

# Géométrie Différentielle

Patrick Bernard

1<sup>er</sup> juin 2016

Version préliminaire des notes de cours.

## Table des matières

<b>1 Étude locale des applications</b>	<b>2</b>
1.1 Difféomorphismes	2
1.2 Immersions, plongements	2
1.3 Submersions	3
1.4 Subimmersions	4
<b>2 Sous variétés</b>	<b>4</b>
2.1 Caractérisations des sous variétés	4
2.2 Applications différentiables entre sous variétés	5
2.3 Complément, structure de sous-variété.	10
<b>3 Exemples</b>	<b>10</b>
3.1 Sphères	10
3.2 Tores	10
3.3 Groupes de Matrices	12
3.4 Matrices de rang fixé	12
3.5 Grassmaniennes	13
3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel.	15
<b>4 Espaces métriques localement compacts</b>	<b>17</b>
4.1 Suites exhaustives de compacts	17
4.2 Partitions de l'unité	18
<b>5 Champs de vecteurs, fibrations</b>	<b>21</b>
5.1 Champ de vecteurs sur une sous variété	23
5.2 Fibrations localement triviales, voisinages tubulaires	25
5.3 Fibration de Hopf	26
5.4 Oscillateur non résonant	27
5.5 Orbites d'un champ de vecteurs	28
5.6 Sous-variétés de dimension 1	29
<b>6 Distances sur une sous-variété</b>	<b>30</b>
6.1 La distance géométrique	30
6.2 Géodésiques minimisantes.	31
6.3 Métriques Riemanniennes	33
6.4 Feuilles et feuilletages	33
6.5 Théorème de l'orbite	35

<b>7 Variétés</b>	<b>38</b>
7.1 Première définition	38
7.2 Seconde définition	38
7.3 Plongement	39
7.4 Feuilles	40
7.5 Quotients	41
7.6 Actions libres et propres de $\mathbb{R}^k$ .	43
<b>8 Espace tangent et crochet de Lie</b>	<b>44</b>
8.1 Espaces tangents et champs de vecteurs.	44
8.2 Crochets de Lie	46
8.3 Formes de Pfaff	51
8.4 Complément : fibrés vectoriels	52
<b>9 Formes différentielles</b>	<b>54</b>
9.1 Formes multilinéaires alternées.	54
9.2 Formes différentielles	57
9.3 Intégration et formule de Stokes sur le cube.	59
9.4 Différentielle extérieure	62
9.5 Formes fermées, formes exactes	64
9.6 Orientation et intégration	65
9.7 Domaines à bord et formule de Stokes	67
9.8 Une application	69

# 1 Étude locale des applications

On notera  $\psi : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  pour désigner une application  $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $\psi(x_0) = y_0$ . On utilisera la même notation même si  $\psi$  n'est définie que dans un voisinage de  $x_0$ .

## 1.1 Difféomorphismes

Étant donnés deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , un difféomorphisme de  $\psi : U \longrightarrow V$  est une application inversible  $C^1$  d'inverse  $C^1$ . Si le difféomorphisme  $\psi$  est  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , alors son inverse est nécessairement  $C^r$ , comme on le montre par récurrence en utilisant la formule

$$d(\psi^{-1})(y) = (d\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}.$$

On rappelle :

**Théorème 1.1** (Théorème d'inversion locale). *Soit  $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $C^1$  telle que  $d\psi_{x_0}$  est inversible. Alors,  $\psi$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$ , c'est à dire qu'il existe des ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x_0$  et  $\psi(x_0)$  tels que  $\psi|_U$  est un difféomorphisme sur  $V$ .*

## 1.2 Immersions, plongements

**Proposition 1.2** (Forme Normale des Immersions). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ . Si  $df_{x_0}$  est injective, alors  $f$  est une immersion en  $x_0$ , c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, (x_0, 0))$$

tel que  $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$  au voisinage de  $x_0$ .

Plus précisément, l'énoncé s'écrit : Il existe des ouverts  $U, V, W$  de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-n}, \mathbb{R}^m$  contenant  $x_0, 0, y_0$ , et un difféomorphisme  $\varphi : (W, y_0) \longrightarrow (U \times V, (x_0, 0))$  tel que  $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$  sur  $U$ .

◀ Soit  $F$  un supplémentaire de l'image de  $df_{x_0}$  dans  $\mathbb{R}^m$ . L'application

$$\mathbb{R}^n \times F \ni (x, y) \longmapsto f(x) + y \in \mathbb{R}^m$$

est un difféomorphisme local. Notons  $\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times F, (x_0, 0))$  son inverse local. On voit que  $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ . ▶

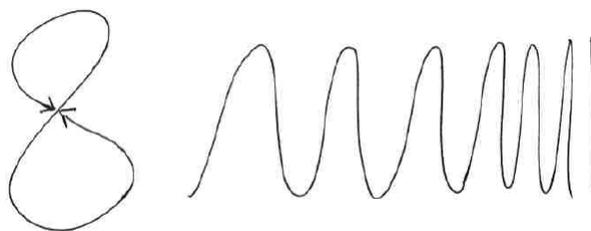


FIGURE 1 – immersions injectives

Étant donné un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une immersion si c'est une immersion en chaque point de  $U$ .

L'application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image (munie de la topologie induite).

Dans le cas  $m = n$ , les notions de plongement et de difféomorphisme sur son image sont équivalentes.

Les notions de plongement et d'immersion sont localement identiques :

**Propriété 1.3.** *Si  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  est une immersion en  $x_0$ , alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$  tel que  $f|_V$  est un plongement.*

Cette propriété découle immédiatement de la définition.

La première obstruction globale à ce qu'une immersion soit un plongement est l'injectivité. Les exemples dessinés ci-dessus montrent que même une immersion injective (de  $]0, 1[$  et de  $]0, 1[ \cup ]2, 3[$ , en l'occurrence) n'est pas nécessairement un plongement.

**Proposition 1.4.** *Une immersion injective et propre d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est un plongement.*

On rappelle qu'une application est dite propre si la préimage de tout compact est compacte. La proposition est une conséquence tautologique du lemme classique suivant.

**Lemme 1.5.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue injective entre espaces métriques. Si  $f$  est propre, c'est un homéomorphisme sur son image.*

◀ Il faut montrer que  $f^{-1}$  est continue. On considère une suite  $y_n \rightarrow y$  dans  $f(X)$ , et les préimages  $x_n$  de  $y_n$  et  $x$  de  $y$ . Comme l'ensemble  $\{y_n\} \cup \{y\}$  est compact, sa préimage  $Z$  est compacte. Comme  $x$  est la seule valeur d'adhérence possible de la suite  $x_n$ , on conclut que  $x_n \rightarrow x$ . ▶

### 1.3 Submersions

**Proposition 1.6** (Forme Normale des Submersions). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , telle que  $df_{x_0}$  est surjective. Alors  $f$  est une submersion en  $x_0$  c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, (y_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$$

tel que  $f \circ \psi(y, z) = y$  au voisinage de  $y_0$ .

