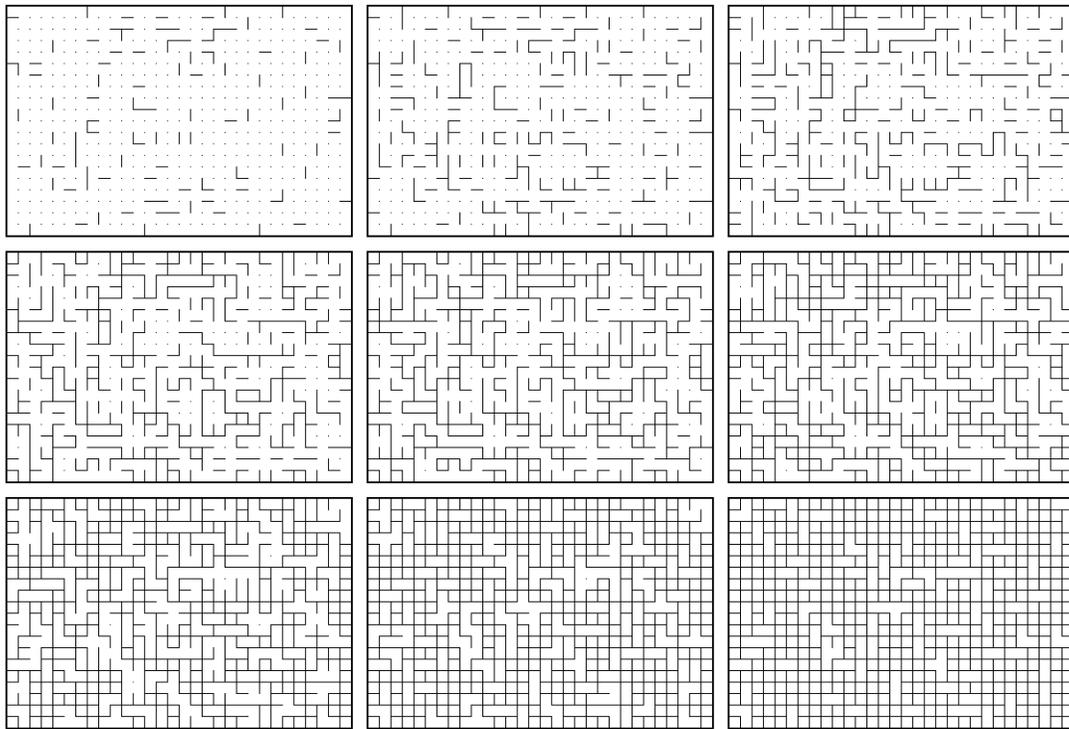


Peut-on faire du café ?

Pierre Nolin et Pierre-Yves Stingshé
Exposé proposé par Vincent Beffara



Simulation de percolation sur un rectangle 20×30 .
La valeur de p varie de 0,1 à 0,9, en augmentant de 0,1 à chaque étape.

Introduction

Derrière ce titre énigmatique se cache une interrogation célèbre de physique statistique : la **percolation**. On cherche ici à modéliser des milieux aléatoires, comme celui constitué de grains de café que l'eau doit traverser pour atteindre le filtre.

En tant que problème mathématique, la percolation est assez récente puisqu'elle date des années 1950, mais elle a connu de nombreux développements depuis. Nous limiterons ici notre étude au premier cas qui est intéressant : celui de la percolation par arêtes sur le réseau cubique \mathbb{Z}^d , où les arêtes sont déclarées ouvertes avec une certaine probabilité p , et fermées sinon, indépendamment les unes des autres (voir la simulation sur la première page). Ce modèle est dû à Broadbent et Hammersley (1957) : les arêtes correspondent alors aux passages que les gouttes d'eau peuvent emprunter. Notons qu'on pourrait aussi envisager de contrôler les sommets plutôt que les arêtes : c'est la percolation par site, que nous n'étudierons pas ici et qui est en fait un problème plus général.

Même avec ce modèle en apparence simple, de nombreuses questions surgissent. On peut par exemple se demander si dans le graphe obtenu il existe une composante connexe infinie, et si dans ce cas elle est unique, minorer la probabilité de traverser un rectangle dont on fait tendre la taille vers l'infini. . . Ici, nous allons présenter quelques résultats de base, notamment l'existence d'une transition de phase et le théorème de Russo-Seymour-Welsh, qui montre qu'il existe avec une probabilité significative des circuits dans un anneau en dimension $d = 2$.

Table des matières

1 Définitions et premiers résultats	3
1.1 Notions de base	3
1.2 Le phénomène critique	4
2 Quelques outils indispensables	8
2.1 Variables aléatoires monotones	8
2.2 L'inégalité FKG	9
2.3 L'inégalité BK	11
2.4 La formule de Russo	14
3 Circuits dans un anneau	17
3.1 Position du problème	17
3.2 Le théorème de Russo-Seymour-Welsh	19
3.3 Applications	27

1 Définitions et premiers résultats

1.1 Notions de base

Dans cette section, nous allons définir les principales notions utilisées dans le cadre de la percolation sur \mathbb{Z}^d . Pour commencer, définissons le graphe sur lequel nous allons travailler.

Définition 1.1. On note \mathbb{L}^d le graphe associé à \mathbb{Z}^d . L'ensemble de ses sommets est \mathbb{Z}^d , et celui de ses arêtes, noté \mathbb{E}^d , relie les points distants de 1. On écrira $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. On note $\langle x, y \rangle$ l'arête reliant x à y , quand ces points sont adjacents.

Introduisons maintenant les probabilités.

Définition 1.2. Soit $p \in [0, 1]$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ l'espace de probabilité défini par : $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$, \mathcal{F} est la tribu produit (engendrée par les cylindres finis de Ω), et

$$P_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$$

où μ_e est la mesure de Bernoulli sur $\{0, 1\}$, donnée par :

$$\mu_e(\omega(e) = 0) = q, \quad \mu_e(\omega(e) = 1) = p \quad \text{avec } p + q = 1$$

On peut interpréter un élément $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^d\}$ comme une configuration de la percolation sur le graphe \mathbb{L}^d , une arête e étant dite ouverte si $\omega(e) = 1$, et fermée sinon. Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ ainsi défini, chaque arête a une probabilité p d'être ouverte, et q d'être fermée, indépendamment des autres. Dans la suite, on notera E_p l'espérance sous la probabilité P_p , et pour $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A .

Pour simuler un processus de percolation sur \mathbb{L}^d , on peut se donner une famille $(X(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0, 1]$; le vecteur aléatoire η_p défini par :

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(e) < p \\ 0 & \text{si } X(e) \geq p \end{cases}$$

réalise alors une configuration de Ω , chaque arête étant effectivement ouverte avec une probabilité p .

Définition 1.3. On définit sur Ω la relation d'ordre \leq par :

$$\omega_1 \leq \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1(e) \leq \omega_2(e) \quad \forall e \in \mathbb{E}^d$$

Elle peut se traduire en termes d'inclusions d'ensembles :

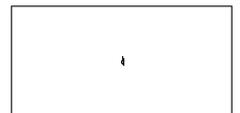
$$\omega_1 \leq \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad K(\omega_1) \subseteq K(\omega_2)$$

où $K(\omega) = \{e \in \mathbb{E}^d : \omega(e) = 1\}$. Cette relation d'ordre n'est évidemment pas totale. L'application qui associe $K(\omega)$ à ω est une bijection de Ω dans $\mathcal{P}(\mathbb{E}^d)$.

Pour la simulation de percolation décrite précédemment, on a l'inégalité

$$\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2} \quad \text{si } p_1 \leq p_2,$$

elle nous fournit donc un couplage utile entre les différentes valeurs de p .



Définition 1.4. Un **chemin** de \mathbb{L}^d est une suite $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ de points x_i et d'arêtes distinctes $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Un tel chemin est dit de longueur n , et il relie x_0 à x_n . Il est **ouvert** si toutes les arêtes qui le composent sont ouvertes, **fermé** si toutes ses arêtes sont fermées.

Les chemins que nous considérons sont donc par définition constitués d'arêtes disjointes.

Définition 1.5. Un **circuit** dans \mathbb{L}^d est une suite $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n, e_n, x_0$ où $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ est un chemin, et $e_n = \langle x_n, x_0 \rangle$. Un tel circuit est de longueur $n + 1$. Il est dit **ouvert** si toutes les arêtes qui le composent sont ouvertes, **fermé** si toutes ses arêtes sont fermées.

Définition 1.6. On appelle **domaine ouvert** une composante connexe du sous-graphe aléatoire de \mathbb{L}^d contenant \mathbb{Z}^d et les arêtes ouvertes. On note $C(x)$ le domaine ouvert contenant le point x .

Les points de $C(x)$ sont les points de \mathbb{Z}^d que l'on peut relier à x par un chemin ouvert, et les arêtes de $C(x)$ sont les arêtes ouvertes joignant les points de $C(x)$. Dans le cas de \mathbb{L}^d , il y a invariance par translation de l'ensemble des points, \mathbb{Z}^d , et de la mesure P_p . La distribution de $C(x)$ ne dépend donc pas du point considéré, et on va s'intéresser dans la suite à $C(0)$, qu'on notera simplement C .

1.2 Le phénomène critique

Définition 1.7. On définit la probabilité de percolation par

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty).$$

Elle peut également s'exprimer sous la forme

$$\theta(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_p(|C| = n).$$

On voit facilement que : $|C| = \infty$ si et seulement si il existe une suite infinie x_0, x_1, x_2, \dots de points distincts avec $x_0 = 0$ et $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ ouverte pour tout i . On a $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$, et θ est une fonction croissante de p . En effet, il suffit d'utiliser le couplage introduit précédemment : si $p_1 \leq p_2$, on a $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$, d'où $P(\eta_{p_1} \in \{|C| = \infty\}) \leq P(\eta_{p_2} \in \{|C| = \infty\})$, c'est-à-dire $P_{p_1}(|C| = \infty) \leq P_{p_2}(|C| = \infty)$.

Le phénomène caractéristique de la percolation est l'existence d'une valeur critique p_c de p pour laquelle on observe une transition de phase :

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si } p < p_c \\ > 0 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

$p_c(d)$ est la probabilité critique, elle est définie formellement par :

$$p_c(d) = \sup \{p : \theta(p) = 0\}.$$

Dans le cas $d = 1$, le problème est sans intérêt : en effet, $\theta(p) = 0$ dès que $p < 1$, donc $p_c(1) = 1$. Dans toute la suite, on s'intéresse au cas $d \geq 2$.

Comme on peut injecter \mathbb{L}^d dans \mathbb{L}^{d+1} par projection, l'origine de \mathbb{L}^{d+1} est contenue dans un domaine ouvert infini dès que l'origine de \mathbb{L}^d est contenue dans un domaine ouvert infini. On a donc l'inégalité suivante :

$$p_c(d+1) \leq p_c(d) \quad \text{pour } d \geq 1.$$

Le théorème suivant assure qu'il y a un phénomène critique non trivial en dimension supérieure ou égale à deux.

