

# Un modèle simplifié de marche aléatoire auto-évitante

Exposé de maîtrise sous la direction de Philippe Marchal

Francois Deberny

Nguyen Vu Lan

11 avril 2011

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Excursions et modèle du coin</b>	<b>3</b>
2.1	Excursions . . . . .	3
2.1.1	Quelques définitions . . . . .	3
2.1.2	La marche effective . . . . .	5
2.2	Modèle du coin . . . . .	6
2.2.1	Lemme de la ruine du joueur . . . . .	6
2.2.2	Visite du coin . . . . .	8
2.2.3	Le couplage avec le modèle du coin . . . . .	9
<b>3</b>	<b>La limite d'échelle</b>	<b>11</b>

# 1 Introduction

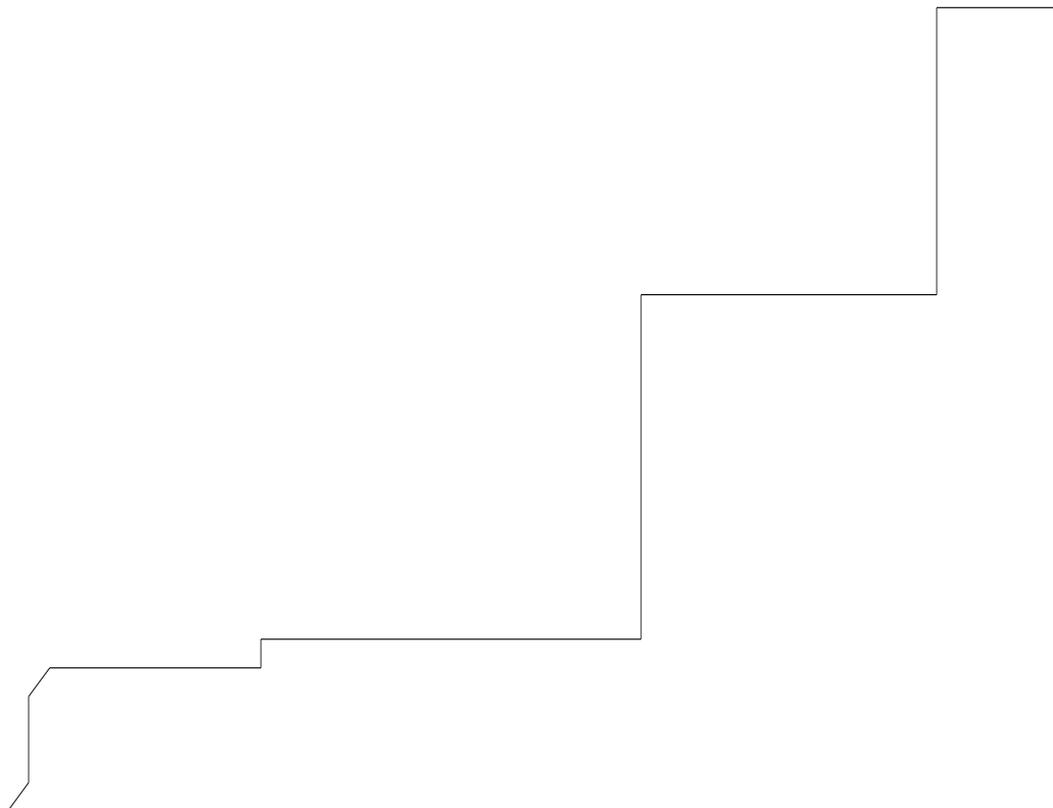


Figure 1 . Comportement asymptotique d'une marche prudente

Nous tenons tout d'abord à remercier notre encadrant pour le temps qu'il nous a consacré, ses nombreux conseils et toutes les corrections qu'il a apporté à notre dossier.

En mathématiques, une marche auto-évitante (SAW) est une séquence de mouvements sur un réseau qui ne visite pas le même point de plus d'une fois. SAW ont d'abord été introduite par le chimiste Paul Flory dans le but de modéliser le comportement de polymères. Une question importante concernant des marches auto-évitantes est l'existence de la limite d'échelle lorsque la longueur tend vers l'infini et la taille du réseau tend vers zero. Actuellement, la conjecture de Schramm -Loewer dit que la limite d'échelle de l'auto-évitante est  $SLE_{8/3}$  . Dans notre exposé on va considérer un modèle simplifié de marche auto-évitante, pour lequel il est facile de analyser et obtenir des informations intéressantes comme sa limite d'échelle. Il s'agit à chaque instant  $t$ , une direction est autorisée si et seulement si la demi droite dans cette direction, partant de la position de la marche à l'instant  $t$  ne rencontre aucun site déjà visité. Plus précisément, soit  $\gamma$  la marche. Dans la base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{Z}^2$  une direction  $e \in (\pm e_1, \pm e_2)$ , est autorisée si et seulement si  $\{\gamma_t + k\vec{e}, k > 0\} \cap \gamma_{[0,t]} = \emptyset$ . On avance ensuite en choisissant le pas à faire uniformément parmi les directions autorisées. On remarque qu'il y a toujours au moins deux directions autorisées et ainsi la marche est toujours définie contrairement à

la marche auto évitante classique. Nous nous sommes astreints à comprendre et démontrer un résultat issu d'une publication de 2009 due à Beffara, Velenik et Friedli sur les comportement de la limite d'échelle de ce modèle :

**Théorème 1** *Dans un espace de probabilité convenable, on peut construire une marche prudente  $\gamma$ , un mouvement brownien  $W$  et un couple de variables aléatoires  $\sigma_1, \sigma_2$  à valeurs dans  $\{1, -1\}$  telles que  $\forall \epsilon > 0$  :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\frac{1}{t} \gamma_s - Z_{s/t}^{\sigma_1, \sigma_2}\|_2 > \epsilon) = 0$$

avec , pour  $u \in [0, 1]$ , :

$$Z_u^{\sigma_1, \sigma_2} = \int_0^{\frac{3u}{7}} (\sigma_1 1_{\{W(s) \geq 0\}} \vec{e}_1 + \sigma_2 1_{\{W(s) < 0\}} \vec{e}_2) ds \quad (1)$$

Le mouvement brownien  $W$  et les 2 " signes " aléatoires  $\sigma_1, \sigma_2$  sont indépendants et  $P(\sigma_1 = s, \sigma_2 = s') = \frac{1}{4}$ , pour  $s, s' \in \{1, -1\}$

Dans ce théorème, on peut voir que la marche prudente choisit deux directions et alterne une suite de sauts dans ces deux directions, dont la loi fait intervenir les zéros d'un mouvement brownien.