◀ Soit  $\pi$  une projection linéaire d'image  $K := \ker df_{x_0}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . L'application

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (f(x), \pi(x - x_0)) \in \mathbb{R}^m \times K$$

est un difféomorphisme local en  $x_0$ . On note  $\psi : (\mathbb{R}^m \times K, (y_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$  son inverse locale. On a alors  $f \circ \psi(y, k) = y$ . ▶

On verra plus loin une notion forte de submersion, les fibrations localement triviales, et on montrera que toute submersion propre est une fibration localement triviale.

## 1.4 Submersions

On dit en fait plutôt applications de rang constant. On ne les rencontre pas aussi souvent que les immersions et les submersions.

**Proposition 1.7** (Forme Normale des Submersions). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , telle que  $df$  est de rang constant ( $k$ ) au voisinage de  $x_0$ . Alors  $f$  est une subimmersion en  $x_0$  c'est à dire qu'il existe des difféomorphisme locaux*

$$\psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (0,0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0) \quad , \quad \varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, (0,0))$$

tels que  $\varphi \circ f \circ \psi(y, z) = (y, 0)$  au voisinage de 0.

Dans le cas des immersions et submersions, le rang en  $x_0$  est maximal, ce qui implique qu'il est localement constant. C'est la raison pour laquelle on peut se contenter d'une hypothèse ponctuelle dans ces cas.

◀ On considère une projection linéaire  $\pi_K$  sur  $K := \ker df_{x_0}$  et une projection  $\pi_R$  sur l'image  $R$  de  $df_{x_0}$ . On définit  $\psi$  comme l'inverse du difféomorphisme local

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto (\pi_R(f(x) - y_0), \pi_K(x - x_0)) \in R \times K.$$

On a alors  $\pi_R \circ (f - y_0) \circ \psi(x_1, x_2) = x_1$ , L'application  $f \circ \psi$  est de la forme

$$R \times K \ni (x_1, x_2) \longmapsto y_0 + x_1 + g(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m$$

où  $g : (R \times K, (0,0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  vérifie  $\pi_R \circ g(y_R, z) \equiv 0$ . Autrement dit, si l'on identifie  $\mathbb{R}^m$  au produit  $R \times \ker \pi_R$  et  $g$  (dont le premier facteur est nul) à son second facteur  $(I - \pi_R) \circ g$  :

$$f \circ \psi(x_1, x_2) = y_0 + (x_1, g(x_1, x_2)).$$

On a alors

$$d(f \circ \psi)_{(x_1, x_2)}(u, v) = (u, \partial_1 g_{(x_1, x_2)}u + \partial_2 g_{(x_1, x_2)}v).$$

Comme le rang de cette application linéaire est égal à  $k = \dim R$ , on conclut que  $\partial_2 g \equiv 0$ , et donc que  $g$  ne dépend pas de  $x_2$  :

$$f \circ \psi(x_1, x_2) = x_1 + g(x_1).$$

On pose alors  $\varphi(y) = y - g \circ \pi_R(y)$  soit en coordonnées  $\varphi(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g(y_1))$ . ▶

La première étape de la preuve ci-dessus donne le résultat général suivant :

**Proposition 1.8** (Forme Normale des Applications). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Soit  $R$  l'image de  $df_{x_0}$  et  $F$  un supplémentaire de cette image. Alors il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, (0,0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0),$$

et un application locale  $g : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, 0) \longrightarrow (F, 0)$ , tels que  $f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + \xi + g(\xi, z)$  au voisinage de 0. En identifiant  $\mathbb{R}^m$  au produit  $R \times F$ , ceci se réécrit

$$f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + (\xi, g(\xi, z)).$$

## 2 Sous variétés

### 2.1 Caractérisations des sous variétés

Soit  $M$  une partie de  $\mathbb{R}^D$ ,  $x_0$  un point de  $M$ , et  $T$  un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^D$  (de dimension  $d$ ). On dit que  $M$  est une sous variété de classe  $C^r$  tangente à  $T$  en  $x_0$  si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

**Grphe :** Il existe un supplémentaire  $E$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}^D$  et une application  $g : (T, 0) \longrightarrow (E, 0)$  de classe  $C^r$  telle que  $dg_0 = 0$  et telle que  $M - x_0$  est localement le graphe de  $g$ . Plus précisément, il existe un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $T$  tel que le graphe

$$\{x_0 + (x + g(x)), x \in V\},$$

est un ouvert de  $M$ .

**Équation :** Il existe une submersion  $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$  telle que le noyau de  $d\psi(x_0)$  est  $T$  et telle que, localement,  $M = \psi^{-1}(0)$ . Plus précisément, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  et une submersion  $\psi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$  de classe  $C^r$  telle que  $M \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$  et  $\ker d\psi_{x_0} = T$ .

**Redressement :** Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^d$  et un difféomorphisme local  $C^r$

$$\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$$

tel que  $\varphi(U \cap M) = V \times \{0\}$  et  $d\varphi_{x_0}(T) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ .

**Paramétrisation :** Il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^d$  et un plongement  $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^D$  de classe  $C^r$ , dont l'image est un voisinage ouvert de  $x_0$  dans  $M$ .

**Graphe fort :** Pour tout supplémentaire  $E$  de  $T$  et tout supplémentaire  $F$  de  $E$ , il existe une application  $g : (F, 0) \longrightarrow (E, 0)$  de classe  $C^r$  telle que  $M - x_0$  est localement le graphe de  $g$ , et telle que  $T$  est le graphe de  $dg_0$ .

◀ Soit  $\pi$  une projection linéaire sur  $T$ .

Si  $M$  est localement le graphe de  $g : T \longrightarrow E$ , on note  $\pi_T$  et  $\pi_E$  les projections linéaires associées à la décomposition  $\mathbb{R}^D = T \oplus E$ , et on définit  $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (F, 0)$  par  $\psi(x) = \pi_E(x - x_0) - g \circ \pi_T(x - x_0)$ . On constate que  $d\psi_{x_0} = \pi_E$ , donc  $\psi$  est une submersion en  $x_0$  et  $\ker d\psi_{x_0} = T$ .

Si  $M = \{\psi = 0\}$ , on pose  $\varphi(x) = (\pi_T(x), \psi(x))$ , où  $\pi_T$  est une projection sur  $T$ .

Si  $\varphi(M) = T$ , on pose  $\phi = \varphi|_M^{-1} : T \longrightarrow M$ .

Si  $M = \phi(T)$ , et si  $E$  et  $F$  sont donnés, on remarque que  $\pi_F \circ (\phi - x_0) : (T, 0) \longrightarrow (F, 0)$  est un difféomorphisme local de  $T$  et on pose  $g = \pi_E \circ (\pi_F \circ (\phi - x_0))^{-1}$ . ▶

On déduit même de la forme normale des immersions que, si  $\phi$  est une paramétrisation locale de  $M$ , alors il existe un redressement  $\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$  tel que  $\phi = \varphi|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$  au voisinage de  $0$ .

