

Introduction au domaine de recherche

Nicolas Dreyfuss, sous la direction de Charles-Albert Lehalle

Octobre 2012

Cette introduction au domaine de recherche est adaptée de mon mémoire de M2, réalisé après un stage au sein de l'équipe de recherche quantitative de Crédit Agricole Cheuvreux, la filiale de *brokerage* (courtage) du Crédit Agricole.

La première partie sert à introduire les carnets d'ordres et à présenter un modèle simple d'évolution du prix d'un actif. L'étude théorique peut être confrontée aux données réelles. La deuxième partie introduit certaines problématiques de trading optimal. Enfin, on s'intéresse à des notions de la "théorie des jeux à champs moyen", développée par J.-M. Lasry et P.-L. Lions et qui permet en particulier d'obtenir des simulations de carnet d'ordres.

Table des matières

1	Un modèle d'évolution des prix pour les marchés à carnets d'ordres	2
1.1	Carnets d'ordres	2
1.2	<i>Order Flow Imbalance</i>	2
1.3	Relation entre variations de prix et <i>OFI</i>	3
2	Trading optimal	4
2.1	Impact instantané : le modèle d'Almgren-Chriss	4
2.2	Impact transient : le modèle de Gatheral	4
2.2.1	Modélisation : prix de l'actif et impact du trading	4
2.2.2	Caractérisation des stratégies optimales	5
2.2.3	Existence d'une stratégie optimale	5
2.2.4	Conclusion	6
3	Equilibres de Nash et jeux à champ moyen	7
3.1	Equilibres de Nash et équation de champ moyen	7
3.1.1	Equilibres de Nash : définitions et premiers exemples	7
3.1.2	Stratégies mixtes	7
3.1.3	Limites lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini	8
3.1.4	Illustration : heure de début d'une réunion	8
3.2	Equations MFG	9
3.2.1	Enoncé du problème	9
3.2.2	Existence de solutions	9
3.2.3	Application aux jeux avec contrôle optimal	11
3.2.4	Processus de formation des prix et simulation de carnets d'ordres	11
	Références	12

1 Un modèle d'évolution des prix pour les marchés à carnets d'ordres

En économie, le problème de la formation des prix dans un marché soumis à la loi de l'offre et de la demande, en relation avec la structure du marché, est fondamental. Le but de cette partie est de présenter les marchés à carnets d'ordre et d'étudier un modèle simple, proposé dans [CKS11], d'évolution des prix sur ces marchés.

1.1 Carnets d'ordres

Dans les marchés à carnets d'ordres, les différents intervenants envoient à une plate-forme centralisée des ordres d'achat et de vente d'actifs financiers. Pour chaque ordre, on précise si on veut vendre ou acheter, à quel prix et quelle quantité.

Tous les ordres concernant un actif donné sont inscrits en temps réel dans un carnet publié par le marché. Le carnet comporte deux colonnes : sous la colonne *Bid*, la quantité d'actif disponible à la vente pour chaque prix ; sous la colonne *Ask*, la quantité d'actif disponible à l'achat.

FTE.PA					
Bid				Ask	
Prix	Quantité disponible			Prix	Quantité disponible
12,86	1548			12,89	769
12,85	3720			12,90	1234
12,83	2354			12,91	2345
12,82	2780			12,95	876

FIGURE 1 – Carnet d'ordres fictif pour l'action France Télécom

Lorsqu'un prix d'achat et un prix de vente sont égaux, le marché exécute immédiatement la transaction ; les prix de la colonne *Ask* du carnet d'ordres sont donc toujours strictement supérieurs à ceux de la colonne *Bid*.

On peut représenter le carnet d'ordre par un diagramme quantité/prix. Chaque barre correspond à une ligne du carnet.

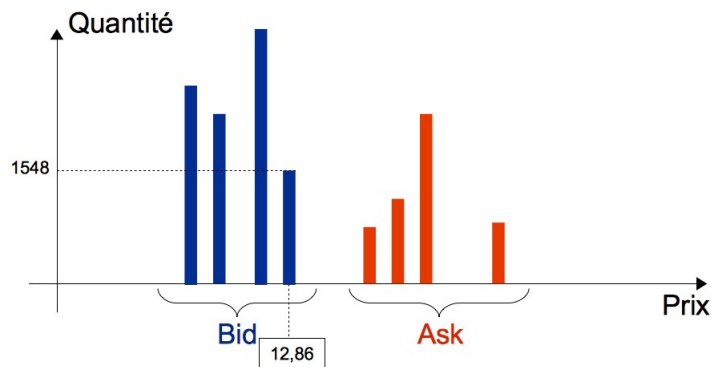


FIGURE 2 – Représentation en diagramme quantité/prix du carnet précédent

1.2 Order Flow Imbalance

Dans [CKS11], on ne considère que des données de "première limite", c'est-à-dire celles qui concernent le meilleur prix de vente (*bid*) et le meilleur prix d'achat (*ask*). On note ainsi P^B le *bid*, et q^B la quantité proposée à ce prix ; de même, on définit P^A et q^A .