Théorème 1.1. Si $d \geq 2$, alors $0 < p_c(d) < 1$.

Démonstration. On sait que $p_c(d+1) \leq p_c(d)$ pour $d \geq 1$, donc il suffit de montrer que $p_c(d) > 0$ pour $d \geq 2$, et que $p_c(2) < 1$.

Prouvons d'abord $p_c(d) > 0$ pour $d \geq 2$, et pour cela que $\theta(p) = 0$ pour p assez petit. Notons $\sigma(n)$ le nombre de chemins de \mathbb{L}^d de longueur n d'origine 0, et $N(n)$ le nombre de chemins ouverts parmi ceux-ci. Chaque chemin de longueur n est ouvert avec une probabilité p^n , donc

$$E_p[N(n)] = p^n \sigma(n).$$

Si 0 est dans un domaine ouvert infini, il est l'origine de chemins de n'importe quelle longueur, donc

$$\theta(p) \leq P_p(N(n) \geq 1) \leq E_p[N(n)] = p^n \sigma(n) \quad \text{pour tout entier } n.$$

Introduisons $\lambda(d)$ la constante de connectivité du graphe :

$$\lambda(d) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(n)^{1/n}.$$

L'existence de cette limite découle d'un théorème classique sur les suites sous-additives. En effet, σ vérifie $\sigma(n+m) \leq \sigma(n)\sigma(m)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, un chemin de longueur $n+m$ s'obtenant en accolant un chemin de longueur n et un chemin de longueur m . La suite $(\ln \sigma(n))_n$ est donc sous-additive, ce qui entraîne que

$$(\ln \sigma(n))/n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Donc $\sigma(n)^{1/n}$ converge vers une constante $\lambda(d)$ positive. Comme $\sigma(n) \geq d^n$, en considérant les chemins dont chaque coordonnée est croissante, $\lambda(d) \geq d > 0$.

Par ailleurs, on a aussi $\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$: lorsqu'on parcourt un chemin partant de l'origine, on a $2d$ choix au départ, et moins de $2d-1$ à toutes les étapes suivantes (on ne peut pas utiliser l'arête que l'on vient d'emprunter). On en déduit que

$$\lambda(d) \leq 2d - 1.$$

En reprenant la majoration de $\theta(p)$, on obtient

$$\theta(p) \leq (p\lambda(d) + o(1))^n \rightarrow 0 \quad \text{pour } p\lambda(d) < 1$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Pour $p < \frac{1}{\lambda(d)}$, $\theta(p) = 0$, ce qui implique que $p_c(d) > 0$. Ceci conclut la première partie de la preuve. On a même démontré le résultat plus fort :

$$p_c(d) \geq \frac{1}{\lambda(d)}, \quad \text{avec } \lambda(d) \leq 2d - 1.$$

Prouvons maintenant que $p_c(2) < 1$. Il suffit pour cela de montrer que $\theta(p) > 0$ pour p assez proche de 1. Considérons le graphe dual de \mathbb{L}^2 . Il s'agit du réseau de sommets $\{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x \in \mathbb{Z}^2\}$, et d'arêtes les segments joignant deux sommets voisins. On l'obtient simplement en translatant le quadrillage initial de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Chaque arête de \mathbb{L}^2 croise une unique arête de son dual. Une arête du graphe dual est dite ouverte ou fermée selon qu'elle croise une arête respectivement ouverte ou fermée du graphe initial. On obtient ainsi un phénomène de percolation sur le graphe dual, chaque arête ayant encore une probabilité p d'être ouverte. La figure 1 illustre cette construction.



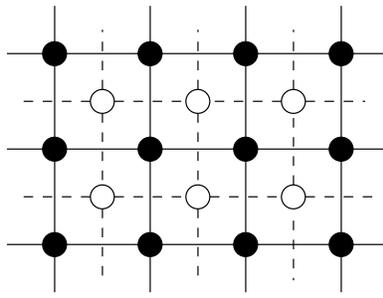


FIG. 1: Le graphe \mathbb{L}^2 avec son dual.

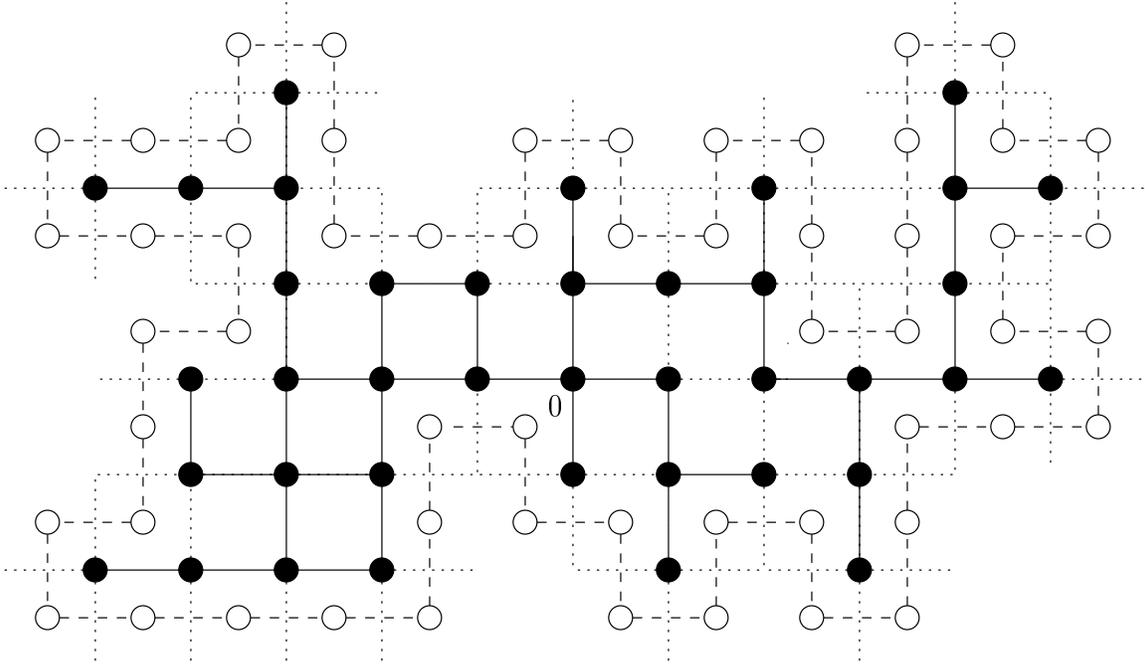


FIG. 2: Un domaine fini contenant l'origine, entouré par un circuit fermé du graphe dual.

Supposons maintenant que C est fini, et regardons sur la figure 2 ce que donne une telle situation : on voit que si l'on est dans ce cas, l'origine de \mathbb{L}^2 est à l'intérieur d'un circuit ouvert du graphe dual. On peut donc dire que $|C| < \infty$ si et seulement si l'origine de \mathbb{L}^2 est à l'intérieur d'un circuit ouvert du dual. Comptons maintenant le nombre de ces circuits. Soit $\rho(n)$ le nombre de circuits du dual de longueur n encerclant l'origine de \mathbb{L}^2 . Chacun de ces circuits passe par un point de la forme $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour un k avec $0 \leq k < n$: en effet, il passe forcément par un tel point avec $k > 0$ pour pouvoir être à droite de l'origine, et il ne peut passer par $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avec $k \geq n$ car dans ce cas, sa longueur serait au moins $2n$. Ainsi, un tel circuit contient un chemin de longueur $n - 1$ ayant tous ses sommets distincts partant d'un sommet $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Or, le nombre de ces chemins est au plus

$n\sigma(n-1)$, donc

$$\rho(n) \leq n\sigma(n-1).$$

Soit γ un circuit du dual contenant l'origine de \mathbb{L}^2 , et soit $M(n)$ le nombre de ces circuits de longueur n qui sont fermés. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ fermé}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n n\sigma(n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} qn(q\lambda(2) + o(1))^{n-1} \\ &< \infty \quad \text{si } q\lambda(2) < 1, \end{aligned}$$

où $q = 1 - p$, la sommation étant effectuée sur tous les circuits γ . On a donc

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ fermé}) \rightarrow 0 \quad \text{quand } q = 1 - p \downarrow 0$$

par un argument de convergence dominée, donc on peut trouver π satisfaisant $0 < \pi < 1$ tel que

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ fermé}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour } p > \pi.$$

D'après la remarque initiale, on a :

$$\begin{aligned} P_p(|C| = \infty) &= P_p(M(n) = 0 \text{ pour tout } n) \\ &= 1 - P_p(M(n) \geq 1 \text{ pour un certain } n) \\ &\geq 1 - \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ fermé}) \\ &\geq \frac{1}{2} \quad \text{pour } p > \pi, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $p_c(2) \leq \pi < 1$, et conclut la preuve.

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on peut même prouver l'inégalité :

$$p_c(2) \leq 1 - \frac{1}{\lambda(2)}.$$

En effet, si $q\lambda(2) < 1$,

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ fermé}) < \infty$$

donc presque sûrement, il existe un nombre fini de lacets fermés autour de 0. Cela entraîne qu'il existe une composante connexe infinie, car toute composante connexe finie est à l'intérieur d'un circuit fermé du dual entourant l'origine. Or si on avait $\theta(0) = 0$, on aurait $P_p(|C(x)| = \infty) = 0$ pour tout sommet x , ce qui contredit l'existence presque sûre d'un domaine ouvert infini. On a donc bien $\theta(0) > 0$, d'où le résultat. \square



Le graphe \mathbb{L}^2 possède une propriété très intéressante : il est son propre dual. Un argument de dualité similaire à celui que l'on vient d'utiliser semble indiquer que pour $d = 2$, la transition de phase a lieu en $p_c(2) = \frac{1}{2}$. On peut montrer que c'est effectivement le cas, mais c'est loin d'être évident : c'est un résultat dû à Kesten (1980). Nous verrons dans la dernière partie que l'on a $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant démontrer une conséquence de ce théorème concernant la probabilité d'existence d'une composante connexe ouverte infinie.

Théorème 1.2. *La probabilité $\psi(p)$ qu'il existe un domaine ouvert infini vérifie*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta(p) = 0 \\ 1 & \text{si } \theta(p) > 0 \end{cases}$$

Démonstration. L'événement « \mathbb{L}^d a un domaine ouvert infini » ne dépend pas de l'état de tout sous-ensemble fini d'arêtes. Par la loi du tout ou rien, ψ vaut 0 ou 1. Si $\theta(p) = 0$, alors

$$\psi(p) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(|C(x)| = \infty) = 0.$$

En revanche, si $\theta(p) > 0$, alors

$$\psi(p) \geq P_p(|C| = \infty) > 0$$

donc $\psi(p) = 1$. □

Donc presque sûrement, si $p < p_c$, il n'existe pas de domaine ouvert infini, et si $p > p_c$, il en existe un. On peut démontrer que dans ce cas, il en existe en fait un seul. Par contre, ce théorème n'indique rien lorsque $p = p_c$: la situation dépend de la continuité de θ .