On dit que  $M$  est une sous-variété de dimension  $d$  en  $x_0$  si il existe un sous espace  $T$  de dimension  $d$  tel que  $M$  est une sous variété tangente à  $T$  en  $x_0$ . On dit alors que  $T$  est l'espace tangent à  $M$  en  $x_0$ . L'espace tangent  $T$  (et donc la dimension  $d$ ) sont bien déterminés, on le note  $T_{x_0}M$ .

Si  $M$  est à la fois une sous variété tangente à  $T$  est une sous variété tangente à  $\tilde{T}$ , alors  $T = \tilde{T}$ . En effet, si  $T$  et  $\tilde{T}$  sont deux espaces tangents à  $M$  en  $x_0$ , il existe deux redressements  $\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$  et  $\tilde{\varphi} : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \mathbb{R}^{D-\tilde{d}}, (0, 0))$  de  $M$  tels que  $d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T$  et  $d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = \tilde{T}$ . Comme  $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$  est un difféomorphisme local qui envoie (localement)  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  sur  $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$ ,  $d\tilde{\varphi}_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$  est un isomorphisme linéaire qui envoie  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  sur  $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$ . On en conclut que  $d = \tilde{d}$  et que

$$\tilde{T} = d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T.$$

On dit que  $M \subset \mathbb{R}^D$  est une sous variété si c'est une sous variété en chacun de ses points. La dimension est alors localement constante. On considérera en général des variétés de dimension constante.

La propriété suivante est évidente, mais bien utile :

**Propriété 2.1.** Si  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_M}$  et  $N$  une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_N}$ , alors  $M \times N$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_M + D_N}$ . De plus,

$$T_{(x,y)}M \times N = T_xM \times T_yM$$

pour tout  $(x, y) \in N \times M$ .

## 2.2 Applications différentiables entre sous variétés

On notera  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  une application de  $M$  dans  $N$  telle que  $f(x_0) = y_0$ . On utilisera aussi cette notation lorsque  $f$  n'est définie que dans un voisinage de  $x_0$ .

Soit  $M$  une sous variété de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  de  $\mathbb{R}^D$ .

La fonction  $f : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite différentiable (resp. de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq r$ ) en  $x_0$  si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. Il existe une paramétrisation locale  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  telle que  $f \circ \phi$  est différentiable (resp.  $C^k$ ).
2. Il existe une fonction différentiable (resp.  $C^k$ )  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f = \tilde{f}|_M$  au voisinage de  $x_0$ .
3. Pour toute paramétrisation locale  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ , la composée  $f \circ \phi$  est différentiable (resp.  $C^k$ ).

◀ Montrons que 1.  $\Rightarrow$  2., les autres implications sont claires. On utilise le théorème de forme normale des immersions, qui donne l'existence d'un difféomorphisme local  $\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (x_0, 0))$  tel que  $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0)$  ( $\varphi$  est donc un redressement local de  $M$ ). On étend alors  $f$  par  $f := f \circ \pi \circ \varphi^{-1}$ , où  $\pi$  est la projection sur le premier facteur dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$ . ▶

Pour comprendre directement l'équivalence entre 1. et 3. lorsque  $k \leq r$ , il est utile de souligner :

**Propriété 2.2.** Si  $\tilde{\phi}$  et  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$  sont deux paramétrisations locales de  $M$  en  $x_0$ , alors l'application

$$\phi^{-1} \circ \tilde{\phi} : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0).$$

est un difféomorphisme local de classe  $C^r$ .

◀ On redresse chacune de ces applications injectives (et donc la sous variété  $M$ ) par des difféomorphismes locaux  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  tels que  $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\phi}(x)$ . On a donc  $(\phi^{-1}, 0) = \varphi|_M$  et  $\tilde{\phi}(x) = (\tilde{\varphi}|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}})^{-1}(x, 0)$ . Finalement, pour  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$(\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}, 0)(x) = \varphi|_M \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, 0) = (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(x, 0)$$

donc  $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$ , qui est la première composante de  $(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$ , est un difféomorphisme local. ▶

Une application  $f : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est dite différentiable (resp.  $C^k$ ) si chacune de ses coordonnées est différentiable.

Si  $N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{D_N}$ , l'application  $f : (M, x_0) \longrightarrow N$  est dite différentiable (resp.  $C^k$ ) si elle l'est en tant qu'application à valeurs dans  $\mathbb{R}^{D_N}$ .

L'application  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  est différentiable en  $x_0$  si et seulement si  $\phi^{-1} \circ f$  est différentiable pour toute paramétrisation locale  $\phi$  de  $N$ .

En effet, si  $\phi$  est une paramétrisation locale de  $N$  en  $y_0$ , il existe un redressement  $\varphi$  tel que  $\phi^{-1} = \varphi|_M$ , et donc  $\varphi \circ f = \phi^{-1} \circ f$ . Comme  $\varphi$  est un difféomorphisme,  $f$  est différentiable si et seulement si  $\varphi \circ f$  l'est, et donc si et seulement si  $\phi^{-1} \circ f$  l'est.

**Exercice 2.1.** L'application  $f : M \longrightarrow N$  est différentiable si et seulement si  $g \circ f$  est différentiable pour toute fonction différentiable  $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 2.3.** Soit  $f : (M, x_0) \longrightarrow N$  une application différentiable en  $x_0$ . Il existe alors une application linéaire  $L : T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}^{D_N}$  qui est la restriction à  $T_{x_0}M$  de  $d\tilde{f}_{x_0}$  pour n'importe quel prolongement différentiable  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{D_N}$ . Cette application prend ses valeurs dans  $T_{f(x_0)}N$ . C'est la différentielle de  $f$  en  $x_0$ , on la note

$$df_{x_0} \in \mathcal{L}(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}N).$$

Elle est aussi caractérisée par la propriété

$$d\tilde{f}_{x_0} \circ d\phi_0 = d(f \circ \phi)_0$$

pour toute paramétrisation locale  $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ .

◀ Soit  $\tilde{f}$  un prolongement de  $f$  et  $\phi$  une paramétrisation locale de  $M$ . On a alors  $d\tilde{f}_{x_0} \circ d\phi_0 = d(\tilde{f} \circ \phi)_0 = d(f \circ \phi)_0$ . Comme  $d\phi_0$  est un isomorphisme linéaire entre  $\mathbb{R}^{d_M}$  et  $T_{x_0}M$ , on obtient

$$d\tilde{f}_{x_0|T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}.$$

Cette application linéaire ne dépend donc pas du prolongement  $\tilde{f}$ . Pour montrer qu'elle prend ses valeurs dans  $T_{f(x_0)}N$ , on considère une équation locale  $\psi : (N, f(x_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D_N - d_N}, 0)$ . On a alors  $\psi \circ f = 0$  au voisinage de  $x_0$ , donc  $\psi \circ f \circ \phi = 0$  au voisinage de 0, donc  $d\psi_{f(x_0)} \circ d(f \circ \phi)_0 = 0$ . L'application linéaire  $d(f \circ \phi)_0$  prend donc ses valeurs dans  $\ker d\psi_{f(x_0)} = T_{f(x_0)}N$ , il en est donc de même de  $d\tilde{f}_{x_0|T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}$ . ▶

