ENS Ulm

Mémoire de 1ère année

Nouvelles techniques dans l'étude des frontières naturelles et leurs applications.

Auteurs :
Gauthier Gidel et Florestan Martin-Baillon

Dirigé par :
Viviane Baladi

Remerciements à :
Giulio Tiozzo et David Sauzin

Remerciements Spéciaux à :
Viviane Baladi

18 juin 2014

L'étude des prolongements analytiques des fonctions holomorphes prend une place importante dans la théorie de l'analyse complexe. J. Breuer et B.Simon dans [BS11] s'intéressent au prolongements en dehors du cercle unité de fonctions analytiques. Pour notre part nous nous sommes intéressés en premier lieu aux concepts nouveaux introduits dans l'article de Breuer et Simon [BS11]. Ces derniers ont défini les notions de *limites droites* et de suites *sans réflexion* (définitions 1.2 et 1.3) qui s'appliquent à l'étude des *prolongements analytiques* et des *frontières naturelles* (définition 1.1). Nous considérons aussi d'autres types de prolongements moins forts mais moins contraignants comme le *prolongement rrl* (définition 2.1) défini dans l'article [ST14] et le *prolongement monogénique* (définition 2.4) mais aussi des exemples comme les *séries de Poincaré* (équation (10)). Nous allons tout d'abord définir les notions importantes pour notre exposé, puis nous allons démontrer plusieurs théorèmes, certains classiques et d'autre plus récents sur les fonctions analytiques complexes à coefficients bornés et enfin nous allons montrer quelques applications de ces théorèmes entres autres aux problèmes des séries lacunaires, des séries aléatoires et du prolongement rrl .

Dans toute la suite on pose $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert, $\mathbb{E} = (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup \{\infty\}$, $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ et on note

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

avec

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = M < +\infty,$$

donc la fonction f est définie et analytique au moins sur $\mathbb{D}$.

1 Frontières Naturelles

1.1 Définitions

L'objectif cette partie est de définir les notions de *frontière naturelle forte*, de *limite droite* et de suite *sans réflexion* qui sont nécéssaires pour la suite de l'exposé (ces notions ont été introduites dans [BS11]). Tout d'abord la plus classique, celle de frontière naturelle :

Définition 1.1. On dit que $\mathbb{S}$ est la *frontière naturelle* de f si, pour tout $z_0 \in \mathbb{S}$ et pour tout $\delta > 0$, f n'a pas de prolongement analytique sur $\{z \mid |z - z_0| < \delta\}$.

La frontière naturelle forte est un type de frontière plus contraignant que la frontière naturelle classique.

Définition 1.2. On dit que $\mathbb{S}$ est la *frontière naturelle forte* de f si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha < \beta$, on a $\sup\limits_{0<r<1} \int_\alpha^\beta |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \infty$.

Introduisons ensuite le concept de limite droite qui sera très utile pour caractériser les frontières naturelles.

Définition 1.3. 1. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est une *limite droite* de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si il existe $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $n_j \to \infty$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$b_n = \lim_{j\to\infty} a_{n+n_j}.$$

2. Soit f_+ (resp f_-) définie sur $\mathbb{D}$ (resp $\mathbb{E}$) par :

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \ f_-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n z^n.$$

Si $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une limite droite de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on dit alors que (f_+, f_-) est une limite droite de f associée à $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (que l'on note aussi (f_b^-, f_b^+), cf partie 2).

Remarque 1. Si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée alors par compacité il existe une limite droite (voir [BMS14]).

Définition 1.4. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée. Soit I un intervalle $\mathbb{S}$, alors $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite *sans réflexion* sur I si f_b^+ possède un prolongement analytique sur $\mathbb{D} \cup \mathbb{E} \cup I$ tel que l'on ait :

$$\forall z \in \mathbb{E}, \qquad f_b^+(z) = f_b^-(z). \tag{1}$$

Remarque 2. Il suffit que f_+ soit prolongeable sur un voisinage V de I tel que la propriété (1) soit vérifiée sur $V \cap \mathbb{E}$

1.2 Théorèmes

Nous allons ici démontrer certains résultats sur les fonctions analytiques complexes à coefficients bornés, notre objectif étant de démontrer le théorème de Breuer et Simon suivant

Théorème 1.1 ([BS11]). *Si pour tout intervalle I de $\mathbb{S}$ il existe une limite droite qui ne soit pas sans réflexion sur I, alors f admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle forte.*

Ce théorème permet d'obtenir des résultats concernant les frontières naturelles et les frontières naturelles fortes d'une fonction en en exhibant une limite droite sans réflexion, ce qui peut être dans certains cas beaucoup plus aisé. Nous verrons cela avec les exemples de la sous-partie 1.3. Afin de démontrer ce théorème, nous allons énoncer et démontrer une version plus faible :

Théorème 1.2 ([BS11]). *Si pour tout intervalle I de $\mathbb{S}$ il existe une limite droite qui ne soit pas sans réflexion sur I, alors f admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle.*

Pour démontrer le théorème 1.2 on utilise le résultat classique suivant. (cf [Rie16])

Lemme 1 (de Riesz). *On pose*

$$f_+^{(N)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} z^n, \tag{2}$$

et

$$f_-^{(N)}(z) = \sum_{n=-1}^{-N} a_{n+N} z^n, \tag{3}$$

respectivement pour $z \in \mathbb{D}$ *et* $z \in \mathbb{C}^*$ *On suppose que* f *admet un prolongement analytique sur un secteur*