Le prix de l'actif est le *mid-price* : $P = \frac{1}{2} \cdot (P^B + P^A)$. Echelle de temps discrète : entre les observations n et $n + 1$ a lieu un "événement de carnet d'ordres", ie une modification du carnet.

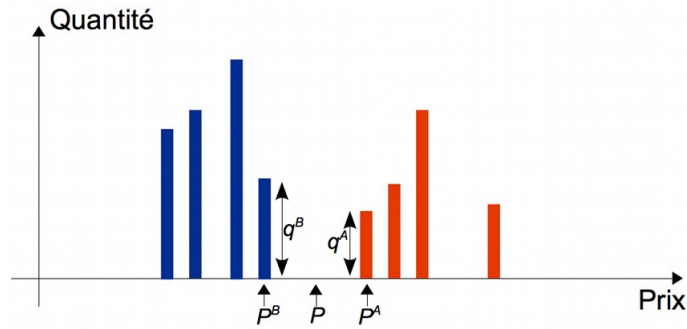


FIGURE 3 – Diagramme quantité/prix avec les notations

On définit e_n , contribution (algébrique) du n -ième événement aux quantités en première limite :

$$e_n := \mathbf{1}_{P_n^B \geq P_{n-1}^B} \cdot q_n^B - \mathbf{1}_{P_n^B \leq P_{n-1}^B} \cdot q_{n-1}^B - \left(\mathbf{1}_{P_n^A \leq P_{n-1}^A} \cdot q_n^A - \mathbf{1}_{P_n^A \geq P_{n-1}^A} \cdot q_{n-1}^A \right)$$

L'*order flow imbalance* est obtenue en faisant des sommes partielles (ici, 30 événements à la fois) de e_n :

$$OFI_k := \sum_{n=30(k-1)+1}^{n=30k} e_n$$

1.3 Relation entre variations de prix et OFI

Soit δ le pas de cotation ; on note $\Delta P_k = \frac{1}{\delta} (P_{30k} - P_{30(k-1)})$ la variation de *mid-price* entre les dates t_{k-1} et t_k , renormalisée par δ . Pour déterminer un lien entre $(\Delta P_k)_k$ et $(OFI_k)_k$, on se donne un modèle simplifié de carnet d'ordres, dans lequel :

1. le nombre d'unités d'actif à chaque niveau de prix en-dessous du *bid* et au-dessus de l'*ask* est constant, égal à D ;
2. les ordres "limite" et les annulations d'ordres ont lieu seulement au *bid* ou à l'*ask* (il n'y a pas d'ordre qui vient s'insérer entre ces deux prix).

Dans ce modèle, on trouve : $\Delta P \approx \frac{OFI}{2D}$. Empiriquement, on mène la régression :

$$\Delta P_k = \mu + \beta OFI_k + \varepsilon_k.$$

Directions de développement : examiner la qualité de la régression selon les périodes et les plates-formes de trading. S'intéresser aux phénomènes au-delà de la première limite.

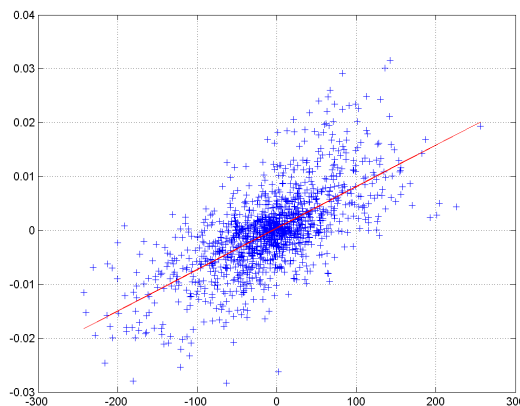


FIGURE 4 – $\Delta P = f(OFI)$ - Renault - 5 avril 2011 - Euronext Paris - $R^2 = 0.45$

2 Trading optimal

Un problème très important en *brokerage* est le "trading optimal". Si un *broker* veut vendre un grand nombre d'actions, doit-il mettre toutes ses actions en vente directement, ou fractionner son ordre ?

Une fois posé un modèle probabiliste d'évolution du prix de l'actif et d'impact des ordres du *broker*, le problème du trading optimal devient un problème d'optimisation. Problème : trouver des modélisations raisonnables.

2.1 Impact instantané : le modèle d'Almgren-Chriss

Modèle d'Almgren-Chriss ([AC00]), comme présenté par Gatheral ([Gat10]). Le *broker* peut trader à partir de la date $t = 0$. Le prix $(S_t)_{t \geq 0}$ de l'actif est décrit par :

$$S_t = S_0 + \sigma B_t$$

où (B_t) est un mouvement brownien et $\sigma > 0$ une constante déterministe.

On note X_t la quantité d'actif détenue à la date t par le *broker*; le processus (X_t) est la "stratégie de trading". X_0 est une donnée du problème, et on se donne un "horizon de trading" $T < \infty$: on considérera des stratégies vérifiant : $\forall t \geq T, X_t = 0$.