La définition par prolongement local implique directement la règle de composition :

**Propriété 2.4.** Si  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  et  $g : (N, y_0) \longrightarrow (N', z_0)$  sont différentiables (resp.  $C^k$ ) en  $x_0$  et  $y_0$ , alors  $g \circ f$  est différentiable (resp.  $C^k$ ) en  $x_0$  et

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{y_0} \circ df_{x_0}.$$

Si  $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  est une paramétrisation locale de  $M$ , alors son inverse locale  $\phi^{-1} : (M, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$  est différentiable (puisque  $\phi^{-1} \circ \phi = Id$  est différentiable). La paramétrisation  $\phi$  peut donc être vue comme un difféomorphisme local de  $(\mathbb{R}^{d_M}, 0)$  dans  $(M, x_0)$ , c'est à dire une application différentiable admettant une inverse différentiable. On appellera carte de  $M$  en  $x_0$  l'inverse d'une paramétrisation, c'est à dire un difféomorphisme local de  $(M, x_0)$  dans  $(\mathbb{R}^d, 0)$ .

**Propriété 2.5** (Théorème d'inversion local entre variétés). *L'application  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  est un difféomorphisme local si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- La différentielle  $df_{x_0}$  est un isomorphisme de  $T_{x_0}M$  dans  $T_{y_0}N$ .
- Pour toutes paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (N, y_0)$ , la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  est un difféomorphisme local.

◀ La règle de composition implique que  $df_{x_0}$  est un isomorphisme si et seulement si  $d(\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M)_0$  en est un. Au vu du théorème d'inversion locale dans  $\mathbb{R}^d$  les deux propriétés sont donc équivalentes. Il est clair aussi que la seconde propriété est satisfaite si et seulement si  $f$  est un difféomorphisme local. ▶

On étend naturellement les notions d'immersions et submersions (et subimmersions) aux sous variétés :

**Définition 2.6** (Immersion). *On dit que l'application  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  est une immersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- La différentielle  $df_{x_0}$  est injective de  $T_{x_0}M$  dans  $T_{y_0}N$ .
- Pour toutes paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, y_0)$ , la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est une immersion.
- Il existe des paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, y_0)$  telles que la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est localement une injection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme  $x \longmapsto (x, 0)$ ).

**Définition 2.7** (Submersion). *On dit que l'application  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  est une submersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- La différentielle  $df_{x_0}$  est surjective de  $T_{x_0}M$  dans  $T_{y_0}N$ .
- Pour toutes paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, y_0)$ , la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est une submersion.
- Il existe des paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, y_0)$  telles que la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est localement une surjection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme  $(x, y) \longmapsto x$ ).

La proposition suivante sur les submersions sera très utile :

**Propriété 2.8.** *Soit  $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$  une submersion de classe  $C^r$  et soit  $f : M \longrightarrow N$  une application. L'image de  $\pi$  est un ouvert de  $U$  de  $M$ , et l'application  $f \circ \pi$  est  $C^r$  si et seulement si  $f$  est  $C^r$  sur  $U$ .*

◀ Supposons que  $f \circ \pi$  est  $C^r$ , fixons un point  $x_0$  de  $M$  et un point  $y_0$  tel que  $\pi(y_0) = x_0$ . Il existe alors une section locale de  $\pi$ , c'est à dire une application  $s : (M, x_0) \longrightarrow (\tilde{M}, y_0)$  de classe  $C^r$  telle que  $\pi \circ s = Id$ . Localement,  $f = (f \circ \pi) \circ s$  est donc  $C^r$ . ▶

**Propriété 2.9.** *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_M}$  de dimension  $d_M$  et  $\psi : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  une submersion locale. Alors il existe une submersion locale*

$$\Psi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow N \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}$$

telle que  $\Psi(x) = (\psi(x), 0)$  si  $x \in M$ .

◀ On considère une extension locale  $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ , une submersion locale  $\varphi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D_M - d_M}, 0)$  donnant une équation locale de  $M$ , et on pose  $\Psi = (\tilde{\psi}, \varphi)$ . ▶

**Définition 2.10** (Sous variétés d'une sous variété). *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ ,  $N$  une partie de  $M$ , et  $x_0$  un point de  $N$ . on dit que  $N$  est une sous variété de  $M$  en  $x_0$  si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- $N$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$  en  $x_0$ .
- Il existe une carte de  $M$  en  $x_0$  qui redresse  $N$ .
- Il existe un difféomorphisme local

$$\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \mathbb{R}^{D - d_M}$$

qui envoie  $N$  sur  $\mathbb{R}^{d_N} \times \{(0, 0)\}$  et  $M$  sur  $\mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \{0\}$ .

◀ Le premier point implique le second. Soit  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$  une paramétrisation locale de  $N$ . Alors  $\phi_N$ , vue comme application à valeurs dans  $M$ , est aussi une immersion. Il existe donc une carte  $\phi_M : (M, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$  tel que  $\phi_M \circ \phi_N$  prend localement la forme  $x \longmapsto (x, 0)$ , l'image d'un petit voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^{d_N}$  est donc un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^{d_M} \times \{0\}$ .

Le second point implique le troisième. La carte  $\phi_M : M \rightarrow \mathbb{R}^{d_M}$  se prolonge localement en  $\tilde{\phi}_M : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^{d_M}$ . Si  $\psi$  est une équation locale de  $M$ , alors  $(\tilde{\phi}_M, \psi)$  est le difféomorphisme local cherché. ►

Lorsque  $N$  est une sous variété de  $M$  en  $x_0$  on a naturellement  $T_{x_0}N \subset T_{x_0}M$ .

Si  $N$  est une sous variété de  $M$ , alors l'inclusion de  $N$  dans  $M$  est un plongement (sa différentielle est l'inclusion de  $T_{x_0}N$  dans  $T_{x_0}M$ ). Réciproquement :

**Propriété 2.11.** *L'image  $J(N)$  d'un plongement  $J : N \rightarrow M$  est une sous variété de  $M$ .*

◀ Soit  $y_0 = J(x_0)$  un point de  $J(N)$ . Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^{d_N}$  et un plongement  $\phi$  de  $U$  dans  $N$  dont l'image  $V = \phi(U)$  est un ouvert de  $N$  contenant  $x_0$ . L'application  $J \circ \phi$  est alors un plongement de  $U$  dans  $J(M)$  dont l'image  $J \circ \phi(U) = J(V)$  est un ouvert de  $J(N)$  (car  $J : N \rightarrow J(N)$  est un homéomorphisme) qui contient  $y_0$ . ►

Il est facile de vérifier que la proposition 1.4 reste vraie dans un contexte plus général :

**Proposition 2.12.** *Si  $J : N \rightarrow M$  est une immersion injective et propre, alors c'est un plongement et son image  $J(N)$  est une sous variété fermée de  $M$ .*

Tout plongement n'est pas forcément propre, mais on a :

**Proposition 2.13.** *L'image  $J(N)$  du plongement  $J : N \rightarrow M$  est fermée si et seulement si  $J$  est propre.*

◀ Si  $J(N)$  est fermée, alors pour tout compact  $K$  de  $M$ , l'intersection  $K \cap J(N)$  est compacte. Comme  $J$  est un homéomorphisme sur son image,  $J^{-1}(K) = J^{-1}(K \cap J(N))$  est alors compacte, c'est à dire que  $J$  est propre.