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \mid \arg(z) \in [\alpha, \beta]\}, \tag{4}$$

alors on a :

$$\sup_{z \in S, N \in \mathbb{N}} |f_+^N(z)| < \infty.$$

Preuve du lemme de Riesz. Par définition de $f^{(N)}$ on peut remarquer que

$$f_+^{(N)}(z) + f_-^{(N)}(z) = z^{-N} f(z),$$

de sorte que $f_+^{(N)}$ se prolonge analytiquement sur tout les domaines où f admet un prolongement. Soit $\tilde{S}$ défini de la même manière que S avec $\tilde{\alpha} < \alpha$ et $\tilde{\beta} > \beta$ choisis de sorte que $\tilde{S}$ soit encore dans le domaine du prolongement analytique de f. On pose $z_1 = e^{i\tilde{\alpha}}$ et $z_2 = e^{i\tilde{\beta}}$, et pour z dans $\tilde{S}$

$$g_\pm^{(N)}(z) = (z - z_1)(z - z_2) f_{+/-}^{(N)}(z).$$

Par comparaison avec la série géométrique, on a les majorations :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad |f_+^{(N)}(z)| \leq \frac{M}{1 - |z|}, \tag{5}$$

$$\forall z \in \mathbb{E}, \qquad |f_-^{(N)}(z)| \leq \frac{M}{1 - |z|^{-1}}. \tag{6}$$

On cherche à majorer $|f_+^{(N)}|$ sur S. Par le principe du maximum il suffit de le faire sur ∂S. Nos majorations ne sont pas efficaces au voisinages des deux points de modules 1 sur ∂S, c'est pourquoi on va majorer $|g_+|$ sur $\partial \tilde{S}$, cela impliquant évidemment le résultat que l'on veut. On a pour $z \in \mathbb{D}$

$$|g_+^{(N)}(z)| \leq \frac{M|z - z_1||z - z_2|}{1 - |z|}.$$

La fonction majorante est continue sur $\partial \tilde{S} \setminus \{z_1, z_2\}$ et se prolonge en fait par continuité en z_1 et z_2. Comme $\partial \tilde{S}$ est compacte, on a une majoration uniforme des $|g_+^{(N)}(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $N \in \mathbb{N}$. On obtient le même résultat pouer g_-^N sur $\mathbb{E}$, et par l'identité (1.2) toute majoration de g_-^N donne une majoration de g_+^N sur $\mathbb{E}$. □

On rappelle le théorème de Montel (démontré entre autres dans [Dol90]) qui est utilisé dans démonstration du théorème 1.2 proposée :

Théorème 1.3 (Théorème de Montel)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, Soit (u_n) une suite de fonctions holomorphes sur U. Si cette suite est uniformément bornée sur tout compact de U, alors il existe une sous-suite $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact de U vers une limite u holomorphe sur U.*

Démonstration du théorème 1.2. On va montrer la contraposée. On suppose donc que f admet un prolongement analytique au voisinage de I. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $a_{N_j+n} \to b_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et soient f_+ et f_- définies en (2) et (3). Alors

$$f_+^{(N_j)}(z) \to f_+(z),$$

(respectivement $f_-^{(N_j)}(z) \to f_-(z)$) uniformément sur tout compact inclus dans $\mathbb{D}$ (respectivement inclus dans $\mathbb{E}$).

Si f est prolongeable analytiquement sur un voisinage de $I = \{e^{i\theta} \mid \alpha_0 < \theta < \beta_0\}$, alors on peut appliquer le lemme de Riesz sur un S de la forme (4) avec $\alpha_0 < \alpha < \beta < \beta_0$ et un $R > 1$ convenable (dépendant de α et β). Ainsi, $\sup\limits_{\substack{z\in S\\ N\in\mathbb{N}}} |f_+^{(N)}| < \infty$ et par le théorème de Montel (avec $U = S$), $f_+^{(N_j)}$ converge uniformément sur S vers un élément holomorphe sur S. Donc $f_+(z)$ admet un prolongement analytique sur S. De plus par l'équation (1.2) il vient,

$$\forall z \in S \setminus \bar{\mathbb{D}}, \qquad f_+(z) = f_-(z).$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sans réflexion sur I. □

Notons dans toute la suite $\hat{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1, \arg(z) \in]\alpha; \beta[\}$ et $J = \{\theta \mid \alpha < \theta < \beta\}$. Il découle de résultats d'analyse classiques que l'on retrouve dans [Dur00] chapitre 10 la proposition suivante, que nous utiliserons pour la démonstration du théorème 1.1 :

Proposition 1.1. *Si f vérifie*

$$\sup_{0<r<1} \int_\alpha^\beta |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty, \tag{7}$$

alors :

- *f a une limite radiale $f\left(e^{i\theta}\right)$ pour presque tout $\theta \in]\alpha; \beta[$,*
- *$f\left(e^{i\theta}\right)$ est intégrable sur J,*
- *f admet une représentation intégrale, pour $z \in \hat{S}$:*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\hat{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

et l'intégrale de droite est nulle pour $z \notin \bar{\hat{S}}$.

