Les variétés sans symétries

Martin Olbermann

14 juin 2005

1 Introduction

Étudier les objets géométriques, c'est étudier leurs symétries. Il s'agit du cœur du célèbre "Erlanger Programm" (1872) de Felix Klein qui a changé radicalement la géométrie. Étant donné un objet géométrique, combien de symétries admet-il et lesquelles ? Et c'est dans cet esprit-là qu'on s'intéresse aux objets géométriques sans aucune symétrie. Existe-t-il des objets asymétriques, et est-ce peut-être même le cas générique ?

Les objets géométriques dont on traitera sont les variétés différentiables - ce sont en un certain sens les objets géométriques les plus réguliers (localement, chaque variété est en tout point isomorphe à un espace euclidien) et les plus naturels. Plus précisément, on considère seulement les variétés fermées (c'est-à-dire compactes et sans bord).

Définition 1.1 *Une action différentiable d'un groupe de Lie G sur une variété X est une application différentiable $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, telle que $1 \cdot x = x$ et $(gh)x = g(hx)$ pour tous les $x \in X$, $g, h \in G$.*

Une symétrie d'une variété différentielle est une action différentiable fidèle d'un groupe de Lie compact sur la variété. (Une action d'un groupe sur un espace est appelée fidèle si seulement l'élément neutre du groupe agit par l'identité sur l'espace.)

Une variété asymétrique est alors une variété qui n'admet pas de symétrie, c'est-à-dire qui n'admet pas d'action non-triviale d'un groupe de Lie compact. Un groupe de Lie compact de dimension positive contient toujours un sous-groupe qui est isomorphe au cercle S^1, et S^1 contient des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Par conséquent, dire qu'une variété differentielle est asymétrique est équivalent à dire que la variété n'admet pas d'action (différentiable) non-triviale du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pour tous les nombres premiers p. Une action différentiable de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X n'est rien d'autre qu'un difféomorphisme $X \to X$ périodique d'ordre p.

Dans le langage courant, une symétrie est plutôt ce qu'on définirait formellement comme une isométrie d'un objet géométrique (qui est muni d'une métrique). Les variétés différentielles fermées peuvent toujours être munies d'une métrique riemannienne, et devenir ainsi des espaces métriques. (Bien sûr, il y a beaucoup de métriques riemanniennes différentes sur une seule variété.) Le théorème suivant explique la relation entre ces deux notions.

Proposition 1.2 *Une variété différentielle fermée X est asymétrique si et seulement si, pour chaque métrique riemannienne g, le groupe des isométries de la variété par rapport à cette métrique est trivial :* $Iso_g(X) = \{id_X\}$.

Une variété asymétrique est alors une variété où déjà la topologie et la structure différentiable rendent impossible l'existence d'une isométrie non triviale. Pour une action différentiable de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, (chaque composante de) l'ensemble des points fixes F est une sous-variété fermée, ce qu'on peut montrer avec l'application exponentielle des variétés riemanniennes.

On pense que "la plupart des variétés sont asymétriques". Un des buts de l'étude des variétés sans symétries serait de prouver cette affirmation qui est seulement intuitive. Mais il fallait déjà remplacer l'énoncé par une vraie conjecture mathématique (comment définir mathématiquement "la plupart des variétés" ?), ce qui semble assez difficile.

La théorie cohomologique des actions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur les espaces topologiques a été étudiée d'abord par P. A. Smith dans les années quarante. Le théorème suivant est le théorème le plus célèbre, il peut être appliqué au cas des disques et des sphères.

Théorème 1.3 ***(Smith)*** *Soit $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit X un G-espace (c'est-à-dire un espace topologique muni d'une action continue de G).*
Si on a $H^*(X;k) = H^*(S^n;k)$, alors soit l'ensemble des points fixes F est vide, soit il existe r avec $0 \leq r \leq n$ tel qu'on ait $H^*(F;k) \cong H^*(S^r;k)$.
Si $H^*(X;k) \cong k$, alors $H^*(F;k) \cong k$, en particulier F n'est pas vide.