Si  $J$  est propre, considérons une suite  $y_n = J(x_n)$  dans  $M$ , qui converge vers une limite  $y$ . La propriété de  $J$  implique que la suite  $x_n$  admet une valeur d'adhérence  $x$ . On a alors  $J(x) = y$  et donc  $y \in J(N)$ . ►

**Exercice 2.2.** *Montrer qu'un difféomorphisme local injectif est un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image).*

**Exercice 2.3.** *Soit  $J : M \rightarrow N$  une immersion propre. Montrer que chaque point de  $N$  a un nombre fini de préimages.*

*En supposant que chaque point de  $J(M)$  a le même nombre de préimages, montrer que  $J(M)$  est une sous-variété de  $N$ .*

Si  $\psi : M \rightarrow N$  est une submersion en chaque point, alors pour tout  $y_0 \in M$  la préimage  $\psi^{-1}(y_0)$  est une sous variété de  $M$ , de dimension  $d_M - d_N$ . En fait, il suffit pour ceci que  $\psi$  soit une submersion en chaque point de  $\psi^{-1}(y_0)$ . On dit alors que  $y_0$  est une valeur régulière de  $\psi$ .

**Définition 2.14.** *On dit que  $x_0 \in M$  est un point critique de  $\psi : M \rightarrow N$  si  $d\psi_{x_0}$  n'est pas surjective. On dit que  $y_0 \in N$  est un valeur critique de  $\psi$  si il existe un point critique  $x_0 \in M$  tel que  $\psi(x_0) = y_0$ . Les points de  $N$  qui ne sont pas des valeurs critiques sont dits valeurs régulières.*

En particulier, les points qui n'appartiennent pas à l'image  $\psi(M)$  sont des valeurs régulières.

Soit  $N$  une sous variété de dimension  $d_N$  et  $B$  la boule ouverte de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^{d_N}$ . On dit qu'une partie  $A \subset N$  d'une sous variété  $N$  est de mesure nulle si, pour tout plongement  $\varphi$  de  $B$  dans  $N$ , la préimage  $\varphi^{-1}(A)$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^{d_N}$ . Cette définition est cohérente dans le cas  $N = \mathbb{R}^{d_N}$ .

**Théorème 2.15 (Sard).** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $f$  est  $C^\infty$ , alors l'ensemble des valeurs singulières de  $f$  est de mesure nulle dans  $N$ . Le résultat est vrai si  $f$  est de classe  $C^r$  avec  $r \geq 1$  et  $r \geq 1 + d_M - d_N$ .*

◀ La preuve est assez difficile. On se limite ici au cas facile  $d_M \leq d_N$ . Au vu des définitions, il suffit de montrer le résultat lorsque  $N = \mathbb{R}^{d_N}$ . On note  $\Sigma$  l'ensemble des points critiques de  $f$ .

On dit que  $K \subset M$  est un cube plongé si il existe une carte  $\phi$ , définie au voisinage de  $\bar{\Omega}$ , telle que  $\phi(K) = [0, 1]^{d_M}$ . On va montrer que  $f(\Sigma \cap K)$  est de mesure nulle pour tout cube plongé  $K$ . Comme les intérieurs des cubes plongés recouvrent  $M$ , le Lemme 2.18 implique que  $M$  est recouvert par une famille dénombrable de cubes plongés. On conclut que  $f(\Sigma)$  est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, et donc qu'il est de mesure nulle.

**Cas  $d_M < d_N$ .** On a alors  $\Sigma = M$ .

**Lemme 2.16.** *Il existe une constante  $C > 0$  ayant la propriété suivante : Tout cube  $X$  de coté  $1/k$  contenu dans  $[0, 1]^{d_M}$  vérifie*

$$\text{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leq Ck^{-(1+d_M)},$$

où  $\text{Vol}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{d_N}$ .

◀ Comme  $df$  est borné sur  $[0, 1]^{d_M}$ , l'image du cube est contenu dans une boule de  $\mathbb{R}^{d_N}$  de rayon au plus  $C/k$ . Ceci implique que son volume est majoré par  $Ck^{-d_N} \leq Ck^{-(1+d_M)}$ . ▶

Comme on peut recouvrir le cube  $K$  par  $k^{d_M}$  cubes de coté  $1/k$ , on conclut du Lemme que

$$\text{Vol}(f(K)) = \text{Vol}(f \circ \phi^{-1}([0, 1]^{d_M})) \leq k^{d_M} Ck^{-(1+d_M)} = C/k.$$

Comme ceci est vrai pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{Vol}(f(K)) = 0$ , ce qui termine la preuve dans le cas  $d_M < d_N$ .

**Cas**  $d_M = d_N$ . On remarque que les points critiques de  $f \circ \phi^{-1}$  sont les points de  $\phi(\Sigma)$ .

**Lemme 2.17.** *Il existe un module de continuité  $\epsilon$  ayant la propriété suivante : Tout cube  $X$  de coté  $1/k$  contenu dans  $[0, 1]^{d_M}$  et contenant un point critique de  $f \circ \phi^{-1}$  vérifie :*

$$\text{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leq k^{-d_M} \epsilon(1/k).$$

Ce Lemme permet de conclure dans le cas  $d_M = d_N$  exactement comme ci-dessus. On recouvre  $\phi(\Sigma \cap K)$  par au plus  $k^{d_M}$  cubes de coté  $1/k$  intersectant  $\phi(\Sigma)$ . L'image par  $f \circ \phi^{-1}$  de l'union de ces cubes, qui contient  $f(K \cap \Sigma)$ , a donc un volume majoré par  $\epsilon(1/k)$ . Le volume de  $f(K \cap \Sigma)$  est donc majoré par  $\epsilon(1/k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il est donc nul.