Démonstration du théorème 1.1. On va montrer la contraposée. Supposons donc que f vérifie (7). On pose :

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\exp(iJ)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$
$$A(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

pour $z \notin \exp(iJ)$ et $z \notin R$ respectivement (où R est l'union des rayons $\left[0; e^{i\alpha}\right]$ et $\left[e^{i\beta}; 0\right]$).Les fonctions F et A sont analytiques sur leurs domaines de définitions et on a d'après la proposition 1.1, pour $z \in \hat{S}$:

$$f(z) = F(z) + A(z). \tag{8}$$

Comme f et F sont analytiques sur $\mathbb{D}$, la fonction A se prolonge analytiquement sur $\mathbb{D}$. En développant la série géométrique dans la définition de F, on trouve :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad F(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad b_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\exp(iJ)} f(\zeta)\,\zeta^{-n-1}d\zeta.$$

Comme f est intégrable sur J, les coefficients (b_n) tendent vers 0 en $\pm\infty$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.
La fonction A admet un prolongement analytique à travers J. Or les coefficients du développement de f en 0 diffèrent de ceux de A d'une suite tendant vers 0, donc f et A ont les mêmes limites droites. Comme les limites droites de A sont sans réflexions à travers J d'après le théorème 1.2, celles de f aussi. $\square$

Le théorème 1.1 permet de montrer l'existence d'une frontière naturelle forte en exhibant des limites droites sans réflexions. Le théorème suivant donne une condition suffisante qui est utilisable en pratique.

Théorème 1.4 ([BS11]). *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée possédant deux limites droites $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que :*

$$b_0 \neq c_0$$

et au moins une des deux hypothèses suivantes est réalisée :

- $\exists k < 0 \mid \forall j \leq k, \qquad b_j = c_j.$
- $\exists k > 0 \mid \forall j \geq k, \qquad b_j = c_j.$

Alors f admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle forte.

Démonstration. On peut supposer que $k = -1$ et qu'on a $b_j = c_j$ pour tout $j < 0$. Alors $f_b^- = f_c^-$ mais $f_b^+ \neq f_c^+$ car $b_0 \neq c_0$. Donc pour tout intervalle I de $\mathbb{S}$, la suite (b_n) n'est pas sans réflexions et f admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle forte d'après le théorème 1.1. $\square$

1.3 Exemples d'applications

Pour montrer la puissance des outils que nous venons d'introduire nous allons les appliquer à trois théorèmes classiques sur l'existence de frontière naturelle. Bien que ces résultats ne soient pas nouveaux, l'intérêt est de donner un cadre unifié de preuve et des démonstrations plus courtes qui donnent directement des frontières naturelles fortes.

1.3.1 Séries lacunaires

Une série lacunaire est une série qui possède "beaucoup" de coefficients nuls. Historiquement, les séries lacunaires sont les premiers exemples de fonctions admettant une frontière naturelle avec la série de Weierstrass $\sum_{k\in\mathbb{N}} z^{k!}$. Nous pouvons énoncer un résultat général qui est une version plus forte d'un théorème de Fabry vu dans [Fab96] :

Théorème 1.5. *Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui vérifie $p_{k+1} - p_k \to \infty$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée qui vérifie $\liminf|a_k| > 0$. Alors $\sum_{k\geq 0} a_k z^{p_k}$ admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle forte.*

Ce résultat est une conséquence de :

Théorème 1.6 ([BS11])**.** *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $n_j \to \infty$ qui vérifient*
- *pour tout $k < 0$ on a $a_{k+n_j} \to 0$,*
- $\liminf|a_{n_j}| > 0$.

Alors $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle forte.

Démonstration du théorème 1.5. On écrit $\sum_{k\geq 0} a_k z^{p_k} = \sum_{k\geq 0} A_k z^k$ puis on applique le théorème 1.6 à la suite (A_k) et à la suite (p_k). □

Démonstration du théorème 1.6. Par compacité on peut extraire de (n_j) une suite (m_j) telle que
- pour tout $k < 0$ on a $a_{k+m_j} \to 0$,
- $\lim|a_{m_j}| > 0$.

et donc la limite droite $b_n = \lim a_{n+m_j}$ est sans réflexion : on a $f_b^- = 0$ et $f_b^+ \neq 0$. □

On peut remarquer la concision des démonstrations.

1.3.2 Série à coefficients dans un ensemble fini

On énonce un résultat qui donne dans certains cas l'existence d'une frontière naturelle forte pour les séries à coefficients dans un ensemble fini.

Théorème 1.7. *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où les a_n ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Alors, soit (a_k) est une suite périodique à partir d'un certain rang, soit $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ admet $\mathbb{S}$ comme frontière naturelle forte.*

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Szegő (qui l'a énoncé pour une frontière naturelle ordinaire) et dont la preuve se trouve dans [Bie55].

Démonstration. Supposons que la suite ne soit pas périodique à partir d'un certain rang. Soit V l'ensemble fini des valeurs prises par la suite. Pour $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, considérons les blocs $(a_{k+1}, \ldots, a_{k+p})$ de p termes consécutifs de la suite. Il n'y en a qu'un nombre fini donc il existe $Q_p > P_p$ tels que $a_{Q_p+k} = a_{P_p+k}$ pour $k \in \{1, \ldots, p\}$. Si cela est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ alors la suite est ultimement périodique, et l'on a supposé le contraire. Donc il existe $L_p > p$ minimal tel que $a_{P_p+L_p} \neq a_{Q_p+L_p}$. On pose alors $N_p = P_p + L_p$ et $M_p = Q_p + L_p$ qui tendent vers $+\infty$ avec p et on a pour $n \in \{-p, \ldots, -1\}$:

$$a_{k+N_p} = a_{k+M_p},$$
$$a_{N_p} = a_{M_p}.$$

Par compacité on peut alors extraire deux limites droites qui vérifient les hypothèses du théorème 1.4. □