Dans cette partie, on se restreint aussi à des stratégies bornées et \mathcal{C}^1 , de dérivée notée \dot{X}_t . En particulier, on suppose qu'on trade de façon continue.

On suppose que l'impact des transactions effectuées par le *broker* est uniquement instantané, c'est-à-dire que (S_t) est inchangé lorsque le *broker* trade, mais que ses transactions se font à un prix $\tilde{S}_t = S_t + \eta \dot{X}_t$, où $\eta > 0$. Par exemple, si $\dot{X}_t > 0$, ie si on achète, $\tilde{S}_t > S_t$.

On cherche à minimiser le coût moyen, défini par :

$$\mathcal{C} := \mathbb{E} \left[\int_0^T \tilde{S}_t dX_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \tilde{S}_t \dot{X}_t dt \right].$$

La stratégie optimale $(x^*(t))_t$ trade à vitesse constante :

$$x^*(t) = X_0(1 - t/T) \text{ si } t \in [0, T]$$

On peut enrichir le modèle en tenant compte de l'aversion au risque du client.

2.2 Impact transient : le modèle de Gatheral

On présente maintenant un cadre plus ambitieux pour le problème du trading optimal, développé dans [GSS10], avec un modèle plus général d'évolution du prix de l'actif en l'absence d'actions du *broker*, un impact des ordres de celui-ci sur le prix qui peut se prolonger dans le temps, et des stratégies de trading qui peuvent être discontinues (ce qui correspond mieux à la réalité).

2.2.1 Modélisation : prix de l'actif et impact du trading

En l'absence d'ordres du *broker*, le prix $(S_t^0)_t$ de l'actif considéré est une martingale continue.

Lorsque le *broker* applique sa stratégie de trading (X_t) , le prix de marché devient :

$$S_t = S_t^0 + \int_{0 \leq s < t} G(t-s) dX_s$$

où $G : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable : le *noyau d'impact*. On suppose que G est borné et admet une limite à droite en 0, notée $G(0)$.

Soit \mathcal{S}_X l'ensemble des sauts de X . Le coût moyen de trading est :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T S_t dX_t + \frac{G(0)}{2} \cdot \sum_{t \in \mathcal{S}_X} (\Delta X_t)^2 \right] = -S_0^0 X_0 + \frac{1}{2} \mathbb{E}[\mathcal{C}(X)]$$

où $\mathcal{C}(X) := \iint G(|t-s|) dX_t dX_s$.

Avant de s'intéresser à la minimisation du coût de trading, on doit poser des conditions sur G pour que le modèle ne soit pas aberrant.

Définition 1 – Une *manipulation de cours* est une stratégie (X_t) telle que :

1. $X_0 = 0$
2. l'espérance du coût de trading soit < 0 .

Si le modèle admet des manipulations de cours, il est réputé aberrant. On se restreint donc aux noyaux G (définis) positifs, c'est-à-dire ceux pour lesquels la forme \mathcal{C} est (définie) positive. On a différentes conditions suffisantes de positivité, notamment :

Proposition 1 – *Tout noyau G borné, convexe, décroissant et non constant est défini positif.*

2.2.2 Caractérisation des stratégies optimales

Le problème est déterministe : minimiser $\mathcal{C}(X)$. Sur quel ensemble ? Pour $\mathbb{T} \subset [0, T]$, on pose

$$\mathcal{X}(x, \mathbb{T}) := \{X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid X, X_0 = x, \text{supp}(dX) \subseteq \mathbb{T}\}$$

X , fonction déterministe, est une *stratégie optimale* si $X \in \underset{\mathcal{X}(x, \mathbb{T})}{\text{argmin}} \mathcal{C}$.

Proposition 2 – *Si G est défini positif, $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ contient au plus une stratégie optimale.*

On dispose aussi d'une caractérisation des stratégies optimales :

Théorème 1 – *G est supposé positif. Soit $X^* \in \mathcal{X}(x, \mathbb{T})$. Alors $X^* \in \underset{\mathcal{X}(x, \mathbb{T})}{\text{argmin}} \mathcal{C}$ ssi :*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}, \int G(|t-s|) dX_s^* = \lambda.$$

Dans ce cas, $\mathcal{C}(X^*) = -\lambda x$.

Exemples

1. Si G est constant, $G = 1$, alors G est positif, mais pas strictement positif ($\mathcal{C}(X) = 0$ dès que $X_0 = 0$). Toutes les stratégies de $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ sont optimales, de coût $\mathcal{C}(X) = x^2$.
2. Si $G : t \mapsto e^{-\rho t}$ avec $\rho > 0$, G est borné, convexe et strictement décroissant, donc défini positif d'après la proposition 3. [OW05] donne la solution optimale de $\mathcal{X}(x, [0, T])$.