## 2 Excursions et modèle du coin

### 2.1 Excursions

#### 2.1.1 Quelques définitions

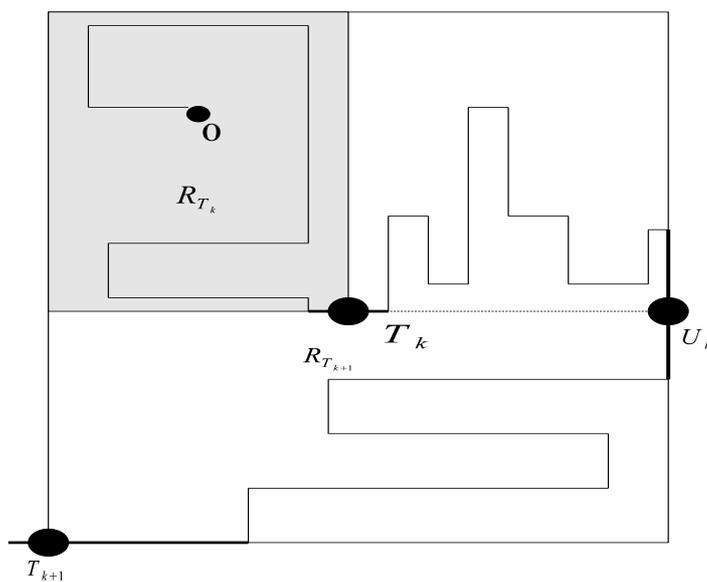


Figure 2

Qualitativement, si l'on connaît la taille horizontale et verticale de la marche alors on peut trouver les directions accessibles. On introduit donc :

$$A_t = \{y \in Z : \exists x \in Z, (x, y) \in \gamma_{[0,t]}\}, B_t = \{x \in Z : \exists y \in Z, (x, y) \in \gamma_{[0,t]}\} \quad (2)$$

Et :

$$x_{min} = \min A_t, y_{min} = \min B_t, x_{max} = \max A_t, y_{max} = \max B_t \quad (3)$$

Alors la marche à l'instant  $t$  est dans la rectangle  $R_t$  dont le coin en bas à gauche est  $(x_{min}, y_{min})$  et celui en haut à droite est  $(x_{max}, y_{max})$ . Et il est clair que  $\gamma_t$  reste toujours sur le bord du rectangle. La taille du rectangle est défini par :  $H_t := |B_t|$  et  $W_t := |A_t|$ , en particulier :  $H_0 = W_0 = 1$ . On dit que la marche visite le coin en  $s \in \{0, \dots, t\}$  si  $\gamma_s$  coïncide avec un des coins de  $R_s$ . Comme on l'a vu dans l'introduction, qualitativement la marche se comporte comme un processus de saut, avec 2 types d'excursions, verticales et horizontales .

Sans perdre de généralité, on suppose que le premier pas est dans la direction  $\vec{e}_1$ , ie  $\gamma_1 = \vec{e}_1$  et donc on peut définir par récurrence la suite de temps aléatoires :

$$T_0 := 0$$

$$U_0 := \inf\{t > 0 : H_t > 1\} - 1$$

et pour tout  $k \geq 0$  :

$$T_{k+1} = \inf \{t > U_k : W_t > W_{t-1}\} - 1$$

$$U_{k+1} = \inf \{t > T_{k+1} : H_t > H_{t-1}\} - 1$$

Les temps  $T_k$  ou  $U_k$  sont les moments où le rectangle augmente de taille. Donc, pendant  $(T_k, U_k]$ , la marche fait une excursion verticale, notée  $E_k^v$ , le long du bord de  $R_t$ , de même, pendant  $(U_k, T_{k+1})$ , elle fait une excursion horizontale, notée  $E_k^h$ . On pose :  $X_k := W_{T_{k+1}} - W_{T_k}$ , l'accroissement horizontal de  $E_k^v$ , et  $Y_k := H_{T_{k+1}} - H_{T_k}$ , l'accroissement vertical de  $E_k^h$ . En particulier,  $X_k \geq 1$  et  $Y_k \geq 1$ .

### 2.1.2 La marche effective

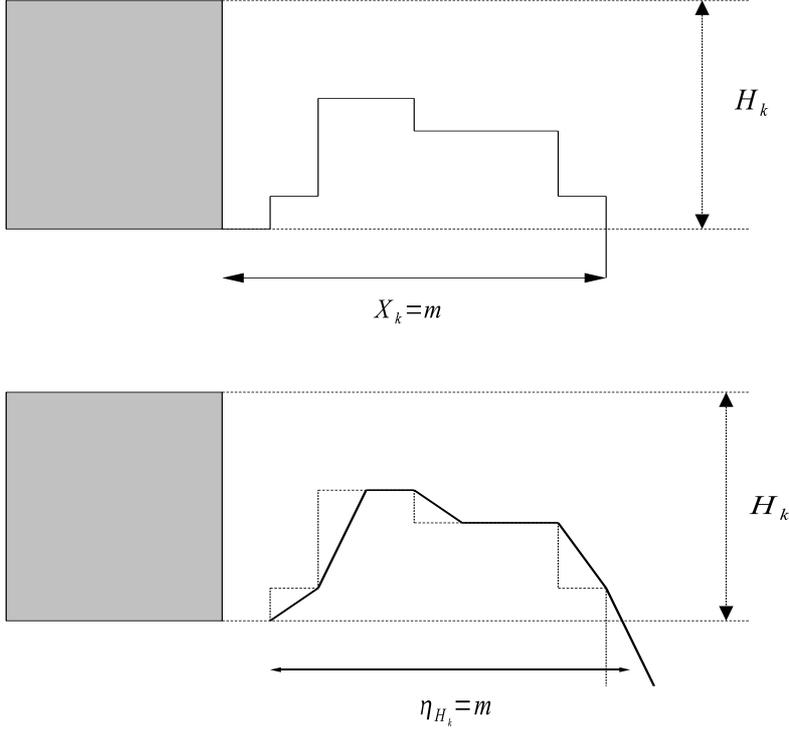


Figure 3

On construit la marche effective comme un processus qui a le même accroissement vertical que l'excursion et a un déplacement horizontal de longueur 1. Plus précisément, soit  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  des variables aléatoires iid à valeur dans  $\mathbb{Z}$  telles que  $P(\epsilon_i = k) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}$ . Soit  $S_0 = 0, S_n = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$ . On appelle  $S_n$  la marche effective et on note  $\eta_L$  le premier moment où  $S_n$  sort de l'intervalle  $[0, L-1]$  :  $\eta_L := \inf\{n > 0 : S_n \notin [0, L-1]\}$ . Etant donné que dans notre modèle, on regarde loin dans une direction pour vérifier si elle est accessible, il suffit donc de connaître la taille du rectangle à l'instant  $T_k$  pour déterminer la taille de l'excursion  $X_k$  :