1.3.3 Séries entières aléatoires

Une application importante des résultats de cette théorie concerne les séries entières de processus aléatoires. En effet, une nouvelle fois grâce aux théorèmes démontrés précédemment, on parvient à obtenir l'existence de frontières naturelles fortes. Dans [BS11] il est dit qu'auparavant des théorèmes similaires ont été démontrés mais qu'ils ne prouvaient que l'existence d'une frontière naturelle. On pourra trouver dans [Kah85] les définitions et les résultats classiques concernant les séries entières aléatoires. Dans la suite nous utiliserons $\mathbb{E}$ pour désigner l'espérance, $\mathbb{V}$ pour la variance et $\mathbb{P}$ pour la mesure de probabilité. Dans cette partie nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.8 ([BS11])**.** *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que*

1. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|X_k\|_\infty < \infty$
2. *Il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice, telle que*

$$\limsup_{k\to\infty} \mathbb{V}[X_{\phi(k)}] > 0.$$

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} X_k z^k$ admet une frontière naturelle forte presque sûrement.

Voici un lemme nécessaire à sa démonstration.

Lemme 2 ([BS11])**.** *1. Pour tout $K > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ il existe $K_m > 0$ tel que pour toute variable aléatoire X vérifiant $\|X\|_\infty \leq K$, il existe $z_m \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\mathbb{P}\left(|X - z_m| \leq \frac{1}{m}\right) \geq K_m.$$

2. *Pour tout K et $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N}$ il existe $\tilde{K}_m > 0$ tel que pour toute variable aléatoire X vérifiant $\|X\|_\infty \leq K$ et $\mathbb{V}(X) \geq \sigma$, il existe z_m et $\omega_m \in \mathbb{C}$ vérifiant*
$$|z_m - \omega_m| \geq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2}$$
tel que
$$\mathbb{P}\left(|X - z_m| \leq \frac{1}{m}\right) \geq \tilde{K}_m \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\left(|X - \omega_m| \leq \frac{1}{m}\right) \geq \tilde{K}_m.$$

Preuve du lemme 2. 1. Par compacité, on recouvre $\{z \mid |z| \leq K\}$ avec un nombre fini de disques de rayon $\frac{1}{m}$. Au moins un de ces disques possède une probabilité supérieure à $K_m = (N_m)^{-1}$ (puisque la somme des probabilités de ces N_m disques est supérieure à 1). Le complexe z_m est alors le centre de ce disque.

2. Pour tout $c > 0$ et variable aléatoire Y on a
$$\mathbb{E}(|Y|^2) \leq c^2\mathbb{P}(|Y| \leq c) + ||Y||_\infty^2\mathbb{P}(|Y| > c).$$
Ainsi, en prenant α tel que $\alpha \leq \|X\|_\infty$ et en posant $Y = X - \alpha$ on obtient,
$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}(|X - \alpha|^2) \leq c^2 + (2\|X\|_\infty)^2\mathbb{P}(|X - \alpha| > c).$$
Enfin, en choisissant $c = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{\mathbb{V}(X)}{2}\right)^{1/2}$ il vient,
$$\mathbb{P}\left(|X - \alpha| > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2}\right) \geq \frac{1}{8\|X\|_\infty^2}\mathbb{V}(X) > 0. \tag{9}$$
On utilise alors le point 1. pour trouver z_m tel que $\mathbb{P}(|X - z_m|) \leq \frac{1}{m}) \geq K_m$, en prenant m assez grand pour que $\frac{1}{m} \leq \left(\frac{\mathbb{V}(X)}{2}\right)^{1/2}$. En réitérant la preuve de 1. sur l'ensemble de probabilité > 0 (d'après (9))
$$\left\{|X - z_m| \geq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2}\right\}$$
on obtient $\omega_m \in \mathbb{C}$ tel que $|z - \omega_m| > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2}$ et tel que $\mathbb{P}(|X - \omega_m| \leq \frac{1}{m}) \geq \tilde{K}_m$ avec $\tilde{K}_m \leq K_m$.

□

Preuve du théorème 1.8. Fixons $\sigma > 0$ et ϕ une extractrice telle que $\mathbb{V}(X_{\phi(n)}) \geq \sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\phi(n+1) - \phi(n) \to \infty$. Appliquons le point 1. du lemme 2 à X_n Pour tout $n \notin \phi(\mathbb{N})$. Ainsi, on obtient $z_n^{(m)}$ tel que
$$\mathbb{P}\left(|X_n - z_n^{(m)}| \leq \frac{1}{m}\right) \geq K_m.$$

Par compacité, on peut extraire à nouveau $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ (nous l'appellerons à nouveau ϕ pour alléger les notations) tel que pour tout m et $k \neq 0$, $z_{\phi(n)+k}^{(m)} \underset{n\to\infty}{\to}$

$z^{(m)}$. En appliquant le point 2. du lemme 2 à $X_{\phi(n)}$ on trouve $\omega_n^{(m)}$ et $\zeta_n^{(m)}$ tels que

$$\mathbb{P}\left(|X_{\phi(n)} - \omega_n^{(m)}| \leq \frac{1}{m}\right) \geq \tilde{K}_m, \quad \mathbb{P}\left(|X_{\phi(n)} - \zeta_n^{(m)}| \leq \frac{1}{m}\right) \geq \tilde{K}_m$$
$$\text{et} \qquad |\zeta_n^{(m)} - \sigma_n^{(m)}| \geq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2}.$$