2.2.3 Existence d'une stratégie optimale

On s'intéresse d'abord au cas où G est défini positif et \mathbb{T} fini :

$$\mathbb{T} = \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Proposition 3 – *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ contient exactement une stratégie optimale.*

Quand \mathbb{T} est fini, la solution optimale, à X_0 donné, se calcule grâce à une inversion de matrice.

Proposition 4 – *\mathbb{T} fini. Supposons G borné, convexe, décroissant et non constant. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la stratégie optimale dans $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ est monotone.*

C'est rassurant : si, par exemple, on veut vendre des actions, on ne commence pas par en acheter.

Cessons de supposer \mathbb{T} fini. On a vu qu'à x donné, il y avait au plus une solution optimale dans $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$. En revanche, l'existence d'une telle solution n'est pas toujours assurée dès que \mathbb{T} n'est pas fini. Un exemple de non-existence :

Théorème 2 – Soit G défini par $G(|x|) = \int e^{ixz} d\mu(z)$, avec μ mesure borélienne finie. Si $\text{supp}(\mu)$ n'est pas discret, et si μ admet un moment exponentiel, ie :

$$\exists \varepsilon > 0, \int e^{\varepsilon x} d\mu(x) < \infty$$

alors, dès que $x \neq 0$ et \mathbb{T} infini, $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ n'admet pas de solution optimale.

Exemple – si $G(t) = e^{-\rho t^2}$, le théorème s'applique puisque G est, à des constantes près, sa propre transformée de Fourier (et que $\int e^x e^{-x^2} dx < \infty$). En particulier, si $x \neq 0$, on n'a pas de solution optimale dans $\mathcal{X}(x, [0, T])$.

On sait qu'en revanche, le problème a une unique solution dans $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ lorsque \mathbb{T} est fini, et que celle-ci s'obtient par un calcul matriciel. On peut prendre $\mathbb{T} = \{0, T/N, 2T/N, \dots, T\}$ et tracer les sauts de la solution X^{*N} associée. On reprend les graphes présentés dans [ASS09].

Les solutions n'ont pas de sens :

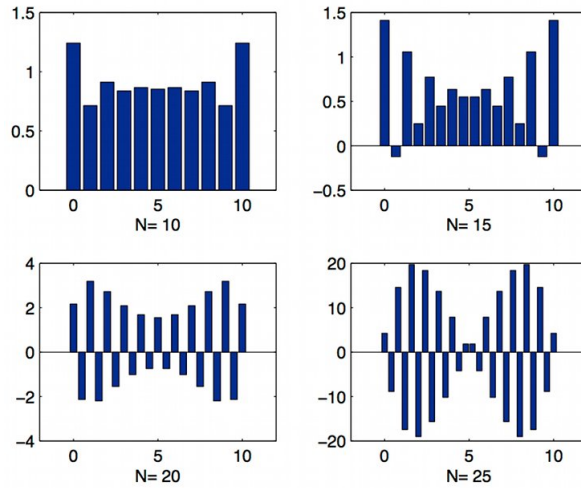


FIGURE 5 – Sauts des solutions optimales pour $G(t) = e^{-t^2}$, $T = 10$, $X_0 = 10$ et $N \in \{10, 15, 20, 25\}$

La monotonie des solutions et l'existence de stratégies optimales pour tous x et \mathbb{T} sont deux propriétés de G qui sont liées. C'est ce qu'illustrent le théorème suivant et (surtout) sa démonstration.

Théorème 3 – On suppose G borné, convexe, décroissant et non constant. Alors pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{T} \subseteq [0, T]$ fermé, $\mathcal{X}(x, \mathbb{T})$ contient une unique stratégie optimale, et celle-ci est monotone.

Exemple – Lorsque $G(t) = e^{-\rho t}$, $\rho > 0$, le théorème s'applique.

2.2.4 Conclusion

On a dégagé diverses conditions sur G qui évitent au modèle d'impact d'être trop aberrant. Une bonne classe de noyaux est formée des noyaux bornés, convexes, décroissants et non constants.

Directions de développement : adéquation du modèle à la réalité ; notamment, calibrage de G à l'aide de données réelles de trading. Voir [Dan11].

3 Equilibres de Nash et jeux à champ moyen

Dans cette partie, on s'intéresse aux équilibres de Nash pour des jeux avec beaucoup de joueurs, et à des systèmes d'équations différentielles associés (équations MFG, "Mean Field Games").

Le but est d'obtenir un modèle d'évolution du prix sur un marché financier, les joueurs étant les acteurs du marché (les traders), mais on s'attarde surtout sur certaines propriétés générales des équilibres de Nash et des équations MFG.

3.1 Equilibres de Nash et équation de champ moyen

3.1.1 Equilibres de Nash : définitions et premiers exemples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient S_1, \dots, S_n des espaces métriques compacts, et J_1, \dots, J_n des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $\prod_{j=1}^n S_j$.

