Oscillations

Grégoire Nadin et Guillaume Régnier

24 juin 2004

Sujet proposé par Benoît Perthame

Table des matières

1 Introduction

Le but est d'étudier des suites oscillantes de fonctions. Le problème se pose lorsque l'on se donne une équation aux dérivées partielles ou une famille d'équations. On veut savoir si une suite de solutions de l'EDP ou de la famille converge vers une solution d'une certaine équation. C'est-à-dire soit L un opérateur sur l'espace des fonctions bornées (par exemple, $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$), soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de l'équation $L(u) = 0$. Existe-t-il une fonction u telle que :

$$u_k \to u, \ et \ L(u) = 0 \ ?$$

Ou encore soit $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'opérateur (par exemple, $\frac{\partial}{\partial t} - (1 + \frac{1}{k+1})\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \ k = 0, 1...$) telle que $L_k \to L$ pour une certaine topologie. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que $L_k(u_k) = 0$. Existe-t-il une fonction u telle que :

$$u_k \to u, \ et \ L(u) = 0 \ ?$$

La réponse est non, en général. Lorsque ces convergences ont lieu, encore faut-il savoir pour quelle(s) topologie(s) elles ont lieu.

De manière pratique, le problème se pose de la manière suivante : soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant *-faiblement vers u dans $\mathcal{L}^\infty$, soit F une fonction, que dire de la suite $(F \circ u_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

On sait que l'on peut avoir :

$$u_k \stackrel{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} u, \ mais \ u_k \stackrel{\mathcal{L}^\infty}{\not\to} u.$$

La difficulté provient d'éventuelles fluctuations très rapides des fonctions u_k. C'est le problème d'**oscillations**.

Pour mieux comprendre ce phénomène, nous allons introduire la notion de mesures de Young qui apportent des éléments de réponse. Ceci nous permet de répondre dans le cas où F est un produit scalaire ou, plus généralement, si F est une forme quadratique. On appliquera les résultats obtenus aux systèmes elliptiques et aux lois de conservation.

2 Mesures de Young

2.1 Quelques bases d'analyse fonctionnelle

Définition 1 (Topologies faible et *-faible) *Soit E un espace vectoriel. On appelle topologie faible sur E la topologie $\sigma(E, E')$ la plus faible rendant continues les applications $x \mapsto y(x)$, $\forall \ y \in E'$, et topologie *-faible $\sigma(E', E)$, la plus faible rendant continues les applications $y \mapsto y(x)$, $\forall \ x \in E$.*

On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si $x_k \overset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} x$, i.e. $\forall\ y \in E'$, $y(x_k) \rightarrow y(x)$, et on note $x_k \rightharpoonup x$.

*On dit qu'une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E'^{\mathbb{N}}$ converge *-faiblement vers y si $y_k \overset{\sigma(E',E)}{\rightarrow} y$, i.e. $\forall\ x \in E$, $y_k(x) \rightarrow y(x)$, et on note $y_k \overset{*}{\rightharpoonup} x$.*

Exemple : Cas des espaces $\mathcal{L}^p, p \in [1, \infty[$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $p \in [1, \infty[$. Soit $q \in]1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'exposant conjugé de p. $\forall\ \varphi \in (\mathcal{L}^p(\Omega))'$, $\exists!\ g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ tel que $\forall\ f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$,

$$\varphi(f) = \int_\Omega fg.$$

On a, plus exactement pour $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, $g \mapsto \varphi_g = (f \mapsto \int_\Omega fg)$ isométrique bijective. On a donc :

$$u_k \overset{\mathcal{L}^p}{\rightharpoonup} u \iff \forall v \in \mathcal{L}^q, \int_\Omega u_k v \rightarrow \int_\Omega uv.$$

$$u_k \overset{\mathcal{L}^q}{\rightharpoonup} u\ *-faiblement \iff \forall v \in \mathcal{L}^p, \int_\Omega u_k v \rightarrow \int_\Omega uv.$$

Le principal intérêt de la topologie *-faible est le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de Banach-Alaoglu) *Soit E un espace de Banach. La boule unité $\overline{B}_{E'}$ (et plus généralement toute boule fermée bornée de E') est compacte pour la topologie *-faible de E'.*

