration de $|M|$)**.** *Il existe une constante absolue C, indépendante de m, telle que pour tout $z \in \mathcal{S}^k_{\sqrt{3}/(2m)}$, et tout $\delta \in [\sqrt{3}/2; \infty[$*

$$|M(z,\delta)| \leq C\delta^3.$$

Démonstration. $z \in \mathcal{S}^k_{\sqrt{3}/(2m)}$ est fixé tout au long de la preuve, mais les constantes trouvées en sont indépendantes. On coupe l'ensemble en deux, selon que $c = 0$ ou non :

$$M_0(z,\delta) = \left\{\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m) \text{ tels que } |u_\rho(z)| \leq \delta\right\}$$

$$M_\star(z,\delta) = \left\{\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m) \text{ tels que } C \neq 0 \text{ et } |u_\rho(z)| \leq \delta\right\}$$

- Soit $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_0(z,\delta)$. $a = d = \pm 1$, et avec (2)

$$u_\rho(z) = \left|\frac{b \pm 2iy}{y}\right| \leq \delta,$$

en prenant la partie réelle on obtien $|b| \leq y\delta$, on a donc moins de $2(y\delta + 1)$ choix pour b et deux choix pour a, donc

$$|M_0(z,\delta)| \leq 4(y\delta + 1) \leq C_1\delta(y+1).$$

Remarque : δ est minorée, C_1 en est donc indépendante.

- Soit $\rho \in M_\star(z,\delta)$. En prenant la partie imaginaire dans (2) on a

$$u_\rho(z) \geq |a + d| \text{ donc } |a + d| \leq \delta.$$

On note que $b = \frac{ad-1}{c}$ et $|cz + d|^2 = c^2 |z|^2 + d^2 + 2dcx$. En prenant la partie réelle dans (2) cela donne

$$\begin{aligned}
\delta cy &\geq \left|ad - 1 - c^2 |z|^2 + cx(a-d)\right| \\
&= \left|(x^2 |z|^2 + d^2 + 2cdx) - d^2 - cx(a + d_ad + 1\right| \\
&= \left||cz + d|^2 + 1 - (a+d)(cx+d)\right| \\
&\geq \left||cz + d|^2 + 1\right| - |a+d|\,|cx+d| \\
&\geq |cz+d|^2 - |a+d|\,|cx+d|\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|cz+d|^2 &\leq \delta\,|c|\,y + |a+d|\,|cx+d| \\ &\leq \delta(|c|\,y + |cx+d|) \\ &\leq \sqrt{2}\delta\,|cz+d|\,.\end{aligned}$$

Cela donne

$$|c| \leq \sqrt{2}\delta/y \text{ et } |cx+d| \leq \sqrt{2}\delta.$$

c étant divisible par q, le nombre de choix possibles pour c est donc inférieur à $C_2\delta/(qy)$. À c fixé, le nombre de choix pour $cx+d$ (donc d) est ensuite inférieur à $C_3\delta$, et le nombre de choix pour $a+d$ (ce qui conditionne alors a et b) inférieur à $C_4\delta$.

Finalement,

$$|M_\star(z,\delta)| \leq C'\delta^3/(qy),$$

et

$$M(z,\delta) \leq C_1 y\delta + C'\delta^3/(yq).$$

Comme nous avons choisit $z \in \mathcal{S}^k_{\sqrt{3}/(2m)}$, nous avons $\sqrt{3}/(2m) \leq yleqk$, et donc

$$M(z,\delta) \leq C\delta^3.$$

□

Passons à la preuve du théorème :

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{S}^k_{\sqrt{3}/(2m)}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\rho\in\Gamma_0(m)} \frac{1}{u_\rho(z)^k} &= \sum_{\rho\in\Gamma_0(m)} \int_{u_\rho(z)}^\infty \frac{k}{x^{k+1}}dx \\ &= \sum_{\rho\in\Gamma_0(m)} k\int_{\sqrt{3}/2}^\infty \frac{\mathbb{1}_{x\geq u_\rho(z)}}{x^{k+1}}dx \\ &= k\int_{\sqrt{3}/2}^\infty \frac{M(z,x)}{x^{k+1}}dx \\ &\leq kC\int_{\sqrt{3}/2}^\infty \frac{1}{x^{k-2}}dx \\ &\leq C\frac{k}{k-2}(\sqrt{3}/2)^{k-1} = C(k).\end{aligned}$$

Et donc

$$\left\|y^{k/}f(z)\right\|_\infty \leq C(k)^{1/2}\,\|f\|_2\,.$$

□

12 Méthode d'amplification

Dans cette section on va exposer une autre méthode pour majorer la norme sup de $z \in \mathbb{H} \to \mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} f(z)$ où f est une forme nouvelle de niveau N sans facteurs carrés. Dans cette section on fixe k un entier tel que $k > 4$ et on utilise les opérateurs de Hecke normalisés. Notre objectif sera de démontrer le théorème suivant qui améliore le résultat de la section précédente :

Theorème 12.1. *Pour tout $\epsilon > 0$ et pour toute forme nouvelle de niveau N sans facteurs carrés de poids k on a :*

$$\|\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} f(z)\|_\infty \ll_\epsilon N^{-\frac{1}{6}+\epsilon} \|f\|_{2,N}.$$

Cela signifie que pour tout epsilon > 0 il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que pour toute forme nouvelle de niveau N sans facteurs carrés et de poids k on ai :

$$\forall z \in \mathbb{H}, |\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} f(z)| \leq C_\epsilon N^{-\frac{1}{6}+\epsilon} \|f\|_{2,N}.$$

On va avoir besoin de procéder en plusieurs étapes. Pour le moment fixons N un entier non nul sans facteurs carrés et $\{f_1, \ldots, f_J\}$ une base orthogonale de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ composée de formes nouvelles et anciennes (les élément de cette base sont des formes propres pour tous les opérateurs de Hecke d'ordre premier avec N et on notera $\lambda_j(n)$ la valeur propre de f_j en tant que forme propre de $T(n)$). Enonçons une proposition qui se base sur la formule des pré-traces.

Proposition 12.1. *Soit $L \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.*
On pose :

$$\Lambda := \{p \in \mathcal{P}, p \wedge N = 1, L \leq p \leq 2L\},$$

et :

$$\Lambda^2 := \{p^2, p \in \Lambda\}.$$

On fixe ensuite ensuite $i \in \{1, \ldots, J\}$ (et ce jusqu'à la fin) tel que f_i soit une forme nouvelle. On pose :

$$\forall l \in \Lambda \cup \Lambda^2, x_l := \mathrm{sign}\,(\lambda_i(l)),$$

et :

$$\forall l \in \mathbb{N}^* \setminus (\Lambda \cup \Lambda^2), x_l = 0,$$

alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, C_k \sum_{j \in \{1,\ldots,J\}} |\sum_{l \in \mathbb{N}^*} x_l \lambda_j(l)|^2 \frac{|y^{\frac{k}{2}} f_j(z)|^2}{\langle f_j, f_j \rangle} = \sum_{l \in \mathbb{N}^*} y_l l^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\rho \in G_l(N)} u_\rho(z)^{-k},$$

où on rappelle que C_k est la constante ne dépendant que de k apparaissant dans la formule des pré-trace et où on a posé :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_l := \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}^* \\ d | l_1, l_2 \\ d \wedge N = 1 \\ l = \frac{l_1 l_2}{d^2}}} x_{l_1} \overline{x_{l_2}} = \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \Lambda \cup \Lambda^2 \\ d | l_1, l_2 \\ l = \frac{l_1 l_2}{d^2}}} x_{l_1} \overline{x_{l_2}},$$

et :

$$u_\rho(z) = \frac{j(\rho, z)(\overline{z} - \rho \cdot z)}{\mathrm{Im}(z)},$$

avec pour rappelle :

$$G_l(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), ad - bc = l, a \wedge N = 1, c \equiv 0 \pmod N \right\}.$$