**Lemme 1** Pour tout  $k \geq 0, m \geq 1$ ,

$$P(X_k = m \mid \gamma_{[0, T_k]}) = P(\eta_{H_{T_k}} = m) \quad (4)$$

$$P(Y_k = m \mid \gamma_{[0, U_k]}) = P(\eta_{W_{V_k}} = m) \quad (5)$$

Preuve :

Il suffit de montrer (4). On peut en fait supposer qu'à l'instant  $T_k$  la marche est au coin en bas à gauche. Conditionnellement à l'événement  $\{X_k = m\} \cap \{H_{T_k} = h\}$ , l'excursion  $E_k^v$  peut être décomposée sous la forme  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta)$ , où les  $\alpha_i$  sont des sauts élémentaires de longueur  $l_i \in [-h+1, h-1] \cap \mathbb{Z}$  et  $\beta$  est un segment vertical de longueur  $l \in [-h, h] \cap \mathbb{Z}$ , la distance pour que l'excursion atteigne le coin au moment  $m$ . Donc on trouve :

$$P(X_k = m \mid \gamma_{[0, T_k]}) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta)} p(\alpha_1) \dots p(\alpha_{m-1}) p(\beta)$$

où la somme porte sur toutes les possibilités de  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta)$  avec  $p(\alpha_i) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{|\alpha_i|}$  ( d'après la propriété d'auto évitement ). Donc en dualité avec la marche effective avec des accroissements  $\epsilon_i$  :

$$p(\alpha_1) \dots p(\alpha_{m-1}) = P(\epsilon_1 = l_1, \dots, \epsilon_{m-1} = l_{m-1})$$

De plus si  $l < 0$ , ie la marche descend à l'instant  $m$  alors :

$$p(\beta) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{|\beta|} = \frac{1}{3} \sum_{j \geq |\beta|+1} (\frac{1}{2})^{|\beta|} = P(S_m < 0 \mid S_{m-1} = |\beta|)$$

De même si  $l \geq 0$  :

$$p(\beta) = P(S_m \geq h \mid S_{m-1} = h - 1 - l)$$

En résumé :

$$P(X_k = m \mid \gamma_{[0, T_k]}) = P(S_1 \in [0, h - 1], \dots, S_{m-1} \in [0, h - 1], S_m \notin [0, h - 1])$$

D'où le résultat .

## 2.2 Modèle du coin

En fait, on va montrer que presque sûrement, la marche va visiter un seul coin du rectangle une infinité de fois, ce qui va simplifier notre modèle par passage au modèle du coin. D'abord on va voir le lemme de la ruine du joueur qui porte sur la probabilité de sortir d'un intervalle.

### 2.2.1 Lemme de la ruine du joueur

Pour se donner une idée, on va considérer d'abord le cas d'une marche simple en dimension 1 :

**Lemme 2** *On considère une marche aléatoire simple en dimension 1 . Soit  $\eta = \eta_\infty = \min\{n \geq 0, S_n \leq 0\}$  alors :*

$$P^1(\eta > 2n) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Preuve : Comme la marche est symétrique on a,  $\forall k < 2n$  :

$$P^1(\eta = k, S_{2n} = x) = P^1(\eta = k) p_{2n-k}(x) = P^1(\eta = k) p_{2n-k}(-x) = P^1(\eta = k, S_{2n} = -x)$$

En sommant de 1 à  $2n$  on trouve que :

$$P^1(\eta \leq 2n, S_{2n} = x) = P^1(\eta \leq 2n, S_{2n} = -x)$$

La symétrie implique aussi que

$$P^1(S_{2n} = x + 2) = P^1(S_{2n} = -x)$$

Comme  $\forall x \geq 0, P^1(\eta > 2n, S_{2n} = -x) = 0$  donc :

$$\begin{aligned} P^1(\eta > 2n) &= \sum_{x > 0} P(\eta > 2n, S_{2n} = x) \\ &= \sum_{x > 0} (p_{2n}(1, x) - p_{2n}(1, -x)) \\ &= \sum_{x > 0} p_{2n}(1, x + 2) - p_{2n}(1, -x) \\ &= p_{2n}(0, 0) = 4^{-n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

**Lemme 3** Soit  $\eta_r = \inf\{n, S_{2n} < 0 \text{ ou } S_{2n} > r\}$  alors

$$\exists c_1 : P(S_{\eta_r} \geq r) \leq \frac{c_1}{r}, \forall r > 0$$

Preuve : Remarque l'événement  $\{S_{\eta_r} \geq r\} = \{ \text{la marche sort de l'intervalle } [0, r] \text{ par } r \text{ avant } 0 \}$ .

$S_n$  est une marche simple donc si  $S_{\eta_r} < 0$  alors  $-1 \leq S_{\eta_r} < 0$

En plus  $M_n = S_{\min(n, \eta_r)}$  est une martingale bornée, donc  $E[S_{\eta_r}] = 0$ . Donc :

$$0 = E[S_{\eta_r}] \geq E[S_{\eta_r}, S_{\eta_r} \geq r] - 1 \geq rP(S_{\eta_r} \geq r) - 1$$

D'où le résultat.