2 Quelques outils indispensables

2.1 Variables aléatoires monotones

Définition 2.1. Une variable aléatoire N sur l'espace mesuré (Ω, \mathcal{F}) est dite **croissante** si elle vérifie

$$\omega \leq \omega' \Rightarrow N(\omega) \leq N(\omega')$$

et **décroissante** si $-N$ est croissante, ce qui revient à dire que l'inégalité a lieu dans l'autre sens.

Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit **croissant** si sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ l'est, c'est-à-dire si

$$\forall \omega \in A, \forall \omega' \in \mathcal{F}, \quad \omega \leq \omega' \Rightarrow \omega' \in A$$

et **décroissant** si $-\mathbb{1}_A$ est croissante, ce qui est équivalent au fait que \bar{A} est croissant.

Un événement est donc croissant si l'adjonction d'arêtes ouvertes facilite sa réalisation. C'est le cas de l'événement « L'origine appartient à une composante ouverte infinie » : plus on rajoute d'arêtes, plus il a tendance à se produire. Un autre exemple important, dont nous nous servirons par la suite, est l'événement

$$A(x, y) = \{\text{Il existe un chemin ouvert de } x \text{ à } y\}.$$

Le théorème suivant paraît alors naturel :

Théorème 2.1. *Si N est une variable aléatoire croissante sur (Ω, \mathcal{F}) , on a*

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow E_{p_1}[N] \leq E_{p_2}[N].$$

En particulier, si $A \in \mathcal{F}$ est un événement croissant,

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A).$$

Démonstration. Soit N une variable aléatoire croissante sur (Ω, \mathcal{F}) . Il suffit d'utiliser le couplage introduit dans la première section. Avec les mêmes notations, si $p_1 \leq p_2$, on a $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$ donc $N(\eta_{p_1}) \leq N(\eta_{p_2})$. Par conséquent, $E[N(\eta_{p_1})] \leq E[N(\eta_{p_2})]$. Cette dernière inégalité est le résultat souhaité. \square

Ce théorème entraîne notamment que $\theta(p)$, qui est la probabilité pour que l'origine soit dans un domaine ouvert infini, est une fonction croissante de p .

La monotonie est une propriété importante pour bien d'autres raisons. Elle permet en effet d'étudier la corrélation de plusieurs événements : nous allons voir dans les sections suivantes qu'on peut estimer la probabilité de $A \cap B$ (ou d'autres événements fabriqués à partir de A et B) en fonction de celles de A et B , ce qui peut être délicat en général.

2.2 L'inégalité FKG

La première inégalité que nous allons démontrer, attribuée à Fortuin, Kasteleyn et Ginibre, relie la probabilité de $A \cap B$ à celles des événements A et B lorsqu'ils sont croissants. Dans ce cas, la croissance entraîne une sorte de « dépendance positive ». Par exemple, s'il existe un chemin de x à y , il devient plus probable qu'il y en ait un de u à v .

Théorème 2.2 (Inégalité FKG). *Si X et Y sont des variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{F}) croissantes et L^2 , on a*

$$E_p[XY] \geq E_p[X]E_p[Y].$$

En particulier, si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont des événements croissants,

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

Démonstration. La seconde inégalité résulte de la première appliquée aux fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ de A et B . Il suffit donc de prouver la première partie du théorème.

Considérons tout d'abord le cas où les deux variables aléatoires ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes. On peut alors démontrer l'inégalité FKG par récurrence sur le nombre n d'arêtes qui interviennent.



Supposons donc que les variables aléatoires croissantes X et Y ne dépendent que de l'état des arêtes e_1, e_2, \dots, e_n . Si $n = 1$, X et Y sont uniquement fonction de l'état $\omega(e_1)$ de l'arête e_1 , qui vaut 0 ou 1. On remarque alors que

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0$$

pour tous $(\omega_1, \omega_2) \in \{0, 1\}^2$: X et Y étant croissantes, les deux facteurs sont du même signe. En sommant cette inégalité sur l'espace $\{0, 1\}^2$ muni de la mesure produit usuelle de paramètre p , on obtient

$$E[(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))] \geq 0$$

et cette somme vaut $2(E_p[XY] - E_p[X]E_p[Y])$, d'où le résultat pour $n = 1$.

Supposons maintenant que nous ayons démontré le résultat pour tout $k < n$, et que X et Y sont des variables aléatoires croissantes ne dépendant que des arêtes e_1, e_2, \dots, e_n . Alors

$$E_p[XY] = E_p[E_p[XY|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]].$$

Lorsque l'on fixe $\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})$, X et Y sont des fonctions croissantes de la seule arête e_n , d'où

$$E_p[XY|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})] \geq E_p[X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})] \times E_p[Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})].$$

Puis

$$E_p[XY] \geq E_p[E_p[X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})] \times E_p[Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]].$$

Par ailleurs, $E_p[X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]$ et $E_p[Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]$ sont croissantes et ne dépendent que de $(n - 1)$ arêtes. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, pour obtenir

$$\begin{aligned} E_p[E_p[X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})] \times E_p[Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]] \\ \geq E_p[E_p[X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]] \times E_p[E_p[Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]]. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$E_p[XY] \geq E_p[X]E_p[Y].$$

Justifions maintenant le passage à la limite. Soient X et Y des variables aléatoires croissantes L^2 , et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une énumération des arêtes de \mathbb{L}^d . On pose

$$X_n = E_p[X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_n)] \quad \text{et} \quad Y_n = E_p[Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_n)].$$

On sait que $X_n \rightarrow X$ et $Y_n \rightarrow Y$ lorsque $n \rightarrow \infty$, P_p -p.s. et dans L^2 . On en déduit que

$$E_p[X_n] \rightarrow E_p[X], \quad E_p[Y_n] \rightarrow E_p[Y] \quad \text{et} \quad E_p[X_n Y_n] \rightarrow E_p[XY]$$

quand $n \rightarrow \infty$. Par ailleurs, comme X_n et Y_n sont des variables aléatoires croissantes ne dépendant que des arêtes e_1, \dots, e_n , on peut utiliser la première partie de la démonstration :

$$E_p[X_n Y_n] \geq E_p[X_n]E_p[Y_n].$$

Il suffit alors de prendre les limites des deux membres quand $n \rightarrow \infty$ pour obtenir l'inégalité voulue. \square

L'inégalité FKG peut se réécrire sous la forme $\text{Cov}_p[X, Y] \geq 0$, ou $P_p(A|B) \geq P_p(A)$ dans le second cas (à condition que l'on ait $P_p(B) > 0$). Remarquons également qu'il est possible de se ramener à l'inégalité FKG lorsque l'on dispose de deux variables aléatoires X et Y monotones (respectivement deux événements A et B monotones), quitte à considérer $-X$ et/ou $-Y$ (respectivement \bar{A} et/ou \bar{B}).

On peut aussi s'intéresser à plus de deux événements :

Corollaire 2.1. *Si les événements A_1, \dots, A_n sont croissants,*

$$P_p \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \geq \prod_{i=1}^n P_p(A_i).$$

Démonstration. Notons pour commencer qu'une intersection (quelconque) d'événements croissants est croissante. Les événements A_i étant croissants, l'événement $\bigcap_{i=2}^n A_i$ l'est également. Donc d'après l'inégalité FKG,

$$P_p \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \geq P_p(A_1) P_p \left(\bigcap_{i=2}^n A_i \right).$$

On conclut par récurrence. □

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ des familles de chemins de \mathbb{L}^d , et pour tout $1 \leq i \leq n$, A_i l'événement « Il existe un chemin ouvert dans \mathcal{C}_i ». Alors

$$P_p \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \geq \prod_{i=1}^n P_p(A_i).$$

L'inégalité FKG reste valable pour des graphes plus généraux $G = (V, E)$, avec V infini dénombrable : si x et y sont deux sommets,

$$P_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \geq P_p(\{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\}) \geq P_p(\{x \leftrightarrow y\}) P_p(\{y \leftrightarrow \infty\}).$$

Si G est connexe, $P_p(\{x \leftrightarrow y\}) > 0$ donc

$$P_p(\{y \leftrightarrow \infty\}) > 0 \Rightarrow P_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) > 0$$

et réciproquement. On a donc démontré le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe, V étant dénombrable, la probabilité critique ne dépend pas du sommet choisi comme origine.*

2.3 L'inégalité BK

L'inégalité FKG fournit une minoration de $P_p(A \cap B)$ en fonction de $P_p(A)$ et $P_p(B)$. Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, l'idée est de remplacer l'événement $A \cap B$ signifiant que A et B ont lieu tous les deux, par l'événement $A \circ B$ selon lequel A et B ont lieu sur des ensembles disjoints d'arêtes de \mathbb{L}^d . Définissons cet événement plus précisément.



Définition 2.2. Soient e_1, e_2, \dots, e_n n arêtes distinctes de \mathbb{L}^d , A et B deux événements croissants ne dépendant que de l'état de ces arêtes, que l'on note $\omega = (\omega(e_1), \dots, \omega(e_n))$. À un tel ω est associé l'ensemble $K(\omega)$ de ses arêtes ouvertes. On définit l'événement $A \circ B$ comme l'ensemble des ω pour lesquels il existe $H \subseteq K(\omega)$ vérifiant : si ω' est la configuration telle que $K(\omega') = H$, et ω'' celle telle que $K(\omega'') = K(\omega) \setminus H$, alors $\omega' \in A$ et $\omega'' \in B$. C'est l'**occurrence disjointe** de A et B .

Ici, H et $K(\omega) \setminus H$ réalisent une partition de l'ensemble des arêtes de ω . $A \circ B$ est donc l'ensemble des configurations telles que l'on peut séparer en deux parties l'ensemble des arêtes ouvertes, l'une assurant l'occurrence de A , et l'autre celle de B . On remarque que l'on a $A \circ B \subseteq A \cap B$.