Démonstration. On a pour tout $z, w \in \mathbb{H}$:

$$h(z, w) \coloneqq \sum_{\rho \in \Gamma_0(N)} \frac{1}{j(\rho, z)^k (w + \rho z)^k} = C_k \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\langle f_j, f_j \rangle} \overline{f_j(-\overline{w})} f_j(z).$$

Ainsi en fixant $w \in \mathbb{H}$ quelconque pour le moment et en appliquant l'opérateur de Hecke $\mathrm{T}(l)$ pour $l \in \Lambda \cup \Lambda^2$ à $z \in \mathbb{H} \to h(z, w)$ on obtient avec la formule des pré-traces :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(n)(h(., w))(z) &= \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \backslash G_l(N) \\ \mu \in \Gamma_0(N)}} \frac{l^{\frac{k}{2}}}{j(\mu\gamma, z)^k (w + \mu\gamma \cdot z)^k} \\ &= l^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\gamma \in G_l(N)} \frac{1}{j(\gamma, z)^k (w + \gamma \cdot z)^k} \\ &= C_k \sum_{j \in \{1, \ldots, J\}} \frac{\lambda_j(l) f_j(z) \overline{f_j(-\overline{w})}}{\langle f_j, f_j \rangle}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $l_1, l_2 \in \Lambda \cup \Lambda^2$ on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(l_1) \circ \mathrm{T}(l_2)(h(., -\overline{z}))(z) &= C_k \sum_{j \in \{1, \ldots, J\}} \frac{\lambda_j(l_1) \lambda_j(l_2) |f_j(z)|^2}{\langle f_j, f_j \rangle} \\ &= \sum_{d | l_1, l_2} \mathrm{T}\left(\frac{l_1 l_2}{d^2}\right)(h(., -\overline{z}))(z) \\ &= \sum_{d | l_1, l_2} \left(\frac{l_1 l_2}{d^2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\gamma \in G_{\frac{l_1 l_2}{d^2}}(N)} \frac{1}{j(\gamma, z)^k j(\gamma \cdot z - \overline{z})^k}, \end{aligned}$$

et donc on a :

$$
\begin{aligned}
C_k \sum_{j\in\{1,\dots,J\}} |\sum_{l\in\mathbb{N}^*} x_l\lambda_j(l)|^2 \frac{|y^{\frac{k}{2}} f_j(z)|^2}{\langle f_j, f_j\rangle} &= C_k \sum_{j\in\{1,\dots,J\}} \sum_{l_1,l_2\in\mathbb{N}^*} x_{l_1}\overline{x_{l_2}}\lambda_j(l_1)\lambda_j(l_2)\frac{|y^{\frac{k}{2}} f_j(z)|^2}{\langle f_j, f_j\rangle} \\
&= \sum_{l_1,l_2\in\mathbb{N}^*} x_{l_1}\overline{x_{l_2}} C_k \sum_{j\in\{1,\dots,J\}} \lambda_j(l_1)\lambda_j(l_2)\frac{|y^{\frac{k}{2}} f_j(z)|^2}{\langle f_j, f_j\rangle} \\
&= \sum_{\substack{l_1,l_2\in\mathbb{N}^* \\ d|l_1,l_2 \\ \rho\in G_{\frac{l_1 l_2}{d^2}}}} x_{l_1}\overline{x_{l_2}} \left(\frac{l_1 l_2}{d^2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{u_\rho(z)^k} \\
&\sum_{l\in\mathbb{N}^*} y_l l^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\alpha\in G_l(N)} u_\alpha(z)^{-k},
\end{aligned}
$$

ce qui conclut la démonstration. □

A partir de maintenant on conserve toute les notations de la partie précédente. Ce que l'on vient de faire est de donner "plus de poids" à la forme f_i en prenant une telle expression pour les x_l, ce qu'il va nous rester à faire est de trouver la constante $L > 0$ permettant d'obtenir une majoration optimale de $y^{\frac{k}{2}} f_i(z)$. On a l'inégalité suivante :

Proposition 12.2. *Pour tout $\epsilon > 0$ on a l'inégalité suivante :*

$$
\sum_{l\in\mathbb{N}^*} |y_l| l^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\alpha\in G_l(N)} |u_\alpha(z)|^{-k} \gg_\epsilon L^{2-\epsilon} \frac{|y^{\frac{k}{2}} f_i(z)|^2}{\langle f_i, f_i\rangle}
$$

Démonstration. Par la proposition proposition 12.1 on a :

$$
\begin{aligned}
|C_k||\sum_{l\in\mathbb{N}^*} x_l\lambda_j(l)|^2 \frac{|y^{\frac{k}{2}} f_i(z)|^2}{\langle f_i, f_i\rangle} &\le |C_k| \sum_{j\in\{1,\dots,J\}} |\sum_{l\in\mathbb{N}^*} x_l\lambda_j(l)|^2 \frac{|y^{\frac{k}{2}} f_j(z)|^2}{\langle f_j, f_j\rangle} \\
&\le \sum_{l\in\mathbb{N}^*} |y_l| l^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\rho\in G_l(N)} |u_\rho(z)|^{-k},
\end{aligned}
$$

or les $\lambda_i(p)$ vérifient $\lambda_i(p) - \lambda_i(p^2) = 1$ pour $p \in \Lambda$ et donc $\max(|\lambda_i(p)|, |\lambda_i(p^2)|) \ge \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
|\sum_{l\in\mathbb{N}^*} x_l\lambda_j(l)| &= \sum_{l\in\Lambda\cup\Lambda^2} |\lambda_j(l)| \\
&= \sum_{l\in\Lambda} |\lambda_j(l)| + |\lambda_j(l^2)| \\
&\ge \frac{1}{2}|\Lambda|
\end{aligned}
$$

et par le théorème des nombre premiers on a :

$$\forall\epsilon > 0, |\Lambda| \gg_\epsilon L^{1-\epsilon},$$

ainsi puisque C_k ne dépend pas de cas on a notre résultat.

□

Remarque 12.1. Pour $l \in \mathbb{N}^*$ quelconque on admet que $G_l(N)$ se partitionne en trois sous-ensembles :

$$G_l(N)^u := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_l(N), c = 0, a \neq d \right\},$$

et :

$$G_l(N)^* := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_l(N), c \neq 0, (a+d)^2 \neq 4l \right\},$$

et :

$$G_l(N)^p := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_l(N), (a+d)^2 = 4l \right\},$$

où on appelle $G_l(N)^u$ les matrices de $G_l(N)$ triangulaire supérieure, $G_l(N)^*$ les génériques et $G_l(N)^p$ les paraboliques.

Proposition 12.3. *On note :*

$$M^*(z,l,\delta) := |\{\rho \in G_l(N)^*, |u_\rho(z)| \leq \delta\}|,$$

et :

$$M^u(z,l,\delta) := |\{\rho \in G_l(N)^u, |u_\rho(z)| \leq \delta\}|.$$

Alors on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$L^{2-\epsilon}\frac{|y^{\frac{k}{2}}f_i(z)|^2}{\langle f_i, f_i\rangle} \ll_\epsilon \sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\sum_{\alpha\in G_l^p(N)}|u_\alpha(z)|^{-k} + \sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\int_{2\sqrt{l}}^\infty \frac{(M^u+M^*)(z,l,\delta)}{\delta^{k+1}}d\delta.$$

Dans cette démonstration on admettra que si $\delta < 2\sqrt{l}$ alors $(M^* + M^u)(z,l,\delta) = 0$ quel que soit $z \in \mathbb{H}$. On trouvera une démonstration de ce fait dans l'article [**?**].