Le résultat général sur le temps pour perdre et le temps pour gagner est trouvé dans le théorème 5.1.7 de [4] :

**Théorème 2** On fixe  $K < \infty, \delta, b > 0$  et  $0 < \rho < 1$  et on pose  $A(K, \delta, b, \rho)$  l'ensemble des distributions sur  $X_1$  telles que :

$$E[X_1] = 0$$

$$E[X_1^2] \leq K^2$$

$$P(X_1 \geq 1) \geq \delta$$

$$\inf_n P(S_1, \dots, S_{n^2} > -n) \geq b$$

$$\rho \leq P(S_n^2 \leq -n).$$

Alors pour tout  $K, \delta, b, \rho$ , il existe  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tels que  $X_1, X_2, \dots$  sont des variables aléatoires iid dont les distributions sont dans  $A(K, \delta, b, \rho) : \forall 0 < x < r$  :

$$c_1 \frac{x+1}{r} \leq P^x(\eta > r^2) \leq c_2 \frac{x+1}{r} \quad (6)$$

$$c_1 \frac{x+1}{r} \leq P^x(S_{\eta_r} \geq r) \leq c_2 \frac{x+1}{r} \quad (7)$$

On s'intéresse au temps pour sortir d'un intervalle :

**Lemme 4** Il existe  $c_2 > 0$  tel que pour tout  $L \geq 1$ , et  $n \leq c_2 L^{4/3}$

$$P(\eta_L \geq n) \geq \frac{c_2}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

Preuve :

On pose  $\eta_{\bar{L}} = \inf\{n > 0 : S_n \geq L - 1\}$ , donc on a :

$$\begin{aligned} P(\eta_L \geq n) &= P(\eta_\infty \geq n, \eta_{\bar{L}} \geq n) \\ &= P(\eta_\infty \geq n) - P(\eta_\infty \geq n, \eta_{\bar{L}} \leq n) \\ &\geq P(\eta_\infty \geq n) - P(\eta_{\bar{L}} \leq n) \end{aligned}$$

Mais on sait d'après (6) que  $P(\eta_\infty \geq n) \geq \frac{c_3}{\sqrt{n}}$  pour un certain  $c_3 > 0$ . Et d'après l'inégalité de Doob-Kolmogorov :

$$P(\eta_{\bar{L}} < n) \leq P(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq L) \leq \frac{E[|S_n|^2]}{L^2} = \frac{2n}{L^2}$$

### 2.2.2 Visite du coin

On appelle maintenant  $A_k$  l'événement qui consiste à ce que la  $k$  ième excursion contienne la diagonale du rectangle droit qui relie  $T_k$  et  $U_k$  ou la diagonale du rectangle qui relie  $U_k$  et  $T_{k+1}$ . On va montrer que pour  $k$  assez grand, la taille du rectangle est grande, donc il est difficile pour la marche de traverser le rectangle.

**Théorème 3** *Il existe un constant  $c_1$  tel que :*

$$P(A_k) \leq \frac{c_1}{k^{4/3}} \text{ pour } k \text{ assez grand} \quad (9)$$

*En particulier,  $P(\limsup_k A_k) = 0$ , et p.s il n'y a qu'un coin par lequel la marche passe une infinité de fois.*

Preuve : On va montrer d'abord un lemme :

**Lemme 5** *Il existe  $c_4, c_5$  tels que :*

$$P(W_{T_k} < c_5 k^{4/3}) \leq \exp(-c_4 k^{1/3}) \quad (10)$$

$$P(H_{T_k} < c_5 k^{4/3}) \leq \exp(-c_4 k^{1/3}) \quad (11)$$

Soit  $m = \lfloor k/2 \rfloor$ . Comme  $X_i \geq 1$  et  $Y_i \geq 1$  pour tout  $i$ , on a alors  $H_{T_j} \geq m, W_{T_j} \geq m$  pour tout  $j \geq m$ . Soit  $I_j$  l'indicatrice de l'événement  $\{X_j \geq c_2 m^{4/3}\}$ . Donc, on a pour tout  $j \geq m$  :

$$\begin{aligned} P(I_j = 1 \mid \gamma_{[0, T_j]}) &= P(I_j = 1 \mid H_{T_j}) \\ &= P(\eta_{H_{T_k}} \geq c_2 m^{4/3}) \\ &\geq P(\eta_m \geq c_2 m^{4/3}) \\ &\geq c_2^{-3/2} m^{-2/3} \end{aligned}$$

Soit  $p = c_2^{-3/2} m^{-2/3}$ , alors les  $I_j$  peuvent être couplés en des variables de Bernoulli de paramètres  $p$ . Donc :  $W_{T_k} = \sum_{j=0}^{k-1} X_j \geq c_2 m^{4/3} \sum_{j=m}^{k-1} I_j$ , d'où l'on trouve :

$$\begin{aligned} P(W_{T_k} < 2^{-4/3} c_2 k^{4/3}) &\leq P(I_j = 0, \forall j = m, \dots, k-1) \\ &\leq (1-p)^m \\ &\leq e^{-c_4 k^{1/3}} \end{aligned}$$

On démontre maintenant le théorème 3, on pose  $A_k^v$  l'événement lors duquel  $E_k^v$  traverse le rectangle qui passe par  $T_k$  et  $U_k$ . On a :

$$P(A_k^v) \leq P(H_{T_k} < c_5 k^{4/3}) + P(A_k^v \mid H_{T_k} \geq c_5 k^{4/3})$$

Le premier terme est traité dans le lemme (5). Le deuxième terme correspond en fait à la probabilité pour que  $S_n$  issue de 0 touche l'intervalle  $[c_5 k^{4/3}, +\infty)$  avant d'être négative. Donc d'après le lemme 3

$$P(A_k^v \mid H_{T_k} \geq c_5 k^{4/3}) \leq \frac{c_6}{k^{4/3}}$$

Par le lemme de Borel Cantelli, on a  $P(\limsup_k A_k) = 0$ , ie il existe  $n_0$  tel que pour tout  $k \geq n_0$  la marche ne traverse plus les rectangles et ne fasse que des excursions sur le bord, et comme la marche de dimension 1 est récurrente alors presque sûrement la marche prudente passe par un seul coin une infinité de fois.