2.2 Théorème d'existence des mesures de Young

Théorème 2 *Soit K une partie bornée de $\mathbb{R}^p$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs (presque partout) dans K. Alors il existe une sous-suite, notée $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ainsi qu'une famille mesurable $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^p$, avec supp $\nu_x \subset \overline{K}$, telles que, si $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p)$ et $\bar{F}(x) \overset{def}{=} <\nu_x, F>$, on a :*

$$F \circ v_j \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} \bar{F}.$$

Démonstration (u_k) est bornée dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Soit D une partie dénombrable dense de l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p)$ des fonctions continues bornées qu'on munit de la norme $\|F\| = \sup_{u\in\mathbb{R}^p} |F(u)|$. Pour tout $G \in D$, la suite $(G \circ u_k)$ est bornée dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$, qui est le dual de $\mathcal{L}^1(\Omega)$, donc, par le théorème de Banach-Alaoglu, $(G \circ u_k)$ possède une valeur d'adhérence pour la topologie *-faible. Par procédé diagonale, il existe une sous-suite notée $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$, pour laquelle :

$$\forall\ G \in D,\ G \circ v_j \rightharpoonup l_G$$

On peut supposer que D est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel qui contient une fonction ϕ qui vaut 1 sur une boule B qui contient K. La linéarité de la limite dans $\mathbb{R}^p$ assure qu'il existe une partie négligeable $\mathcal{N}$ de Ω hors de laquelle on a :

$$\forall\, F, G \in D,\ l_F + l_G = l_{F+G}$$

$$\forall\, F \in D,\ q \in \mathbb{R},\ qF \in D \Rightarrow q l_F = l_{qF}$$

$$\forall\, F \in D,\ |l_F(x)| \leq [F] \stackrel{def}{=} sup_{u\in K}|F(u)|$$

Pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, on peut donc définir une forme linéaire ν_x sur D par la formule $< \nu_x, F >= l_F(x), \forall F \in D$. Elle satisfait :

$$| < \nu_x, F > | \leq [F] \leq \|F\|.$$

On en déduit que l'on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p)$ satisfaisant l'inégalité précédente. On en déduit que supp $\nu_x \subset \overline{K}$. De plus, $< \nu_x, 1 >=< \nu_x, \phi >= 1$ de manière évidente (car $l_\phi \equiv 1$), et $\nu_x \geq 0$. $\forall x \in \Omega, \nu_x$ est une mesure de probabilité.

Si $F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p)$, $F = \lim F_m$, $F_m \in D$, $\forall m \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto < \nu_x, F >$ est limite uniforme de $(x \mapsto < \nu_x, F_m >)_{m\in\mathbb{N}}$, donc la limite presque partout des fonctions mesurables l_{F_m}. La famille $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ est donc mesurable.
Pour conclure, soient $\varepsilon \geq 0$ et $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p)$, $\exists\, G \in D$ tq $[F - G] \leq \varepsilon$.
Si $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{array}{ll} |\int_\Omega (l_F(x) - < \nu_x, F >) v(x) dx| & \leq |\int_\Omega (l_F - l_G)(x) v(x) dx| \\ & + |\int_\Omega < \nu_x, F - G > v(x) dx| \\ & \leq \varepsilon \|v\|_{\mathcal{L}^1} + \lim_{j\to\infty} |\int_\Omega (F - G) \circ v_j(x) v(x) dx| \\ & \leq 2\varepsilon \|v\|_{\mathcal{L}^1}, \forall\, \varepsilon \geq 0. \end{array}$$

On obtient donc :

$$\int_\Omega (l_F(x) - < \nu_x, F >) v(x) dx = 0$$

d'où $l_F(x) =< \nu_x, F >$ presque partout. $\square$

Définition 2 *Une suite bornée $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}^\infty$ converge au sens de Young vers $\nu \in \mathcal{J}$ (ensemble des familles mesurables $(x \mapsto \nu_x)_{x\in\Omega}$ à support dans K) si $G \circ u_k \rightharpoonup l_G$, $\forall\, G \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p)$, avec $l_G(x) =< \nu_x, G >$ presque partout.*

Proposition 1 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^\infty$, qui converge faiblement vers u et au sens de Young vers la mesure ν. On a équivalence entre :*
(i) $\exists\, p \in [1, \infty[$ tq $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\omega)} \to 0$, pour tout ouvert borné $\omega \subset \Omega$,
(ii) idem avec $\forall\, p \in [1, \infty[$,
(iii) Pour presque tout $x \in \Omega$, ν_x est une masse de Dirac.