La première construction de variétés asymétriques remonte à Conner, Raymond et Weinberger [CRW72] et utilise le théorème suivant :

Théorème 1.4 ***(Borel)*** *Soit X une variété connexe dont le revêtement universel est contractile, et telle que le centre de $\pi_1(X)$ est trivial et le groupe des automorphismes extérieurs $Out(\pi_1(X)) = Aut(\pi_1(X))/In(\pi_1(X))$ est sans torsion. Alors X est asymétrique, i.e. pour tout p premier, X n'admet pas d'action non-triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Depuis, toutes les variétés asymétriques que l'on a construites ont un groupe fondamental non-trivial, et le théorème 1.4 s'avère souvent essentiel. On s'intéresse alors surtout à la recherche de variétés asymétriques simplement connexes. M. Kreck vient d'annoncer les premiers exemples de telles variétés différentiables. En effet, sa construction utilise considérablement les résultats de V. Puppe que l'on décrira plus précisément dans la suite.

On se donne une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur la variété X et on essaie de montrer que l'ensemble des points fixes de l'action est X tout entier, ce qui montre que l'action est triviale. On considérera la cohomologie de la variété et de la fibration donnée par la construction de Borel associée. Pour cela, l'outil principal sera la suite spectrale de Leray-Serre. C'est le théorème de localisation qui relie les cohomologies de la variété X et de l'ensemble des points fixes F. On montrera que la cohomologie de F est une déformation de la cohomologie de X. En combinant ces résultats, on déduira le théorème principal de Puppe qui servira à examiner certaines variétés de dimension 6.

2 La construction de Borel

Pour les groupes $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on définit les espaces EG et BG (appelés G-espace universel et espace classifiant de G) de la façon suivante : Soit S^∞ la réunion de $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \ldots$. On a une action de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur S^∞ donnée par :

$$(z_0, z_1, \ldots z_n, 0, 0, \ldots) \mapsto (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi i/p} z_1, \ldots e^{2\pi i/p} z_n, 0, 0, \ldots) \qquad (z_i \in \mathbb{C})$$

On pose $EG = S^\infty$ et $BG = S^\infty/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On a une application quotient $EG \to BG$. Pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $BG = \mathbb{R}P^\infty$.

La construction de Borel associe à un G-espace X à droite une application ayant toutes les fibres (images inverses d'un point) homéomorphes à X, qu'on appelle fibré.

La construction de Borel est le fibré suivant (on note aussi l'inclusion d'une fibre) :

$$X \xrightarrow{i} X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/G \xrightarrow{pr_1} BG$$

(où G agit sur $EG \times X$ par l'action diagonale et pr_1 est l'application induite par la projection sur le premier facteur.)

L'idée derrière cette construction est que la complexité de l'espace X et de l'action de G est décrite par l'espace X_G, et que l'étude de X_G et du fibré associé permet de tirer des conclusions sur l'action de G sur X (par exemple sur l'espace des points fixes). On s'intéressera surtout à la cohomologie de X_G.

Exemple 2.1 *Si F est un G-espace trivial, alors $F_G = BG \times F$ est le fibré trivial, c'est-à-dire l'espace fibré est exactement le produit de la base et de la fibre. Pour une action non-triviale, le fibré est non-trivial en général, et l'espace fibré est un produit "tordu".*

Remarque 2.2 *Si on définit $H_G^*(X) = H^*(X_G)$, alors les foncteurs H_G^n forment une théorie de cohomologie G-équivariante, c'est-à-dire une théorie de cohomologie sur la catégorie des G-espaces.*

3 La cohomologie des espaces fibrés

Soit $F \to E \to B$ un fibré avec B connexe par arcs. (Remarque pour les spécialistes : on peut remplacer "fibré" dans cette section par "fibration", ce qui est une notion plus générale.) On peut montrer qu'un tel fibré définit une action de $\pi_1(B)$ sur $H^*(F)$. Pour le fibré $X \to X_G \to BG$, on a $\pi_1(BG) = G$, et on retrouve l'action induite de G sur $H^*(X)$ par celle de G sur X.