Démonstration. Il suffit simplement de montrer que :

$$\sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\sum_{\alpha\in G_l^*(N)\sqcup G_l^u(N)}|u_\alpha(z)|^{-k} \leq \sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\int_{2\sqrt{l}}^\infty \frac{(M^u+M^*)(z,l,\delta)}{\delta^{k+1}}d\delta.$$

Cela vient du fait que :

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\sum_{\alpha\in G_l^*(N)\sqcup G_l^u(N)}|u_\alpha(z)|^{-k} &= \sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\sum_{\alpha\in G_l^*(N)\sqcup G_l^u(N)} k\int_{|u_\alpha(z)|}^\infty \frac{d\delta}{\delta^{k+1}} \\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}}\sum_{\alpha\in G_l^*(N)\sqcup G_l^u(N)} k\int_0^\infty \mathbb{1}_{\delta\geq|u_\alpha(z)|}\frac{d\delta}{\delta^{k+1}} \\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}^*}|y_l|l^{\frac{k-1}{2}} k\int_0^\infty \sum_{\alpha\in G_l^*(N)\sqcup G_l^u(N)} \mathbb{1}_{\delta\geq|u_\alpha(z)|}\frac{d\delta}{\delta^{k+1}},
\end{aligned}$$

or :

$$\sum_{\alpha \in G_l^*(N) \sqcup G_l^u(N)} \mathbb{1}_{\delta \geq |u_\alpha(z)|} = (M^* + M^u)(z, l, \delta)$$

ce qui conclut la preuve puisque si $\delta < 2\sqrt{l}$ alors $(M^* + M^u)(z, l, \delta) = 0$ quel que soit $z \in \mathbb{H}$. □

Maintenant il nous reste à majorer séparément les contributions des matrices paraboliques, génériques et triangulaires supérieure. D'autre part par la proposition proposition 10.1 il suffit de considérer z dans $\mathcal{S}_{\frac{\sqrt{3}}{2N}}$. A partir de maintenant on considérera que $N^{\frac{-2}{3}} \geq \mathrm{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2N}$, le cas $\mathrm{Im}(z) > N^{\frac{-2}{3}}$ sera traité ensuite. Pour les majoration de chaque contribution on peut se référer à l'article [13] et on obtient la majoration désirée en prenant $L = N^{\frac{1}{3}}$.

Pour le cas $\mathrm{Im}(z) > N^{\frac{-2}{3}}$ on utilise la même méthode que Abbes et Ullmo pour montrer le lemme suivant :

Lemme 12.1. *Soit $\epsilon > 0$, soit $f \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(N))$ une forme primitive. Il existe une constante $C_{k,\epsilon}$ telle que pour tout $z \in \mathcal{S}_{N^{-2/3}}$*

$$y^{k/2}\,|f(z)| \leq C_{k,\epsilon} N^{1/3+\epsilon}.$$

Corollaire 12.1. *On a alors pour tout $z \in \mathcal{S}_{N^{-2/3}}$*

$$y^{k/2}\,|f(z)| \leq C_{k,\epsilon} N^{-1/6+\epsilon} \, \|f\|_2 \,.$$

Démonstration. On utilise la minoration $\|f\|_2 \gg_\epsilon N^{1/2-\epsilon}$ démontrée dans [7] □

On démontre le Lemme.

Démonstration. On note $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{2i\pi n z}$. Avec la conjecture de Ramanujan-Petersson on a

$$|f(z)| \leq C_\epsilon \sum_{n \geq 1} n^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi n y}$$

En suivant la même méthode que dans Abbes et Ullmo on étudie $t \mapsto t^{(k-1)/2+\epsilon} e^{-2\pi t y}$ décroissante sur $[n_k(N); \infty[$ pour tout $y \geq N^{-2/3}$ avec

$$n_k(N) = \frac{k - 1 + 2\epsilon}{4\pi} N^{2/3}.$$

Le reste de la démonstration est proche de celle du théorème théorème 10.1 □

Ceci conclut la démonstration du théorème théorème 12.1.

Remarque 12.2. La majoration obtenue par cette méthode d'amplification va nous permettre d'améliorer la borne obtenue par Abbes et Ullmo dans le théorème B de l'article [1]. Cette borne donne une estimation sur la moyenne des éléments d'une base orthonormée de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ où on va toujours supposer N sans facteurs carrés. Fixons $\{f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_m\}$ une base orthonormée de $\mathscr{S}_k(\Gamma_0(N))$ (c'est à dire que pour tout i, j on a $\langle f_i, f_i \rangle = \langle g_j, g_j \rangle = 1$) où les éléments $\{f_1, \ldots, f_l\}$ sont proportionnels à des anciennes formes de niveau N et les éléments $\{g_1, \ldots, g_m\}$ proportionnels à des nouvelles formes de niveau N (cela revient simplement à normaliser la base utilisée dans la démonstration du théorème théorème 12.1). Alors par le théorème théorème 12.1, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \forall 1 \leq j \leq m, \|y^{\frac{k}{2}} g_j(z)\|_\infty \ll_\epsilon N^{\frac{-1}{6}+\epsilon} \|g_j\|_{2,N} = N^{\frac{-1}{6}+\epsilon}.$$

D'autre part on fixe $i \in \{1, \ldots, l\}$ et on pose f l'ancienne forme de niveau N telle que f_i soit proportionnelle à f. Alors, part définition des anciennes formes, on a l'existence d'une nouvelle forme g de niveau $N'|N$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = g(dz),$$

où d est un certain diviseur de $\frac{N}{N'}$. Alors par le théorème théorème 12.1 on a :

$$\|\mathrm{Im}(dz)^{\frac{k}{2}} g(dz)\|_\infty = d^{\frac{k}{2}} \|\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} f(z)\|_\infty \ll_\epsilon N^{\frac{-1}{6}+\epsilon} \|g, g\|_{2,N'}.$$

D'un autre coté dans l'article d'Abbes et Ullmo [1] on montre en Lemme 3.2 que :

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle_N &= \langle g(dz), g(dz) \rangle_N \\
&= \int_{\mathcal{D}_N} g(dz)\overline{g}(dz) y^{k-2} dxdy \\
&= \frac{1}{d^k} \langle g, g \rangle_N \\
&= \frac{1}{d^k} [\Gamma_0(N') : \Gamma_0(N)] \langle g, g \rangle_{N'} \\
&= \frac{1}{d^k} \frac{[\Gamma_0 : \Gamma_0(N)]}{[\Gamma_0 : \Gamma_0(N')]} \langle g, g \rangle_{N'} \\
&= \frac{1}{d^k} \frac{\prod_{p|N} 1+p}{\prod_{p|N'} 1+p} \langle g, g \rangle_{N'} \\
&= \frac{1}{d^k} \prod_{p|\frac{N}{N'}} (1+p) \langle g, g \rangle_{N'}.
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\|g, g\|_{2,N'} = \frac{d^{\frac{k}{2}}}{(\prod_{p|\frac{N}{N'}} 1+p)^{\frac{1}{2}}} \|f, f\|_{2,N},$$

et donc on a :

$$\|\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} f(z)\|_\infty \ll_\epsilon N^{\frac{-1}{6}+\epsilon} \frac{1}{(\prod_{p|\frac{N}{N'}} 1+p)^{\frac{1}{2}}} \|f, f\|_{2,N} \ll_\epsilon N^{\frac{-1}{6}+\epsilon} \|f, f\|_{2,N}.$$

Le résultat du théorème théorème 12.1 est donc aussi vrai pour les formes anciennes. Puisque f_i est proportionnel à f, on a donc :

$$\|\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} f_i(z)\|_\infty \ll_\epsilon N^{\frac{-1}{6}+\epsilon}\|f_i, f_i\|_{2,N} = N^{\frac{-1}{6}+\epsilon}.$$

Ceci est vrai pour tout les élément de la base. Ainsi on obtient la majoration en moyenne suivante :

$$\frac{\sum_{i\in\{1,\dots,l\}}(y^{\frac{k}{2}}|f_i(z)|)^2 + \sum_{j\in\{1,\dots,m\}}(y^{\frac{k}{2}}|g_j(z)|)^2}{m+l} \ll_\epsilon N^{\frac{-1}{3}+\epsilon},$$

qui améliore la borne d'Abbes et Ullmo [1].

