Feuilletages et Groupoïdes

Omar Mohsen
Directeur : Georges Skandalis

12 octobre 2015

Table des matières

Introduction

Un feuilletage est une décomposition d'une variété par des sous-variétés immergées. Un feuilletage régulier est celui qui vient d'un champ de plans intégrable. C. Ehresmann[Ehr65], J. Pardines[Par84] et H. E. Winkelnkemper[Win83] ont défini le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage régulier. C'est un groupoïde lisse dont les orbites sont les feuilles du feuilletage. En 1979 Alain Connes [Con82] a utilisé ce groupoïde pour définir la C*-algèbre d'un feuilletage. Avec cette C*-algèbre, il a défini l' indice analytique d'opérateurs différentiels longitudinaux. Il a aussi montré un théorème comme le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer pour ces opérateurs. [1]

Dans le cas où l'espace quotient est vraiment une variété lisse. La C*-algèbre obtenue dessus est équivalente au sens de Morita à la C*-algèbre de fonctions continues sur l'espace quotient. Donc la C*-algèbre obtenue dessus est vraiment une généralisation du cas lisse.

Il y a beaucoup de personnes qui ont généralisés ces idées aux cas singuliers [Par85],[Deb01b],[Deb01a],[AS09]. On montre l'idée de la définition donné par I. Androulidakis and G. Skandalis [AS09]. Ils définissent un groupoïde qui généralise le groupoïde d'holonomie et les groupoïdes définis dans les articles [Deb01b],[Deb01a],[Par85]. Leur idée est qu'un feuilletage n'est plus une décomposition d'une variété par des sous-variétés mais un feuilletage est un module intégrale de type fini de champs de vecteurs. Un tel module défini une décomposition par des sous-variétés mais la décomposition ne définit pas uniquement le feuilletage. Le théorème de Frobenius dit que les feuilletages régulier sont exactement les modules intégrales *projectifs* de type fini de champs de vecteurs.

1. Alain Connes a eu besoin de l'hypothèse d'existence d'une mesure transverse. Le cas générale est démontré dans [CS84] utilisant la KK théorie [Kas80].

1 Feuilletages réguliers et Groupoïdes

Définition 1.1. Soit M une variété lisse. Un feuilletage régulier de dimension p sur M est la donnée d'une variété $\mathcal{F}$ de dimension p ayant le même ensemble sous-jacent que M satisfaisant que l'identité $i : \mathcal{F} \to M$ est une immersion et elle est continue transversalement : C'est à dire que $T\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel continue sur M.

La Variété $\mathcal{F}$ donne un module projectif $\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \{i_*(X) : X \in C^\infty(\mathcal{F}, T\mathcal{F})\}$ où X est un champ de vecteurs sur $\mathcal{F}$. Il est évidement intégral : C'est à dire que pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ le champ de vecteurs $[X, Y]$ est dans $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. On appelle les éléments de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ les champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$.

Théorème 1.2 (Frobenius)**.** *Soit A un sous-module projectif intégral du module de champs de vecteurs sur M. Alors il existe un unique feuilletage régulier $\mathcal{F}$ sur M tel que $\mathcal{X}(\mathcal{F}) = A$.*

Les composants connexes de la variété $\mathcal{F}$ sont appelées les *feuilles* de $\mathcal{F}$. Remarquons que les feuilles de la variété $\mathcal{F}$ forme une partition de M. Donc elle définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. L'espace quotient nous intéressons le plus. Cet espace peut avoir une mauvaise topologie. Il peut avoir la topologie grossière comme dans l'exemple suivant.

Exemple 1.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel. Sur le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, on peut définir un feuilletage régulier dont les feuilles sont les lignes $\{(a+t, b+\alpha t) : t \in \mathbb{R}\}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Définition 1.4. Un groupoïde(algébrique) est la donnée des ensembles G, G^0 et des applications suivantes :

— une application injectif $u : G^0 \to G$,

— une application involutive $i : G \to G$ qu'on appelle l'inversion et on note $i(u)$ - u^{-1},

— des application $s, t : G \to G^0$ qu'on appelle le source et le but respectivement,

— une application $m : G^2 \to G$ appelée la multiplication où G^2 est l'ensemble $\{(x, y) \in G | t(y) = s(x)\}$

qui vérifient les relations suivantes :

— $t(u(x)) = s(u(x)) = x$, $m(y, u(s(y))) = y = m(u(t(y)), y)$ pour tout $x \in G^0$ et $y \in G$,

— $t(i(y)) = s(y)$ et $m(i(y), y) = u(s(y))$,

— $s(m(y, z)) = s(z)$, $t(m(y, z)) = t(y)$ pour tout $(y, z) \in G^2$,

— $m(w, m(y, z)) = m(m(w, y), z)$ pour tout $(w, y), (y, z) \in G^2$.