Démonstration *(i)⇒(ii)* Si $u_k \to u$ fortement dans $\mathcal{L}^p_{loc}(\Omega)$, alors la convergence a lieu dans $\mathcal{L}^q_{loc}$, $\forall\ 1 \leq q \leq p$. Soient $q \geq p$ et ω un ouvert borné de Ω, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}^\infty$, donc on a :

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_{\mathcal{L}^q(\omega)} &\leq \|u_k - u\|^\theta_{\mathcal{L}^p(\omega)} \|u_k - u\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^\infty} \\ &\leq (2M)^{1-\theta} \|u_k - u\|^\theta_{\mathcal{L}^p(\omega)}. \end{aligned}$$

avec $\theta = \frac{p}{q} \leq 0$.

(ii)⇒(iii) Si $u_k \to u$ fortement dans $\mathcal{L}^p_{loc}(\Omega), \forall\ p < \infty$, alors

$$\|u_k - u\|^2 \overset{\mathcal{L}^1_{loc}}{\to} 0, \|u_k - u\|^2 \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} 0.$$

De plus, $u_k u \rightharpoonup |u|^2$, donc $|u_k|^2 \rightharpoonup |u|^2$, ce qui nous donne pour presque tout $x \in \Omega$:

$$< \nu_x, |\lambda|^2 >= | < \nu_x, \lambda > |^2$$

En identifiant λ à $\lambda \mapsto \lambda$ et $|\lambda|^2$ à $\lambda \mapsto |\lambda|^2$. On a donc l'égalité dans la relation de Cauchy-Schwarz, donc $\lambda \mapsto \lambda$ est constant sur *supp* ν_x,
i.e. il existe $v(x)$ tel que *supp* $\nu_x \subset \{v(x)\}$. Mais $\nu_x \not\equiv 0$ donc *supp* $\nu_x = \{v(x)\}$. C'est une mesure de probabilité, c'est donc une masse de Dirac.

(iii)⇒(i) Si $\nu_x = \delta_{v(x)}$ presque partout, alors $u(x) =< \nu_x, \lambda > = v(x)$ presque partout et de même $|u_k|^2 \rightharpoonup |u|^2$, d'où $|u_k - u|^2 \rightharpoonup 0$. On a alors :

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi(x)|u_k(x) - u(x)|^2 dx = 0, \forall \phi \in D(\Omega).$$

On a convergence forte de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^2_{loc}(\Omega)$. □

Proposition 2 *On suppose que $u_k \rightharpoonup u$ et $F(u_k) \rightharpoonup l$ dans $\mathcal{L}^\infty$ *-faible. Si F est convexe alors :*

$$l(x) \geq F \circ u(x)$$

presque partout sur Ω.

*Réciproquement, soit F une fonction continue telle que $F(lim\ u_k) \leq lim\ F \circ u_k$ presque partout, chaque fois que ces limites existent dans $\mathcal{L}^\infty$ *-faible. Alors F est convexe.*

Démonstration Si F est convexe de classe $\mathcal{C}^1$, si $u_k \rightharpoonup u$ et si $F \circ u_k \rightharpoonup l$, on écrit l'inégalité de convexité $F \circ u_k \geq F \circ u + dF(u)(u_k - u)$. Par passage à la limite *-faible, on obtient $l \geq F \circ u$. Le résultat s'étend par densité au cas où F est continue convexe.

Réciproquement, si $F(lim\ u_k) \leq lim\ F \circ u_k$ presque partout, chaque fois que ces limites *-faibles ont un sens, alors $F(<\nu,\lambda>) \leq <\nu, F>$ pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}^p$. Choisissant a et b dans $\mathbb{R}^p$, $\theta \in [0,1]$ et $\nu = \theta\delta_a + (1-\theta)\delta_b$, on obtient l'inégalité de convexité

$$F(\theta a + (1-\theta)b) \leq \theta F(a) + (1-\theta)F(b).$$

□

Remarque : Si $u_k \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} u \Rightarrow F(u_k) \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} F(u)$, alors F est affine. Il reste à trouver les conditions nécessaires sur les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour que cette convergence ait lieu, c'est l'objet du paragraphe 3.

2.3 Exemples de calculs de mesures de Young

Lemme 1 *Soit $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^p$ une fonction mesurable bornée et $u_k \overset{def}{=} \varphi(kx)$. Alors :*

$$u_k \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} <\varphi> \equiv \int_0^1 \varphi(t).$$

Démonstration : Comme (u_k) est bornée, par convergence dominée, on ne montre le résultat que pour une fonction test dans une partie dense de $\mathcal{L}^1$, on intègre donc contre $x \mapsto e^{2i\pi px}$, $p \in \mathbb{Z}$.