◀ Soit  $x_0 \in X$  un point critique de  $f \circ \phi^{-1}$ . Soit  $R$  l'image de l'application linéaire  $L := d(f \circ \phi^{-1})_{x_0}$ , c'est un sous espace vectoriel strict de  $\mathbb{R}^{d_N}$ . Soit  $\rho$  un module de continuité de  $d(f \circ \phi^{-1})$  sur  $[0, 1]^{d_M}$ . Pour tout  $x \in X$ , on a

$$f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0) = \int_0^1 (d(f \circ \phi^{-1})_{x_0+t(x-x_0)} - L) \cdot (x - x_0) dt$$

donc

$$|f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0)| \leq |x - x_0| \rho(|x - x_0|).$$

Comme le diamètre de  $X$  est  $\sqrt{n}/k$ , on conclut que  $f \circ \phi^{-1}(X)$  est contenu dans une bande de largeur  $\sqrt{d_M}/k \rho(\sqrt{d_M}/k)$  autour de l'espace affine  $x_0 + R$ . Comme  $d(f \circ \phi^{-1})$  est borné sur  $[0, 1]^{d_M}$ , cette image  $f \circ \phi^{-1}(X)$  est aussi contenue dans une boule de rayon  $C/k$  autour de  $x_0$ . Son volume est donc majoré par  $Ck^{-d_M} \rho(\sqrt{d_M}/k)$ . Ceci conclut la preuve du Lemme et du théorème 2.15. ▶

**Lemme 2.18.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable. Tout recouvrement ouvert de  $X$  admet un sous-recouvrement dénombrable (on dit que  $X$  a la propriété de Lindelöf).*

◀ Considérons une partie dénombrable dense de  $Y \subset X$ , et appelons boule rationnelle toute boule ouverte de  $X$  centrée sur  $Y$  et de rayon rationnel. L'ensemble des boules rationnelles est donc dénombrable. Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , alors l'ensemble  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  des boules rationnelles contenues dans des ouverts de  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert dénombrable de  $X$ . A chaque boule  $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ , on peut associer un ouvert  $U_B \in \mathcal{U}$  qui la contient. L'ensemble  $\{U_B, B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}\}$  est un sous-recouvrement dénombrable de  $\mathcal{U}$ . ▶

Même le cas  $d_M < d_N$  du théorème de Sard n'est pas complètement anodin. Il affirme que l'image d'une variété par une application différentiable dans une variété de dimension strictement plus grande est de mesure nulle. À l'inverse, il existe une application continue surjective de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]^2$  (la courbe de Péano). Une telle courbe ne peut donc pas être différentiable (ni même localement Lipschitzienne).

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable, et soit  $Z$  une sous variété de  $N$ . Si chaque point de  $N$  est une valeur régulière de  $f$ , alors  $f^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $M$ . La restrictions de  $f$  à  $f^{-1}(Z)$  est de plus une submersion en chaque point.

La propriété que  $f^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $M$  reste vraie sous la condition plus générale que  $f$  est transverse à  $Z$  :

**Définition 2.19.** *L'application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est dite transverse à la sous variété  $Z \subset N$  si, pour tout point  $x \in f^{-1}(Z)$ , on a l'égalité*

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}Z + df_x(T_xM).$$

**Proposition 2.20.** *Si  $f : M \rightarrow N$  est transverse à  $Z$ , alors  $f^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $M$ .*

◀ Soit  $x$  un point de  $f^{-1}(Z)$ . Considérons une submersion  $g : N \rightarrow \mathbb{R}^d$ , définie au voisinage de  $f(x)$ , et telle que  $Z$  est localement défini par l'équation  $g = 0$ . L'application  $g \circ f$  est alors une submersion en  $x$ , qui donne localement l'équation de  $f^{-1}(Z)$ . Vérifions que  $g \circ f$  est une submersion en  $x$ , c'est à dire que  $dg_{f(x)} \circ df_x$ . La transversalité de  $f$  en  $x$  se réécrit  $df_x(T_xM) + \ker dg_{f(x)} = T_{f(x)}N$ . L'image de  $dg_{f(x)} \circ df_x$  est donc la même que celle de  $dg_{f(x)}$ . ▶

**Exercice 2.4.** Soit  $M$  et  $N$  deux sous variétés de  $X$  en  $x_0$ . Supposons que  $M$  et  $N$  sont transverses en  $x_0$ , au sens que  $T_{x_0}M + T_{x_0}N = T_{x_0}X$ . Alors  $M \cap N$  est une sous variété en  $x_0$ , tangente à  $T_{x_0}M \cap T_{x_0}N$ .

Beaucoup de ce qui a été dit sur les submersions se généralise au cas du rang constant.

**Exercice 2.5.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $df$  est de rang constant  $k$ , alors  $f^{-1}(y)$  est une sous-variété pour tout  $y \in N$ , de codimension  $k$  dans  $M$ . Il suffit que le rang de  $df$  soit constant sur  $f^{-1}(y)$ .

Soit  $Z$  une sous variété de  $N$ . Si la dimension de  $T_{f(x)}Z + df_x(T_xM)$  est constante (égale à  $k$ ) sur  $f^{-1}(Z)$ , alors cette préimage est une sous-variété de  $M$ , de codimension  $k - \dim Z$ .

**Exercice 2.6.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application propre de rang constant telle que chacune des préimages  $f^{-1}(y), y \in N$ , est connexe. Montrer que l'image  $f(M)$  est une sous-variété de  $N$ .

Montrer la conclusion dans le cas plus général où les sous-variétés  $f^{-1}(y), y \in N$  ont un nombre de composantes connexes indépendant de  $y$  (ce nombre est fini au vu de la propriété).

## 2.3 Complément, structure de sous-variété.

Une structure de sous-variété sur un ensemble  $X$  est une injection de  $X$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $E$  dont l'image est une sous-variété. On dit que deux structures de sous-variétés  $I : X \rightarrow E$  et  $J : X \rightarrow F$  sont égales si  $J \circ I^{-1}$  est un difféomorphisme de  $I(X)$  dans  $J(X)$ , et qu'elles sont difféomorphes si les images  $I(X)$  et  $J(X)$  sont difféomorphes.

**Exercice 2.7.** Montrer que l'application  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $I(x) = x^3$  munit  $\mathbb{R}$  d'une structure de sous-variété différente de sa structure standard.

Montrer que la structure de sous-variété donnée par  $I$  est difféomorphe à la structure standard.

**Exercice 2.8.** Soit  $M$  une sous-variété,  $X$  un ensemble et  $P : M \rightarrow X$  une application surjective. Montrer qu'il existe au plus une structure de sous-variété sur  $X$  pour laquelle  $P$  est une submersion.

**Exercice 2.9.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une immersion injective. Montrer qu'il existe une unique structure de sous-variété  $J : f(M) \rightarrow E$  sur  $f(M)$  telle que  $J \circ f$  est un plongement.

Si  $X$  est un ensemble et  $J : X \rightarrow E$  est une structure de sous-variété, on dit que l'application  $f : X \rightarrow M$  est  $C^r$  si  $f \circ J^{-1}$  l'est sur  $J(X)$ . L'ensemble  $C^r(X, \mathbb{R})$  détermine la structure de sous-variété de  $X$ . Supposons en effet que  $I : M \rightarrow F$  est une autre structure de sous-variété. Les coordonnées  $I_i$  de l'application  $I$  sont des éléments de  $C^r_I(X, \mathbb{R})$ , c'est à dire qu'elles sont  $C^r$  pour la structure  $I$ . Si  $C^r_I(X, \mathbb{R}) = C^r_J(X, \mathbb{R})$ , alors les coordonnées  $I_i$  sont aussi  $C^r$  pour la structure  $J$ , c'est à dire que les fonctions  $I_i \circ J^{-1}$  sont  $C^r$  sur  $J(X)$ . En conséquence, l'application  $I \circ J^{-1}$  est  $C^r$  sur  $J(X)$ . Par symétrie, l'application  $J \circ I^{-1}$  est  $C^r$  sur  $I(X)$ , et donc la bijection  $I \circ J^{-1}$  est un difféomorphisme.