Par compacité, on peut de la même manière trouver une sous suite telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, , on a $\zeta_j^{(m)} \to \zeta^{(m)}$ et $\sigma_j^{(m)} \to \sigma^{(m)}$, et où $|\zeta^{(m)} - \sigma^{(m)}| \geq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2}$. En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$|X_{\phi(n)} - \omega_j^{(m)}| \leq \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad |X_{\phi(n)+k} - z_{\phi(n)+k}^{(m)}| \leq \frac{1}{m} \quad \text{infiniment souvent } p.s.$$

De même pour $\zeta_n^{(m)}$. Ainsi, par compacité, on peut trouver ψ extractrice telle que $z_k^{\psi(m)} \to z_k$ et $\omega^{\psi(m)} \to \omega$. En faisant tendre m vers l'infini on peut trouver deux limites droites presque sûres $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de X_n telles que

$$\forall k > 0, \quad b_k = c_k = z_k \quad \text{et} \quad b_0 = \omega \neq \zeta = c_0.$$

Finalement, en appliquant le théorème 1.4 il vient que X_n possède une frontière naturelle forte presque sûrement. □

2 Limites à droites renaissantes et séries de pôles simples de Poincaré

Dans [BMS14] , Baladi, Marmi et Sauzin ont introduit la notion de prolongement-rrl (pour *renascent right limit*, c'est-à-dire limite droite renaissante) en s'appuyant sur les outils introduit par Breuer-Simon dans [BS11] :

2.1 Prolongement rrl

Définition 2.1. 1. Une *limite droite renaissante* d'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une limite droite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $b_k = a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

2. Une *fonction rrl-prolongeable* est une fonction holomorphe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ qui admet une limite droite renaissante (g_b^+, g_b^-). Ainsi $g_b^+ = g$ sur $\mathbb{D}$ et g_b^-, qui est holomorphe sur $\mathbb{E}$, est appelé le prolongement rrl de g.

3. Une fonction g rrl-prolongeable est dite uniquement rrl-prolongeable si elle admet un unique prolongement rrl.

Remarque 3. Le prolongement rrl est "plus faible" que le prolongement analytique au sens suivant : lorsque f admet un prolongement analytique en dehors du disque et un prolongement rrl ceux ci coïncident forcement (cf proposition 2.1). Cela nous permet de penser f_- comme un prolongement de f, même quand le cercle unité est une frontière naturelle. M.Sauzin et G.Tiozzo ont étudié dans [ST14] cette notion de prolongement rrl sur des exemples, en particulier sur les séries de pôles simples de Poincaré.

Remarque 4. On peut aussi remarquer que le prolongement rrl tend toujours vers 0 en ∞.

Proposition 2.1 ([ST14])**.** *Soit g une fonction rrl-prolongeable. Alors :*

1. *Soit il existe un arc du cercle unité à travers duquel g admet un prolongement analytique; et alors g est uniquement rrl-prolongeable et tout les prolongements analytiques de g à travers cet arc coïncident avec le prolongement rrl de g.*
2. *Soit le cercle unité est une frontière naturelle pour g.*

Démonstration. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une limite droite renaissante de g. Si il existe un arc au voisinage duquel $g = g_b^+$ admet un prolongement analytique, alors le théorème 1.1 assure que le prolongement rrl coïncide avec le prolongement analytique sur $\mathbb{E}$. □

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité du prolongement rrl dans le cas des séries de pôles simples de Poincaré.

Définition 2.2. Soit $\ell^1(\mathbb{S},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\rho : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ nulles sur un ensemble au plus dénombrable et telles que $\sum_{\lambda\in\mathbb{S}}|\rho(\lambda)| < \infty$.
Soit $\rho \in \ell^1(\mathbb{S},\mathbb{C})$. La série de pôles simples de Poincaré (série PSP) associée à ρ est la fonction définie pour $z \notin \overline{\operatorname{supp}(\rho)}$ par

$$\Sigma_\rho(z) = \sum_{\lambda\in\mathbb{S}} \frac{\rho(\lambda)}{z-\lambda}, \tag{10}$$

et on note Σ_ρ^+ et Σ_ρ^- les restrictions à $\mathbb{D}$ et $\mathbb{E}$.

Nous allons voir que si $\rho(\lambda) \neq 0$ alors Σ_ρ possède une singularité en λ, donc quand $\operatorname{supp}(\rho)$ est dense dans $\mathbb{S}$, le cercle unité est une frontière naturelle pour Σ_ρ^+. L'exemple des séries PSP est donc intéressant car il nous donne deux fonctions sur $\mathbb{D}$ et $\mathbb{E}$ naturellement reliées (définies par la même expression) mais séparées par une frontière naturelle. Nous allons démontrer que Σ_ρ^- est bien le prolongement rrl de Σ_ρ^+.Les démonstrations qui vont suivre sont les nôtres à l'exception du lemme 3. Après avoir étudié les résultats de la première version de l'article [ST14] nous avons trouvé des démonstrations plus courtes et plus générales des résultats qui vont suivre. Elles ont été transmises à D. Sauzin et G. Tiozzo qui les ont utilisées dans la deuxième version de leur article afin de généraliser leur résultats dans des espaces de Banach. Pour toute la suite, on fixe un $\rho \in \ell^1(\mathbb{S},\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{supp}(\rho)$ soit dense dans $\mathbb{S}$.

Théorème 2.1 ([ST14])**.** Σ_ρ^+ *admet un unique prolongement rrl donné par* Σ_ρ^-

Commençons par un lemme important qui permet de retrouver la fonction ρ à partir de la série Σ_ρ^+.