$$\int_0^1 e^{2i\pi px}\varphi(kx)\ dx = \int_0^k \varphi(s)e^{2i\pi p\frac{S}{k}}\ \frac{ds}{k}$$

$$= \int_0^1 \varphi(s)\ \left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{2i\pi p\frac{s+j}{k}}\right)\ \frac{ds}{k} = 0\ si\ p \neq 0,\ <\varphi>\ \ sinon$$

$$=<\varphi> \int_0^1 e^{2i\pi px}dx$$

□

Exemples *(i)* $\varphi(x) = sin\ (2\pi x)$. Le lemme montre que $F \circ u_k \rightharpoonup <F\circ\varphi>$, par changement de variable, on en déduit que :

$$\forall x,\ \nu_x(dy) = \frac{dy}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

(ii) $\varphi(x) = \lambda_i\ si\ x \in]a_i; a_{i+1}[, i = 0, ...n-1$
où $a_0 = 0,\ a_n = 1$. On a :

$$F \circ u_k \rightharpoonup <F\circ\varphi> = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)F(\lambda_i),$$

i.e.,

$$\forall x,\ \nu_x = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\delta_{\lambda_i}.$$

Cet exemple montre que n'importe quelle combinaison convexe de masses de Dirac est la mesure de Young d'une suite bien choisie. Par densité, on pourrait en fait montrer que toute famille mesurable de mesures de probabilité est la mesure de Young d'une suite bien choisie.

Remarque : On voit ici que la méthode des mesures de Young ne tient pas compte de la localisation des oscillations. En effet, $u_k(x) = sin(2k\pi x)$ et $v_k(x) = sin(4k\pi x)$ ont mêmes mesures de Young.

3 Méthode de la compacité par compensation

3.1 Préambule et définitions

Définition 3 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.*
Pour $s \in \mathbb{R}$*, on note :*

$$H^s(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) / \int_\Omega (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} \equiv \int_\Omega (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

où $\hat{f}$ *est la transformée de Fourier de f.*

Proposition 3 *On pose* $H_0^s(\Omega) \equiv Adh_{H^s(\Omega)}(\mathcal{D}(\Omega))$*. Alors le dual de* $H_0^s(\Omega)$ *est isomorphe à* $H^{-s}(\Omega)$

Définition 4 *Si* $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$*,* $u = (u_1, ..., u_n)$*, on définit div* $u \in H^{-1}(\Omega)$ *par la formule :*

$$div\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Définition 5 *Si* $w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$*,* $w = (w_1, ..., w_n)$*, on définit rot* $w \in H^{-1}(\Omega, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *par la formule :*

$$rot\ w \stackrel{def}{=} (\partial_j w_i - \partial_i w_j)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

3.2 Lemme Divergence-Rotationnel

Lemme 2 (Lemme div-rot) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
Soient $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées d'éléments de $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ telles que :

(i) $(div\ v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenu dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$,

(ii) $(rot\ w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenu dans un compact de $H^{-1}(\Omega,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Si, de plus, $v_k \overset{\mathcal{L}^2}{\rightharpoonup} v$ et $w_k \overset{\mathcal{L}^2}{\rightharpoonup} w$, alors :

$$v_k.w_k \to v.w$$

au sens des distributions.

Démonstration Considérons la suite $u_k \in H^2(\Omega)$ solutions de

$$\begin{cases} -\Delta u_k = w_k \ sur\ \Omega \\ u_k = 0 \ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Puisque $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^2(\Omega)$. Posons $z_k \equiv -div\ u_k$, $y_k \equiv w_k - \nabla z_k$. Alors $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, et on a $\forall\ 1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} y_k^i &= w_k^i - \partial_i z_k \\ &= \textstyle\sum_j -\partial_{jj}^2 u_k^i + \partial_{ij}^2 u_k^j \\ &= \textstyle\sum_j \partial_j(\partial_i u_k^j - \partial_j u_k^i). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii) et la définition de u_k, on en déduit que $(rot\ u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenu dans un compact de $H^1(\Omega,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Et donc, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenu dans un compact de $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Quitte à prendre deux sous-suites, on peut supposer que :

$$z_k \to z \ dans\ H^1(\Omega), \qquad y_k \overset{\mathcal{L}^2}{\to} y,$$

avec $z = -div\ u,\ y = w - \nabla z$, où $u \in H^2(\Omega)$ solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = w \ sur\ \Omega \\ u = 0 \ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a alors :

$$\int_\Omega v_k.w_k\varphi = \int_\Omega v_k(y_k + \nabla z_k)\varphi$$

D'après l'hypothèse (i), on peut écrire :

$$\int_\Omega v_k.\nabla z_k\ \varphi = -\int_\Omega v_k \nabla\varphi\ z_k - < div\ v_k, z_k\varphi >$$

$$\to -\int_\Omega v.\nabla\varphi\ z - < div\ v, zk >= \int_\Omega v.\nabla z\ \varphi$$

avec $<,>$ désignant le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.
Et d'autre part, on a :

$$\int_\Omega v_k.w_k\,\varphi \to \int_\Omega v.(y+\nabla z)\varphi = \int_\Omega v.w\varphi.$$