Étudions un exemple. Pour E une partie finie de \mathbb{E}^d , et x, y des sommets de \mathbb{L}^d , on note $A_E(x, y)$ l'événement « Il existe un chemin ouvert dans E reliant x à y ». Alors $A_E(u, v) \circ A_E(x, y)$ est l'événement « Il existe deux chemins dans E d'ensembles disjoints d'arêtes, l'un reliant u à v , et l'autre x à y ». Alors si on sait que $A_E(u, v)$ a lieu, il paraît naturel de penser que l'événement $A_E(u, v) \circ A_E(x, y)$ a une probabilité inférieure à celle de l'événement $A_E(x, y)$ seul : en effet, le fait que $A_E(u, v)$ ait lieu nous indique la présence d'arêtes ouvertes, mais un certain nombre d'entre elles doivent être utilisées pour construire un chemin de u à v . C'est l'idée contenue dans l'inégalité BK, due à Van den Berg et Kesten :

Théorème 2.4 (Inégalité BK). *Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont des événements croissants ne dépendant que de l'état d'un nombre fini d'arêtes e_1, e_2, \dots, e_n ,*

$$P_p(A \circ B) \leq P_p(A)P_p(B).$$

Démonstration. On peut se placer sur l'espace de probabilité $(\Gamma, \mathcal{G}, P_p)$ où $\Gamma = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\Gamma)$ et P_p est la mesure produit usuelle. Considérons l'espace produit $(\Gamma', \mathcal{G}', P'_p)$, avec $\Gamma' = \Gamma \times \Gamma$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ et $P'_p = P_p \otimes P_p$. Un point de $\Gamma \times \Gamma$ sera noté (x, y) , où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Prenons maintenant A et B deux événements croissants dans \mathcal{G} . Soient A' l'ensemble des (x, y) tels que $x \in A$, et pour $0 \leq k \leq n$, B'_k l'ensemble des (x, y) tels que $(y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in B$. Ce sont des événements croissants de l'espace produit. D'une part, on a

$$P_p(A \circ B) = P'_p(A' \circ B'_0),$$

et d'autre part, comme A' et B'_n sont définis en fonction d'ensembles de coordonnées disjoints, $A' \circ B'_n = A' \cap B'_n$, d'où, P'_p étant une mesure produit,

$$P'_p(A' \circ B'_n) = P'_p(A')P'_p(B'_n) = P_p(A)P_p(B).$$

Il s'agit donc de démontrer l'inégalité $P'_p(A' \circ B'_0) \leq P'_p(A' \circ B'_n)$, et pour cela, nous allons prouver que

$$P'_p(A' \circ B'_{k-1}) \leq P'_p(A' \circ B'_k) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

Pour cela, écrivons $A' \circ B'_{k-1}$ comme la réunion disjointe de deux événements C_1 et C_2 , définis par

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) \text{ tels que } A' \circ B'_{k-1} \text{ a lieu quelle que soit la valeur de } x_k\}, \\ C_2 &= \{(x, y) \text{ tels que } x_k = 1 \text{ et tels que } A' \circ B'_{k-1} \text{ a lieu,} \\ &\quad \text{mais n'aurait pas lieu si on avait } x_k = 0\} \\ &= \{A' \circ B'_k \text{ a lieu ssi } x_k = 1\} \cap \{x_k = 1\}. \end{aligned}$$

Nous allons partitionner de nouveau C_2 en deux événements. Si (x, y) est un point de Γ' , on dira que $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ **entraîne** A' si pour tout $(u, v) \in \Gamma'$, $u_i = x_i$ pour tout $i \in I$ implique que $(u, v) \in A'$. De même, I entraîne B'_k si les deux conditions $u_i = y_i$ pour tout $i \in I, i \leq k$, et $v_i = x_i$ pour tout $i \in I, i > k$, assurent que $(u, v) \in B'_k$. On décompose alors C_2 en $C_2 = C'_2 \cup C''_2$, avec

$$\begin{aligned} C'_2 &= C_2 \cap \{(x, y) \text{ pour lesquels il existe } I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ &\quad \text{tel que } k \in I, I \text{ entraîne } A' \text{ et } \bar{I} \text{ entraîne } B'_{k-1}\}, \\ C''_2 &= C_2 \setminus C'_2. \end{aligned}$$

C'_2 est donc le sous-événement de C_2 correspondant aux (x, y) pour lesquels x_k contribue de manière essentielle à A' .

L'idée est alors de construire une injection ϕ de $A' \circ B'_{k-1}$ dans $A' \circ B'_k$ préservant la mesure. On pose, pour $(x, y) \in A' \circ B'_{k-1}$,

$$\phi((x, y)) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in C_1 \cup C'_2 \\ (x', y') & \text{si } (x, y) \in C''_2 \end{cases}$$

où (x', y') est le point de Γ' obtenu à partir de (x, y) en échangeant x_k et y_k . Montrons que ϕ a bien les propriétés voulues, ce qui achèvera la preuve. Tout d'abord, $C_1 \subseteq A' \circ B'_k$, car si $(x, y) \in C_1$, A' et B'_{k-1} ont lieu séparément quelles que soient les valeurs de x_k et y_k . De même, $C'_2 \subseteq A' \circ B'_k$. En effet, si $(x, y) \in C'_2$, alors A' et B'_{k-1} ont lieu séparément, et il est possible de trouver une occurrence disjointe pour laquelle x_k contribue essentiellement à A' , donc ne contribue pas à B'_{k-1} . Par conséquent, $(x, y) \in A' \circ B'_k$. Enfin, si $(x, y) \in C''_2$, alors $x_k = 1$ et il existe $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ tel que I entraîne A' , et \bar{I} entraîne B'_{k-1} . Pour la configuration $\phi((x, y)) = (x', y')$, I et \bar{I} entraînent respectivement A' et B'_k , d'où $(x', y') \in A' \circ B'_k$.

Montrons maintenant que ϕ est injective. Elle l'est sur $C_1 \cup C'_2$ car elle coïncide avec l'identité sur C_1 et sur C'_2 . Elle est également injective sur C''_2 . Il suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de $(x, y) \in C''_2$ tel que $\phi((x, y)) = (x', y') \in C_1 \cup C'_2$. Supposons qu'il en existe un. Si (x', y') appartenait à C_1 , les valeurs de x_k et y_k ne seraient d'aucune importance en ce qui concerne $A' \circ B'_{k-1}$, ce qui contredirait le fait que $(x, y) \in C''_2 \subseteq C_2$. Le point (x', y') ne peut pas non plus appartenir à C'_2 , car on aurait alors $x_k = 1$ et $y_k = 1$, (x, y) et (x', y') étant respectivement dans C''_2 et C'_2 . ϕ est donc bien une injection de $A' \circ B'_{k-1}$ dans $A' \circ B'_k$.

Enfin, on vérifie aisément que ϕ préserve la mesure $P'_p : P'_p(\phi((x, y))) = P'_p((x, y))$ pour tout $(x, y) \in A' \circ B'_{k-1}$. On a donc bien l'inégalité

$$P'_p(A' \circ B'_{k-1}) \leq P'_p(A' \circ B'_k),$$

ce qui permet de conclure. □

Tout comme l'inégalité FKG, ce résultat peut être généralisé à plus de deux événements croissants. Pour pouvoir itérer, il faut remarquer que l'opération \circ est associative, et que si A et B sont croissants, $A \circ B$ l'est aussi. Il vient alors :

Corollaire 2.2. *Si les événements A_1, \dots, A_n sont croissants et ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes,*

$$P_p(A_1 \circ \dots \circ A_n) \leq \prod_{i=1}^n P_p(A_i).$$



La condition selon laquelle les événements ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes n'est en général pas contraignante : elle peut facilement être contournée. L'exemple suivant est caractéristique. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots \mathcal{C}_n$ des familles de chemins de \mathbb{L}^d . Pour tout $1 \leq i \leq n$, introduisons A_i et $A_i(k)$ les événements « Il existe dans \mathcal{C}_i un chemin ouvert » et « Il existe dans \mathcal{C}_i un chemin ouvert qui est entièrement contenu dans la boule $\mathcal{B}(k)$ » ($k \in \mathbb{N}^*$). Alors en appliquant l'inégalité précédente aux événements $A_i(k)$, puis en prenant la limite quand $k \rightarrow \infty$, on obtient

$$P_p(\text{Il existe des chemins ouverts disjoints } c_1 \in \mathcal{C}_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_n) \leq \prod_{i=1}^n P_p(A_i),$$

ce qui peut être mis en parallèle avec le résultat fourni par l'inégalité FKG :

$$P_p(\text{Il existe des chemins ouverts } c_1 \in \mathcal{C}_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_n) \geq \prod_{i=1}^n P_p(A_i).$$

2.4 La formule de Russo

Si A est un événement croissant, nous savons déjà que la fonction $p \mapsto P_p(A)$ est croissante. Citons pour conclure cette section une formule permettant d'estimer la variation de $P_p(A)$ en fonction de p . À cette fin, nous avons besoin d'une petite définition.

Définition 2.3. Soient $A \in \mathcal{F}$ un événement, et ω une configuration. Nous dirons que $e \in \mathbb{E}^d$ est une arête **pivot** pour le couple (A, ω) lorsque $\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_A(\omega')$, ω' étant la configuration obtenue à partir de ω en changeant uniquement l'arête e .

Ainsi, e est une arête pivot pour (A, ω) si l'état de e permet à A d'avoir lieu ou de ne pas avoir lieu. L'événement « e est une arête pivot pour A » est alors l'ensemble des configurations ω telles que e est une arête pivot pour le couple (A, ω) . Remarquons que cet événement est indépendant de l'état de e , donc que

$$P_p(e \text{ est une arête pivot pour } A) = \frac{1}{p} P_p(e \text{ est une arête pivot pour } A \text{ et est ouverte}).$$

Si A est croissant, e est pivot si et seulement si A a lieu lorsque e est ouverte, et n'a pas lieu lorsque e est fermée. Prenons pour A l'événement « L'origine appartient à un domaine ouvert infini ». Alors e est une arête pivot si lorsqu'on la supprime, une de ses extrémités est dans un domaine ouvert fini contenant 0, et l'autre extrémité est dans un domaine ouvert infini.

Nous pouvons maintenant énoncer la formule de Russo.

Théorème 2.5 (Formule de Russo). *Soit A un événement croissant ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes de \mathbb{L}^d . Alors*

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = E_p[N(A)],$$

$N(A)$ étant le nombre d'arêtes pivots pour A .

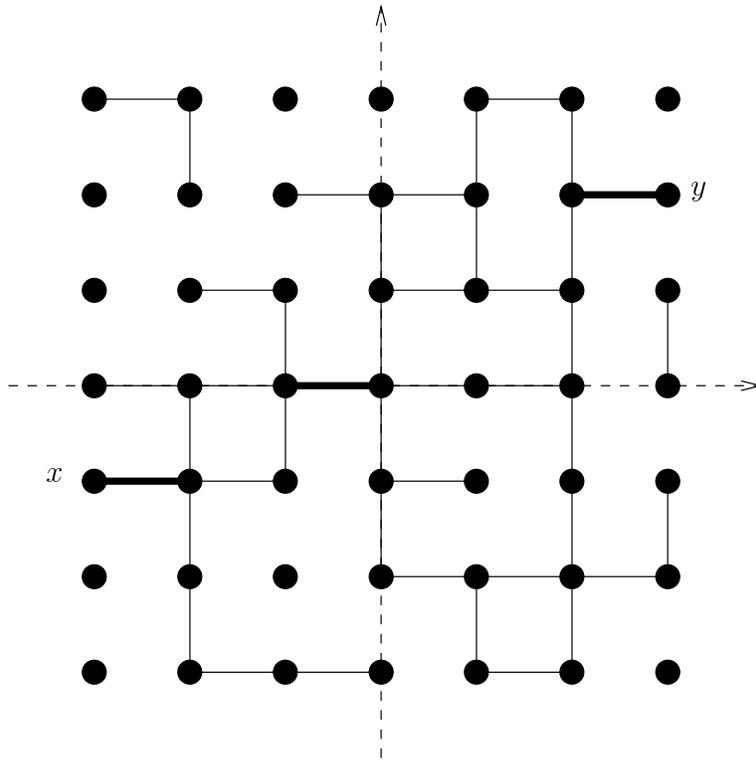


FIG. 3: Cette configuration présente 3 arêtes pivots (en gras) pour l'existence d'un chemin ouvert joignant x à y .