Les deux prochaines sections ont pour but d'arriver à trouver une borne sur le produit scalaire de Petersson uniforme sur les formes primitives de niveau m et conclure ainsi la preuve du corollaire théorème 11.1.

13 Borne sur le produit scalaire de Petersson

Nous démontrons le théorème suivant sur le produit scalaire de Petersson, dû à Iwaniec [6]

Theorème 13.1. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $A_{\epsilon,k}$ dépendant de ϵ et du degré k uniquement, telle que pour tout m sans facteurs carrés, pour toute forme primitive $f \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$,*

$$\langle f, f\rangle \leq A_{\epsilon,k} m^{1+\epsilon}$$

Remarque 13.1. Dans [7] on montre résultat similaire pour minorer le produit scalaire : $\langle f, f\rangle \geq B_\epsilon m^{1-\epsilon}$.

Remarque 13.2. Cela montre que la borne obtenue avec la formule des traces (théorème 11.1), implique cella obtenue par Abbes et Ullmo (théorème 10.1). En effet avec la formule des prétraces et la borne sur le produit scalaire on a

$$y^{k/2}\,|f(z)| \leq C_k\,\|f\|_2 \leq C_{k,\epsilon} m^{1/2+\epsilon}.$$

13.1 Inégalité inhomogène sur L(x)

On fixe a partir de maintenant une forme primitive $f(z) = \sum_{n\geq 1}\psi(n)n^{(k-1)/2}e^{2i\pi nz} \in \mathscr{S}^k(\Gamma_0(m))$.

Notation 4 ($L(x)$)**.** *Pour $x \geq 0$, on pose*

$$L(x) = \sum_{1\leq n\leq x}\frac{|\psi(n)^2|}{n^{1/2}}.$$

On démontre l'inégalité inhomogène sur $L(x)$ suivante :

Lemme 13.1. *Pour tout $x \geq 0$*

$$L^2(x) < C_\epsilon (x^\epsilon \ln 3x)^2 L(x^2)$$

Démonstration. Essentiellement, c'est l'inégalité inhomogène suivante sur les coefficients normalisés des formes primitives qui permet d'obtenir une inégalité inhomogène sur $L(x)$ ($\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n). On rappelle le resultat suivant, obtenu dans le théorème 8.2,

$$\psi(n)\psi(k) = \sum_{\substack{d|k,n \\ d\wedge m=1}} \psi_f\left(\frac{kn}{d^2}\right).$$

On en déduit

$$|\psi(n)\psi(k)| \leq \sum_{d|(k,n)} \left|\psi(\frac{kn}{d^2})\right|.$$

On effectue ensuite des manipulations sur la somme définissant $L(x)$:

$$\begin{aligned}
L^2(x) &= \left(\sum_{1\leq n\leq x} n^{-1/2}\,|\psi(n)|^2\right) \\
&\leq \sum_{k,n\leq x} (kn)^{-1/2} \left(\sum_{d|(k,n)} \left|\psi\left(\frac{kn}{d^2}\right)\right|\right)^2 \\
&\leq \sum_{k,n\leq x} \tau\left((k,n)\right)(k,n)^{-1/2} \sum_{d|(k,n)} \left|\psi\left(\frac{kn}{d^2}\right)\right|^2 \\
&\leq \sum_{d\leq x} \tau(d)d^{-1} \sum_{k,l\leq \frac{x}{d}} \tau\left((k,l)\right)(kl)^{-1/2}\,|\psi(kl)|^2 \\
&\leq \underbrace{\left(\sum_{d\leq x} \tau(d)d^{-1}\right)}_{T(x)} \sum_{n\leq x^2} n^{-1/2}\,|\psi(n)|^2 \underbrace{\sum_{kl=n} \tau\left((k,l)\right)}_{t(n)}.
\end{aligned}$$

On a utilisé dans la troisième ligne l'identité $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leq n\sum_1^n x_i^2$, et dans la quatrième l'inégalité $\tau(ab) \leq \tau(a)\tau(b)$.

On majore maintenant $T(x)$ et $t(n)$:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{d\leq x} \tau(d)d^{-1} \\
&\leq \left(\sum_{d\leq x} d^{-1}\right)^2 \\
&\leq (1+\ln(x))^2 \\
&< \ln^2(3x)
\end{aligned}$$

si l'on suppose $x \geq 1$. Soit $\epsilon > 0$, d'après lemme 14.1 il existe $C_\epsilon > 0$ tel que

$$\tau(n)^2 \leq C_\epsilon n^\epsilon$$

pour tout n. Il vient alors

$$\begin{aligned} t(n) &= \sum_{kl=n} \tau\left((k,l)\right) \\ &\leq \tau(n)^2 \\ &\leq C_\epsilon n^\epsilon. \end{aligned}$$

En combinant toutes ces inégalités on a démontré le Lemme. □

13.2 Étude de l'equation fonctionnelle de L

Proposition 13.1 (Résidu en 1)**.** *Sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 3/4$ *la série* $L(f \otimes f, s)$ *de Rankin-Selberg associée à* f *admet un unique pôle, en 1. Celui-ci est simple et de résidu*

$$R = 24 \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\langle f, f\rangle}{m}.$$

Démonstration. Rappelons l'equation fonctionnelle

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{(m)}}\right)^{-2s} \Gamma(s)\Gamma(s+k-1)\zeta(2s)L(f\otimes f, s) = (4\pi)^{k-1}\langle fG(m\cdot, s), f\rangle.$$

D'après théorème 9.1, et la borne sur G obtenue en proposition 9.4, qui assure la convergence du produit scalaire pour tout $s \neq 0, 1$, le membre de droite admet un unique pôle sur $\mathrm{Re}(s) \geq 3/4$, en 1, simple, de résidu $\langle f, f\rangle$. Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $\zeta(2s)$ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2$. $L(f \otimes f, s)$ admet donc un unique pôle sur $\mathrm{Re}(s)$, dont le résidu R vérifie

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-2s} \Gamma(1)\Gamma(k)\zeta(2)R = (4\pi)^{k-1}\langle f, f\rangle$$

donc

$$R = 24 \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\langle f, f\rangle}{m}.$$

□

Lemme 13.2 (Borne sur la bande $3/4 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$)**.** *Il existe des constantes* A, B *strictement positives telles que pour tout* $3/4 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$

$$|L(f \otimes f, s)| \leq m^3 A(|t|+1)^B$$

et ces constantes ne dépendent que du degré k*.*

Démonstration. On procède en deux étapes : une majoration du produit $s(s-1)\zeta(2s)L(f\otimes f,s)$ sur la bande $-1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$ grâce au principe de Phragmen-Lindelöf, puis une minoration de $\zeta(s)$ sur $\mathrm{Re}(s) \geq 3/2$.