## 3 Exemples

### 3.1 Sphères

Toutes les valeurs non nulles de l'application  $x \rightarrow |x|^2$  sont régulières. La sphère unité

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$$

est donc une sous variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Son espace tangent au point  $\theta$  est l'orthogonal de  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , puisque la fonction  $x \rightarrow |x|^2$  a pour différentielle en  $\theta$  la forme  $x \mapsto 2\langle \theta, x \rangle$ .

L'application  $(r, \theta) \mapsto r\theta$  est un difféomorphisme entre  $]0, \infty[ \times S^1$  et  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  (c'est une version des coordonnées polaires). Son inverse est donnée explicitement par  $x \mapsto (|x|, x/|x|)$ .

### 3.2 Tores

Le produit  $M \times N$  de deux sous-variétés (de  $\mathbb{R}^{D_M}$  et  $\mathbb{R}^{D_N}$ ) est une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_N + D_M}$ , et on a l'identification

$$T_{(x,y)}N \times M = T_xN \times T_yM.$$

Par exemple, le produit  $S^1 \times S^1$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^4$ , le tore de dimension 2. Plus généralement, le tore  $T^n$  est défini comme le produit de  $n$  facteurs  $S^1$ . C'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

On peut aussi plonger le tore  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , en formant l'image classique de "chambre à air". On écrit pour ceci  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , on se souvient que  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , et, pour un point  $\theta \in S^1$ , on note  $(\theta_1, \theta_2)$  ses coordonnées en tant qu'élément de  $\mathbb{R}^2$ . Fixant  $a \in ]0, 1[$ , on plonge  $S^1 \times S^1$  par l'application

$$J(\theta, \varphi) = ((1 + a\varphi_1)\theta, a\varphi_2).$$

La différentielle de  $J$ , vue comme une application de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ , en un point  $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  est donc l'application linéaire

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y_1, y_2) \mapsto ((1 + a\varphi_1)x + a\theta y_1, ay_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Son noyau est la droite de  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dirigée par le vecteur  $V(\theta, \varphi) = (-a\theta, 1 + a\varphi_1, 0)$ . Pour vérifier que  $J$  est une immersion sur  $S^1 \times S^1$ , il suffit de constater que le vecteur  $V(\theta, \varphi)$  n'est jamais tangent à  $S^1 \times S^1$  en  $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1$ , puisque  $-a\theta$  n'est pas orthogonal à  $\theta$  (rappelons que  $\theta$ , qui appartient à  $S^1$ , est non nul).

Comme  $S^1 \times S^1$  est compact, il suffit de vérifier que l'immersion  $J$  est injective pour conclure que c'est un plongement (dont l'image est donc une sous variété de  $\mathbb{R}^3$  difféomorphe à  $S^1 \times S^1$ ). Si  $J(\theta, \varphi) = J(\theta', \varphi')$ , alors  $\varphi_2 = \varphi'_2$ , et de plus

$$1 + a\varphi_1 = |(1 + a\varphi_1)\theta| = |(1 + a\varphi'_1)\theta'| = 1 + a\varphi'_1$$

donc  $\varphi = \varphi'$ . On voit alors que  $\theta = \theta'$ .

Il y a une autre façon de procéder. On remarque que l'application  $F : (x_1, x_2) \mapsto (e^{ix_1}, e^{ix_2})$  est un difféomorphisme local surjectif de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{T}^2$ . En conséquence, l'application  $J : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une immersion différentiable si et seulement si  $J \circ F$  est une immersion différentiable. On écrit alors

$$J \circ F(x_1, x_2) = ((1 + a \cos x_2) \cos x_1, (1 + a \cos x_2) \sin x_1, a \sin x_2)$$

et on calcule la matrice de la différentielle de  $J \circ F$

$$\begin{bmatrix} -(1 + a \cos x_2) \sin x_1 & -a \sin x_2 \cos x_1 \\ (1 + a \cos x_2) \cos x_1 & -a \sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & a \cos x_2 \end{bmatrix}.$$

Comme le coefficient  $(1 + \cos x_2)$  est non nul, cette matrice est de rang 2 en tout point où  $\cos x_2 \neq 0$ . Si  $\cos x_2 = 0$ , alors  $\sin x_2 = \pm 1$ , et le bloc supérieur est inversible, puisque

$$\det \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -a \sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_1 & -a \sin x_2 \sin x_1 \end{bmatrix} = \sin x_2 \neq 0.$$

On peut plonger le tore  $\mathbb{T}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par le même type de formule. Plus précisément, si  $F = (F_1, F_2)$  est un plongement de  $\mathbb{T}^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , alors on obtient un plongement de  $\mathbb{T}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par l'expression

$$S^1 \times \mathbb{T}^{n-1} \ni (\theta, \varphi) \mapsto ((1 + aF_1(\varphi))\theta, F_2(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$$

lorsque  $a > 0$  est assez petit.

L'application  $\Pi : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2i\pi x_1}, \dots, e^{2i\pi x_n}) \in \mathbb{T}^n$  est surjective et engendre une bijection de  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{T}^n$ . Il y a une unique structure de groupe sur  $\mathbb{T}^n$  qui fait de cette bijection un isomorphisme de groupe, ou, ce qui est équivalent, qui fait de la surjection  $\Pi$  un morphisme de groupe. La structure de (sous)-variété de  $\mathbb{T}^n$  à difféomorphisme près est aussi déterminée par le fait que  $\Pi$  est une submersion (en l'occurrence un difféomorphisme local), voire l'exercice 2.8. Plus précisément, si  $M$  est une sous variété et si  $F : \mathbb{T}^n \rightarrow M$  est une bijection,  $F$  est un difféomorphisme si et seulement si  $F \circ \Pi$  est une submersion. On dit que l'égalité  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  a lieu aussi en tant que (sous)-variété.

Les opérations de groupe de  $\mathbb{T}^n$  sont différentiables. En effet l'inverse  $J : \Pi(x) \mapsto \Pi(-x)$  est une bijection de  $\mathbb{T}^n$  telle que  $J \circ \Pi(x) = \Pi(-x)$  est une submersion, c'est donc un difféomorphisme. Le produit est l'application  $P : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  telle que  $P(\Pi(x), \Pi(y)) = \Pi(x+y)$ . Comme la projection  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto (\Pi(x), \Pi(y)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$  est une submersion surjective, La différentiabilité de l'application  $(x, y) \mapsto P(\Pi(x), \Pi(y))$  implique celle de l'application  $P$ .

On dit que  $\mathbb{T}^n$  est un groupe de Lie : une (sous)-variété munie d'une structure de groupe dont les opérations sont différentiables.