Démonstration. Soit $\mathbf{p} = (p(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$ une famille de réels compris entre 0 et 1, et $(X(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$ des variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur $[0, 1]$. Nous allons généraliser les constructions de la première partie. On définit la configuration $\eta_{\mathbf{p}}$ en posant $\eta_{\mathbf{p}}(e) = 1$ si $X(e) < p(e)$ et $\eta_{\mathbf{p}}(e) = 0$ sinon, et $P_{\mathbf{p}}$ la probabilité produit pour laquelle e est ouverte avec une probabilité $p(e)$, et fermée avec une probabilité $1 - p(e)$. Comme auparavant, on a

$$P_{\mathbf{p}}(A) = P(\eta_{\mathbf{p}} \in A).$$

Soit f une arête de \mathbb{E}^d , et $\mathbf{p}' = (p'(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$ une famille de réels telle que $p(e) = p'(e)$ pour tout $e \neq f$. Ainsi, \mathbf{p} et \mathbf{p}' ne peuvent différer qu'au niveau de l'arête f . Si $p(f) \leq p'(f)$, alors

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{p}'}(A) - P_{\mathbf{p}}(A) &= P(\eta_{\mathbf{p}} \notin A, \eta_{\mathbf{p}'} \in A) \\ &= (p'(f) - p(f))P_{\mathbf{p}}(f \text{ est une arête pivot pour } A), \end{aligned}$$

car si $\eta_{\mathbf{p}} \notin A$ et $\eta_{\mathbf{p}'} \in A$, $p \leq X(f) < p'(f)$, et l'événement « f est une arête pivot pour A » est indépendant de l'état de l'arête f . Cette égalité est aussi vraie lorsque $p(f) \geq p'(f)$. En divisant par $p'(f) - p(f)$, et en faisant tendre $p'(f)$ vers $p(f)$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial p(f)} P_{\mathbf{p}}(A) = P_{\mathbf{p}}(f \text{ est une arête pivot pour } A).$$

D'autre part, notons f_1, f_2, \dots, f_n les arêtes dont dépend A . $P_{\mathbf{p}}(A)$ est alors une fonction poly-



nomiale en $p(f_1), p(f_2), \dots, p(f_n)$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial p(f_i)} P_{\mathbf{p}}(A) \right)_{\mathbf{p}=(p, \dots, p)} \\ &= \sum_{i=1}^n P_p(f_i \text{ est une arête pivot pour } A) \\ &= E_p[N(A)], \end{aligned}$$

d'où la formule. □

Remarquons qu'on peut également écrire ce résultat sous la forme

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_{e \in \mathbb{E}^d} P_p(e \text{ est une arête pivot pour } A).$$

Dans la démonstration précédente, on a utilisé le fait que A ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes pour calculer la dérivée de $p \mapsto P_p(A)$ en fonction des dérivées partielles. Dans le cas d'un événement A simplement croissant, la première partie de la preuve reste vraie, et permet de trouver une borne inférieure pour la dérivée à droite de $P_p(A)$:

Corollaire 2.3. *Si A est un événement croissant,*

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} (P_{p+\delta}(A) - P_p(A)) \geq E_p[N(A)].$$

Démonstration. Soit E un ensemble fini d'arêtes de \mathbb{E}^d . On définit de manière similaire à ce qu'on a fait dans la démonstration précédente la famille p_E par $p_E(e) = p + \delta$ si $e \in E$ et $p_E(e) = p$ sinon, pour δ tel que $0 \leq p \leq p + \delta \leq 1$. Comme A est croissant, $P_{p+\delta} \geq P_{p_E}(A)$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} (P_{p+\delta}(A) - P_p(A)) &\geq \frac{1}{\delta} (P_{p_E}(A) - P_p(A)) \\ &\rightarrow \sum_{e \in E} P_p(e \text{ est une arête pivot pour } A) \end{aligned}$$

lorsque $\delta \rightarrow 0^+$. On en déduit le résultat en faisant croître E vers \mathbb{E}^d . □

Revenons au cas où A ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes. En reprenant la formule de Russo, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_{e \in \mathbb{E}^d} \frac{1}{p} P_p(e \text{ est une arête pivot pour } A \text{ et est ouverte}) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{e \in \mathbb{E}^d} P_p(A \cap \{e \text{ est une arête pivot pour } A\}) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{e \in \mathbb{E}^d} P_p(e \text{ est une arête pivot pour } A | A) P_p(A) \\ &= \frac{1}{p} E_p[N(A) | A] P_p(A), \end{aligned}$$

si $P_p(A) > 0$. En divisant par $P_p(A)$ et en intégrant sur un intervalle $[p_1, p_2]$, on obtient

$$P_{p_2}(A) = P_{p_1}(A) \times \exp \left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p[N(A)|A] dp \right).$$

Au passage, si m le nombre d'arêtes intervenant dans la définition de A , on peut utiliser la majoration

$$P_p(A \cap \{e \text{ est une arête pivot pour } A\}) \leq P_p(A)$$

pour arriver à : pour tous $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$,

$$P_{p_2}(A) \leq \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^m P_{p_1}(A),$$

ce qui indique que $P_p(A)$ ne peut pas croître trop vite lorsque p augmente.

3 Circuits dans un anneau

3.1 Position du problème

Il est souvent pratique de construire des chemins ou des circuits à partir de chemins plus simples. Dans ce qui suit, on va s'intéresser à des chemins traversant des rectangles, ou des carrés, et on va montrer qu'à partir de chemins traversant un simple carré, on peut obtenir des chemins traversant des rectangles de toutes les tailles, en utilisant uniquement des propriétés géométriques. La plupart de ces résultats se démontrent en effet essentiellement avec un dessin, et la simplicité de l'inégalité finale est due à l'inégalité FKG.

Le théorème de Russo-Seymour-Welsh, que nous allons démontrer, permet lui de construire des chemins entourant l'origine dans des anneaux, en décomposant ces anneaux en carrés. Il donne une minoration de la probabilité d'existence d'un circuit dans un anneau en fonction de la probabilité de traverser l'un des carrés constituant l'anneau.

Précisons maintenant cela, et pour commencer, donnons quelques notations. Pour k et l entiers positifs, on pose

$$B(kl, l) = [-l, (2k - 1)l] \times [-l, l],$$

le rectangle de dimensions $2kl$ par $2l$; on note $B(l)$ le carré $B(l, l)$ de côté $2l$.

Définition 3.1. Un chemin ouvert traversant le rectangle B de gauche à droite (respectivement de haut en bas) est un chemin ouvert dans B joignant le côté gauche (respectivement le haut) de B au côté droit (respectivement au bas) de B sans emprunter d'arêtes du bord de B .

Définition 3.2. Soit $GD(kl, l)$ l'événement « Il existe un chemin ouvert traversant $B(kl, l)$ de gauche à droite ». On notera $GD(l)$ pour $GD(l, l)$.

Définition 3.3. Soit $A(l)$ l'anneau $B(3l) \setminus B(l)$, et soit $O(l)$ l'événement « Il existe un circuit ouvert de $A(l)$ entourant l'origine ».



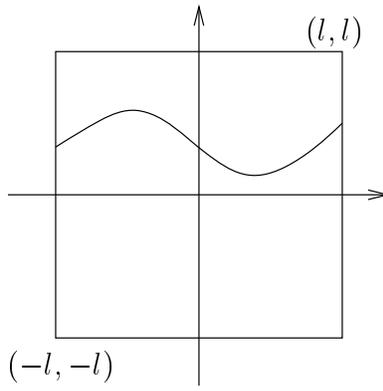


FIG. 4: Un chemin satisfaisant $GD(l)$.

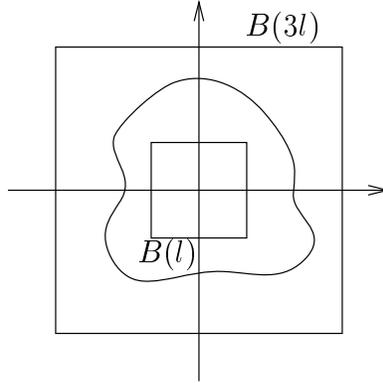


FIG. 5: Un circuit ouvert de $A(l)$ entourant l'origine.

Le théorème de Russo-Seymour-Welsh est surtout utile quand on peut faire tendre l vers l'infini, c'est-à-dire quand $\tau = P_p(GD(l))$ est minoré indépendamment de l par une constante strictement positive. C'est notamment le cas quand p vaut $\frac{1}{2}$. Considérons le rectangle $R(l) = [0, l-1] \times [0, l]$. On peut s'intéresser à son dual, qui est le rectangle $R'(l) = [-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}]$, de dimensions $l \times l-1$ comme le montre la figure 6. Si un chemin ouvert traverse le rectangle initial de gauche à droite, on ne peut pas avoir de chemin fermé traversant le rectangle dual de haut en bas, et réciproquement, si on a un chemin fermé du dual traversant $R'(l)$ de haut en bas, on ne peut pas avoir de chemin ouvert traversant $R(l)$ de gauche à droite. Donc

$$\begin{aligned} P_p(GDR(l)) &= 1 - P_p(HB_f R(l)') \\ &= 1 - P_{1-p}(HB_o R(l)'), \end{aligned}$$

où $GDR(l)$ est l'événement « Il existe un chemin ouvert traversant $R(l)$ de gauche à droite », et $HB_f R(l)'$ (respectivement $HB_o R(l)'$) l'événement « Il existe un chemin fermé (respectivement ouvert) traversant $R(l)'$ de haut en bas ». Notons qu'on s'interdit ici d'utiliser les bords des rectangles. Or, les événements $GDR(l)$ et $HB_o R(l)'$ sont de même probabilité P pour $p = \frac{1}{2}$ d'après les dimensions des rectangles. P vérifie donc $P = 1 - P$, d'où $P = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, un chemin de gauche à droite traversant $R(l)$ nous fournit un chemin de gauche à droite traversant le carré $[0, l]^2$ en rajoutant une colonne d'arêtes, donc dans ce cas, la probabilité

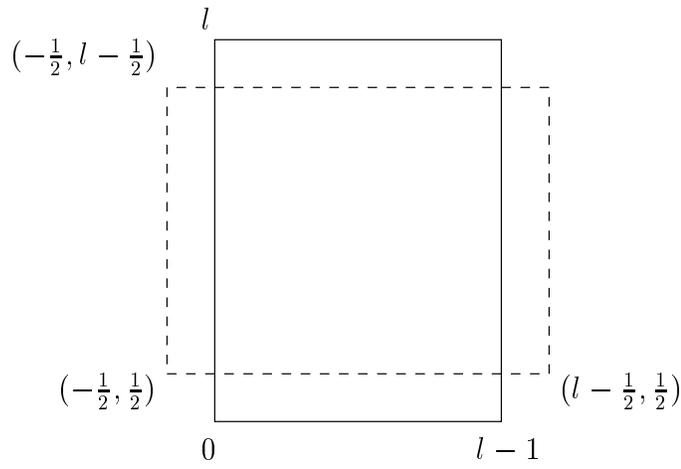


FIG. 6: Le rectangle $R(l)$ avec son dual

τ introduite précédemment vaut au moins $\frac{1}{4}$, quelle que soit la taille du carré. Nous allons voir lors de la démonstration du théorème de Russo-Seymour-Welsh que la probabilité de traverser un rectangle quelconque de proportions fixées est alors uniformément éloignée de 0 par rapport à la taille de celui-ci. Cela permettra de répondre lorsque $p \geq \frac{1}{2}$ à la question initiale, qui est de savoir si les gouttes d'eau peuvent traverser le réseau constitué des grains de café.