Rappelons que l'on avait déjà justifié dans la preuve du proposition 9.4 que pour $-1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$

$$s(s-1)\,|G(z,s)| \leq |s(s-1)G(z,2)| + C_1\ .$$

En utilisant l'equation fonctionnelle de théorème 9.3 on a alors

$$|s(s-1)\zeta(2s)L(f\otimes f,s)| \leq \left|\left(\frac{2\pi}{\sqrt(m)}\right)^{2s}\right| \frac{|s(s-1)\langle fG(m\cdot,2),f\rangle| + C_1}{|\Gamma(s)\Gamma(s+k-1)|}$$

qui est manifestement d'ordre fini (on rappelle que $1/\Gamma$ est d'ordre fini). Sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 2$ on a ensuite

$$|\zeta(2s)L(f\otimes f,s)| \leq \zeta(4)L(f\otimes f,2).$$

La droite $\mathrm{Re}(s) = -1$ donne un peu plus de travail, on utilise l'equation fonctionnelle pour se ramener à $\mathrm{Re}(s) = 2$. On a avec théorème 9.3

$$\begin{aligned}
&|\zeta(-1+it)L(f\otimes f,-1+it)| \\
&= \left|\zeta(2-it)L(f\otimes f,2-it)\left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-6+4it}\frac{\Gamma(2-it)\Gamma(2-it+k-1)}{\Gamma(-1+it)\Gamma(-1+it+k-1)}\right| \\
&\leq m^3C_2\left|\frac{(1-it)(-it)(-1-it)\Gamma(-1-it)\cdot(k-it)(k-1-it)(k-2-it)\Gamma(k-2-it)}{\Gamma(-1+it)\Gamma(k-2+it)}\right| \\
&\leq m^3C_3(|t|+1)^6,
\end{aligned}$$

avec la formule $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$. Avec le principe de Phragmen-Lindelöf (voir **? ?** on a donc, pour tout $-1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$

$$|\zeta(2s)L(f\otimes f,s)| \leq m^3A_1(|t|+1)^{B_1}.$$

Il existe une constante telle que pour tout $s \geq 3/2$,

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq C(|t|+1)$$

et donc, pour tout $3/4 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$

$$|L(f\otimes f,s)| \leq m^3A(|t|+1)^B.$$

Remarquons que l'on peut majorer $L(f\otimes f,2)$ par $C\zeta(3/2)$ où $|\psi(n)| \leq div(n) \leq Cn^{1/4}$ et cette constante C est indépendante de f ou du niveau m. Les constantes A et B ne dépendent donc que de k. □

Lemme 13.3. *Il existe des constantes C, C_1 et C_2 dépendantes de k uniquement, et une constante $M > 0$ telles que pour tout $x \geq Mm^C$,*

$$C_1 R x^{1/2} \leq L(x) \leq C_2 R x^{1/2}.$$

Démonstration. Soit $r > B + 1$. Un calcul immédiat donne

$$\sum_{n<x} \frac{\psi(n)^2}{n^{1/2}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^r \leq L(x) \leq 2^r \sum_{n<2x} \frac{\psi(n)^2}{n^{1/2}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^r .$$

On utilise la formule de Perron décrite en annexe (théorème 15.1) avec pour paramètre r, et abscisse 2.

$$\begin{aligned} r! \int_{2+i\mathbb{R}} L(f \otimes f, 1/2 + s) \frac{x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds \leq L(x) \\ \leq r! 2^r \int_{2+i\mathbb{R}} L(f \otimes f, 1/2 + s) \frac{(2x)^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds \end{aligned}$$

On va décaler l'axe d'intégration en $\mathrm{Re}(s) = 1/4$. On applique la formule des résidus sur le rectangle délimité par $1/4 + iT$, $2 + iT$, $2 - iT$, $1/4 - iT$. Les parties horizontales

$$\left| \int_{1/4+iT}^{2+iT} L(f \otimes f, 1/2 + s) \frac{x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} \right| \leq x^2 2 \frac{m^3 A(|T|+1)^B}{T^{r+1}} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

tendent vers 0. Pour l'intégrale verticale de gauche on a la majoration :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{1/4-iT}^{1/4+iT} L(f \otimes f, 1/2 + s) \frac{x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds \right| \\ & \leq m^3 x^{1/4} \int_{1/4-iT}^{1/4+iT} A(|t|+1)^B \frac{1}{|s(s+1)\cdots(s+r)|} ds \\ & \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} A_2 m^3 x^{1/4}. \end{aligned}$$

Le résidu a la valeur

$$R x^{1/2} \frac{r!}{1/2(1/2+1)\cdots(1/2+r)} = R x^{1/2} C_r.$$

On obtient donc

$$C_r R x^{1/2} + \frac{r!}{2i\pi} \int_{1/4+i\mathbb{R}} \frac{L(f \otimes f, s + 1/2) x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds \leq L(x)$$

d'où

$$(C_r/2) R x^{1/2} \leq L(x)$$

pour $x \geq \frac{8|m^3 A_2|^4}{C_4^4 R^4}$. Rappelons que $\langle f, f \rangle$ est minoré par une constante dépendant de k uniquement (proposition 10.3). On a donc la relation ci-dessus valable pour

$$x \geq M_1 m^C.$$

pour une certaine constante M_1 dépendant de k uniquement. En répétant l'opération à droite de $L(x)$ on obtient M_2 telle que pour $x \geq M_2 m^C$,

$$L(x) \leq C_r' R x^{1/2}$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

On peut enfin finir la preuve du théorème théorème 13.1 sur la borne du produit scalaire de Petersson. En combinant le lemme 13.1 et le lemme 13.3,

$$\begin{aligned} C_1 R^2 M m^C &\leq L(M m^C)^2 \\ &< C_\epsilon (M m^{C\epsilon} \ln 3 M m^C)^2 L((M m^C)^2) \\ &\leq C_\epsilon (M m^{C\epsilon} \ln 3 M m^C)^2 C_2 R M m^C \end{aligned}$$

d'où

$$R \leq cste(\epsilon) m^\epsilon$$

et donc

$$\langle f, f \rangle \leq cste(\epsilon) m^{1+\epsilon}.$$

Quatrième partie . Appendice

14 Formule de composition des opérateurs de Hecke

Theorème 14.1. *Soit $m, n \geq 1$.*
Alors on a :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \sum_{\substack{d|m,n \\ d \wedge N = 1}} d^{k-1}\,\mathrm{T}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Remarque 14.1. Soit f forme modulaire de niveau N de poids k et $n \geq 1$.
Alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(n) f(z) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{y \in \Delta_n(N)} f_{|k} y(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ (\frac{n}{d}) \wedge N = 1 \\ b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}} \left(\frac{n}{d}\right)^k f\left(\begin{pmatrix} \frac{n}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot z\right)$$

Pour démontrer le théorème 5.1 on va procéder en plusieurs étapes intermédiaires. Montrons d'abord le résultats lorsque $m \wedge n = 1$.

Proposition 14.1. *Soient $m, n \geq 1$ tels que $m \wedge n = 1$.*
Alors $\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(mn)$

Démonstration. Par la remarque 14.1 on a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n)f(z) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\delta \mid m \\ (\frac{m}{\delta}) \wedge N = 1 \\ \beta \in \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}}} \left(\frac{m}{\delta}\right)^k \mathrm{T}(n) f\left(\begin{pmatrix} \frac{m}{\delta} & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot z\right)$$

c'est à dire :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n)f(z) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{\delta \mid m \\ d \mid n \\ (\frac{m}{\delta}) \wedge N = 1 \\ (\frac{n}{d}) \wedge N = 1 \\ \beta \in \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}} \left(\frac{mn}{d\delta}\right)^k f\left(\begin{pmatrix} \frac{n}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{m}{\delta} & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot z\right)$$

ce qui donne enfin :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n)f(z) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{\delta \mid m \\ d \mid n \\ (\frac{m}{\delta}) \wedge N = 1 \\ (\frac{n}{d}) \wedge N = 1 \\ \beta \in \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}} \left(\frac{mn}{d\delta}\right)^k f\left(\begin{pmatrix} \frac{nm}{d\delta} & \frac{n}{d}\beta + b\delta \\ 0 & d\delta \end{pmatrix} \cdot z\right)$$