Un groupoïde est dit lisse[2] quand les ensembles G, G^0 sont des variétés lisses et les applications r, s, u, i, m sont lisses et les applications r, s sont des submersions. Notons que G^2 est une variété parce que r, s sont des submersions. Notons aussi que l'application i est un difféomorphisme et l'application u est un plongement, ainsi nous allons regarder G^0 comme une sous-variété de G.

La philosophie de la géométrie non-commutative est le fait qu'on puisse remplacer un espace singulier par un groupoïde qui est moins singulier et plus accessible à étudier. On les étudie par leurs C*-algèbres non-commutatives.

2. "Un groupoïde de Lie" est utilisé parfois

Ainsi qu'on peut utiliser la théorie très riche des C*algèbres à obtenir des invariants nouveaux qu'on ne pouvait pas les obtenir par les définitions topologiques usuelles. On donne ici des exemples de groupoïdes lisses pour illustrer l'idée.

Exemples 1.5. Pour toute la suite, M est une variété lisse et les groupoïdes que on définit dessous sont lisses.

1. Le groupoïde donné par $G = G^0 = M$ et $i = u = s = t =$ l'identité.
2. Le groupoïde donné par $G = M \times M, G^0 = M, u(x) = (x, x), t(x, y) = x, s(x, y) = y, i(x, y) = (y, x)$ et $m((z, y), (y, x)) = (z, x)$.
3. Soit E un fibré vectoriel lisse sur M et $\pi : E \to M$ la projection. On définit le groupoïde $G = E, G^0 = M, u(x) = (x, 0), s = t = \pi, i(x, \xi) = (x, -\xi)$ et $m((x, \xi), (x, \eta)) = (x, \xi + \eta)$.
4. Soit Γ un groupe de Lie qui agit sur M. On définit le groupoïde $G = \{(x, \gamma, y) \in M \times \Gamma \times M | x = \gamma y\}, G^0 = M, u(x) = (x, e, x), i(x, \gamma, y) = (y, \gamma^{-1}, x), s(x, \gamma, y) = y, t(x, \gamma, y) = x$ et $m((x, \gamma, y), (y, \eta, z)) = (x, \gamma\eta, z)$.
5. Alain Connes a défini un groupoïde très naturel qu'il a utilisé à donner une démonstration simple du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Le groupoïde est donné par $G = M \times \mathbb{R}^* \cup TM \times 0, G^0 = M \times \mathbb{R}$. Les formules à définir les applications u, i, s, t et m sont faciles à trouver (Ils sont un mélange des exemples 2 et 3). La seule propriété non triviale est la définition de la topologie et de la structure différentielle. On définit ici juste la topologie : on pose $M \times \mathbb{R}^*$ un sous ensemble ouvert avec la topologie produit et on pose $TM \times 0$ un sous ensemble ferme. Il reste à définir comment une suite dans $M \times \mathbb{R}^*$ converge vers un point dans $TM \times 0$. Soit (x_n, y_n, t_n) une suite dans $M \times \mathbb{R}^*$. La suite converge vers $(x, \xi, 0) \in TM \times 0$ si et seulement si $t_n \to 0, x_n \to x, y_n \to y$ et $\frac{x_n - y_n}{t_n} \to \xi$. La dernière limite est définie dans une carte locale. Il est facile de montrer qu'il ne dépende pas du choix de la carte locale. On appelle ce groupoïde le groupoïde tangent. Le lecteur est renvoyé au livre d'Alain Connes pour un exposé plus détaillé [Con95, p. 104-111].
6. On peut généraliser la construction du tangent Groupoïde. Soit G un groupoïde. On note $\mathcal{A}G$ le fibré normal de G^0 dans G. On définit le groupoïde adiabatique $G_{ad} = G \times \mathbb{R}^* \cup \mathcal{A}G \times \{0\}$. Comme dans l'exemple 5, on peut munir G_{ad} d'une structure différentielle. On définit $G^0_{ad} = G^0 \times \mathbb{R}$. Les opérateurs s, t, i, u ne sont pas difficiles à définir. On utilisera ce groupoïde à définir l'indice analytique dans section 4.
7. Le groupoïde de Poincaré est défini par $G = \{(x, [\gamma], y) | x, y \in M\}$ où $[\gamma]$ est la classe d'homotopie d'un chemin de x à y. L'espace des unités G^0 est M. C'est un groupoïde lisse, sa structure différentielle est engendré par les cartes $W_{(a,[\gamma],b)} = \{(x, [\gamma_x \gamma \gamma_y^{-1}], y) | x \in U, y \in V\}$ où U, V sont des cartes contractiles qui contiennent x et y respectivement et $\gamma_x(\gamma_y)$ est un chemin dans $U(V)$ de $x(y)$ à $a(b)$.
8. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur M. On peut définir naïvement le groupoïde $\{(x, y) | x\mathcal{R}y\}$. Il n'est pas une variété lisse en générale parce que les feuilles ne sont pas de sous-variétés plongées. Donc on doit comme dans l'exemple 4 utiliser les groupes d'holonomies. Le groupoïde d'holonomie de $\mathcal{F}$ est donc définir comme celui-ci $G = \{(y, [\gamma], x) : x\mathcal{R}y, \gamma \in C^1(\mathcal{F}), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$ où $[\gamma]$ est la classe d'holonomie de γ [Vas01, p. 24-29].