### 2.2.3 Le couplage avec le modèle du coin

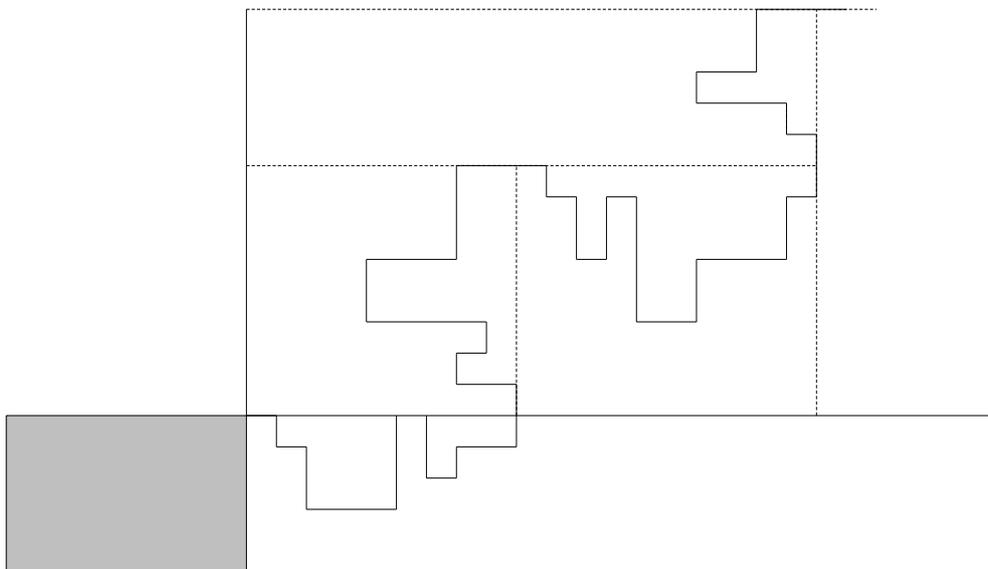


Figure 4. Modèle du coin avec des excursions indépendantes

Par la théorème 3, on peut considérer que la marche aléatoire conserve la même direction et évolue toujours le long du côté du rectangle qui entoure la trajectoire  $R_{SW} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0\}$ . Une direction dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est autorisée si et seulement si  $\{\gamma_t + k\vec{e}, k > 0\} \cap (\gamma_{[0,t]} \cup R_{SW}) = \emptyset$ . On construit alors la marche  $\hat{\gamma}$  de cette manière. On peut considérer une de ces trajectoires sur le modèle de la Figure 4. Comme pour  $\gamma$ , on note respectivement  $\hat{\varepsilon}_k^v$  et  $\hat{\varepsilon}_k^h$  les excursions le long des côtés verticaux et horizontaux du rectangle autour de la trajectoire. Celles-ci sont indépendantes car il n'y a pas de dépassements. On peut aussi se ramener aux excursions de la marche prudente à partir de  $\hat{\varepsilon}_k^v$  et  $\hat{\varepsilon}_k^h$ . On considère les excursions  $(\hat{\varepsilon}_k^v, \hat{\varepsilon}_k^h)_{k \geq 1}$  données. On peut alors construire les  $(\varepsilon_k^v, \varepsilon_k^h)_{k \geq 1}$  comme sur la figure 5. S'il n'y avait pas de dépassement alors on ne change pas l'excursion; sinon on enlève le début de l'excursion, jusqu'au premier dépassement. D'après le lemme 1, les excursions modifiées sont celles de la marche prudente.

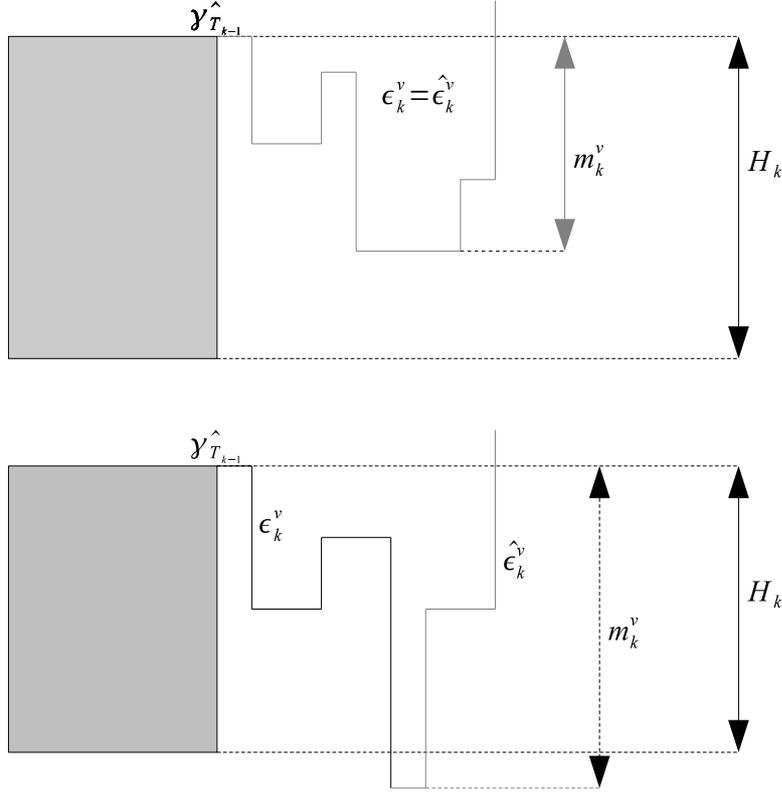


Figure 5. D'après le lemme 1 , on coupe le trajectoire à l'instant il dépasse  $H_k$

Soient  $m_k^v = \hat{\gamma}_{T_{k-1}}(2) - \min_{T_{k-1} \leq t \leq U_{k-1}}(\hat{\gamma}_t(2))$ ,  $m_k^h = \hat{\gamma}_{U_{k-1}}(2) - \min_{U_{k-1} \leq t \leq T_k}(\hat{\gamma}_t(1))$  où  $x(1)$  et  $x(2)$  sont les coordonnées dans  $Z^2$  de  $x$ . Si  $m_k^v > l$ , soit  $t_l$ , le premier instant tel que  $T_{k-1} \leq t \leq U_{k-1}$  et  $\hat{\gamma}_{T_{k-1}}(2) - \hat{\gamma}_t(2) = l + 1$ , et soit  $\text{Trunc}_l(\hat{\epsilon}_k^v)$  la restriction de  $\hat{\epsilon}_k^v$  après  $t_l$ . On définit de même les notations correspondantes pour les excursions verticales. Posons  $H_0 = 0$  et définissons :

$$\varepsilon_1^v = \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1^v & \text{si } m_1^v \leq H_0 \\ \text{Trunc}_{H_0}(\hat{\varepsilon}_1^v) & \text{si } m_1^v > H_0 \end{cases}$$