□

3.3 Généralisation : compacité par compensation

On considère maintenant une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_k \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} u$$

On suppose aussi $F(u_k) \overset{\mathcal{L}^\infty}{\rightharpoonup} \bar{F}$, pour $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, continue. On veut connaître les informations nécessaires pour déduire que $\bar{F} = F(u)$.

Plus exactement, on se donne un opérateur L :

$$L : \mathcal{L}^q(\Omega) \mapsto (\mathcal{D}'(\Omega))^I$$

$$u \mapsto Lu$$

$$(Lu)_i \equiv \sum_{j,l} a_{ijl}\frac{\partial u_j}{\partial x_l},\ 1 \leq i \leq I$$

Définition 6 *On définit le cône Λ de $\mathbb{R}^p$ en posant :*

$$\Lambda \equiv \{\lambda \in \mathbb{R}^p\ tq\ \exists\ \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\},\ \sum_{j,l} a_{ijl}\lambda_j\xi_l = 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq I\}$$

Théorème 3 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. On suppose que $(Lu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit contenu dans une partie compacte de l'espace $H^{-1}_{loc}(\Omega)$ muni de sa topologie forte.*
Soit $Q : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ une forme quadratique, positive sur le cône Λ. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $Q(u_k) \rightharpoonup l$ vaguement. Alors $l \geq Q(u)$. Si $Q \equiv 0$ sur le cône Λ, alors $l = Q(u)$.

Démonstration On commence par poser $\forall\ k \in \mathbb{N},\ v_k = u_k - u$, donc $v_k \rightharpoonup 0$. La suite $(Lv_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $H^{-1}_{loc}(\Omega)$. Soit q la forme polaire de Q,

$$Q(v_k) = q(u-u_k, u-u_k) = Q(u_k) + Q(u) - 2q(u,u_k) \rightharpoonup l - Q(u),$$

car $w \mapsto q(w,u)$ est linéaire.
On est alors ramené au cas où $u = 0$. On doit prouver alors que $l \geq 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $w_k = \varphi u_k$, $w_k \rightharpoonup \varphi u = 0$ et

$$(Lw_k)_i = \varphi(Lu_k)_i + \sum_{j,l} a_{ijl}(u_k)_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}.$$

La suite des sommes est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et à support uniformément borné (il est inclus dans celui de φ). Cette suite est donc relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$. La suite des $\varphi L u_k$ l'est aussi, donc la suite $(Lw_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$. Puis $Q(w_k) = \varphi^2 Q(u_k) \rightharpoonup \varphi^2 l$ qui est positif $\forall\ \varphi$ fonction-test ssi l est positif.

On peut donc se ramener ainsi au cas où *supp* $u_k \subset K$ avec $K \subset\subset \Omega$. Quitte à prolonger par 0 hors de Ω, on peut prendre $\Omega = \mathbb{R}^m$. On peut, enfin, supposer que :

$$Lu_k \rightharpoonup 0,\ dans\ H^{-1}(\mathbb{R}^m)\ fort$$

Il suffit que prouver que :

$$(u_k \rightharpoonup 0,\ Lu_k \stackrel{H^{-1}}{\to} 0,\ Q(u_k) \to l,\ supp\ u_k \subset K) \Rightarrow \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} Q(u_k) \geq 0.$$

Celà prouve aussi que :

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2 Q(u_k) \geq 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

i.e. $< l, \varphi^2 > \geq 0$, ce qui donne bien $l \geq 0$, au sens des mesures.