Lemme 3 ([ST14]). *Le produit $(z-\lambda)\Sigma_\rho^+(z)$ tend vers $\rho(\lambda)$ quand z tend vers λ radialement. De plus, la vitesse de convergence ne dépend que de $|\rho|$, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon : \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$ qui ne dépend que de $|\rho|$ telle que $\varepsilon(z) \to 0$ quand z tend vers λ radialement, et qui vérifie*

$$|(z-\lambda)\Sigma_\rho^+(z) - \rho(\lambda)| \leq \varepsilon(z). \tag{11}$$

De ce lemme on déduit immédiatement que l'application $\rho \mapsto \Sigma_\rho^+$ est injective. Aussi, on voit que la singularité de Σ_ρ^+ en λ se comporte comme un pôle de résidu $\rho(\lambda)$ (au moins radialement), d'où le nom PSP donné à la série.

Preuve du lemme 3. Par définition de Σ_ρ^+ il vient immédiatement

$$|\rho(\lambda) - (z-\lambda)\Sigma_\rho^+(z)| \leq \sum_{\lambda' \in \mathbb{S},\, \lambda' \neq \lambda} |\rho(\lambda')| \left| \frac{z-\lambda}{z-\lambda'} \right| = \varepsilon(z). \tag{12}$$

Or, $|\frac{z-\lambda}{z-\lambda'}| \leq 1$ pour z appartenant à $[0;\lambda]$, donc $\varepsilon(z)$ tend vers 0 quand z tend vers λ radialement par convergence dominée. $\square$

Explicitons les coefficients du développement en série de Taylor de Σ_ρ^+ et Σ_ρ^-. En developpant la série géométrique $\frac{1}{z-\lambda}$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{E}$ et en intervertissant la somme double on trouve

$$\Sigma_\rho^+(z) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n, \tag{13}$$

$$\Sigma_\rho^-(z) = \sum_{n<0} -s_n z^n, \tag{14}$$

$$\text{avec} \qquad s_n = -\sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \rho(\lambda)\, \lambda^{-n-1}. \tag{15}$$

On va maintenant montrer successivement l'existence et l'unicité du prolongement rrl.

2.2 Existence dans le théorème 2.1

Preuve de l'existence. Il faut trouver une limite droite de $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite double $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et une suite strictement croissante (k_j) tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la limite de s_{n+k_j} quand j tend vers l'infini soit b_n. De plus on veut que cette limite droite soit renaissante, c'est-à-dire que $b_n = s_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et que le prolongement rrl soit Σ_ρ^-, c'est à dire que $b_n = s_n$ pour tout $n < 0$. On cherche donc (k_j) tel que s_{n+k_j} tende vers s_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or, on a $s_{n+k_j} = -\sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \rho(\lambda)\, \lambda^{-n-1} \lambda^{k_j}$, donc par convergence dominée, comme ρ est sommable, il suffit de trouver (k_j) tel que pour tout $\lambda \in \operatorname{supp}(\rho)$ on ait $\lambda^{k_j} \to 1$. Cela va découler du lemme suivant :

Lemme 4. *Soit G un groupe topologique compact métrisable et $\lambda \in G$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Preuve du lemme. Comme G est compact métrisable, cette suite a une valeur d'adhérence, donc $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice telle que :

$$\lambda^{\varphi(n)} \to \mu, \tag{16}$$

et on peut supposer, quitte à re-extraire, que $\psi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ soit strictement croissante (et donc que $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soit une extractrice). Alors

$$\lambda^{\psi(n)} \to \frac{\mu}{\mu} = 1. \tag{17}$$

Il suffit ensuite de remarquer que $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit est un groupe topologique compact métrisable et que l'on peut considérer $\operatorname{supp}(\rho)$ comme un élément de $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$. □

2.3 Unicité dans le théorème 2.1

Démonstration. On va montrer que si l'on a un prolongement rrl, alors il est forcement donné par Σ_ρ^+, c'est à dire que si il existe (k_j) tel que pour tout $n \geq 0$ on a $s_{n+k_j} \to s_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $s_{n+k_j} \to s_n$. D'après la démonstration de l'existence, il suffit de montrer que pour tout $\lambda \in \operatorname{supp}(\rho)$ on a $\lambda^{k_j} \to 1$.

Posons $\rho_{k_j}(\lambda) = \rho(\lambda)\lambda^{-k_j}$. On a les propriétés suivantes :

- pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a $\Sigma_{\rho_{k_j}}^+(z) = \sum_{n\geq 0} s_{n+k_j} z^n$,
- la fonction $\Sigma_{\rho_{k_j}}^+$ converge simplement vers Σ_ρ^+ par convergence dominée.
- $(z-\lambda)\Sigma_{\rho_{k_j}}^+(z)$ tend vers $\rho_{k_j}(\lambda)$ quand z tend vers λ radialement, uniformément en j. En effet, $|\rho_{k_j}| = |\rho|$, donc d'après le lemme 3, la convergence est uniforme en j.

Cela implique que

$$\rho_{k_j}(\lambda) \to \rho(\lambda)$$

quand j tend vers l'infini. En effet, fixons $\delta > 0$. On a pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |\rho_{k_j}(\lambda) - \rho(\lambda)| &\leq |\rho_{k_j}(\lambda) - (z-\lambda)\Sigma_{\rho_{k_j}}^+(z)| + |\rho(\lambda) - (z-\lambda)\Sigma_\rho^+(z)| \\ &\quad + |(z-\lambda)\Sigma_{\rho_{k_j}}^+(z) - (z-\lambda)\Sigma_\rho^+(z)| \\ &\leq 2\varepsilon(z) + |(z-\lambda)\Sigma_{\rho_{k_j}}^+(z) - (z-\lambda)\Sigma_\rho^+(z)|. \end{aligned}$$

On fixe $z \in [0, \lambda)$ tel que

$$\varepsilon(z) < \delta,$$

puis, comme la fonction $\Sigma_{\rho_{k_j}}^+$ converge simplement vers Σ_ρ, il suffit de choisir j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$ le second terme soit plus petit que δ.