3.2 Le théorème de Russo-Seymour-Welsh

L'anneau $A(l)$ défini précédemment se décompose simplement en carrés qui sont des translatés de $B(l)$. Il paraît donc naturel de combiner des chemins traversant ces carrés pour obtenir un circuit dans $A(l)$. Le théorème de Russo-Seymour-Welsh réalise cela. L'étape fondamentale, et la plus délicate, est le passage d'un carré de côté $2l$ à un rectangle $3l \times 2l$. Elle fait l'objet du lemme 3.3.

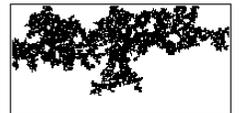
Théorème 3.1 (Théorème de Russo-Seymour-Welsh). *Si $P_p(GD(l)) = \tau$, alors*

$$P_p(O(l)) \geq \{\tau(1 - \sqrt{1 - \tau})^4\}^{12}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur deux lemmes, et sur une astuce de calcul qui découle de l'inégalité FKG : l'astuce de la racine carrée.

Lemme 3.1 (L'astuce de la racine carrée). *Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des événements croissants de même probabilité, alors*

$$P_p(A_1) \geq 1 - \left(1 - P_p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right)^{1/n}.$$



Démonstration de l'astuce de la racine carrée.

$$\begin{aligned}
1 - P_p \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) &= P_p \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) \\
&\geq \prod_{i=1}^n P_p(\bar{A}_i) \quad \text{d'après l'inégalité FKG} \\
&= \prod_{i=1}^n (1 - P_p(A_i)) \\
&= (1 - P_p(A_1))^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Voici maintenant les deux lemmes amenant au théorème, en commençant par le plus délicat.

Lemme 3.2. *Si $P_p(GD(l)) = \tau$, alors*

$$P_p \left(GD \left(\frac{3}{2}l, l \right) \right) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3. \quad (1)$$

Le deuxième lemme fait le lien avec le théorème.

Lemme 3.3. *On a les inégalités suivantes :*

$$P_p(GD(2l, l)) \geq P_p(GD(l)) P_p \left(GD \left(\frac{3}{2}l, l \right) \right)^2, \quad (2)$$

$$P_p(GD(3l, l)) \geq P_p(GD(l)) P_p(GD(2l, l))^2, \quad (3)$$

$$P_p(O(l)) \geq P_p(GD(3l, l))^4. \quad (4)$$

On peut obtenir des minoration similaires aux (1) et (2) pour des rectangles de toute taille ; cela permet de résoudre le problème du café.

Démonstration du lemme 3.3. Cette démonstration repose uniquement sur les figures 7, 8, et 9, qui permettent de comprendre la situation.

La figure 7 permet de démontrer l'inégalité (1). L'existence des chemins α et γ provient des événements $GD_1(\frac{3}{2}l, l)$ et $GD_2(\frac{3}{2}l, l)$, qui assurent l'existence de chemins traversant les deux rectangles de dimensions $3l \times 2l$ de la figure 7, ces deux événements étant de même probabilité ; et l'existence du chemin β est assurée par l'événement $GD(l)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
P_p(GD(2l, l)) &\geq P_p \left(GD(l) \cap GD_1 \left(\frac{3}{2}l, l \right) \cap GD_2 \left(\frac{3}{2}l, l \right) \right) \\
&\geq P_p(GD(l)) P_p \left(GD \left(\frac{3}{2}l, l \right) \right)^2
\end{aligned}$$

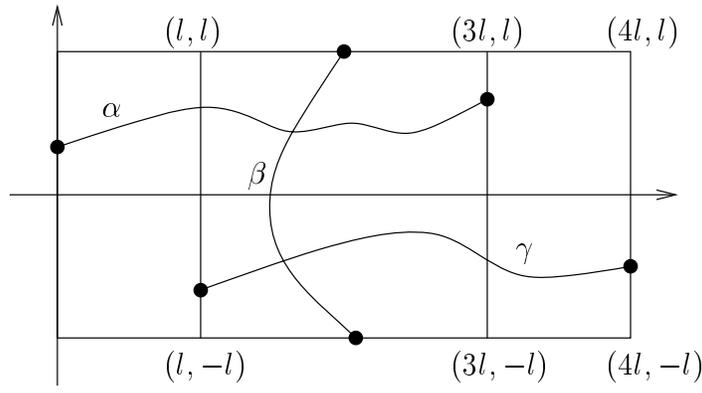


FIG. 7: Trois chemins ouverts dont l'union contient un chemin traversant $[0, 4l] \times [-l, l]$.

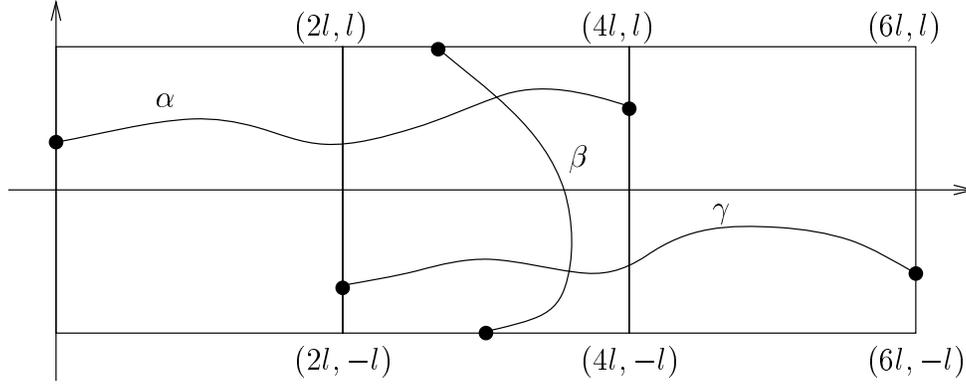


FIG. 8: Trois chemins ouverts dont l'union contient un chemin traversant $[0, 6l] \times [-l, l]$.

d'après l'inégalité FKG, les événements $GD(l)$ et $GD_i(\frac{3}{2}l, l)$, $i \in \{1, 2\}$, étant croissants. L'inégalité (1) est donc prouvée.

Pour l'inégalité (2), on utilise la figure 8. L'existence des chemins α et γ est garantie par les événements $GD_1(2l, l)$ et $GD_2(2l, l)$, qui assurent l'existence de chemins traversant les deux rectangles de dimensions $4l \times 2l$ de la figure 8, ces deux événements étant de plus de même probabilité, et l'existence du chemin β provient de $GD(l)$. Ces événements sont croissants, donc on obtient de même en appliquant l'inégalité FKG

$$P_p(GD(3l, l)) \geq P_p(GD(l))P_p(GD(2l, l))^2,$$

ce qui prouve l'inégalité (2).

Enfin, l'inégalité (3) est prouvée à l'aide de la figure 9. L'existence des quatre chemins de la figure est assurée par les événements $GD_i(3l, l)$, pour i variant de 1 à 4, qui assurent l'existence de chemins traversant les quatre rectangles de la figure 9, et qui sont croissants de même probabilité. Donc en utilisant une dernière fois l'inégalité FKG, on obtient l'inégalité (3)

$$P_p(O(l)) \geq P_p(GD(3l, l))^4.$$

□



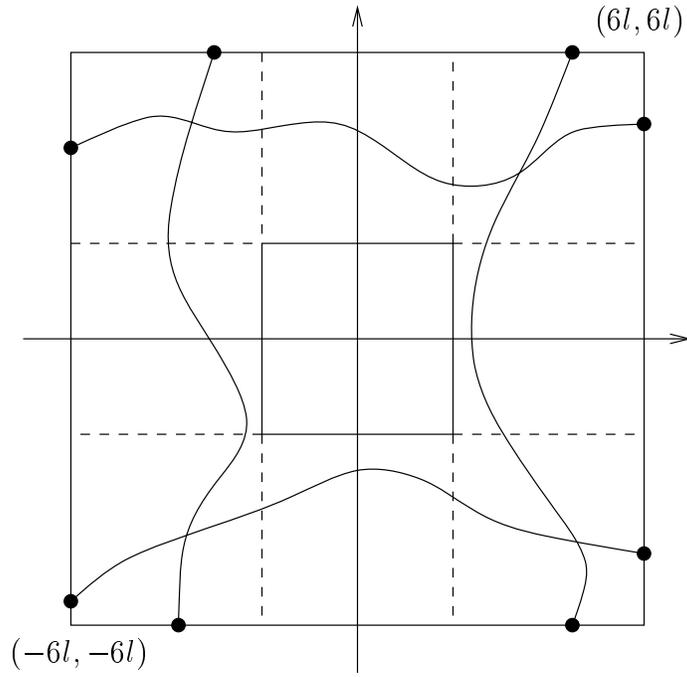


FIG. 9: Quatre chemins ouverts traversant des rectangles $2l \times 6l$ dont l'union contient un circuit ouvert de $A(l)$ qui entoure l'origine.

Démonstration du lemme 3.2. Le but est ici de construire un chemin traversant de gauche à droite le rectangle $B(\frac{3}{2}l, l)$ en utilisant des chemins ouverts traversant des carrés de côté $2l$.