Soit $(\hat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des transformées de Fourier des u_k :

$$\hat{u}_k(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i \xi . x} u_k(x) dx.$$

On a alors :

$$|\hat{u}_k(\xi)| \leq \|u_k\|_{\mathcal{L}^2} \sqrt{\lambda(K)} \leq M \sqrt{\lambda(K)}$$

où $\lambda(K)$ désigne la mesure de Lebesgue de $K \subset\subset \mathbb{R}^m$, donc $\lambda(K) < \infty$. $x \mapsto e^{-2\pi i \xi . x}$ est bornée sur K, donc

$$(u_k \rightharpoonup 0) \Rightarrow (\forall\ \xi \in \mathbb{R}^m,\ \hat{u}(\xi) \to 0).$$

D'aprés le théorème de convergence dominée, on en déduit donc que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|\xi|<r} Q(\hat{u}_k(\xi)) d\xi = 0,\ \forall\ r > 0,$$

où Q désigne aussi l'extension de la forme quadratique $\mathbb{C}^p$ une forme hermitienne par : $Q(\lambda) = q(\lambda, \bar{\lambda})$. On a de plus $Lu_k \rightharpoonup 0$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^m)$ fort donc :

$$\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j,l} a_{ijl}(\hat{u}_k)_j \xi_l\|_{\mathcal{L}^2} \to 0, \; \forall \; 1 \leq i \leq I.$$

Avec la formule de Plancherel, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^m} Q(u_k(x))dx = \int_{\mathbb{R}^m} Q(\hat{u}_k(\xi))d\xi = \int_{|\xi|<r} Q(\hat{u}_k(\xi))d\xi + \int_{|\xi|\geq r} Q(\hat{u}_k(\xi))d\xi.$$

On a maintenant besoin du lemme suivant :

Lemme 3 *Soit Q une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^p$, positive sur le cône réel Λ. Alors, :*

$$\forall \; \alpha > 0, \; \exists \; c > 0 / \; Q(\lambda) \geq -\alpha|\lambda|^2 - c \sum_i \Big| \; \textstyle\sum_{j,l} a_{ijl}\lambda_j \frac{\eta_s}{|\eta|} \; \Big|^2,$$

et ce, $\forall \; \lambda \in \mathbb{C}^p$ et $\eta \in \mathbb{R}^m$

Démonstration Q est positive sur $\Lambda + i\Lambda$ car $Q(\lambda) = Q(\Re(\lambda)) + Q(\Im(\lambda))$. S'il existe $\alpha > 0$ des suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^p$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^m$, unitaires, telles :

$$Q(\lambda_n) + \alpha + n \sum_i \Big| \; \textstyle\sum_{j,l} a_{ijl}(\lambda_n)_j(\eta_n)_l \; \Big|^2 < 0$$

On peut extraire des sous-suites convergentes donc on peut supposer $\lambda_n \to \lambda$ et $\eta_n \to \eta$, on obtient, en divisant par n et par passage à la limite, $\sum_{j,l} a_{ijl}\lambda_j\eta_l = 0$. D'où $\lambda \in \Lambda + i\Lambda$ et $Q(\lambda) \geq 0$. Par ailleurs, $Q(\lambda_n) \leq -\alpha < 0$, on a donc contradiction. $\square$

Retour à la démonstration du théorème Soient $\epsilon > 0$, $\alpha = M^{-2}\epsilon$, il existe un nombre $c \geq 0$ tel que :

$$\int_{|\xi|\geq r} Q(\hat{u}_k(\xi))d\xi \geq -\alpha \int_{|\xi|\geq r} |\hat{u}_k(\xi)|^2 d\xi - c \int_{|\xi|\geq r} \sum_i \Big| \; \textstyle\sum_{j,l} a_{ijl}(\hat{u}_k(\xi))_j \frac{\xi_l}{|\xi|} \; \Big|^2 d\xi$$

$$\geq -\alpha\|\hat{u}_k\|^2_{\mathcal{L}^2} - c(1+r^{-2}) \int_{|\xi|\geq r} (1+|\xi|^2)^{-1} \sum_i \Big| \; \textstyle\sum_{j,l} a_{ijl}(\hat{u}_k(\xi))_j \frac{\xi_l}{|\xi|} \; \Big|^2 d\xi$$

Le premier terme vaut $-\|u_k\|^2_{\mathcal{L}^2} \geq -\epsilon$ d'après Plancherel, et le second terme tend vers 0 d'après ce que l'on a vu. on obtient alors :

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} Q(u_k(x))dx \geq -\epsilon, \; \forall \; \epsilon > 0$$

ce qui donne le rśultat attendu.