Or lorsque d parcourt les diviseurs de n tels que $(\frac{n}{d}) \wedge N = 1$ et que δ parcourt les diviseurs de m tels que $(\frac{m}{\delta}) \wedge N = 1$ alors $d\delta$ parcourt les diviseur de mn tels que $(\frac{nm}{d\delta}) \wedge N = 1$. En effet si γ divise mn avec $(\frac{mn}{\gamma}) \wedge N = 1$ alors γ se factorise de manière unique $\gamma = \gamma_n \gamma_m$ avec $\gamma_n | n$ et $\gamma_m | m$ étant donné que $m \wedge n = 1$. De plus puisque $\frac{nm}{\gamma} \wedge N = 1$ et que $\frac{n}{\gamma_n}$ et $\frac{m}{\gamma_m}$ divisent $\frac{nm}{\gamma}$ alors on a bien $\frac{m}{\gamma_m} \wedge N = \frac{n}{\gamma_n} \wedge N = 1$. De plus si $d\delta = \tilde{d}\tilde{\delta}$ avec les d et les δ comme avant alors $=\tilde{d}$ et $\delta = \tilde{\delta}$ car $d \wedge \tilde{\delta} = \tilde{d} \wedge \delta = 1$. Ainsi orsque d parcourt les diviseurs de n tels que $(\frac{n}{d}) \wedge N = 1$ et que δ parcourt les diviseurs de m tels que $(\frac{m}{\delta}) \wedge N = 1$ alors $d\delta$ parcourt les diviseur de mn tels que $(\frac{nm}{d\delta}) \wedge N = 1$ une et une seule fois.
D'autre part à d, δ fixés dans la somme on choisit comme système de représentant de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ respectivement $\{0, \ldots, d-1\}$ et $\{0, \ldots, \delta - 1\}$. Alors remarquons que pour $b, \tilde{b} \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $\beta, \tilde{\beta} \in \{0, \ldots, \delta - 1\}$ on a $\frac{n}{d}\beta + b\delta \equiv \frac{n}{d}\tilde{\beta} + \tilde{b}\delta \pmod{d\delta}$ implique $b = \tilde{b}$ et $\beta = \tilde{\delta}$. En effet si $\frac{n}{d}\beta + b\delta \equiv \frac{n}{d}\tilde{\beta} + \tilde{b}\delta \pmod{d\delta}$ alors on a $\frac{n}{d}(\beta - \tilde{\beta}) \equiv 0 \pmod{\delta}$ et donc $(\beta - \tilde{\beta}) \equiv 0 \pmod{\delta}$ puisque $\frac{n}{d} \wedge \delta = 1$ étant donné que $\frac{n}{d} | n$ et $\delta | m$ avec $n \wedge m = 1$. Or puisque $\beta, \tilde{\beta} \in \{0, \ldots, \delta - 1\}$ alors $(\beta - \tilde{\beta}) \equiv 0 \pmod{\delta} \implies \beta = \tilde{\beta}$.

Ainsi il nous reste $(b-\tilde{b})\delta \equiv 0 \pmod{d\delta}$ et donc $(b-\tilde{b})\delta \equiv 0 \pmod{d}$ avec $d \wedge \delta = 1$ donc $(b-\tilde{b}) \equiv 0 \pmod{d}$ et donc $b = \tilde{b}$. Ainsi lorsque b et β parcourent respectivement $\{0,\dots,d-1\}$ et $\{0,\dots,\delta-1\}$ alors $\frac{n}{d}\beta + b\delta$ prend exactement $d\delta$ valeurs distinctes modulo $d\delta$, c'est à dire parcourt exactement une et une seule fois les restes modulo $d\delta$. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n)f(z) = \frac{1}{nm} \sum_{\substack{d|nm \\ (\frac{nm}{d})\wedge N=1 \\ b\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}} \left(\frac{nm}{d}\right)^k f\left(\begin{pmatrix} \frac{nm}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot z\right) = \mathrm{T}(mn)f(z)$$

et donc on a bien :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(mn)$$

□

Montrons maintenant le théorème 5.1 lorsque $m = p^r$ et $n = p$ où $p \in \mathcal{P}$ ne divise pas N.

Proposition 14.2. *Soit $r \geq 1$ et $p \in \mathcal{P}$ ne divisant pas N.*
Alors on a :

$$\mathrm{T}(p)\,\mathrm{T}(p^r) = \mathrm{T}(p^{r+1}) + p^{k-1}\,\mathrm{T}(p^{r-1})$$

Démonstration. On a :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(p^r)f(z) = \frac{1}{p^r} \sum_{\substack{d|p^r \\ (\frac{p^r}{d})\wedge N=1 \\ b\in\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}}} \left(\frac{p^r}{d}\right)^k f\left(\begin{pmatrix} \frac{p^r}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot z\right)$$

et donc puisque $p \wedge N = 1$ et que $p \in \mathcal{P}$ alors $(\frac{p^r}{d}) \wedge N = 1$ est toujours vérifiée si $d|p^r$ ainsi l'égalité se simplifie en :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(p^r)f(z) = \frac{1}{p^r} \sum_{\substack{0\leq t\leq r \\ 0\leq b_t\leq p^t-1}} p^{k(r-t)} f\left(\frac{p^{r-t}z + b_t}{p^t}\right)$$

de même :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(p)f(z) = \frac{1}{p}\left(p^k f(pz) + \sum_{0\leq b\leq p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right)\right)$$

ainsi :

$$\mathrm{T}(p^r)\,\mathrm{T}(p)f(z) = \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{\substack{0\leq t\leq r \\ 0\leq b_t\leq p^t-1}} p^{k(r+1-t)} f\left(\frac{p^{r+1-t}z + pb_t}{p^t}\right) + \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{\substack{0\leq t\leq r \\ 0\leq b_t\leq p^t-1 \\ 0\leq b\leq p-1}} p^{k(r-t)} f\left(\frac{p^{r-t}z + b_t + bp^t}{p^{t+1}}\right)$$

Observons la deuxième somme, lorsque b_t parcourt $\{0,\dots,p^t-1\}$ et que b parcourt $\{0,\dots,p-1\}$ on a bp^t+b_t qui parcourt un système complet de représentant de $\mathbb{Z}/p^{t+1}\mathbb{Z}$ par simple division euclidienne et donc :

$$\forall z\in\mathbb{H}, \frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{0\le t\le r\\0\le b_t\le p^t-1\\0\le b\le p-1}} p^{k(r-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b_t+bp^t}{p^{t+1}}\right)=\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{0\le t\le r\\b\in\mathbb{Z}/p^{t+1}\mathbb{Z}}} p^{k(r-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b}{p^{t+1}}\right)$$

et donc en remarquant que $r-t=(r+1)-(t+1)$ on a :

$$\forall z\in\mathbb{H}, \frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{0\le t\le r\\0\le b_t\le p^t-1\\0\le b\le p-1}} p^{k(r-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b_t+bp^t}{p^{t+1}}\right)=\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r+1\\b\in\mathbb{Z}/p^{t}\mathbb{Z}}} p^{k(r+1-t)}f\left(\frac{p^{r+1-t}z+b}{p^{t}}\right)$$

c'est à dire à peu de chose près $\mathrm{T}(p^{r+1})$. Et donc en plaçant le terme $t=0$ de la première somme dans l'égalité ci-dessus on obtient :

$$\forall z\in\mathbb{H}, \mathrm{T}(p^r)\,\mathrm{T}(p)f(z)=\mathrm{T}(p^{r+1})f(z)+\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r\\b_t\in\mathbb{Z}/p^{t}\mathbb{Z}}} p^{k(r+1-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b_t}{p^{t-1}}\right)$$