Nous allons commencer par introduire la notion de « plus bas » chemin ouvert d'un rectangle. Si on s'intéresse à l'ensemble \mathcal{C} des chemins ouverts traversant $B(l)$ de gauche à droite, on peut définir sur \mathcal{C} un ordre partiel, en remarquant que chaque chemin de \mathcal{C} divise le rectangle $B(l)$ en deux parties. Si π_1 et π_2 sont deux chemins de \mathcal{C} , on dira que $\pi_1 \leq \pi_2$ si les arêtes de π_1 sont situées dans la région de $B(l)$ située sous π_2 . Par des considérations géométriques (cf figure 10), l'union des ensembles d'arêtes constituant deux chemins distincts π_1 et π_2 de \mathcal{C} contient un chemin π_3 de \mathcal{C} tel que $\pi_3 \leq \pi_1$ et $\pi_3 \leq \pi_2$. Il s'ensuit donc que la réunion de toutes les arêtes des chemins de \mathcal{C} contient un chemin Π vérifiant $\Pi \leq \pi$ pour tout autre $\pi \in \mathcal{C}$. Π est le plus bas chemin traversant $B(l)$. Il est unique, et on peut voir que sa valeur ne dépend que de l'état des arêtes qui sont en-dessous de lui : en effet, pour trouver Π , on « explore » le carré $B(l)$ en partant du coin inférieur gauche, et on essaye de rallier la droite en utilisant les arêtes les plus basses possibles. Cela permet de voir qu'on trouve la valeur de Π en ne connaissant que l'état des arêtes situées en-dessous de lui. Cette propriété est similaire à celle vérifiée par un temps d'arrêt d'une chaîne de Markov.

Définissons maintenant quelques ensembles et événements. Soit \mathcal{T} l'ensemble des chemins de $B(l)$ traversant $B(l)$ de gauche à droite sans utiliser d'arêtes du bord de $B(l)$. Chaque chemin π de \mathcal{T} divise $B(l)$ en deux parties, comme vu précédemment. Pour $\pi \in \mathcal{T}$, on note $(0, y_\pi)$ le dernier sommet de l'axe des ordonnées qu'on rencontre lorsqu'on parcourt π de gauche à droite. Soit alors \mathcal{T}^- (respectivement \mathcal{T}^+) le sous-ensemble de \mathcal{T} constitué des chemins vérifiant $y_\pi \leq 0$ (respectivement $y_\pi \geq 0$). Pour $\pi \in \mathcal{T}$, on note π_r le sous-chemin de π joignant $(0, y_\pi)$ au côté droit de $B(l)$. Soit π'_r le chemin symétrique de π_r par rapport à la droite verticale d'abscisse l , et soit $\pi_r \cup \pi'_r$ le chemin obtenu en prolongeant π_r par π'_r . Ce chemin traverse le carré $B(l)' = [0, 2l] \times [-l, l]$

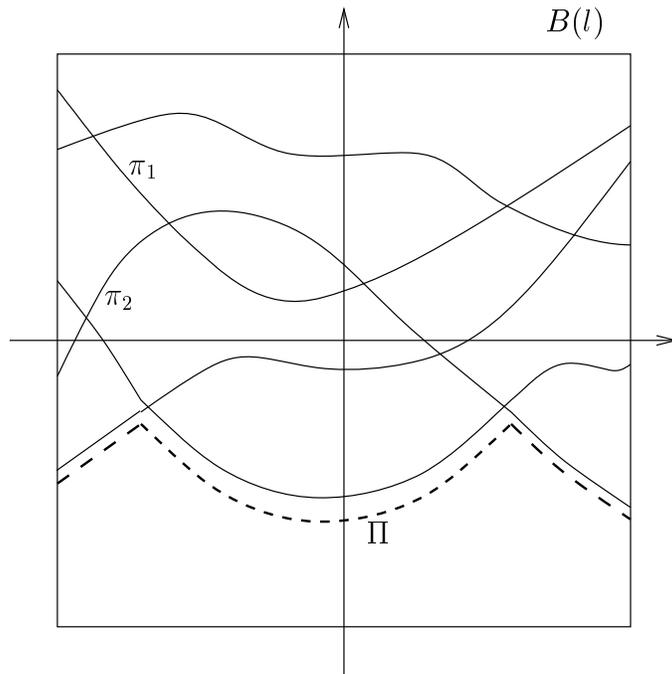


FIG. 10: On voit que l'union de π_1 et π_2 contient un chemin π_3 en-dessous d'eux. Le chemin en pointillés est le plus bas chemin ouvert traversant $B(l)$.

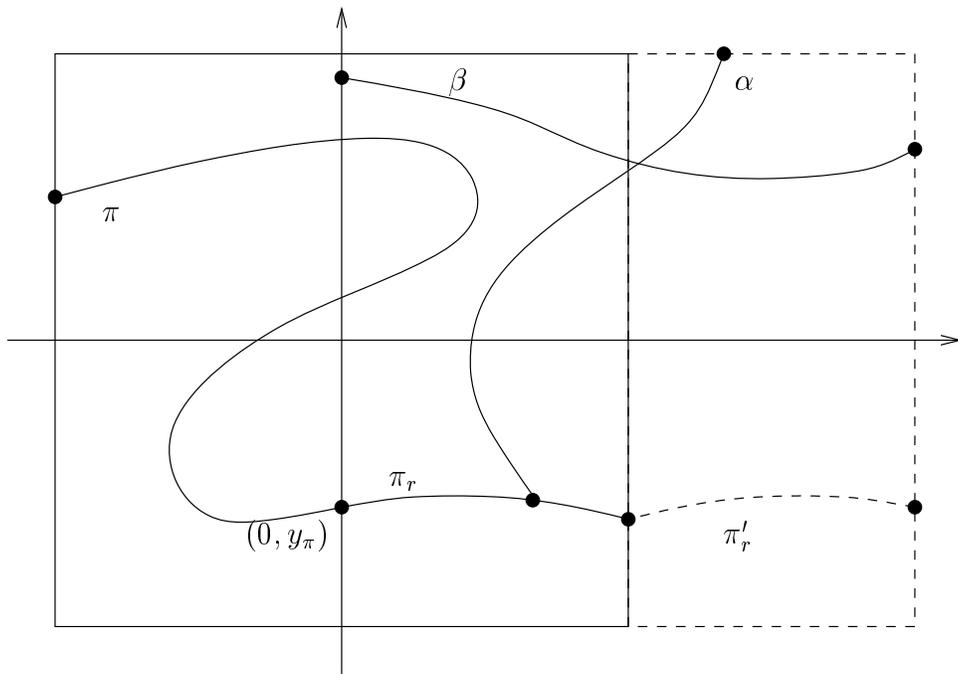


FIG. 11: π traverse $B(l)$, et coupe l'axe vertical en $(0, y_\pi)$ pour la dernière fois. α garantit l'occurrence de l'événement M_π^- , et β celle de N^+ .



de gauche à droite ; la figure 11 donne une illustration de ces notations. Pour tout $\pi \in \mathcal{T}$, on note $U(\pi)$ le sous-graphe de $B(l)'$ situé au-dessus de $\pi_r \cup \pi_r'$.

Nous allons nous intéresser aux événements suivants. Soit L^- (respectivement L^+) l'événement garantissant l'existence d'un chemin ouvert π dans \mathcal{T}^- (respectivement dans \mathcal{T}^+) ; on peut dès lors remarquer que $L^- = \{y_\Pi \leq 0\}$. Pour $\pi \in \mathcal{T}$, on note L_π l'événement « π est le plus bas chemin traversant $B(l)$ de gauche à droite », et A_π l'événement « π est ouvert ». Pour $\pi \in \mathcal{T}$, on note M_π l'événement assurant l'existence d'un chemin ouvert dans $U(\pi)$ joignant $\pi_r \cup \pi_r'$ au côté supérieur de $B(l)'$; on note M_π^- (respectivement M_π^+) l'événement garantissant l'existence d'un tel chemin partant de π_r (respectivement de π_r'). Enfin, on note N l'événement « Il existe un chemin traversant $B(l)'$ de gauche à droite », et N^- (respectivement N^+) l'événement assurant qu'un tel chemin existe avec sa première extrémité située sur la partie négative (respectivement positive) de l'axe des ordonnées.

Nous allons utiliser ces événements de la manière suivante. Supposons que pour un chemin $\pi \in \mathcal{T}$, l'événement $A_\pi \cap M_\pi^- \cap N^+$ ait lieu, et regardons la figure 11 qui donne une idée de la situation. Il est clair d'après la figure que cet événement entraîne nécessairement l'existence d'un chemin traversant $B(\frac{3}{2}l, l)$, donc on peut écrire

$$P_p \left(GD \left(\frac{3}{2}l, l \right) \right) \geq P_p \left(N^+ \cap \left(\bigcup_{\pi \in \mathcal{T}^-} [A_\pi \cap M_\pi^-] \right) \right)$$

On va donc chercher à minorer le membre de gauche de cette inégalité. Tout d'abord, l'événement N^+ est croissant, ainsi que

$$G = \bigcup_{\pi \in \mathcal{T}^-} [A_\pi \cap M_\pi^-],$$

car cet événement garantit l'existence d'un chemin ouvert $\pi \in \mathcal{T}^-$ pour lequel M_π^- a lieu. L'inégalité FKG donne donc :

$$P_p \left(GD \left(\frac{3}{2}l, l \right) \right) \geq P_p(N^+)P_p(G).$$

Les événements N^+ et N^- sont croissants, et de même probabilité, donc on peut appliquer l'astuce de la racine carrée :

$$\begin{aligned} P_p(N^+) &\geq 1 - \sqrt{1 - P_p(N^+ \cup N^-)} \\ &= 1 - \sqrt{1 - \tau}, \end{aligned}$$

où $\tau = P_p(GD(l))$. D'autre part,

$$G \supseteq \bigcup_{\pi \in \mathcal{T}^-} [L_\pi \cap M_\pi^-],$$

qui est une union d'événements disjoints, donc

$$P_p(G) \geq \sum_{\pi \in \mathcal{T}^-} P_p(M_\pi^- | L_\pi)P_p(L_\pi).$$

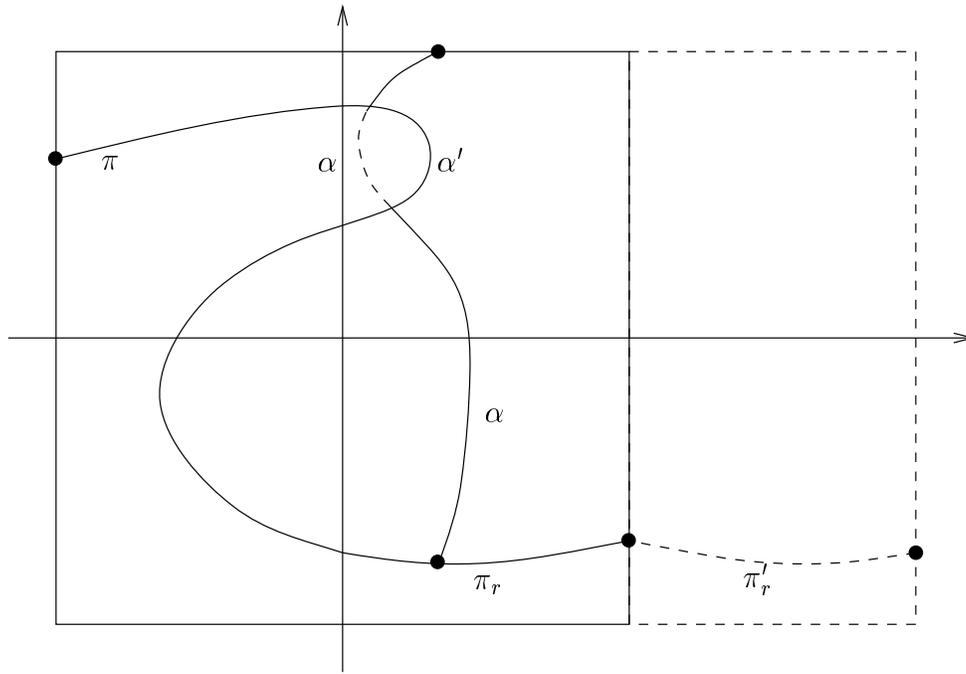


FIG. 12: Le chemin α qui réalise M_π^- passe sous π , mais on peut le remplacer par α' qui réalise le même événement sans passer sous π , en utilisant une partie de π .