On a montré que

$$\rho_{k_j}(\lambda) \to \rho(\lambda),$$

donc pour tout $\lambda \in \operatorname{supp}(\rho)$ on a $$\lambda^{k_j} \to 1.$$ □

2.4 Prolongement monogène

Nous nous intéressons dans cette partie à un autre type de prolongement, le *prolongement monogène*. La notion de fonction monogène permet de définir une notion de fonction holomorphe sur des ensembles fermés. Dans notre cas, nous allons définir une fonction qui va prolonger la fonction Σ_ρ et être définie sur un sous ensemble de $\mathbb{S}$ de complémentaire de mesure nulle dans $\mathbb{S}$. De plus, l'espace de fonction construit va posséder une propriété de $\mathcal{H}^1$*-quasi-analyticité*, c'est-à-dire qu'une fonction de cet espace est uniquement déterminée par sa restriction à un sous ensemble de mesure linéaire strictement positive. On a ainsi une cohérence entre les restrictions de ces fonctions à $\mathbb{D}$ et $\mathbb{E}$, ce qui va dans le sens des résultats précédents sur le prolongement rrl. La théorie classique des fonctions monogènes de Borel est exposée dans [Bor17].

Définition 2.3 ([MS11])**.** Soit K un compact de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On dit qu'une fonction $f : K \to \mathbb{C}$ continue est $\mathcal{C}^1$-holomorphe s'il existe $f^{(1)} : K \to \mathbb{C}$ continue telle que : pour tout $z \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z_1, z_2 \in K$ tel que $|z_1 - z|, |z_2 - z| \leq \delta$

$$|f(z_2) - f(z_1) - (z_2 - z_1) f^{(1)}(z)| \leq \varepsilon |z_2 - z_1| \tag{18}$$

On note $\mathcal{C}^1(K)$ l'ensemble des telles fonctions.

On peut munir $\mathcal{C}^1(K)$ d'une norme qui en fait un espace de Banach. On définit de la même manière les espaces $\mathcal{C}^k(K)$ pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ces fonctions partagent beaucoup de propriétés des fonctions holomorphes classiques. Par exemple, elles sont holomorphes au sens classique sur l'intérieur de K.

Définition 2.4 ([MS11])**.** Soit (K_j) une suite croissante de compacte de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. L'espace de *fonctions monogènes* associé est l'espace de Fréchet qui est la limite projective des Banach $\mathcal{C}^1(K_j)$. On note

$$\mathcal{M}((K_j)) = \lim_{\leftarrow} \mathcal{C}^1(K_j) \tag{19}$$

C'est un espace de fonctions définies sur $K = \bigcup K_j$.

Pour certaines suites (K_j), l'espace $\mathcal{M}((K_j))$ possède une propriété de $\mathcal{H}^1$-quasi-analyticité. On convient d'appeler *mesure linéaire* la mesure de Hausdorff de dimension 1.

Définition 2.5 ([MS11]). Un espace vectoriel de fonctions E, $K \to \mathbb{C}$ est dit $\mathcal{H}^1$-quasi-analytique si pour tout sous ensemble $L \subset K$ de mesure linéaire strictement positive, l'application $f \mapsto f_{|L}$ est injective.

Étant donné une courbe de Jordan Γ, on sait que son complémentaire a deux composantes connexes dont l'une est bornée et l'autre non. On convient d'appeler *l'intérieur* de Γ la composante connexe bornée et *l'extérieur* la composante non bornée.

Définition 2.6 ([MS11]). On dit que $\left(\Gamma^e, \Gamma^i\right)$ est une *paire imbriquée* si ce sont des courbes de Jordan rectifiables telles que Γ^i est contenue dans l'adhérence de l'intérieur de Γ^e et si la mesure linéaire de $\Gamma^e \cap \Gamma^i$ est strictement positive.

Si $\left(\Gamma^e, \Gamma^i\right)$ est une paire imbriquée, on note $K = K\left(\Gamma^e, \Gamma^i\right)$ la réunion de l'adhérence de l'intérieur de Γ^i et de l'adhérence de l'extérieur de Γ^e. Le théorème suivant donne une condition suffisante de $\mathcal{H}^1$-quasi-analyticité.

Théorème 2.2 ([MS11]). *Si $\left(\Gamma^e_j, \Gamma^i_j\right)$ est une suite de paires imbriquées tel que $\left(K_j = K\left(\Gamma^e_j, \Gamma^i_j\right)\right)$ soit une suite croissante de compacts, alors l'espace $\mathcal{M}\left((K_j)\right)$ est $\mathcal{H}^1$-quasi-analytique.*

Sous certaines hypothèses sur ρ, on peut maintenant construire une extension de Σ_ρ qui traverse le cercle unité et qui est monogène. Ce prolongement permet de relier en un certain sens Σ_ρ^+ et Σ_ρ^-.