Il est possible de définir la cohomologie d'un espace X non seulement avec coefficients dans un groupe abélien, mais aussi avec coefficients dans un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-module, c'est-à-dire un groupe abélien N muni d'une action de $\pi_1(X)$. On note cette cohomologie à coefficients "locaux" $H^*(X; \mathcal{N})$. C'est une généralisation de la cohomologie ordinaire : Si l'action de $\pi_1(X)$ sur N est triviale, on obtient la cohomologie ordinaire : $H^*(X; \mathcal{N}) \cong H^*(X; N)$. Si on pose $X = BG$, on a un lien avec la cohomologie des groupes : $H^*(BG; \mathcal{N})$ est en effet la cohomologie du G-module N.

Une suite spectrale d'algèbres est une certaine suite $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r \geq 1}$ d'algèbres bigraduées avec différentielles $d_r : E_r \to E_r$, telles que $H(E_r^{*,*}) = E_{r+1}^{*,*}$, c'est-à-dire on obtient l'algèbre suivante en prenant la cohomologie. Pour p, q fixe, la suite $E_1^{p,q}$, $E_2^{p,q}$, ... devient stationnaire, et on dénote le terme stationnaire par $E_\infty^{p,q}$. On dit que la suite spectrale converge vers une algèbre graduée A^*, s'il existe une filtration (graduée) sur A^* telle que l'algèbre associée (bi-)graduée est isomorphe à $E_\infty^{*,*}$.

On a eu besoin de toutes ces définitions pour le théorème suivant, qui a été démontré par Serre dans sa thèse, qui est à la la base de tous les autres résultats.

Théorème 3.1 ***(Leray-Serre)*** *Soit $F \to E \to B$ un fibré avec B connexe par arcs, F connexe et k un anneau commutatif unitaire. Alors il existe une suite spectrale $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ d'algèbres différentielles bigraduées avec*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; k))$$

qui converge vers $H^*(E; k)$ comme algèbre.

On voit déjà dans ma description informelle qu'une suite spectrale est un objet assez complexe. En particulier la relation entre le terme E_2 et l'algèbre vers laquelle la suite spectrale converge, peut sembler mystérieuse. En effet, le travail consiste à comprendre ce qui se passe, quels sont les termes $E_3, E_4, \ldots E_\infty$. Mais dans certains cas, on peut tirer des conclusions, par exemple le corollaire suivant :

Corollaire 3.2 ***(Leray-Hirsch)*** *Soient $x_1, \dots x_r$ des élements de $H^*(E;k)$ tels que $H^*(F;k)$ est un k-module libre qui admet comme base les images $i^*(x_1), \dots i^*(x_r)$. Alors $H^*(E;k)$ est un $H^*(B;k)$-module libre de base $x_1, \dots x_r$.*

Bien sûr, on applique le théorème et son corollaire à $X \to X_G \to BG$, le fibré donné par la construction de Borel.

4 Le théorème de localisation

Le théorème suivant donne la dernière pierre de construction pour notre projet. En effet, on veut trouver une relation entre les cohomologies de X et de F. Le théorème de Leray-Serre donne la relation entre les cohomologies de X et de X_G, et F_G est le produit de F et de BG. Alors il ne manque qu'une relation entre $H^*(X_G)$ et $H^*(F_G)$.

Théorème 4.1 ***Le théorème de localisation (Borel)*** *Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $H^*(-) = H^*(-;k)$. Soit X un G-espace compact et F le sous-ensemble des points fixés par G. Alors la restriction $H^*(X_G) \to H^*(F_G)$ entre $H^*(BG) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$-modules devient un isomorphisme après localisation en $S = \{t^r \mid r \in \mathbb{N}\} \subseteq H^*(BG)$, i.e. $H^*(X_G)[t^{-1}] \xrightarrow{\cong} H^*(F_G)[t^{-1}]$*

Le théorème de localisation (qui n'est pas difficile de montrer) est un théorème très général pour des théories de cohomologie équivariantes. Il y a une version du théorème pour tous les groupes de Lie compacts et tous les coefficients.