Soit  $X_0$  le déplacement horizontal correspondant à  $\varepsilon_1^v$  (cf figure 3), et soit  $W_0 = X_0$ . On pose alors :

$$\varepsilon_1^h = \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1^h & \text{si } m_1^h \leq W_0 \\ \text{Trunc}_{W_0}(\hat{\varepsilon}_1^h) & \text{si } m_1^h > W_0 \end{cases}$$

On définit de même par récurrence  $(\varepsilon_j^v, \varepsilon_j^h)_{j=1, \dots, k}$  : on pose  $X_j$  le déplacement horizontal pendant l'excursion  $\varepsilon_j^v$  et  $Y_j$  le déplacement vertical pendant l'excursion  $\varepsilon_j^h$ . Soit  $H_k = Y_0 + \dots + Y_{k-1}$ , et :

$$\varepsilon_{k+1}^v = \begin{cases} \widehat{\varepsilon}_{k+1}^v & \text{si } m_k^v \leq H_k \\ \text{Trunc}_{H_k}(\widehat{\varepsilon}_{k+1}^v) & \text{si } m_k^v > H_k \end{cases}$$

De même, soit  $W_k = X_0 + \dots + X_k$  et :

$$\varepsilon_{k+1}^h = \begin{cases} \widehat{\varepsilon}_{k+1}^h & \text{si } m_k^h \leq W_k \\ \text{Trunc}_{W_k}(\widehat{\varepsilon}_{k+1}^h) & \text{si } m_k^h > W_k \end{cases}$$

Par construction, les excursions verticales et horizontales de la marche prudente se succèdent. Ainsi, les  $(\varepsilon_k^v, \varepsilon_k^h)_{k \geq 1}$  correspondent exactement aux excursions de la marche aléatoire après avoir appliqué la bonne procédure et presque sûrement  $\varepsilon_k^v = \widehat{\varepsilon}_k^v$  et  $\varepsilon_k^h = \widehat{\varepsilon}_k^h$  (sauf pour un nombre fini de  $k$ ).

Par le théorème, la marche prudente  $\gamma$  reste dans un seul quadrant et se confond avec la marche du modèle du coin  $\widehat{\gamma}$  après un certain nombre de pas. Par des considérations évidentes de symétries, chaque quadrant a une probabilité 1/4 d'être choisi et l'on supposera que le premier quadrant est celui choisi (événement appelé  $Q_1$ ).

**Théorème 4** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq s \leq t\}} \|\frac{1}{t} \widehat{\gamma}_s - \frac{1}{t} \gamma_s\|_2 \geq \epsilon \mid Q_1) = 0$$

Preuve : Toujours d'après le théorème, les 2 processus  $\gamma$  et  $\widehat{\gamma}$  adoptent le même comportement en un temps fini. A partir de ce moment la distance entre les processus est constante :  $\sup_{t \geq 0} \|\widehat{\gamma}_t - \gamma_t\|_1 < \infty$ . En renormalisant le résultat par  $1/t$  on obtient bien le résultat du Théorème 4.

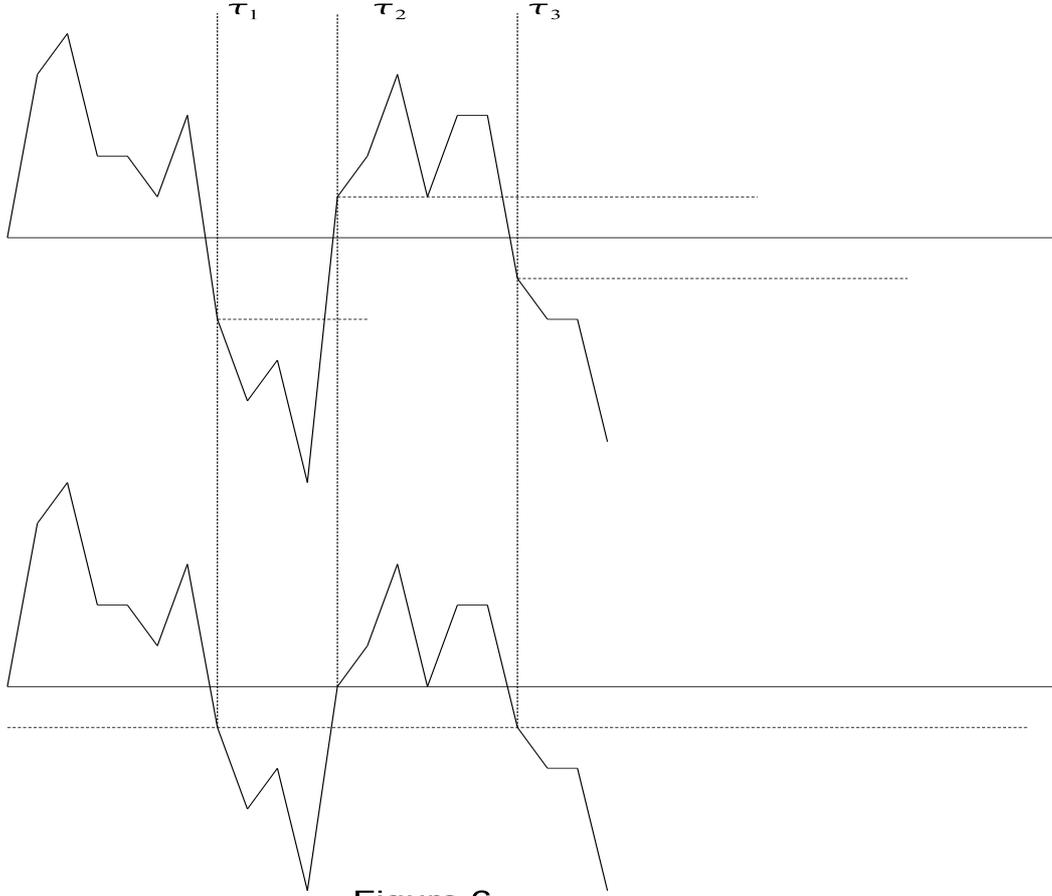
### 3 La limite d'échelle

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, il suffit de considérer le modèle du coin pour montrer le théorème 1. Dans ce modèle, les excursions horizontales et verticales sont iid de même loi :  $P(X = n) \simeq \frac{c}{n^{3/2}}$ . On sait que un processus stable de l'indice 1/2 est une limite en loi d'une suite de processus de Poisson composés avec la mesure  $v_n(dx) = c \frac{dx}{x^{3/2}} \mathbf{1}_{\{x \geq 1/n\}}$ . De plus, l'ensemble des zéros du mouvement brownien suit la même loi que l'image de ce processus. C'est en fait l'idée du théorème suivant :