Notons que la variété G n'est pas nécessairement séparée. Dans [Con82], des exemples et les changements nécessaires pour définir la C*-algèbres de ces groupoïdes sont donnés.

2 C*-algèbres

Définition 2.1. Soit A une algèbre complexe muni d'une involutive notée $*$. Une C*-semi-norme(C*-norme) est une semi-norme(norme) sur A qui satisfait

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|, \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Une C*-algèbre est une algèbre complexe muni d'une involutive et d'une C*-norme complète.

Il y a beaucoup d'exemples de C*-algèbres [Dav96],[Ped79]. On donne les deux exemples classiques : L'algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert et l'algèbre de fonctions continues sur un espace topologique compact muni de la norme sup.

Un théorème de Gelfand dit qu'il y a un équivalence entre la catégorie d'espaces topologiques compacts séparés et la catégorie de C*-algèbres commutatives unifères. Ainsi on peut regarder les C*-algèbres non-commutatives comme des espaces topologiques non-commutatives.

Soit G un groupoïde lisse. On note $C_c(G)$ l'ensemble de fonctions lisses [3] à support compact. C'est une algèbre complexe involutive. Les opérations sont définies par les formules

$$f * g(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2), f^*(\gamma) = \overline{f(i(\gamma))}.$$

On définit la norme 1 par la formule usuelle $\|f\|_1 = \int |f|$. Malheureusement cette norme n'est pas une C*-norme mais on peut facilement la remplacer par une C* norme. On définit la norme maximale

$$\|f\|_{\max} = \sup_{\|\cdot\|} \|f\|$$

où la sup est sur toues les C*-semi-normes bornées : C'est à dire que $\|\|$ est une C*-semi-norme satisfaisant $\|g\| \leq \|g\|_1$ pour tout $g \in C_c(G)$. Il est évident que $\|\cdot\|_{\max}$ est une C*-semi-norme. Il n'est pas difficile de montrer qu'elle est vraiment une norme aussi.

Définition 2.2. Soit G un groupoïde. La C*-algèbre de G notée $C^*(G)$ [4] est la complétion de l'algèbre $C_c(G)$ par la norme $\|\cdot\|_{\max}$.

Nous allons décrire les C* -algèbres des groupoïdes définis dans les exemples 1.5.