5 Le théorème principal

Dans la section suivante, on traite le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On suppose que $H^*(X_G) \to H^*(X)$ est surjective. Par le théorème de Leray-Hirsch, on a $H^*(X_G) = H^*(X) \otimes H^*(BG) = H^*(X)[t]$ comme $H^*(BG) = k[t]$-module gradué. Mais la structure multiplicative n'est pas forcément celle de l'algèbre de polynômes en t sur l'algèbre $H^*(X)$. On peut montrer que $H^*(X_G)$ est isomorphe à $H^*(X)[t]$ avec une multiplication :

$$m_t(at^i, bt^j) = ab \cdot t^{i+j} + \text{termes de degré plus grand en } t$$

Proposition 5.1 *Si $H^*(X_G) \to H^*(X)$ est surjective, alors $H^*(F)$ est une déformation de $H^*(X)$, c'est-à-dire $H^*(F) \cong (H^*(X), m_1)$, i.e. $H^*(F)$ est isomorphe comme algèbre (non-graduée) à l'algèbre donnée par $H^*(X)$ avec une multiplication :*

$$m_1(a,b) = m_t(a,b)|_{t=1} = ab + \textit{termes de degré plus petit}$$

C'est une application du théorème de localisation. – Après toutes ces préparations, le théorème suivant décrit finalement notre stratégie pour trouver des variétés asymétriques.

(Une dérivation de l'algèbre graduée A^* de degré $-r$ est une application $d : A^* \to A^*$ de degré $-r$ telle que $d(ab) = d(a)b + (-1)^r a \cdot d(b)$. Une algèbre de Poincaré de dimension n est une k-algèbre graduée telle que $A^n \cong k$, et telle que la forme bilinéaire $A^k \times A^{n-k} \to A^n \cong k$ donnée par la multiplication est non-dégénérée. Pour $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les algèbres de cohomologie des variétés connexes orientables fermées sont des algèbres de Poincaré ; pour $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ c'est en fait vrai pour toutes les variétés fermées connexes.)

Théorème 5.2 ***Le théorème principal (Puppe)*** *Soit $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et soit X une variété connexe, fermée, et orientable si $p \neq 2$, telle que $H^*(X;k)$ n'admet pas d'automorphisme d'ordre p, telle que $H^*(X;k)$ n'admet pas de dérivation non nulle de degré négatif, telle que toutes les déformations de $H^*(X;k)$ sont isomorphes à $H^*(X;k)$ comme algèbre non-graduée, et telle que l'algèbre non-graduée $H^*(X;k)$ ne peut pas être écrite comme une algèbre de Poincaré B^* avec $B^j = 0$ pour $j \geq dim(X)$. Alors X n'admet pas d'automorphisme non-trivial d'ordre p.*

Démonstration :

On se donne une action de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X. Avec les deux premières conditions on peut montrer que $H^*(X_G;k) \to H^*(X;k)$ est surjective. Pour p impair, comme X est orientable, on peut montrer que F est orientable. Puis on applique la proposition précédente, qui montre que $dim(F) = dim(X)$. Cela implique $F = X$, c'est-à-dire l'action est triviale. ■

6 Variétés asymétriques de dimension 6

Pour trouver des variétés simplement connexes asymétriques en considérant leur cohomologie, on est forcé de considérer des variétés de dimension au moins 6. En dimensions 1 et 2, toutes les variétés sont symétriques. Pour les variétés simplement connexes de dimensions 3 et 4, on rencontre des problèmes difficiles comme la conjecture de Poincaré ou la question s'il existe des variétés de dimension 4 qui ne sont pas difféomorphes mais homéomorphes à S^4. On sait que toutes les variétés simplement connexes admettent des actions topologiques (mais peut-être pas lisses) non-triviales. En dimension 5, la cohomologie des variétés simplement connexes donne probablement trop peu d'informations.