Le cas d'égalité vient du fait que Q et $-Q$ vérifient l'hypothèse de positivité. $\square$

4 Applications à la recherche de solutions faibles

4.1 Systèmes elliptiques

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $E : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|E(P)\| \leq C(1 + \|P\|)\ (sous - linéarité)$$

$$\forall\, P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P : \nabla E(Q)P \geq \gamma\|P\|^2\ (ellipticité\ stricte)$$

où : est le produit scalaire matriciel. On veut étudier l'équation, issue des problèmes d'élasticité :

$$-div\ E(\nabla u) = 0 \tag{1}$$

Théorème 4 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions faibles de (1). Il existe ϵ_0 tel que $(\nabla u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}^\infty$ par ϵ_0. Soit ∇u une valeur d'adhérence (il en existe toujours par convergence faible), alors u est une solution faible de (1).*

Démonstration *(i)* Pour tout $x \in U$, soit ν_x la mesure de Young sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au problème. On sait que :

$$\nabla u = \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} Y d\nu_x \stackrel{def}{=} \bar{Y}$$

$$E(\nabla u_k) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \bar{E}\ dans\ \mathcal{L}^\infty(U; \mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

par sous-linéarité. Il nous faut montrer que :

$$\bar{E} = E(\nabla u).$$

Comme $div\ (E(\nabla u_k)) = 0$ et $rot(\nabla u_k) = 0$, on peut appliquer le lemme div-rot à $v_k = E(\nabla u_k),\ w_k = \nabla u_k$. On a ainsi :

$$\nabla u_k : E(\nabla u_k) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nabla u : \bar{E}$$

au sens des distributions.

Notons que :

$$\bar{E} = \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} E(Y) d\nu_x,\ E(\nabla u) = E(\bar{Y}).$$

Donc $\nabla u : \bar{E}(x) = \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} Y : E(Y) d\nu_x$, on en conclut :

$$\int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} (Y - \bar{Y}) : (E(Y) - E(\bar{Y}))\ d\nu_x = 0.$$

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que

$$|Y - \bar{Y}| < \alpha \Rightarrow |\nabla E(\bar{Y})(Y - \bar{Y}) + E(Y) - E(\bar{Y})| < \gamma|Y - \bar{Y}|.$$

Alors si $\epsilon_0 < \alpha$, comme $Supp(\nu_x) \subset \bar{B}(0, \epsilon_0)$, on a $|Y - \bar{Y}(x)| < \alpha$.
Donc (cf (i)) :

$$\int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} (Y - \bar{Y}(x)) \nabla E(\bar{Y}(x))(Y - \bar{Y}(x)) d\nu_x$$

$$= \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} (Y - \bar{Y}(x)) : (\nabla E(\bar{Y}(x))(Y - \bar{Y}(x)) + E(Y) - E(\bar{Y}(x))) d\nu_x$$

$$\leq \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \gamma |Y - \bar{Y}(x)|^2 d\nu_x$$

(iii) Par ellipticité stricte de E, on a :

$$\gamma \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} |Y - \bar{Y}(x)|^2 d\nu_x \leq \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} (Y - \bar{Y}(x)) : \nabla E(Y - Y\bar{(x)}) d\nu_x.$$

D'après l'étape *(ii)*, on a donc $\int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} |Y - \bar{Y}|^2 d\nu_x = 0$ pour $\epsilon_0 < \gamma$.

Ainsi $\nu_x = \delta_{\bar{Y}} = \delta_{\nabla u(x)}$, donc :

$$\forall p > 1,\ \|\nabla u_k - \nabla u\|_p \to 0,$$

donc $\nabla u_k \to \nabla u\ ps$,
on a la conclusion par convergence dominée, en prenant une fonction test.
□

4.2 Lois de conservation

Considérons, pour tout $\epsilon > 0$, l'EDP suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \partial_t u^\epsilon \ +\ \partial_x F(u^\epsilon)\ =\ \epsilon\, \partial_x^2 u^\epsilon, \tag{2}$$

où F est donnée. Le terme "$\epsilon \partial_x^2 u^\epsilon$" est un terme de viscosité qui devrait s'effacer quand $\epsilon \to 0$ et donner une solution u de l'EDP :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \partial_t u\ +\ \partial_x F(u)\ =\ 0. \tag{3}$$

Théorème 5 *Si $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, on peut extraire $(u^{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u^{\epsilon_k} \rightharpoonup u \in \mathcal{L}^\infty$. Alors u est solution faible de (3).*

Démonstration *(i)* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0$, soit $\nu_{x,t}$ la mesure de Young associée à $(u^{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$. On sait que :

$$\forall F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), F(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \bar{F},$$

oú $\bar{F}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} F(y) d\nu_{x,t}$.