Il reste maintenant à minorer cette dernière probabilité. Pour cela, remarquons la chose suivante : l'événement L_π ne dépend que de l'état des arêtes situées sous le chemin π ; et l'événement M_π^- s'exprime, lui, en terme d'arêtes dans $U(\pi)$. Ces deux événements sont donc indépendants dès que ces deux ensembles d'arêtes sont disjoints, on a alors

$$P_p(M_\pi^- | L_\pi) = P_p(M_\pi^-).$$

Si ces deux ensembles ne sont pas disjoints, cela signifie que le chemin π traverse plusieurs fois l'axe vertical. Dans ce cas, dire qu'il y a un chemin joignant π_r au côté supérieur de $B(l)'$ revient à dire qu'il y a un tel chemin dans la partie supérieure de $B(l)'$ privée des arêtes situées sous le chemin π . En effet, si on suppose que π est le plus bas chemin traversant $B(l)$ de gauche à droite, il est ouvert, donc si on a un chemin qui joint π_r au côté supérieur de $B(l)'$ en empruntant des arêtes situées sous π , on a alors un tel chemin qui lui, n'emprunte plus ces arêtes : il suffit en effet de remplacer les tronçons du chemin initial qui passent sous π par des sous-chemins de π adaptés comme sur la figure 12. On a donc dans ce cas,

$$P_p(M_\pi^- | L_\pi) \geq P_p(M_\pi^-),$$

ce qui est finalement assez intuitif : si π est ouvert et a des arêtes dans $U(\pi)$, il est plus facile de construire un chemin dans $U(\pi)$ car il y a déjà des arêtes ouvertes, celles de π .

On applique alors l'atuce de la racine carrée aux événements M_π^- et M_π^+ qui sont croissants et



de même probabilité :

$$\begin{aligned}
P_p(M_\pi^-) &\geq 1 - \sqrt{1 - P_p(M_\pi^- \cup M_\pi^+)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - P_p(M_\pi)} \\
&\geq 1 - \sqrt{1 - \tau}
\end{aligned}$$

où $\tau = P_p(GD(l))$, puisque M_π a lieu dès qu'on a un chemin qui traverse $B(l)'$ de haut en bas.

On reporte maintenant les inégalités obtenues pour minorer $P_p(GD(\frac{3}{2}l, l))$:

$$\begin{aligned}
P_p\left(GD\left(\frac{3}{2}l, l\right)\right) &\geq P_p(N^+)P_p(G) \\
&\geq (1 - \sqrt{1 - \tau}) \sum_{\pi \in \mathcal{T}^-} P_p(M_\pi^- | L_\pi) P_p(L_\pi) \\
&\geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^2 \sum_{\pi \in \mathcal{T}^-} P_p(L_\pi), \quad \text{or } \sum_{\pi \in \mathcal{T}^-} P_p(L_\pi) = P_p(L^-) \\
&\geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^2 P_p(L^-)
\end{aligned}$$

et on applique l'astuce de la racine carrée à L^+ et L^- qui sont croissants et de même probabilité :

$$\begin{aligned}
P_p(L^-) &\geq 1 - \sqrt{1 - P_p(L^- \cup L^+)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - \tau}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$P_p\left(GD\left(\frac{3}{2}l, l\right)\right) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3.$$

□

Démonstration de Russo-Seymour-Welsh. La minoration du théorème découle directement des lemmes précédents.

$$\begin{aligned}
P_p(O(l)) &\geq P_p(GD(3l, l))^4 && \text{d'après (4)} \\
&\geq P_p(GD(l))^4 P_p(GD(2l, l))^8 && \text{d'après (3)} \\
&\geq P_p(GD(l))^{12} P_p\left(GD\left(\frac{3}{2}l, l\right)\right)^{16} && \text{d'après (2)} \\
&\geq \tau^{12} (1 - \sqrt{1 - \tau})^{48} && \text{d'après (1)} \\
&= (\tau(1 - \sqrt{1 - \tau})^4)^{12}
\end{aligned}$$

□

3.3 Applications

Dans la première section, on s'est servi de circuits dans le graphe dual entourant l'origine pour minorer la probabilité que celle-ci soit dans une composante connexe infinie. On peut également s'en servir pour majorer la probabilité pour l'origine d'être reliée au bord ∂B_l d'un carré de côté $2l$. En effet, si 0 est relié au bord du carré de côté $2l$, il n'y a pas de circuits fermés dans un des anneaux l'entourant dans le graphe dual. Si on pose $l = 3^n$, pour un entier n , on dispose de n anneaux de la forme $A(3^k)$, pour k compris entre 1 et n . Alors,

$$\begin{aligned} P_p(0 \leftrightarrow \partial B_l) &\leq P_{1-p} \left(\bigcap_{k=1}^n \overline{O(3^k)} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n (1 - P_{1-p}(O(3^k))) \quad \text{car les événements sont indépendants} \\ &\leq \prod_{k=1}^n (1 - \{\tau_k(1 - \sqrt{1 - \tau_k})^4\}^{12}) \end{aligned}$$

en posant $\tau_k = P_{1-p}(GD(3^k))$. Notons qu'on s'est ici restreint aux circuits dans $A(3^k)$ qui n'empruntent pas le bord intérieur de l'anneau, afin d'avoir l'indépendance des événements. Le résultat obtenu est remarquable : en effet, dès que τ_k est minorée indépendamment de k par une constante strictement positive, la probabilité pour l'origine d'être reliée au bord du carré $B(l)$ tend vers 0 quand $l \rightarrow \infty$. Dans ce cas, on a $\theta(p) = 0$, d'où $p_c \geq p$.

Or, on a prouvé que pour $p = \frac{1}{2}$, $\tau_k \geq \frac{1}{4}$ pour tout k . On a donc $\theta(\frac{1}{2}) = 0$, ce qui entraîne que

$$p_c \geq \frac{1}{2}.$$

Il y a en fait égalité, mais l'inégalité inverse est bien plus dure à démontrer...

Conclusion

Cet aperçu de la percolation, bien que très élémentaire, nous a permis, au moins en dimension deux, d'estimer la probabilité d'existence de chemins traversant des rectangles finis, et de voir que dans certains cas, cette probabilité peut-être uniformément éloignée de 0 par rapport à la taille du rectangle. La percolation n'en demeure pas moins un domaine de recherche très vivace, qui comporte de nombreuses questions ouvertes. On ne connaît par exemple pas de manière exacte la valeur de $p_c(d)$ pour $d \geq 3$. On dispose néanmoins d'un équivalent quand $d \rightarrow \infty$:

$$p_c(d) \sim \frac{1}{2d},$$

qui est la borne inférieure obtenue lors de la démonstration de l'existence de p_c .

On peut aussi se demander s'il existe une composante ouverte infinie au point critique. On a vu dans la première partie que cela dépend de la valeur de la probabilité $\theta(p)$ que 0 soit dans un domaine ouvert infini. Actuellement, on sait que $\theta(p_c) = 0$ pour $d = 2$ et $d \geq 19$, et on pense qu'il en est de même en toute dimension. On peut également s'intéresser à la taille moyenne du domaine ouvert contenant 0 pour $p < p_c$, et à la taille moyenne des domaines finis contenant 0 pour $p > p_c$,



le point intéressant étant bien sûr le comportement de toutes ces fonctions au voisinage du point critique.

Enfin, l'étude de la troisième section sur la probabilité d'existence de chemins traversant des rectangles finis nous permet une conclusion optimiste : la probabilité pour l'eau de traverser le réseau constitué des grains de café est significative, et on a de bonnes chances de pouvoir se faire un bon café !

Références

- [1] **Geoffrey Grimmett**, *Percolation*, Springer (juillet 1999).

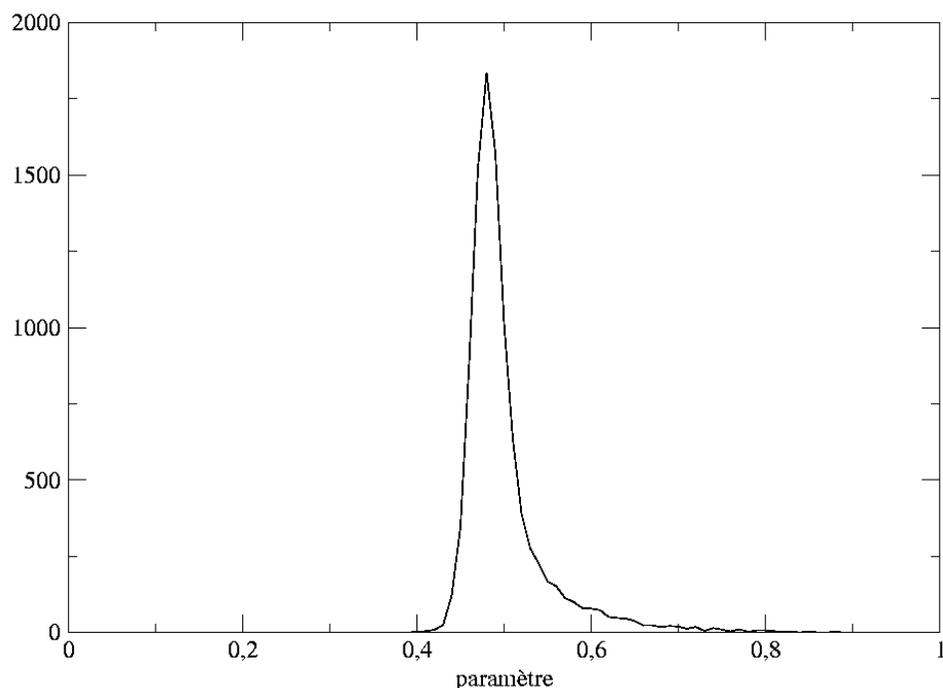


FIG. 13: Seuil de percolation pour un carré 100×100 , sur 10000 tests.

Les simulations ont toutes été réalisées en CAML. Le petit film en bas à droite montre l'évolution du domaine ouvert contenant l'origine au voisinage du point critique lorsqu'on augmente p .

Nous tenons à remercier tout particulièrement Vincent Beffara pour ses conseils précieux et pour sa disponibilité.