3. Pour définir canoniquement l'intégrale de ces fonctions sans avoir à choisir une métrique riemannienne. On remplace les fonctions lisses par les sections lisses du fibré vectoriel $\Omega^{\frac{1}{2}}(T_\gamma s^{-1}(s(\gamma))) \oplus \Omega^{\frac{1}{2}}(T_\gamma t^{-1}(t(\gamma)))$ où $\Omega^{\frac{1}{2}}$ sont les $\frac{1}{2}$-densités et $\gamma \in G$.

4. Parfois on utilise la notation $C^*_{\max}(G)$ parce qu'il y a une autre C*-algèbre associée à un groupoïde appelée *la C*-algèbre réduite* et notée $C^*_r(G)$. La définition est donnée dans [Ren80] et [Vas01].

Exemples 2.3.

1. La C*-algèbre du groupoïde est $C_0(M)$, l'espace des fonctions sur M qui sont égales à 0 à l'infini, muni de norme sup.
2. La C*-algèbre du groupoïde est isomorphe à l'algèbre d'opérateurs compacts sur $L^2(M)$. L'isomorphisme est donné par le théorème de Hilbert-Schmidt.
3. La C*-algèbre du groupoïde est isomorphe à $C_0(E^*)$. L'isomorphisme est donné par la transformation de Fourier sur les fibres de E.
4. La C*-algèbre du groupoïde est le produit croisé [5] $C_0(M) \rtimes \Gamma$. Si l'action est libre et propre, alors on peut montrer que $C^*(G)$ est isomorphe à $C_0(M/\Gamma) \otimes \mathcal{K}(L^2(\Gamma))$. Ce n'est pas facile à montrer !
5. Par les exemples numéros 2 et 3, on déduit qu'il existe une suite exacte
$$0 \to \mathcal{K}(L^2(M)) \otimes C_0(\mathbb{R}^*) \to C^*(G) \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} C_0(T^*M) \to 0.$$
6. Comme l'exemple avant, il existe une suite exacte
$$0 \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}^*) \to C^*(G_{ad}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} C_0(\mathcal{A}^*G) \to 0.$$
7. On suppose que la variété est connexe. La C*algèbre du groupoïde de Poincaré est isomorphe à $\mathrm{C}^*(\pi_1(M)) \otimes \mathcal{K}(L^2(M))$ où $\mathrm{C}^*(\pi_1(M))$ est la C*algèbre du groupe $\pi_1(M)$.
8. La C* algèbre du groupoïde est par la définition : la C* algèbre du feuilletage régulier.

3 K théorie et l'indice analytique

On essaye à généraliser les invariants topologiques des espaces topologiques aux C* algèbres non-commutatives. L'invariant le plus facile à généraliser est la K théorie grâce au théorème de Serre-Swan.

Théorème 3.1 (Serre-Swan)**.** *Soit M un espace compact. Il y a une bijection entre les fibres vectoriels complexes et les $C^0(M)$-modules projectifs de type fini. La bijection est donnée par l'application $\xi \to \Gamma(\xi)$ où $\Gamma(\xi)$ est le module des sections de ξ.*

Ainsi on définit $K^0(A)$ le groupe engendré par les modules projectifs sur A [6]. Comme le cas topologique on définit aussi $K^1(A) := K^0(C_0(\mathbb{R}) \otimes A)$. Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme. On définit l'application $\phi_* : K^0(A) \to K^0(A)$ par la formule $\phi_*([E]) = [E \otimes_\phi B]$. C'est facile de vérifier qu'elle est bien définie. Évidement le même est vrai pour K^1. Les propriétés essentielles de la K théorie sont données dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.

1. *K^0 et K^1 sont des foncteurs contravariants.*
2. *Soit $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ une suite exacte. On obtient une suite exacte de six termes*

5. La définition se trouve dans [Ped79],[Wil07]
6. Notons que c'est la définition pour les C*-algèbres unifères. Voir [Mur90] pour la définition générale

$$\begin{array}{ccccc} K^0(A) & \xrightarrow{\alpha_*} & K^0(B) & \xrightarrow{\beta_*} & K^0(C) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(C) & \xleftarrow[\beta_*]{} & K^1(B) & \xleftarrow[\alpha_*]{} & K^1(A) \end{array}$$

3. *K^0 et K^1 sont homotopies invariantes. C'est à dire que si $\phi, \psi : A \to B$ sont des homomorphismes homotopes par des homomorphismes alors $\phi_* = \psi_*$.*