il ne reste plus qu'à réarranger cette dernière somme. Puisque un système de représentant de $\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z}$ est donné par les $q_tp^{t-1}+r_t$ lorsque q_t parcourt $\{0,\dots,p-1\}$ et r_t parcourt $\{0,\dots,p^{t-1}-1\}$ (principe de la division euclidienne), on a :

$$\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r\\b_t\in\mathbb{Z}/p^{t}\mathbb{Z}}} p^{k(r+1-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b_t}{p^{t-1}}\right)=\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r\\0\le q_t\le p-1\\0\le r_t\le p^{t-1}-1}} p^{k(r-(t-1))}f\left(\frac{p^{r-t}z+r_t+p^{t-1}q_t}{p^{t-1}}\right)$$

or :

$$\forall z\in\mathbb{H}, f\left(\frac{p^{r-t}z+r_t+p^{t-1}q_t}{p^{t-1}}\right)=f\left(\frac{p^{r-t}z+r_t}{p^{t-1}}\right)$$

dans la somme précédente puisque $f\in\mathscr{M}_k(\Gamma_0(N))$ et donc f est 1-périodique. Ainsi le terme dans la somme précédente ne depend plus de q_t et donc :

$$\forall z\in\mathbb{H}, \frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r\\b_t\in\mathbb{Z}/p^{t}\mathbb{Z}}} p^{k(r+1-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b_t}{p^{t-1}}\right)=\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r\\0\le r_t\le p^{t-1}-1}} p^{k(r-(t-1))}pf\left(\frac{p^{r-1-(t-1)}z+r_t}{p^{t-1}}\right)$$

ce qui se réarrange en :

$$\forall z\in\mathbb{H}, \frac{1}{p^{r+1}}\sum_{\substack{1\le t\le r\\b_t\in\mathbb{Z}/p^{t}\mathbb{Z}}} p^{k(r+1-t)}f\left(\frac{p^{r-t}z+b_t}{p^{t-1}}\right)=p^{k-1}\frac{1}{p^{r-1}}\sum_{\substack{1\le t\le r-1\\r_t\in\mathbb{Z}/p^{t}\mathbb{Z}}} p^{k(r-1-t)}f\left(\frac{p^{r-1-t}z+r_t}{p^{t}}\right)$$

c'est à dire :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{\substack{1 \leq t \leq r \\ b_t \in \mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z}}} p^{k(r+1-t)} f\left(\frac{p^{r-t}z + b_t}{p^{t-1}}\right) = p^{k-1}\,\mathrm{T}(p^{r-1}) f(z)$$

ce qui conclut la démonstration. □

On montre alors que le théorème 5.1 est vrai dans le cas où $m = q^r$ et $n = q$ avec q un nombre premier divisant N avec la même démonstration mais en plus facile puisque :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \mathrm{T}(q^r) f(z) = \frac{1}{q^r} \sum_{1 \leq b \leq q^r - 1} f\left(\frac{z+b}{q^r}\right)$$

l'expression est donc beaucoup plus simple que pour le cas précédent. On montre ainsi :

Proposition 14.3. $\forall r \geq 1, \mathrm{T}(q^r)\,\mathrm{T}(q) = \mathrm{T}(q^{r+1})$. *Et donc* $\forall r \geq 1, \mathrm{T}(q^r) = \mathrm{T}(q)^r$

Ainsi le théorème 5.1 est vrai dans le cas $m = q^r$ et $n = q^s$ où q est un nombre premier divisant N. On peut maintenant montrer que les opérateurs de Hecke commutent entre eux.

Theorème 14.2. *La* $\mathbb{C}$*-algèbre engendrée par les opérateur* $\mathrm{T}(n), n \in \mathbb{N}^*$ *que l'on appelle* algèbre de Hecke *de poids* k *et niveau* N *est commutative.*

Démonstration. Il faut montrer que si $m, n \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(n)\,\mathrm{T}(m)$. Pour cela remarquons que $\mathrm{T}(n)$ et $\mathrm{T}(m)$ sont des produits de $\mathrm{T}(p^\alpha)$ où p est un nombre premier en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique et la proposition proposition 14.1. Ainsi il suffit de montrer que si p est un nombre premier ne divisant pas N alors $\mathrm{T}(p^r)\,\mathrm{T}(p^s) = \mathrm{T}(p^s)\,\mathrm{T}(p^r)$ quels que soient r et s dans $\mathbb{N}^*$. Pour montrer cela on procède par récurrence sur r et sur les $s \geq r$ en utilisant la proposition proposition 14.2 □

On montre alors par une récurrence sur r et sur $s \geq r$ en utilisant la proposition proposition 14.2 et le théorème théorème 14.2 que le théorème 5.1 est vrai dans le cas où $m = p^r$ et $n = p^s$ avec p un nombre premier ne divisant pas N. On montre plus exactement :

Proposition 14.4. $\forall r, s \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $s \geq r$ *on a :*

$$\mathrm{T}(p^r)\,\mathrm{T}(p^s) = \sum_{0 \leq t \leq r} p^{t(k-1)}\,\mathrm{T}(p^{r+s-2t}) = \sum_{\substack{d | p^r, p^s \\ d \wedge N = 1}} d^{k-1}\,\mathrm{T}(\frac{p^r p^s}{d^2}),$$

où p *est un nombre premier ne divisant pas* N

On peut maintenant démontrer le théorème 5.1 :

Démonstration. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Ecrivons $m = \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{j \in J} q_j^{\alpha_j}$ et $n = \prod_{i \in I} p_i^{\beta_i} \cdot \prod_{k \in K} r_k^{\beta_k}$ avec les r_k, p_i, q_j des nombre premier et $J \cap K = \varnothing$ ce qui est possible par le théorème fondamental de l'arithmétique. Alors par la proposition proposition 14.1 et le fait que l'algèbre de Hecke de poids k et niveau N soit commutative on a :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \left[\prod_{i \in I} \mathrm{T}(p_i^{\alpha_i})\,\mathrm{T}(p_i^{\beta_i})\right] \cdot \mathrm{T}\left(\prod_{j \in J} q_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{k \in K} r_k^{\beta_k}\right)$$

et alors en utilisant la proposition proposition 14.4 ou proposition 14.3 suivant que p_i divise N ou non on a :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \left[\prod_{i \in I} \sum_{\substack{d_i | p_i^{\alpha_i}, p_i^{\beta_i} \\ d_i \wedge N = 1}} d_i^{k-1}\,\mathrm{T}\left(\frac{p_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i}}{d_i^2}\right)\right] \cdot \mathrm{T}\left(\prod_{j \in J} q_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{k \in K} r_k^{\beta_k}\right)$$

ce qui se développe en :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \left[\sum_{\substack{d_i | p_i^{\alpha_i}, p_i^{\beta_i} \\ d_i \wedge N = 1 \\ i \in I}} \left[\prod_{i \in I} d_i\right]^{k-1} \mathrm{T}\left(\frac{\prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i}}{\prod_{i \in I} {d_i}^2}\right)\right] \cdot \mathrm{T}\left(\prod_{j \in J} q_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{k \in K} r_k^{\beta_k}\right)$$

et donc par la proposition proposition 14.1 on a :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \left[\sum_{\substack{d_i | p_i^{\alpha_i}, p_i^{\beta_i} \\ d_i \wedge N = 1 \\ i \in I}} \left[\prod_{i \in I} d_i\right]^{k-1} \mathrm{T}\left(\frac{\prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i} \cdot \prod_{j \in J} q_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{k \in K} r_k^{\beta_k}}{\prod_{i \in I} {d_i}^2}\right)\right]$$

ce qui se réécrit :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \left[\sum_{\substack{d_i | p_i^{\alpha_i}, p_i^{\beta_i} \\ d_i \wedge N = 1 \\ i \in I}} \left[\prod_{i \in I} d_i\right]^{k-1} \mathrm{T}\left(\frac{mn}{\prod_{i \in I} {d_i}^2}\right)\right]$$

or l'application :

$$\Phi\colon \begin{array}{ccc} \left\{(d_i)_{i \in I}, \forall i \in I, d_i | p_i^{\alpha_i}, p_i^{\beta_i}, d_i \wedge N = 1\right\} & \to & \{d, d | mn, d \wedge N = 1\}) \\ (d_i)_{i \in I} & \mapsto & \prod_{i \in I} d_i \end{array}$$

est une bijection (cela se vérifie aisément avec les factorisation en produit de nombre premier de m et n). Ainsi on a donc :

$$\mathrm{T}(m)\,\mathrm{T}(n) = \sum_{\substack{d|mn \\ d\wedge N=1}} d^{k-1}\,\mathrm{T}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

ce qui conclut la démonstration. □

On démontre ici quelques outils calculatoires. D'abord un lemme étudiant le nombre de diviseurs de n :