Définition 2 – $(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \in \prod_{j=1}^n S_j$ est un équilibre de Nash pour $(S_j, J_j)_{j=1, \dots, n}$ si :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall s_k \in S_k, J_k(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \leq J_k(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{k-1}, s_k, \bar{s}_{k+1}, \dots, \bar{s}_n).$$

La notion d'équilibre de Nash doit se comprendre en termes de jeux à un tour : on a n joueurs ; le k -ième d'entre eux peut choisir son action dans l'espace d'états S_k qui lui est associé. Lorsque les joueurs jouent respectivement (s_1, \dots, s_n) , le coût pour le joueur k est $J_k(s_1, \dots, s_n)$.

$(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ est alors un équilibre de Nash si chaque joueur a minimisé son coût, sachant ce que tous les autres joueurs ont choisi.

Avec $n = 2$ et $|S_1| = |S_2| = 2$. Dans ce cas, on peut représenter fonctions de coût sous la forme d'un tableau :

$(J_1(s_1, s_2), J_2(s_1, s_2))$	$(J_1(s_1, s'_2), J_2(s_1, s'_2))$
$(J_1(s'_1, s_2), J_2(s'_1, s_2))$	$(J_1(s'_1, s'_2), J_2(s'_1, s'_2))$

Exemple – Dilemme du prisonnier :

(1, 1)	(3, 0)
(0, 3)	(2, 2)

 Le jeu admet exactement un équilibre de Nash, qui correspond à la case en-bas à droite.

3.1.2 Stratégies mixtes

Supposons que, pour tout k , le joueur k choisisse son action au hasard dans S_k , avec une probabilité $\pi_k \in \mathcal{P}(S_k)$. Alors l'espérance du coût pour le joueur k est :

$$J_k(\pi_1, \dots, \pi_n) := \int_{\prod_{j=1}^n S_j} J_k(s_1, \dots, s_n) d\pi_1(s_1) \dots d\pi_n(s_n).$$

On parle de "stratégie mixte" des joueurs, et cela donne lieu à la définition suivante :

Définition 3 – $(\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n) \in \prod_{j=1}^n \mathcal{P}(S_j)$ est un équilibre de Nash mixte pour $(S_j, J_j)_{j=1, \dots, n}$ si :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall \pi_k \in \mathcal{P}(S_k), J_k(\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n) \leq J_k(\pi_k, (\bar{\pi}_j)_{j \neq k}).$$

Exemple – Matching pennies :

(0, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(0, 1)

 Il y a un équilibre de Nash mixte : $\left(\frac{1}{2}(\delta_{s_1} + \delta_{s'_1}), \frac{1}{2}(\delta_{s_2} + \delta_{s'_2}) \right)$.
Pas d'équilibre de Nash "pur".

Théorème 4 (Nash, Glicksberg) – Si les (S_j) sont compacts et les (J_j) continues, le jeu $(S_j, J_j)_{j=1,\dots,n}$ admet au moins un équilibre mixte.

Définition 4 – Le jeu $(S_j, J_j)_{j=1,\dots,n}$ est dit *symétrique* si $S_1 = \dots = S_n = S$ et :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall (s_1, \dots, s_n) \in S^n, J_k(s_1, \dots, s_n) = J_{\sigma(k)}(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}).$$

Théorème 5 – Si le jeu est symétrique, il admet un équilibre de Nash mixte de la forme $(\bar{\pi}, \dots, \bar{\pi})$, où $\pi \in \mathcal{P}(S)$.

3.1.3 Limites lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini

On veut maintenant s'intéresser à des équilibres de Nash pour des jeux symétriques, avec un nombre de joueurs qui tend vers l'infini. On a en tête la modélisation d'interactions d'agents économiques qui sont indiscernables (d'où la symétrie), ne communiquent pas entre eux (d'où le recours aux équilibres de Nash), et sont nombreux.

Q l'espace d'états commun des joueurs (Q espace métrique compact), n le nombre de joueurs, $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q^n$ leur vecteur d'états. Jeu symétrique : on n'a besoin de spécifier que la fonction de coût F_1^n du joueur 1. On suppose F_1^n de la forme :

$$F_1^n(x) = F\left(x_1, \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq 1} \delta_{x_j}\right)$$

où $F : Q \times \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Si $x^n \in Q^n$, on note $x^n = (x_1^n, \dots, x_n^n)$, et $m(x^n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i^n} \in \mathcal{P}(Q)$.

Théorème 6 – On suppose que pour tout $n \geq 2$, le n -ième jeu admet un équilibre de Nash \bar{x}^n . Soit $\bar{m}^n := m(\bar{x}^n)$. Alors $(\bar{m}^n)_n$ a des sous-suites convergentes, et toute valeur d'adhérence \bar{m} de $(\bar{m}^n)_n$ vérifie l'équation :

$$(MFE) : \int_Q F(y, \bar{m}) d\bar{m}(y) = \inf_{m \in \mathcal{P}(Q)} \int_Q F(y, \bar{m}) dm(y).$$

Comme les jeux sont symétriques, et d'après le théorème d'existence plus haut, on dispose, pour tout $n \geq 2$, d'une mesure $\bar{\pi}^n \in \mathcal{P}(Q)$ telle que $(\bar{\pi}^n, \dots, \bar{\pi}^n)$ soit un équilibre du n -ième jeu.