Rappelons qu'on a obtenu une suite exacte

$$0 \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}^*) \to C^*(G_{ad}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} C_0(\mathcal{A}^*G) \to 0.$$

Notons que la C*-algèbre $C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}^*)$ est contractile : C'est à dire que les applications $\mathrm{Id}, 0 : C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}^*) \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}^*)$ sont homotopes. Donc par le théorème 3.2 on déduit que l'application $ev_{0*} : K^0(C^*(G_{ad})) \to K^0(C_0(\mathcal{A}^*G))$ est un isomorphisme. On note $\mathrm{Ind}_a = ev_{1*} \circ ev_{0*}^{-1} : K^0(C_0(\mathcal{A}^*G)) \to K^0(C^*(G))$. On appelle cette application l'indice analytique. La raison est le fait qu'on peut définir un calcul d'opérateurs pseudos différentiels dont le symbol d'un opérateur elliptique P défini un élément dans $\sigma(P) \in K^0(C_0(\mathcal{A}^*G))$ et on peut vérfier que $\mathrm{Ind}_a(\sigma(P))$ est vraiment l'indice analytique de P [MP97],[VNX99].

4 Feuilletages Singuliers

Pour simplifier l'exposé on supposera que M est compacte. Mais ce n'est pas une hypothèse nécessaire.

Définition 4.1. Un feuilletage sur une variété lisse M est un $C^\infty(M)$-sous module $\mathcal{F}$ de l'espace de champs de vecteurs $\mathcal{X}(M)$ qui satisfait

1. Soit $X, Y \in \mathcal{F}$ des champs de vecteurs, alors $[X, Y]$ est dans $\mathcal{F}$,
2. Soit $x \in M$ un point. Il existe un voisinage ouvert $x \in U \subseteq M$ et des champs de vecteurs $X_i \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $X \in \mathcal{F}$ un champ de vecteurs il existe une famille de fonctions $f_i \in C^\infty(M)$ telle que $X = \sum_i f_i X_i$ sur U.

On définit l'espace tangent de la feuille $F_x = \{X(x) : X \in \mathcal{F}\} \subseteq T_xM$ et le fibre de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}/I_x\mathcal{F}$ où $I_x = \{f \in C^\infty(M) : f(x) = 0\}$.

Les espaces vectoriels $F_x, \mathcal{F}_x$ sont de dimension fini. Mais leurs dimensions peuvent varier. C'est à dire que les fonctions $x \to \dim(F_x), x \to \dim(\mathcal{F}_x)$ ne sont pas continues en générale. En fait si la premier fonction est continue alors le feuilletage est un feuilletage régulier.

Définition 4.2. Le sous-groupe engendré par $\{\exp(X) : X \in \mathcal{F}\}$ est noté $exp(\mathcal{F})$. L'espace $exp(\mathcal{F})x$ est appelé la feuille de $\mathcal{F}$ au point x et on le note $\mathcal{A}_x$.

On peut montrer que les espaces $\mathcal{A}_x$ sont des variétés immergées et $T_x\mathcal{A}_x = F_x$.

Exemples 4.3. 1. Le théorème de Frobenius dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est régulier si et seulement s'il est projectif.

2. Le feuilletage $\mathcal{F}_k$ sur $\mathbb{R}$ est par la définition le sous-module engendre par $\langle t^k \frac{\partial}{\partial t}\rangle$. Les feuilles sont $\mathbb{R}^*_-, \{0\}, \mathbb{R}^*_+$. Donc on voit que les feuilles ne détermine pas de feuilletage.
3. Soit G un groupe de Lie qui agit sur M, $g \in \mathcal{G}$ un élément de l'algèbre de lie de G. On peut définir un champ de vecteurs X_g par la formule $X_g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\exp(tg)x$. On peut vérifier facilement que $[X_g, X_h] = X_{[g,h]}$. Donc le sous module $\mathcal{F} = \langle\{X_g | g \in \mathcal{G}\}\rangle$ est un feuilletage. Les feuilles sont les composantes connexes des orbites de l'action de G.
4. On peut généraliser le dernière exemple. Soit $\mathcal{A}$ un fibré vectoriel lisse sur M. On suppose que $C^\infty(M, \mathcal{A})$ est muni d'un structure d'une algèbre de lie et qu'il existe une application linéaire $\# : \mathcal{A} \to TM$ satisfaisant $[\#X, \#Y] = \#[X, Y]$ et $[X, fY] = f[X, Y] + \#X(f)Y$ pour tout $X, Y \in C^\infty(M, \mathcal{A})$ et $f \in C^\infty(M)$. Alors on peut vérifier facilement que $\#(C^\infty(M, \mathcal{A}))$ est un feuilletage.