On s'intéresse à la classe de variétés $\mathcal{M}$: les variétés de spin de dimension 6 simplement connexes compactes avec $H^3(X;\mathbb{Z}) = 0$, à difféomorphisme près. (Une variété de spin est une variété avec une certaine structure additionnelle (sur le fibré tangent).) Cela implique que $H^*(X;\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre et que $H^*(X;\mathbb{Z}) = H^{pair}(X;\mathbb{Z})$. Si on fixe une base de $H^2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$, on associe à chaque variété dans $\mathcal{M}$ une forme trilinéaire symétrique $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ donné par les triples produits des éléments de H^2. Si on se donne en plus une forme linéaire sur $\mathbb{Z}^m$ (qui code la première classe de Pontrjagin de X), cela classifie complètement les variétés dans $\mathcal{M}$ [Wal66]. (Le désavantage de ce résultat est qu'il classifie les éléments X de $\mathcal{M}$ munis d'une base distinguée de $H^2(X;\mathbb{Z})$, et qu'il ne dit rien sur l'action du groupe linéaire par changement de base. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont les orbites pour cette action.)

Avec l'aide d'un ordinateur, Puppe a trouvé que la forme μ_0 qui satisfait

$$\begin{aligned} f(x) = \mu_0(x,x,x) \quad = \quad & 6(x_1x_4^2 - x_1^2x_4 + x_2x_4^2 + x_2^2x_4 - x_2^2x_5 + x_2x_5^2 + x_3^2x_4 \\ & -x_3x_4^2 + x_3^2x_6 + x_3x_6^2 + x_5^2x_6 + x_5x_6^2 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 \\ & +x_1x_3x_6 + x_2x_4x_6 + x_3x_5x_6 + x_4x_5x_6 + x_4^3 + x_6^3) \end{aligned}$$

est un des exemples où on peut appliquer le théorème principal (en fait une variante avec des coefficients entiers) pour tous les nombres premiers. Pourtant, il faut se restreindre dans ce cas aux actions qui préservent l'orientation, car toutes les cohomologies (sur $\mathbb{Z}$) de variétés dans $\mathcal{M}$ admettent l'action non-triviale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $x \mapsto (-1)^{deg(x)/2}x$. Les variétés qui correspondent à μ_0 n'admettent alors, pour tout p premier, pas d'action non-triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui préserve l'orientation.

On n'a pas encore traité la question comment on pourrait définir "la plupart des variétés" ou "beaucoup de variétés". D'abord, ce qui est clair est qu'il y a une infinité de variétés qui admettent des symétries, et que c'est par exemple vrai aussi pour $\mathcal{M}$. Par contre, on veut montrer que la plupart des variétés sont asymétriques. Une possibilité de formaliser cette notion intuitive serait de définir quelque chose comme une densité pour des sous-ensembles de $\mathcal{M}$. On peut faire cela d'une façon naïve : En effet, on prend la classification des variétés dans $\mathcal{M}$, on néglige l'action du groupe linéaire et on considère qu'il y a "autant" de variétés pour chaque algèbre de cohomologie, c'est-à-dire pour chaque forme trilinéaire. Pour obtenir des quantités finies (pour qu'on puisse vraiment compter les variétés symétriques et asymétriques), on considère d'abord seulement les formes trilinéaires μ sur $\mathbb{Z}^m$ tels que $|\mu(e_i,e_j,e_k)| < N$ (ce qui équivaut aux cohomologies avec $rang(H^2(X;\mathbb{Z})) = m$ et coefficients (correspondant à la base distinguée) de module $< N$). Soit $R(m,N)$ l'ensemble fini de ces formes. Pour un sous-ensemble de toutes les formes trilinéaires sur $\mathbb{Z}^m$, $A \subset R(m)$, on définit :

$$d(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap R(m,N))}{\#(R(m,N))}$$

Théorème 6.1 ***(Puppe)*** *Pour un p fixe, la plupart des variétés dans $\mathcal{M}$ n'admettent pas d'action non-triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui préserve l'orientation. Précisement : Si $S_p(m) \subset R(m)$ dénote l'ensemble des formes qui correspondent à des variétés admettant une symétrie non-triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui préserve l'orientation, alors $\lim_{m\to\infty} d(S_p(m)) = 0$.*