**Théorème 5** *Dans un espace de probabilité convenable, on peut construire  $\widehat{\gamma}$  et un mouvement brownien  $W$  tels que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\frac{1}{t} \widehat{\gamma}_s - Z_{s/t}^{1,1}\|_2 > \epsilon) = 0$$

(voir le théorème 1 pour la notation)



**Figure 6**

L'idée principale est de construire un processus  $\hat{S}$  associé à  $\hat{\gamma}$  qui relie au mouvement brownien :

$$B \longleftrightarrow S \longleftrightarrow \hat{S} \longleftrightarrow \hat{\gamma}$$

D'abord, on associe à  $S$ , la marche effective définie en 2.1.2, une suite de temps d'arrêt :  $\tau_0 = 0$  et pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  :

$$\tau_{2k+1} = \inf\{n > \tau_{2k} : S_n < S_{\tau_{2k}}\}$$

$$\tau_{2k+2} = \inf\{n > \tau_{2k+1} : S_n > S_{\tau_{2k+1}}\}$$

Il est clair que  $\tau_{k+1} - \tau_k$  a la même distribution que  $\eta_{\infty}$ . On définit le dépassement comme  $\Delta_0 = 0$ , et pour tout  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,

$$\Delta_{2k+1} = -1 - (S_{\tau_{2k+1}} - S_{\tau_{2k}})$$

$$\Delta_{2k+2} = +1 - (S_{\tau_{2k+2}} - S_{\tau_{2k+1}})$$

Grâce à la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique, pour tout  $k$ ,  $(-1)^{k+1}\Delta_k$  est une variable aléatoire positive suivant la loi géométrique de paramètre  $1/2$ . Posons :

$$\hat{S}_n := S_n + \sum_{j \geq 0} \Delta_j 1_{\tau_j \leq n}$$

En fait, d'après la définition de  $\hat{S}$ , pour tout  $k$  on a :  $\hat{S}_{\tau_{2k}} = 0$  et  $\hat{S}_{\tau_{2k+1}} = -1$ . Donc on peut décomposer la trajectoire de  $\hat{S}$  en 2 types d'excursions : celles issues de 0 à -1 et celles de -1 à 0. En utilisant la procédure inverse de celle du 2.1.2 sur les excursions de type 1 on construit des excursions verticales de  $\hat{\gamma}$ , de même pour les excursions de deuxième type on trouve des excursions horizontales de  $\hat{\gamma}$ . Et d'après le lemme 1, les deux processus ont même loi. Maintenant, on va montrer que la distance entre  $S$  et  $\hat{S}$  n'est pas trop grande.

**Lemme 6** Pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k - \hat{S}_k| \geq n^{1/4+\delta}) = 0 \quad (12)$$

Preuve : D'après la définition de  $\hat{S}$ , on a :  $S_k - \hat{S}_k = \tilde{S}_{N_0(k)} - \Delta_{k+1}/2$ , avec  $\tilde{S}_N := \sum_{j=0}^N \tilde{\Delta}_j$ ,  $\tilde{\Delta}_i = (\Delta_i + \Delta_{i+1})/2$  et  $N_0(k) := \max\{j \geq 0 : \tau_j \leq k\}$ . Il est clair que les variables  $\tilde{\Delta}_i$  sont iid et symétriques, en particulier  $\tilde{S}_N$  est une martingale. Donc si  $L := n^{1/4+\delta}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k - \hat{S}_k| \geq n^{1/4+\delta}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{k \leq n} |\tilde{S}_{N_0(k)}| \geq L/2) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{j \leq N_0(n)} |\tilde{S}_j| \geq L/2) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{j \leq L^2} |\tilde{S}_j| \geq L/2) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_0(n) \geq L^2) \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0. Pour le deuxième, vu que  $P(\tau_1 = n) \sim n^{-3/2}$ , on peut montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N_0(n) \geq L^2) = 0$ . Par exemple, on admet le fait que  $\frac{S_i^2}{i}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$  positive (qui en fait est une distribution stable de l'indice  $1/2$ ). Et le fait que :  $\{N_0(n) \geq L^2\} = \{S_{L^2} < n\}$  donc :

$$P(N_0(n) \geq L^2) = P(S_{L^2} < n) = P\left(\frac{S_{L^2}^2}{L^2} < \frac{n}{L^2}\right) \sim P\left(X < \frac{1}{n^{2\delta}}\right)$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N_0(n) \geq L^2) = 0$  En plus on peut donner des relations plus fortes :

**Lemme 7** Soit  $1/8 > \delta > 0$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{\hat{S}_i \geq 0\}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{S_i \geq n^{1/4+\delta}\}} \right| > \epsilon\right) = 0 \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{\hat{S}_i < 0\}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{S_i < n^{1/4+\delta}\}} \right| > \epsilon\right) = 0 \quad (14)$$

Preuve : D'après le théorème local de la limite centrale (voir par exemple chapitre 10 chez Breiman) on a :

$$E\left[\sum_{i=1}^n 1_{|S_i| < n^{1/4+\delta}}\right] \leq c_7 n^{3/4+\delta}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n 1_{|S_i| < n^{1/4+\delta}} \geq n^{3/4+2\delta}\right) = 0$$

Observons que le signe de  $S_k$  et  $\hat{S}_k$  est le même lorsque  $|S_k| \geq n^{1/4+\delta}$  (lemme 6). Or :

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{\hat{S}_i \geq 0\}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{S_i \geq n^{1/4+\delta}\}} \right| > \epsilon\right)$$

$$\leq P(\max_{\epsilon n/2 \leq k \leq n} | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{\hat{S}_i \geq 0\}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{S_i \geq n^{1/4+\delta}\}} | > \epsilon/2)$$