On veut définir le groupoïde d'un feuilletage singulier. On a besoin de la définition de bi-submersions.

Définition 4.4. Une bi-submersion est une variété lisse U et deux submersions $s, t : U \to M$ qui satisfait les hypothèse suivantes

$$s^{-1}\mathcal{F} = t^{-1}\mathcal{F} = C^\infty(M, \mathrm{Ker}\, ds) + C^\infty(M, \mathrm{Ker}\, dt).$$

Un morphisme entre deux bi-submersions $(U, s_U, t_U), (V, s_V, t_V)$ est une application lisse $f : U \to V$ qui satisfait $s_V f = s_U$ et $t_V f = t_U$.

L'idée est que une bi-submersion est presque un groupoïde. Elle manque le produit et l'inverse mais on peut définir le produit de bi-submersions et l'inverse de bi-submersions et donc on obtient un groupoïde.

Tout d'abord on définit une relation d'équivalence entre éléments de bi-submersions. Soit U, V deux bi-submersions, $x \in U$ et $y \in V$. On note $x \sim y$ s'il existe un morphisme de bi-submersions $f : U \to V$ tel que $f(x) = y$.

Soit (U, t, s) une bi-submersion. On note U^{-1} la bi-submersion (U, t, s). On l'appelle l'inverse de U. Le produit de deux bi-submersions $(U, s_U, t_U), (V, s_V, t_V)$ est défini par la formule $U \times_{s_U, t_V} V = \{(x, y) \in U \times V | s_U(x) = t_V(y)\}$. C'est une bi-submersion avec les applications $s(x, y) = s_U(y)$ et $t(x, y) = t_V(x)$. On le note $U \times V$

On définit **le groupoïde minimale** d'un feuilletage par la formule $G = \bigsqcup_{(U,s,t)} U/\sim$ le groupoïde maximale où on ne prend pas toues les bi-submersions, mais juste les bi-submersions minimales ([AS09]). C'est un groupoïde dont l'inverse est défini par la formule $i([x]_{(U,s,t)}) = [x]_{(U,t,s)}$ et le produit est défini par la formule $m([x]_{(U,s,t)}, [y]_{(V,s_V,t_V)}) = [(x, y)]_{(U\times V,s,t)}$. On note $\mathcal{G}(M, \mathcal{F})$ le groupoïde minimale du feuilletage $\mathcal{F}$. On le munit de la topologie quotiente.

Théorème 4.5. *[AS09] Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier. Le groupoïde $\mathcal{G}(M, \mathcal{F})$ et le groupoïde d'holonomie sont isomorphes.*

Le groupoïde $\mathcal{G}(M, \mathcal{F})$ n'est pas une variété lisse en générale.

Exemple 4.6. [AS09] Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$. Les feuilles sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. On peut monter que $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2, \mathcal{F}) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\{0\}) \cup (\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \times (\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$. Soit $x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tels que $gx = x$. On peut monter que la suite $(\frac{x}{n}, \frac{x}{n})$ converge vers $(g, 0)$. Donc les valeurs d'adhérence de la suite $(\frac{x}{n}, \frac{x}{n})$ est une ligne.

Par contre un théorème de C.Debord dit que le fibre sont toujours des variétés lisses.

Théorème 4.7. *[Deb13] Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M et $(\mathcal{G}(M,\mathcal{F}),s,t)$ son groupoïde défini dessus. Les fibres $s^{-1}(x), t^{-1}(x)$ admettent des structures différentielles naturelles pour tout $x \in M$.*

On peut définir la C*-algèbre du groupoïde $\mathcal{G}(M,\mathcal{F})$. On utilise la même construction que la construction dans la section dernière.