Théorème 7 – On suppose $F : Q \times \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Alors toute valeur d'adhérence \bar{m} de $(\bar{\pi}^n)_n$ vérifie l'équation (MFE).

Remarques

1. $(\bar{\pi}^n)_n$ a des valeurs d'adhérence, par compacité de $\mathcal{P}(Q)$. Le théorème prouve donc en particulier l'existence d'une solution à l'équation (MFE). Le problème de l'unicité des solutions se pose en présence d'une fonction F explicite.
2. En vertu des deux derniers théorèmes, si \bar{m} est solution de (MFE), si n est grand et sous réserve d'unicités, on peut considérer \bar{m} comme une approximation de la stratégie aléatoire optimale de chacun des joueurs.

3.1.4 Illustration : heure de début d'une réunion

Pour illustrer l'emploi de l'équation (MFE), on reprend un exemple développé dans [LLG10].

On cherche à savoir à quelle heure va commencer une réunion rassemblant un grand nombre de participants, sachant que le début de la réunion est programmé à la date T_1 , mais que la date effective de début T_2 dépend des dates d'arrivée des participants (on ne commence pas la réunion si personne n'est arrivé, par exemple).

La date d'arrivée de chaque participant suit une loi commune $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On écrit : $T_2 = G(m)$.

$F(t, m)$ est le coût d'une arrivée à t pour un participant donné, sachant que l'ensemble des participants a des dates d'arrivées distribuées suivant m . On se donne $a, b, c > 0$ et on définit :

$$F(t, m) = a(t - T_1)_+ + b(t - T_2)_+ + c(T_2 - t)_+$$

$\bar{m} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est un "équilibre de Nash – champ moyen" si elle vérifie :

$$(MFE) : \int_{\mathbb{R}} F(y, \bar{m}) d\bar{m}(y) = \inf_{m \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}} F(y, m) dm(y)$$

où Γ est défini par $\Gamma = \{\mathcal{N}(t_0, 1)\}_{t_0 \in \mathbb{R}}$: les participants visent une date d'arrivée t_0 mais arrivent avec un décalage aléatoire distribué selon une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

L'équation MFE se réécrit comme un problème de point fixe sur t_0 , dont la solution exacte est, si on prend G de la forme $G : t_0 \mapsto t_0 + \Phi^{-1}(\theta)$, où $\theta \in]0, 1[$ (la réunion débute lorsque une fraction θ des invités est arrivé) :

$$\bar{t}_0 = T_1 + \Phi^{-1}\left(\frac{\theta c - (1 - \theta)b}{a}\right).$$

On peut donner des valeurs extrêmes aux paramètres pour vérifier la cohérence du résultat :

- si $a \rightarrow +\infty$, $\bar{t}_0 \rightarrow -\infty$: l'agent veut absolument arriver avant T_1 ;
- si $\theta \rightarrow 1$, le paramètre b peut être pris nul, puisque chaque agent sait qu'on l'attendra avant de commencer la réunion.

3.2 Equations MFG

3.2.1 Enoncé du problème

On s'intéresse maintenant à une famille de systèmes d'équations différentielles : les équations *Mean Field Games* d'ordre 2. On part des équations et on revient ensuite aux équilibres de Nash. Le chemin inverse (plus naturel) peut être suivi : partir d'équilibres de Nash pour des joueurs dont l'état est un processus stochastique contrôlé par eux, pour obtenir un système d'équations différentielles ; c'est ce que font Lasry et Lions (essentiellement sans preuves) dans [LL07].

$T > 0, d \in \mathbb{N}^*$. \mathbb{R}^d est muni de sa norme euclidienne $|\cdot|$. Le système d'équations considéré s'écrit :

$$(MFG) : \begin{cases} (1) & -\partial_t u - \Delta u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = F(x, m) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times]0, T[\\ (2) & \partial_t m - \Delta m - \text{div}(m \cdot \nabla u) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \times]0, T[\\ (3) & m(0) = m_0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \\ (4) & u(\cdot, T) = G(\cdot, m(T)) & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

On suppose F et G bornées et lipschitziennes (en un certain sens), et m_0 à densité höldérienne et admettant un moment d'ordre 2.

Théorème 8 – *Le système (MFG) admet des solutions classiques.*

Notation : \mathcal{P}_1 est l'ensemble des probabilités sur \mathbb{R}^d qui admettent un moment d'ordre 1.

On définit aussi la distance $d_1 : (\mu, \nu) \mapsto \sup \left\{ \int f d(\mu - \nu), f \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}^d) \text{ 1-lipschitzienne} \right\}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

3.2.2 Existence de solutions

On s'intéresse d'abord à l'équation portant sur m (équation de Fokker-Planck). Soit $b : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs, on considère :

$$(FP) : \begin{cases} (1) \partial_t m - \Delta m - \operatorname{div}(mb) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \times]0, T[\\ (2) m(0) = m_0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

On suppose b continu sur $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, lipschitzien en x uniformément en t , et borné.