En fait, il existe un lien très fort entre la marche effective  $S$  et le mouvement brownien  $B$ , que l'on peut voir dans [7] : Dans un espace de probabilité convenable, on peut les construire tous les deux tels que pour  $n$  assez grand :

$$P(\max_{k \leq n} | S_k - \sigma B_k | > n^{1/4}) \leq e^{-n^{1/4}} \quad (15)$$

ou  $\sigma^2 = 2$  est la variance de  $\epsilon_i$ . D'après le lemme 6, pour tout  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{k \leq n} | S_k - \sigma B_k | > n^{1/4+\delta}) = 0 \quad (16)$$

On peut voir que (16) et (12) sont de la même forme donc avec la même méthode on a :

**Lemme 8** Soit  $1/8 > \delta > 0$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{1 \leq k \leq n} | \frac{1}{n} \int_0^k 1_{\{B_s \geq 0\}} ds - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{S_i \geq n^{1/4+\delta}\}} | > \epsilon) = 0 \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{1 \leq k \leq n} | \frac{1}{n} \int_0^k 1_{\{B_s < 0\}} ds - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 1_{\{S_i < n^{1/4+\delta}\}} | > \epsilon) = 0 \quad (18)$$

Posons maintenant :

$$\theta^+(\hat{S}_{[0,n]}) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{\hat{S}_k \geq 0\}} \text{et } \theta^-(\hat{S}_{[0,n]}) = n - \theta^+(\hat{S}_{[0,n]})$$

$$\theta^+(B_{[0,t]}) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s \geq 0\}} \text{et } \theta^-(B_{[0,t]}) = t - \theta^+(B_{[0,t]})$$

Avec ces notations on peut déduire des lemmes 4.2 et 4.3 :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(\max_{\{k \leq n\}} | \frac{1}{n} \theta^+(B_{[0,k]}) - \frac{1}{n} \theta^+(\hat{S}_{[0,k]}) | > \epsilon) = 0 \quad (19)$$

Et l'on a la même formule pour  $\theta^-(\hat{S}_{[0,k]})$  et  $\theta^-(B_{[0,k]})$ .

Posons encore, pour  $m \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \theta^+(\hat{S}_{[0,n]}) \vec{e}_1 + \theta^-(\hat{S}_{[0,n]}) \vec{e}_2 \\ Z_m &= \theta^+(B_{[0,m]}) \vec{e}_1 + \theta^-(B_{[0,m]}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

On déduit de (12) que  $\forall \epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} \| \frac{1}{n} \Gamma_m - \frac{1}{n} Z_m \|_2 > \epsilon) = 0$$

Soit  $n \in N$ , on pose  $t(n) = \sum_{i=1}^n (1 + | \hat{S}_i - \hat{S}_{i-1} |)$ .  $t(n)$  correspond au temps tel que les points  $\hat{S}_n$  et  $\hat{\gamma}_{t(n)}$  coïncident (cf figure 6).

**Lemme 9** Pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{0 \leq m \leq n} \| \frac{1}{n} \hat{\gamma}_{t(m)} - \frac{1}{n} \Gamma_m \|_2 > \epsilon) = 0$$

Preuve : On utilise le Lemme 4.1 et le fait que pour tout  $\delta > 0$  :  $\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| \leq n^{1/2+\delta}$  avec une probabilité tendant vers 1 à l'infini. Il reste à expliciter le temps  $t(n)$  en fonction de  $n$ .

**Lemme 10** Pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} |t(m) - \frac{7}{3}m| > \epsilon n) = 0 \quad (20)$$

Preuve : Sachant que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N_0(n) \geq n^{1/2+\delta}) = 0$ , pour tout  $\delta$ , on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} |\sum_{i=1}^m |\hat{S}_i - \hat{S}_{i-1}| - \sum_{i=1}^m |S_i - S_{i-1}| | > \epsilon n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} |\sum_{i=1}^m |\hat{S}_i - \hat{S}_{i-1}| - \sum_{i=1}^m |S_i - S_{i-1}| | > \epsilon n, N_0(n) < n^{1/2+\delta}) \end{aligned}$$

et comme

$$\sup_{1 \leq m \leq n} |\sum_{i=1}^m |\hat{S}_i - \hat{S}_{i-1}| - \sum_{i=1}^m |S_i - S_{i-1}| | \leq \sum_{i=1}^{N_0(n)} |\Delta_i|$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} |\sum_{i=1}^m |\hat{S}_i - \hat{S}_{i-1}| - \sum_{i=1}^m |S_i - S_{i-1}| | > \epsilon n) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{i=1}^{n^{1/4+\delta}} |\Delta_i| > \epsilon n) = 0. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Doob-Kolmogorov, et comme  $E(|S_i - S_{i-1}|) = E(|\xi_i|) = 4/3$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} |t(m) - \frac{7}{3}m| > \epsilon n) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq m \leq n\}} |\sum_{i=1}^m (1 + |S_i - S_{i-1}| - \frac{7}{3})| > \epsilon n) = 0 \end{aligned}$$

En fait, il est plus pertinent d'exprimer  $n$  en fonction de  $t$  :  $n(t) = \inf\{n \geq 0, t(n) \geq t\}$ . Cependant, comme  $t(n+1) - t(n) = |\xi_{n+1}|$ , on obtient directement du lemme précédent que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\sup_{\{0 \leq s \leq t\}} |n(s) - \frac{3}{7}s| > \epsilon t) = 0$$

En résumé on a pour tout  $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\frac{1}{t}\hat{\gamma}_s - \frac{1}{t}Z_{3s/7}\|_2 > \epsilon) = 0$$

Or :

$$\frac{1}{t}Z_{3s/7} = \int_0^{3s/7} (1_{\{W_s \geq 0\}} \vec{e}_1 + 1_{\{W_s < 0\}} \vec{e}_2) ds = Z_u^{1,1}$$

En posant  $W_u = B_{ut}/\sqrt{t}$ , on a le résultat.

## Références

- [1] V.Beffara, S.Friedly, Y.Velenik, *Scaling limit of the prudent walk*, 2009
- [2] J.Komlos, P.Major and G.Tusnady. An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF.II.Z *Wahrscheinlicheiststheorie und Verw. Gebiete*, 34(1) :33-58,1976
- [3] G.F.Lawler and V.Limic. *Symmetric random walk*. Preliminary draft.
- [4] Leo Breiman, *Probability*, Classics in Applied Mathematics,1992