Théorème 2.3 ([ST14]). *Soit $\rho \in \ell^{\frac{1}{4}}(\mathbb{S})$. Il existe alors (K_j) une suite croissante de compacte de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tel que :*

- *$K = \bigcup K_j$ a son complémentaire contenu dans $\mathbb{S}$ et de mesure linéaire nulle.*
- *Σ_ρ admet un unique prolongement continu à K.*
- *L'espace $\mathcal{M}\left((K_j)\right)$ est $\mathcal{H}^1$-quasi-analytique et contient le prolongement de Σ_ρ.*

Preuve du théorème 2.3. Pour tout $j \geq 1$ définissons

$$K_j = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \forall \lambda \in \mathbb{S},\ |z - \lambda| \geq \frac{1}{j} \|\rho(\lambda)\|^{1/4} \right\} \cup \{\infty\}$$

Les ensembles K_j forment une suite croissante de compacts de la sphère de Riemann. En posant $K = \cup_{j \geq 1} K_j$, le fait que ρ soit borné implique que le complémentaire de K est inclus dans $\overline{\operatorname{supp}(\rho)}$ et par conséquent dans $\mathbb{S}$. Comme $\rho \in \ell^{1/4}(\mathbb{S})$, ce complémentaire est de mesure linéaire nulle.
Montrons tout d'abord que l'espace $\mathcal{M}((K_j))$ est $\mathcal{H}^1$-quasi-analytique. En notant que $\Gamma_j^{(i)} = \partial(K_j \cap \overline{\mathbb{D}})$ et $\Gamma_j^{(e)} = \partial(K_j \cap \overline{\mathbb{E}})$, nous pouvons voir que $\Gamma_j^{(i)}$ et $\Gamma_j^{(e)}$ sont des courbes de Jordan rectifiables et pour j assez grand, l'ensemble

$\Gamma_j^{(i)} \cap \Gamma_j^{(e)} = K_j \cap \mathbb{S}$ est de mesure linéaire positive étant donné que

$$\left|\{\theta \in [0, 2\pi] \mid e^{i\theta} \in \mathbb{S} \setminus K_j\}\right| \leq \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} 4 \arcsin\left(\frac{\|\rho(\lambda)\|^{1/4}}{j}\right) \leq 2\pi \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \frac{\|\rho(\lambda)\|^{1/4}}{j}$$

. Chaque $(\Gamma_j^{(i)}, \Gamma_j^{(e)})$ est une paire imbriquée et $K_j = K(\Gamma_j^{(i)}, \Gamma_j^{(e)})$, ainsi l'espace $\mathcal{M}((K_j))$ des fonctions monogènes est $\mathcal{H}^1$-quasi-analytique par le théorème 2.2. Montrons maintenant que cet espace contient Σ_ρ. Comme on a

$$z \in K_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \frac{\|\rho(\lambda)\|}{|z-\lambda|} \leq j \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \|\rho(\lambda)\|^{3/4} < \infty, \\ \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \frac{\|\rho(\lambda)\|}{|z-\lambda|^2} \leq j^2 \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \|\rho(\lambda)\|^{1/4} < \infty, \end{array} \right.$$

les séries $f(z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \frac{\rho(\lambda)}{z-\lambda}$ et $f^{(1)}(z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \frac{-\rho(\lambda)}{(z-\lambda)^2}$ sont des fonctions continues sur K_j. De plus, en fixant $j \geq 1$ et $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left|f(z_2) - f(z_1) - f^{(1)}(z_1)(z_2 - z_1)\right| &= \left|(z_1 - z_2)^2 \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \frac{\rho(\lambda)}{(z_1 - \lambda)^2 (z_2 - \lambda)}\right| \\ &\leq |z_1 - z_2|^2 j^3 \sum_{\lambda \in \mathbb{S}} \|\rho(\lambda)\|^{1/4} \\ &\leq \epsilon |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

pour tout z_1 et $z_2 \in K_j$ tels que $|z_1 - z_2|$ est suffisamment petit. On en déduit que f est C^1-holomorphe sur K_j. Finalement $f \in \mathcal{M}((K_j))$. Clairement, Σ_ρ coïncide avec la restriction de f à $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\mathrm{supp}(\rho)}$. L'adhérence de ce dernier ensemble est $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et ainsi par continuité f est unique.

□

Références

[Bie55] L. Bieberbach : *Analytische Fortsetzung*, volume 3 de *Ergeb. Math. Grenzgeb.* Springer-Verlag, 1955.

[BMS14] V. Baladi, S. Marmi et D. Sauzin : Natural boundary for the suceptibility function of generic piecewise expanding unimodal maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34:777–800, 2014.

[Bor17] E. Borel : *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe.* Gauthier-Villars, Paris, 1917.

[BS11] J. Breuer et B. Simon : Natural boundaries and spectral theory. *Adv.Math.*, 226:4902–4920, 2011.

[Dol90] P. Dolbeault : *Analyse Complexe.* Masson, Paris, 1990.

[Dur00] P.L. Duren : *Theory of H^p Spaces.* Courier Dover Publications, 2000.

[Fab96] E. FABRY : *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux.* Ann. Sci. École Norm. Sup., 13, 1896.

[Kah85] J.-P. KAHANE : *Some Random Series of Functions*, volume 5. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd édition, 1985.

[MS11] S. MARMI et D. SAUZIN : A quasianalyticity property for monogenic solutions of small divisor problems. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New series*, 42:45–75, 2011.

[Rie16] M. RIESZ : Sãtze über Potenzreihen. *Ark. Math*, 11:1–16, 1916.

[ST14] D. SAUZIN et G. TIOZZO : Generalised continuation by means of right limits. *arXiv :1301.1175v2*, 2014.