Lemme 14.1. *On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une consante B_ϵ telle que pour tout n,*

$$d(n) \leq B_\epsilon n^\epsilon.$$

Démonstration. Si

$$n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p}\ ,\ d(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \alpha_p + 1,$$

donc

$$\frac{d(n)}{n^\epsilon} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{\alpha_p + 1}{e^{\epsilon\alpha_p \ln(p)}}.$$

Maintenant, étudions la suite $u_\alpha^p = \frac{\alpha+1}{e^{\epsilon\alpha\ln(p)}}$

$$\frac{u_\alpha^p}{u_{\alpha-1}^p} = (1+\frac{1}{\alpha})e^{-\epsilon\ln(p)} \leq 1$$

$$\iff \alpha \leq \frac{1}{e^{\epsilon\ln(p)}-1} < 1 \text{ pour } p \text{ assez grand.}$$

Ë partir d'un certain rang (qui dépend de ϵ), les suites u_α^p sont donc décroissantes à partir du rang 1, atteignent leur maximum pour $\alpha = 0$, et sont donc majorés par 1. Il ne reste donc qu'un produit fini, dont tous les termes atteignent un maximum pour un certain α donné par la relation précédente. $\frac{d(n)}{n^\epsilon}$ est donc borné. □

15 Formule de Perron

Dans toute la section, $F(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n^s}$ désigne une série de Dirichlet, et $M(x) = \sum_{1\leq n\leq x} a_n$ la somme partielle de ses coefficients. On démontre ici un énoncé de la formule d'inversion de Perron, qui permet d'exprimer $M(x)$ en fonction de $F(s)$.

Theorème 15.1 (Formule d'inversion de Perron)**.** *On suppose que F est d'abscisse de convergence absolue finie, notée σ_a. Alors, pour tout $c > \max(0,\sigma_a)$, pour tout $r \geq 0$ et toute valeur non entière $x > 1$,*

$$M_r(x) \underset{def}{=} \frac{1}{r!}\sum_{n<x} a_n \left(1-\frac{n}{x}\right)^r = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)}ds$$

où l'intégrale impropre $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ est vue comme la limite de $\int_{c-iT}^{c+iT}$.

On aura besoin du Lemme suivant

Lemme 15.1. *Soit $c > 0$, pour tout $T > 0$, $y > 0$, on pose*

$$I_r(y,T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds.$$

Si $y \neq 1$, on a

$$\begin{cases} \left| I_r(y,T) - \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^r \right| \leq \frac{y^c}{\pi T^{r+1}\ln(y)} & \text{si } y > 1 \\ |I_r(y,T)| \leq \frac{y^c}{\pi T^{r+1}\ln(y)} & \text{si } 0 < y < 1 \end{cases}$$

Démonstration. On applique pour cela la formule des résidus au rectangle délimité par les points $b+iT$, $c+iT$, $c-iT$, $b-iT$ où b est réel. L'intégrale sur le segment $[c-iT, c+iT]$ correspond à $I_r(y,T)$.

Dans un premier temps, si $y > 1$: On va faire tendre b vers $-\infty$. Sur le segment $[b-iT, b+iT]$,

$$\left| \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} \right| \leq \frac{y^b}{|b|^{r+1}}$$

donc

$$\left| \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds \right| \leq 2T \frac{y^b}{|b|^{r+1}} \underset{b\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sur les segments horizontaux $[b+iT, c+iT]$ et $[b-iT, c-iT]$ on a

$$\left| \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} \right| \leq \frac{y^{\mathrm{Re}(s)}}{T^{r+1}}$$

donc l'intégrale sur chacune de ces segments est bornée par

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_b^c \frac{y^\sigma}{T^{r+1}} d\sigma \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^c \frac{y^\sigma}{T^{r+1}} d\sigma = \frac{y^c}{2\pi T^{r+1}\ln(y)}.$$

Dans le rectangle, la fonction $s \mapsto \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+r)}$ admet r+1 pôles simples (en $0, -1, \cdots, -r$) (on rappelle que $c > 0$), dont la somme des résidus vaut

$$\sum_{k=0}^r \frac{x^{-k}}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)1\times 2\cdots(r-k)} = \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^r.$$

En faisant tendre b vers $-\infty$ on obtient bien

$$\left| I_r(y,T) - \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^r \right| \leq \frac{y^c}{\pi T \ln(y)}$$

Le cas $0 < y < 1$ est similaire sauf que le segment $[b - iT, b + iT]$ apporte une contribution nulle lorsque b tend vers $+\infty$. La majoration sur les segments horizontaux est la même. Comme il n'y a pas de pôle dans ce cas-là, l'inégalité devient

$$|I_r(y,T)| \leq \frac{y^c}{\pi T^{r+1} |\ln(y)|}$$

$\square$

On peut maintenant passer à la preuve du théorème :

Démonstration. Soit $T > 0$ et $x > 1$, $x \notin \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) \frac{x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_r(x/n, T), \end{aligned}$$

l'interversion étant justifiée par la majoration de I_r obtenue dans le lemme 15.1, et la convergence absolue de la série de terme général $\frac{a_n}{n^c \ln(x/n)} = O(\frac{a_n}{n^c})$. On obtient alors, avec le Lemme,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) \frac{x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)} ds - M_r(x) \right| \leq \frac{x^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^c}{\pi n^c |ln(x/n)|} \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où le résultat voulu. $\square$

Références

[1] A. Abbes and E. Ullmo. Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$. *Duke Math. J.*, 80(2) :295–307, 1995.

[2] A. O. L. Atkin and J. Lehner. Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. *Math. Ann.*, 185 :134–160, 1970.

[3] A. Deitmar. *Automorphic forms*. Universitext. Springer, London, 2013. Translated from the 2010 German original.

[4] P. Garrett. Basic rankin-selberg. 2010.

[5] S. S. Gelbart. *Automorphic forms on adèle groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1975. Annals of Mathematics Studies, No. 83.

[6] H. Iwaniec. Small eigenvalues of Laplacian for $\Gamma_0(N)$. *Acta Arith.*, 56(1) :65–82, 1990.

[7] P. J.Hoffstein. Coefficients of maass forms and the siegel zero. *Annals of Mathematics*, 140 :161–181, 1994.

[8] A. OGG. On a convolution of l-series. *Inventiones mathematicae*, 7 :297–312, 1969.

[9] R. Olivetto. On the sup-norm of holomorphic cusp forms. 2011.

[10] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*, volume 2 of *Collection SUP : "Le Mathématicien"*. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[11] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis, II. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[12] N. Templier. Large values of modular forms. *Camb. J. Math.*, 2(1) :91–116, 2014.

[13] Z. Ye. The Sup-norm of Holomorphic Cusp Forms. *ArXiv e-prints*, Apr. 2014.