Le théorème est aussi vrai si on remplace le nombre premier p fixé par un ensemble fini de nombres premiers. Malheureusement, on n'a pas de théorème qui traite tous les nombres premiers à la fois. Au moins on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 6.2 *La plupart des variétés dans $\mathcal{M}$ n'admettent pas d'actions non-triviales de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour une infinité de nombres premiers. Plus précisément : Pour tout $m \geq 6$, la densité de l'ensemble des formes dans $R(m)$, qui correspondent aux variétés qui admettent des actions non-triviales de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour une infinité de nombres premiers p, est 0.*

On pourrait essayer de trouver des invariants de variétés, qui peuvent, dans beaucoup de cas, décider si une variété est symétrique ou asymétrique. Pour montrer que la plupart des variétés sont asymétriques, on pourrait peut-être se servir d'un résultat de Quillen, qui classifie les variétés simplement connexes à indétermination finie près.

Une autre possibilité pour montrer que “la plupart des variétés” sont asymétriques pourrait être de trouver une façon géométrique de définir une action libre d'un groupe, par exemple $\mathbb{Z}$, sur l'ensemble de toutes les classes de difféomorphisme des variétés, et de prouver que dans toute orbite, il n'y a qu'un nombre fini de variétés symétriques. La qualité d'un tel résultat dépendrait vraiment de la raisonnabilité et de la naturalité de l'action : comme il y a une infinité de variétés symétriques, on peut construire des actions libres de $\mathbb{Z}$ sur l'ensemble de toutes les classes de difféomorphisme des variétés, telles que toutes les orbites contiennent au plus une variété asymétrique.

Cette approche est motivée par le résultat d'Atiyah et Hirzebruch, qui ont trouvé un invariant $\hat{A}$, tel que, dès que la variété de spin X de dimension $4n$ admet une action différentiable de S^1, on a $\hat{A}(X) = 0$. Modulo bordisme une action de $\mathbb{Z}$ sur les classes d'isomorphisme des variétés de spin de dimension $4n$ est donnée par la somme connexe avec une variété M avec $\hat{A}(M) = 1$. (La somme connexe de deux variétés est une variété qui s'obtient en enlevant une boule de chaque variété et en collant le reste le long des bords.) On a $\hat{A}(X\#M) = \hat{A}(X)+1$, c'est-à-dire chaque orbite contient au plus une variété S^1-symétrique.

7 Espaces de conjugaison

Pour les actions (de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) qui renversent l'orientation, on peut essayer de considérer la cohomologie sur $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'action décrite en haut devient triviale, et on peut montrer que pour la plupart des variétés, il y a une seule possibilité d'écrire leur cohomologie sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme algèbre de Poincaré de dimension formelle < 6. En fait, on pourrait avoir un isomorphisme qui divise les degrés par deux : $H^{2i}(X) \cong H^i(F)$.

Autrement dit : pour la plupart des variétés dans $\mathcal{M}$, les involutions non-triviales de X doivent renverser l'orientation et induire un isomorphisme entre l'algèbre de cohomologie de F et celle de X avec le changement de degré $H^{2i}(X) \cong H^i(F)$. On retrouve cette situation aussi pour toutes les variétés qui correspondent à la forme μ_0.

Un exemple pour une telle involution est donnée par $\mathbb{C}P^3$ avec la conjugaison complexe : on a $F = \mathbb{R}P^3$, et $H^{2*}(\mathbb{C}P^3) \cong H^*(\mathbb{R}P^3)$. C'est pourquoi Hausmann, Holm et Puppe [HHP04] ont appelé les espaces X munis d'une involution tels que $H^{2i}(X) \cong H^i(F)$, "espaces de conjugaison". En fait, leur définition est qu'en plus, une autre relation algébrique qu'ils appellent "équation de conjugaison" doit être satisfaite. Cette équation de conjugaison aide à montrer des propriétés d'invariance. Par exemple, ils expliquent la construction des "CW-complexes de conjugaison" et démontrent que les produits des espaces de conjugaison et les sommes connexes de variétés de conjugaison sont toujours des espaces de conjugaison. D'autres exemples d'espaces de conjugaison sont donnés par les sphères de dimension paire avec une involution linéaire, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{C}P^\infty$, les grassmanniennes complexes, tous avec la conjugaison complexe, mais aussi par les variétés toriques lisses.