On peut définir des solutions faibles de (FP).

Définition 5 – On note $m \in L^1([0, T], \mathcal{P}_1)$ si $m : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est telle que :

1. $\forall t \in [0, T], m(t) \in \mathcal{P}_1$;
2. $\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x| dm(t)(x) \right) dt < \infty$.

La définition suivante des solutions faibles s'obtient par intégrations par parties après multiplication d'une solution classique par une fonction test :

Définition 6 – $m \in L^1([0, T], \mathcal{P}_1)$ est dite solution faible de (FP) si elle vérifie : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T])$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) dm_0(x) + \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(x, t) + \Delta \varphi(x, t) + \langle \nabla \varphi(x, t), b(x, t) \rangle) dm(t)(x) \right) dt = 0.$$

On introduit une solution faible de (FP) qui s'interprète de manière probabiliste. Soit donc un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, B_t un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien de dimension d et $Z_0 \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. On considère l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} (1) dX_t = b(X_t, t)dt + \sqrt{2}dB_t \\ (2) X_0 = Z_0 \end{cases}$$

D'après [Gal10], th. 6.1 et 6.3, les hypothèses sur b assurent l'existence d'une unique solution (X_t) .

Proposition 5 – Si $\mathcal{L}(Z_0) = m_0$, alors $m(t) := \mathcal{L}(X_t)$ est une solution faible de (FP).

L'idée est qu'on peut prouver certaines majorations sur cette solution, ce qui fournit des majorations sur la solution faible de (FP) s'il y a unicité.

Pour obtenir l'existence de solutions au problème (MFG), on met en évidence un problème de point fixe. Pour $C_1 > 0$ (constante à choisir plus tard), on pose :

$$\mathcal{G} := \left\{ (\mu_t) \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}_1) \mid \sup_{s \neq t} \frac{d_1(\mu_s, \mu_t)}{\sqrt{|t-s|}} \leq C_1 \text{ et } \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu(t)(x) \leq C_1 \right\}$$

On peut montrer que \mathcal{G} est convexe et compact. On veut définir une application $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, dont un point fixe donnera une solution à l'équation (MFG). Soit donc $\mu \in \mathcal{G}$, on s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} (1) -\partial_t u - \Delta u + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 = F(x, \mu_t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times]0, T[\\ (2) u(\cdot, T) = G(\cdot, \mu_T) & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

On montre ([Car10]) que l'équation admet une unique solution classique u . On considère maintenant l'équation de Fokker-Planck :

$$\begin{cases} (1) \partial_t m - \Delta m - \operatorname{div}(m \cdot \nabla u) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \times]0, T[\\ (2) m(0) = m_0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

[Car10] montre que cette dernière équation admet une unique solution m dans $L^1([0, T], \mathcal{P}_1)$, et que m est \mathcal{C}^2 . L'unicité donne $m(t) = \mathcal{L}(X_t)$, pour X_t vérifiant l'EDS ci-dessus. Cette égalité donne des majorations sur m ; si on définit ψ sur \mathcal{G} par $\psi(\mu) = m$, on obtient, en choisissant correctement C_1 , que ψ est bien à valeurs dans \mathcal{G} .

On montre aussi que ψ est continue. Le théorème du point fixe de Schauder ([GT98]) donne alors un point fixe m de ψ . Si u est la fonction associée à m dans la construction de ψ , (u, m) est une solution de (MFG).

3.2.3 Application aux jeux avec contrôle optimal

Soit (u, m) une solution du système (MFG). On considère le problème de contrôle optimal

$$\inf_{\alpha} \mathcal{J}(\alpha) \text{ avec } \mathcal{J}(\alpha) := \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\frac{1}{2} |\alpha_s|^2 + F(X_s, m(s)) \right) ds + G(X_T, m(T)) \right]$$

et :

$$\begin{cases} dX_t = \alpha_t dt + \sqrt{2} dB_t \\ X_0 \sim m_0 \end{cases}$$

(B_t) est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien en dimension d , et on se restreint à des contrôles (α_t) (\mathcal{F}_t) -adaptés.

En terme de jeux, il faut voir ce problème comme celui d'un joueur "générique", d'état X_t à la date t et qui cherche à se positionner optimalement par rapport à la densité de joueurs m .

Proposition 6 – On définit $\tilde{\alpha}_t := -\nabla u(X_t, t)$. C'est un contrôle optimal, et :

$$\mathcal{J}(\tilde{\alpha}) = \inf \mathcal{J}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x, 0) dm_0(x).$$

u est la fonction valeur du problème de contrôle optimal du joueur générique.

Remarque – On peut alors appliquer le paragraphe sur l'équation de Fokker-Planck, avec $b := -\nabla u$.

On obtient que $\mathcal{L}(X_t)$ est solution faible de (FP). Soit, par unicité, $\mathcal{L}(X_t) = m(t)$: en anticipant la densité m , les joueurs reconstituent cette densité par le choix du contrôle $\tilde{\alpha}$.