Définition 4.8. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage. On note $\mathcal{A}(M,\mathcal{F})$ la algèbre définie par
- $\mathcal{A}(M,\mathcal{F}) = \bigoplus_{(U,s,t)} C_c^\infty(U)/\sim$ où $\sim$ est une relation d'équivalence qu'on ne souhaite pas définir ici.
- Soit $f \in C_c^\infty(U)$, $g \in C_c^\infty(V)$. Le produit est défini par la formule $f * g = f \otimes g \in C_c^\infty(U \times V)$ où $f \otimes g(x,y) = f(x)g(y)$.
- Soit $f \in C_c^\infty(U)$, l'inverse est défini par la formule $f^* = \bar{f} \in C_c^\infty(U^{-1})$.
- On définit la norme 1 : $\|f\|_1 = \int_U |f|$.
- La C*norme est définie par la même identité $\|f\|_{\max} = \sup_{\|\cdot\|} \|f\|$ où la sup est sur toues les C*-semi-normes bornées.

la C*-algèbre du groupoïde $\mathcal{G}(M,\mathcal{F})$ est la complété de $\mathcal{A}(M,\mathcal{F})$ par la norme $\|\|_{\max}$. On la note $C^*(M,\mathcal{F})$.

Dans [AS11b], [AS11a] Androulidakis et Skandalis définissent un calcul d'opérateurs pseudos différentiels sur un feuilletage Singulier. Ils obtiennent une suite exacte pareille à la suite exacte dans l'exemple 2.3.6 et par la même construction que la constuction de l'indice analytique dans section 4, ils définissent l'indice analytique $\mathrm{Ind}_a : K^0(C_0(\mathcal{F}^*)) \to K^0(C^*(M,\mathcal{F}))$.

Références

[AS09] I. Androulidakis and G. Skandalis. The holonomy groupoid of a singular foliation. *J. Reine Angew. Math*, 266 :1–37, 2009.

[AS11a] I. Androulidakis and G. Skandalis. The analytic index of elliptic pseudodifferential operators on a singular foliation. *J. of K-theory : K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology*, 8 :363–385, 2011. Issue 03.

[AS11b] I. Androulidakis and G. Skandalis. Pseudodifferential calculus on a singular foliation. *J. Noncommut. Geom*, 5(1) :125–152, 2011.

[Con82] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pages 521–628. Amer. Math. Soc. Providence. R.I., 1982.

[Con95] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1995.

[CS84] A. Connes and G. Skandalis. The longitudinal index theorem for foliations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, 20 :1139–1183, 1984.

[Dav96] K. Davidson. *C*-Algebras by Example.* Amer Mathematical Society, 1996.

[Deb01a] C. Debord. Holonomy groupoids of singular foliations. *J. Diff. Geom*, 58 :467–500, 2001.

[Deb01b] C. Debord. Local integration of lie algebroids. *Banach Center Publications*, 54 :21–33, 2001.

[Deb13] C. Debord. Longitudinal smoothness of the holonomy groupoid. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 351(no. 15-16) :613–616, 2013.

[Ehr65] C. Ehresmann. Catégories et structures. *Dunod, Paris*, 1965.

[Kas80] G. G. Kasparov. The operator k- functor and extensions of c*- algebras. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44 :571–636, 1980.

[MP97] B. Monthubert and F. Pierrot. Indice analytique et groupoïdes de lie. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 325 :193–198, 1997.

[Mur90] G. J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[Par84] J. Pardines. Feuilltages : holonomie et graphes locaux. *C.R.A.S. série I*, 298 :297–300, 1984.

[Par85] J. Pardines. How to define the differentiable graph of a singular foliation. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, XXVI(4) :339–381, 1985.

[Ped79] G. K. Pedersen. *C*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, 1979.

[Ren80] J. Renault. *A Groupoid Approach to C*-Algebras.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.

[Vas01] S. Vassout. *Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal.* Thèse de doctorant, 2001.

[VNX99] A. Weinstein V. Nistor and P. Xu. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific J. Math*, 189(no. 1) :117–152, 1999.

[Wil07] D. P. Williams. *Crossed Products of C*- Algebras.* American Mathematical Society, 2007.

[Win83] H. E. Winkelnkemper. The graph of a foliation. *Ann. Glob. Analysis and Geometry*, 1(3) :51–75, 1983.