8 Les actions renversant l'orientation

Dans son article sur les variétés asymétriques [Kre04], Kreck a pu éliminer, pour certaines variétés qui correspondent à μ_0, les actions de $\mathbb{Z}_2$ qui renversent l'orientation. Les variétés qui correspondent à μ_0 sont paramétrées par une forme linéaire sur $\mathbb{Z}^6$ qui représente la première classe de Pontrjagin de la variété. Kreck montre que l'existence d'une involution non-triviale induit des congruences modulo 2 pour cette forme linéaire. Il en résulte qu'une grande partie des variétés qui correspondent à μ_0 sont asymétriques ; ce sont les variétés qui ne satisfont pas à toutes les congruences.

Je donne l'idée de la démonstration pour montrer que deux autres grands sujets de la topologie entrent dans la preuve : la théorie de la chirurgie (on coupe une variété, et colle différemment, d'où le nom) et les théories de bordisme. C'est un paragraphe avancé.

Kreck utilise la théorie de la chirurgie équivariante pour remplacer la variété X par une variété "plus simple", pour que l'espace des points fixes devienne une sphère d'homologie. Puis il montre que pour tous les éléments $g \in H^2(X;\mathbb{Z})$ (qui peuvent être considérés comme des applications $g : X \to \mathbb{C}P^\infty$), la classe de bordisme $[X, g] \in \Omega_6^{Spin}(\mathbb{C}P^\infty)$ est dans l'image d'une application appelée transfert correspondante au revêtement à deux feuillets

$\mathbb{C}P^\infty \times S^\infty \to (\mathbb{C}P^\infty)_G$. On a $\Omega_6^{Spin}(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, par l'isomorphisme qui envoie $[M, f]$ sur $(f_*[M], \frac{1}{24}\langle p_1(M) \cup f - 4f^3, [M]\rangle) \in H^6(\mathbb{C}P^\infty) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Finalement il montre la congruence

$$\frac{1}{24}\langle p_1(M) \cup f - 4f^3, [M]\rangle = 0 \mod 2$$

pour toutes les classes $[M, f] \in \Omega_6^{Spin}(\mathbb{C}P^\infty)$ dans l'image de l'application transfert (on a encore identifié $f : M \to \mathbb{C}P^\infty$ avec l'élément $f \in H^2(M;\mathbb{Z})$ correspondant). D'où le :

Théorème 8.1 ***(Kreck)*** *Il existe une infinité de variétés fermées asymétriques simplement connexes de dimension* 6.

Références

[Bre72] G.E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, 1972.

[CRW72] P.E. Conner, F. Raymond, and P. Weinberger. Manifolds with no periodic maps. *In : Proc. Second Conference Compact Transformation Groups, Part II, Springer Lect. Notes 299*, 1972.

[HHP04] J.-C. Hausmann, T. Holm, and V. Puppe. Conjugation spaces. `http://arxiv.org/abs/math.AT/0412057`, 2004. Preprint.

[Hsi75] W.Y. Hsiang. *Cohomological Theory of Topological Transformation Groups.* Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 85, 1975.

[Kre04] M. Kreck. Simply connected asymmetric manifolds, 2004. Preprint.

[Pup78] V. Puppe. Cohomology of fixed point sets and deformations of algebras. *Manuscripta math.*, 23 :343–354, 1978.

[Pup79] V. Puppe. Deformations of algebras and cohomology of fixed point sets. *Manuscripta math.*, 30 :119–136, 1979.

[Pup88] V. Puppe. Simply-connected manifolds without S^1-symmetry. *In : Topology Conference Göttingen 1987, Springer Lect. Notes 1361*, pages 261–268, 1988.

[Pup95] V. Puppe. Simply-connected 6-dimensional manifolds with little symmetry and algebras with small tangent space. *In : Prospects in Topology, Annals of Math. Studies 138*, pages 283–302, 1995.

[Pup02] V. Puppe. Do manifolds have little symmetry ? `http://www.inf.uni-konstanz.de/Preprints/papers/2002/preprint-181.pdf`, 2002. Preprint.

[Wal66] C.T.C. Wall. Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds. *Invent. math.*, 1 :355–374, 1966.