On veut maintenant dire que le contrôle $\tilde{\alpha}_t = -\nabla u(X_t, t)$ est presque optimal dans le cas d'un nombre fini (assez grand) de joueurs.

Soient donc $n \geq 2$, $(X_0^i)_{i=1, \dots, n}$ des variables \mathcal{F}_0 -mesurables i.i.d. de loi m_0 , $(B_t^i)_{i=1, \dots, n}$ des (\mathcal{F}_t) -mouvements browniens en dimension d indépendants. Pour $i = 1, \dots, n$, on définit la filtration $(\mathcal{F}_t^i)_t$ par :

$$\mathcal{F}_t^i := \sigma(X_0^i, (B_s^i)_{s \leq t}).$$

L'état du joueur i à la date t est X_t^i , avec l'équation de contrôle stochastique :

$$dX_t^i = \alpha_t^i dt + \sqrt{2} dB_t^i.$$

où α^i est (\mathcal{F}_t) -adapté. Le coût du joueur i est défini par :

$$\mathcal{J}_i^n(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\frac{1}{2} |\alpha_s^i|^2 + F \left(X_s^i, \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_s^j} \right) \right) ds + G \left(X_T^i, \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_T^j} \right) \right]$$

On note encore $\tilde{\alpha}_t^i$ le contrôle $-\nabla u(X_t^i, t)$, et (\tilde{X}_t^i) la solution de l'EDS associée à $\tilde{\alpha}^i$, ie de :

$$d\tilde{X}_t^i = -\nabla u(\tilde{X}_t^i, t) dt + \sqrt{2} dB_t^i.$$

Théorème 9 – Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour n assez grand, $(\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^n)$ est un ε -équilibre de Nash pour le jeu décrit ; ie :

$$\exists N_0, \forall n \geq N_0, \forall \alpha (\mathcal{F}_t)\text{-adapté}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathcal{J}_i^n((\tilde{\alpha}^j)) \leq \mathcal{J}_i^n(\alpha, (\tilde{\alpha}^j)_{j \neq i}) + \varepsilon.$$

3.2.4 Processus de formation des prix et simulation de carnets d'ordres

Avec ces outils, [LL07] étudie une EDP décrivant l'évolution d'un carnet d'ordres "continu". L'équation a été reprise par l'équipe de recherche quantitative de CA Cheuvreux, qui l'a compliquée en enrichissant les stratégies des traders et en ajoutant un terme de bruit stochastique. On peut alors simuler des solutions, c'est-à-dire des évolutions fictives de carnets d'ordres qui permettent de tester des automates de trading. Ceci est expliqué dans [LGR11].

Références

- [AC00] R. ALMGREN et N. CHRISS : Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3:5 – 39, 2000.
- [ASS09] A. ALFONSI, A. SCHIED et A. SLYNKO : Order book resilience, price manipulation, and the positive portfolio problem. *SSRN*, 2009.
- [Car10] P. CARDALIAGUET : Notes on Mean Field Games (from P.-L. Lions's lectures at Collège de France). <http://www.ceremade.dauphine.fr/~cardalia/MFG100629.pdf>, 2010.
- [CKS11] R. CONT, A. KUKANOV et S. STOIKOV : The Price Impact of Order Book Events. *arXiv*, 2011.
- [Dan11] N. M. DANG : *Contrôle stochastique appliqué à la finance*. Thèse de doctorat, Université Paris-Dauphine, 2011.
- [Gal10] J.-F. Le GALL : Calcul stochastique et processus de Markov – Notes de cours de M2. <http://www.math.u-psud.fr/~jflgall/M2-10.pdf>, 2010.
- [Gat10] J. GATHERAL : Optimal order execution. http://www.math.nyu.edu/fellows_fin_math/gatheral/PetitDejeuner2010.pdf, 2010.
- [GSS10] J. GATHERAL, A. SCHIED et A. SLYNKO : Transient linear price impact and Fredholm integral equations. *SSRN*, 2010.
- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL : *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : Topologie et analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1998.
- [Gué09] O. GUÉANT : A reference case for mean field games models. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 92(3):276 – 294, 2009.
- [KS91] I. KARATZAS et S. E. SHREVE : *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd Edition*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.
- [LGR11] C.-A. LEHALLE, O. GUÉANT et J. RAZAFINIMANANA : High-Frequency Simulations of an Order Book : a Two-Scale Approach. *In Econophysics of Order-driven Markets*, pages 73 – 92. Springer, 2011.
- [LL07] J.-M. LASRY et P.-L. LIONS : Mean Field Games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2:229 – 260, 2007.
- [LLG10] J.-M. LASRY, P.-L. LIONS et O. GUÉANT : Mean Field Games and Applications. *In Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance*. Springer, 2010.
- [OW05] A. OBIZHAEVA et J. WANG : Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics. *SSRN*, 2005.
- [Pha07] H. PHAM : *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance*. Mathématiques et Applications. Springer, 2007.