(ii) Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe quelconque, on pose :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \Psi(y) = \int_0^y \Phi'(s)F'(s)ds$$

On dit que (Φ, Ψ) est une **paire entropie-flux**. Alors : $\Phi(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \bar{\Phi}$ et $\Psi(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \bar{\Psi}$ dans $\mathcal{L}^\infty$. En multipliant (2) par $\Phi'(u_\epsilon)$, on obtient :

$$\partial_t \Phi(u^\epsilon) + \partial_x \Psi(u^\epsilon) = \epsilon \partial_x^2 \Phi(u^\epsilon) - \epsilon \Phi''(u^\epsilon)(\partial_x u^\epsilon)^2 \tag{4}$$

Soit $v_k = (F(u^{\epsilon_k}), u^{\epsilon_k})$ et $w_k = (\Phi(u^{\epsilon_k}), -\Psi(u^{\epsilon_k}))$, $div\ v_k = \epsilon \partial_x^2 u^\epsilon$ cf (2) et $(rot\ w_k)_{1,2} = \epsilon \partial_x^2 \Phi(u^\epsilon) - \epsilon \Phi''(u^\epsilon)\partial_x(u^\epsilon)^2$ cf (3). On veut appliquer le lemme div-rot à v et w.

(iii) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction-test. En intégrant l'équation (4) contre f, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} f\Phi(u^\epsilon)\, dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}} f\Phi''(u^\epsilon)(\partial_x(u^\epsilon))^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} (\epsilon \Phi(u^\epsilon) f'' + \Psi(u^\epsilon) f')\, dx.$$

Si on fixe, dans un premier temps, Φ de classe $\mathcal{C}^2$ et strictement convexe, comme u^ϵ est à valeurs dans un compact, il existe une constante α telle que $\Phi'' > \alpha$, de plus Φ est bornée sur ce compact, soit M un majorant, on a alors :

$$\begin{aligned}\alpha\epsilon \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}} f(\partial_x u^\epsilon)^2\, dxdt \quad &< \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\epsilon\Phi(u^\epsilon) f'' + \Psi(u^\epsilon) f')\, dxdt \\ &\quad + \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\Phi(u^\epsilon(0,.)) + \Phi(u^\epsilon(T,.)))\, dx.\end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le premier terme converge quand $\epsilon \to 0$, le second est borné par $2M \int_{\mathbb{R}} |f| dx$, donc :

$$\sup_{\epsilon > 0} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \epsilon f (\partial_x u^\epsilon)^2\, dxdt < \infty$$

donc $(\sqrt{\epsilon}\partial_x u^{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est *-faiblement bornée dans $\mathcal{L}^2$ donc bornée dans $\mathcal{L}^2$. Ainsi $(\epsilon \Phi'(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est précompact dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, donc comme $\Phi'(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \partial_x \Phi(u^\epsilon)$, $(\epsilon \partial_x^2 \Phi(u^\epsilon))_{\epsilon>0}$ est precompact dans $H^{-1}(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$. De même, $(\epsilon \Phi''(u^\epsilon)(\partial_x u^\epsilon)^2)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$.
On admet alors (lemme de Murat) que le membre de droite de (4) est précompacte dans $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$.

On a donc : $v_k.w_k \rightharpoonup v.w$ dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, où $v = (\bar{F}, u)$ et $w = (\bar{\Phi}, -\bar{\Psi})$. D'autre part : $v_k.w_k \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}} F(y)\Phi(y) - y\Psi(y) d\nu_{x,t}$. D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} F(y)\Phi(y) - y\Psi(y)\, d\nu_{x,t} = \bar{F}(x,t)\bar{\Phi}(x,t) - u(x,t)\bar{\Psi}(x,t),$$

soit : $\int_{\mathbb{R}}((F(y) - \bar{F}(x,t))\Phi(y) + (u(x,t) - y)\Psi(y))d\nu_{x,t} = 0$.

(iv) On fixe maintenant $\Phi(y) = |y - u(x,t)|$, ainsi :

$$\Psi(y) = sgn(y - u(x,t))(F(y) - F(u(x,t))).$$

On en déduit :

$$(F(u(x,t)) - \bar{F}(x,t)) \int_{\mathbb{R}} |y - u(x,t)| d\nu_{x,t} = 0.$$

Par conséquent : $F(u(x,t)) = \bar{F}(x,t)$ ou $\nu_{x,t} = \delta_{x,t}$. Mais comme la deuxième possibilité implique la première, on a $\bar{F} = F(u)$

(v) Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, alors :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u^{\epsilon_k}\partial_t v + F(u^{\epsilon_k})\partial_x v \; dxdt = \epsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 v \; dxdt.$$

Quand k$\rightharpoonup \infty$, on a donc :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u\partial_t v + F(u)\partial_x v \; dxdt = 0.$$

□

Références

[1] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation II*. Diderot, 1996.

[2] Lawrence C. Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. American Mathematical Society, 1990.