### 3.3 Groupes de Matrices

Notons  $M_n(\mathbb{R})$  (ou  $M_n$ ) l'ensemble des matrices réelles carrées de taille  $n$ , que l'on identifie à  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Le groupe  $Gl_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $M_n(\mathbb{R})$  donc une sous variété de dimension maximale  $n^2$ . Les opérations de groupes  $(M, N) \mapsto MN$  et  $M \mapsto M^{-1}$  sont différentiables. Concernant l'inversion, on rappelle le calcul classique  $(M + N)^{-1} = (M(I + M^{-1}N)^{-1}) = (I + M^{-1}N)^{-1}M^{-1} = (I - M^{-1}N + o(N))M^{-1} = I - M^{-1}NM^{-1} + o(N)$  dont on déduit que l'application  $M \mapsto M^{-1}$  est différentiable, et que sa différentielle en  $M$  est l'application linéaire  $N \mapsto -M^{-1}NM^{-1}$ .

Notons  $M_n^s(\mathbb{R})$  et  $M_n^a(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ce sont des espaces vectoriels que l'on identifie à  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  et  $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ .

Le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  des matrices orthogonales est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$ , son espace tangent en l'identité est  $M_n^a(\mathbb{R})$ . Les opérations de groupe, qui sont les restrictions de celles de  $Gl_n(\mathbb{R})$ , sont donc différentiables. Pour montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est une sous variété, il suffit de montrer que l'identité est une valeur régulière de l'application  $M_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto {}^tMM \in M_n^s(\mathbb{R})$ . La différentielle en  $M$  de cette application est

$$d_M : N \mapsto {}^tMN + {}^tNM = {}^tMN + {}^t({}^tMN)$$

En  $M = Id$ , c'est donc  $d_I : N \mapsto N + {}^tN$ , qui est surjective sur  $M_n^s(\mathbb{R})$ , et de noyau  $M_n^a(\mathbb{R})$ . Le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  est donc une sous variété au voisinage de l'identité, tangente à  $M_n^a(\mathbb{R})$ . En un autre point  $M$  de  $O_n(\mathbb{R})$ , on a  $d_M = d_I \circ L$ , où  $L$  est la multiplication à gauche par  ${}^tM$ , qui est un isomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ . Ceci implique que  $d_M$  est surjective, et donc que  $O_n(\mathbb{R})$  est une sous variété en  $M$  tangente à  $\ker d_M = L^{-1}(\ker d_I) = M \cdot M_n^a(\mathbb{R})$ . On aurait aussi pu conclure ceci directement en constatant que la multiplication par  $M$  est un difféomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$  qui préserve  $O_n(\mathbb{R})$  et qui envoie  $I$  sur  $M$ .

Le groupe  $SO_n(\mathbb{R})$  des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est aussi une sous variété. En fait, c'est la composante connexe de l'identité dans  $O_n(\mathbb{R})$ . Remarquons pour terminer que  $SO_2(\mathbb{R})$  est difféomorphe à  $S^1$ . Le morphisme de groupe surjectif

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix}$$

de  $\mathbb{R}$  dans  $SO_2$  est en effet un difféomorphisme local qui se factorise par  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

### 3.4 Matrices de rang fixé

Soit  $k \leq \min(n, m)$  et soit  $N_k(n, m) \subset M_{n,m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de rang  $k$ . Alors  $N_k(n, m)$  est une sous variété de  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ , de dimension  $k(n + m - k)$  (Il faut prendre garde toutefois au fait que la fermeture  $\bar{N}_k(n, m)$ , constituée des matrices de rang inférieur à  $k$ , n'est pas une sous variété. En particulier, le complémentaire de  $Gl_n(\mathbb{R})$  n'est pas une sous variété, mais c'est une union finie de sous-variétés.)

Comme les permutations de lignes ou de colonnes sont des isomorphismes de  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  qui préservent  $N_k(n, m)$ , il suffit de démontrer que  $N_k(n, m)$  est une sous variété au voisinage d'une matrice qui s'écrit par blocs

$$X_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$$

où  $A_0$  est un bloc  $k \times k$  inversible. Toute matrice  $X$  proche de  $X_0$  s'écrit alors  $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible. En multipliant à gauche la matrice  $X$  par la matrice inversible  $O = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$ , on obtient

$$OX = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B. \end{bmatrix}$$

La matrice  $A$  est donc de rang  $k$  si et seulement si  $D = CA^{-1}B$ . L'ensemble  $N_k(n, m)$  est donc localement un graphe de codimension  $(n - k)(m - k)$ , c'est à dire de dimension  $nm - (n - k)(m - k) = k(n + m - k)$ . En supposant par exemple que  $m < n$ , la sous variété  $N_{m-1}(m, n)$  est donc de codimension  $n - m + 1$ .

On peut traiter de manière similaire le cas des matrices symétriques. Soit  $N_k^s(n)$  le sous ensemble de  $S_n(\mathbb{R})$  (les matrices symétriques  $n \times n$ ) constitué des matrices de rang  $k$ . Toute matrice  $X_0$  de  $N_k^s(n)$  se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice orthonormée  $O$  telle que  $O^t X_0 O$  s'écrit par blocs

$Y_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A_0$  de taille  $k \times k$  inversible. Comme l'application  $X \mapsto O^t X O$  est un isomorphisme de

$S_n(\mathbb{R})$  qui préserve  $N_k^s(n)$ , il suffit de montrer que  $N_k^s$  est une sous variété au voisinage de  $Y_0$ . On montre exactement comme ci-dessus qu'une matrice symétrique  $\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & D \end{bmatrix}$  proche de  $Y_0$  est de rang  $k$  si et seulement si  $D = B^t A^{-1} B$ . L'ensemble  $N_k^s(n)$  est donc localement un graphe de codimension  $k(k+1)/2$ .

Pour se représenter un peu plus concrètement les choses, on peut considérer l'ensemble  $S_2(\mathbb{R})$  des matrices symétriques  $2 \times 2$ . On l'identifie à  $\mathbb{R}^3$  en écrivant ses éléments sous la forme  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ . Les matrices non inversibles sont celles qui satisfont l'équation  $b^2 = ac$ , qui est l'équation d'un cône dans  $\mathbb{R}^3$ . Ce cône est une sous variété sauf au point  $(0, 0, 0)$ , qui en est une singularité. Le complémentaire de cette singularité correspond exactement aux matrices de rang 1.

### 3.5 Grassmanniennes

Soit  $G(k, n)$  l'ensemble des sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ . Pour écrire  $G(k, n)$  comme une sous-variété, on identifie chaque sous-espace à la projection orthogonale dont il est l'image. On définit donc  $G(k, n)$  comme l'ensemble des matrices symétriques de rang  $k$  qui vérifient la relation  $M^2 = M$ . Nous allons montrer que c'est une sous variété compacte de  $M_n^s(\mathbb{R})$  (matrices symétriques  $n \times n$ ).

On remarque dans un premier temps que c'est une partie compacte, car fermée et bornée, de  $M_n^s(\mathbb{R})$ . Pour montrer la fermeture, on constate que le rang d'une projection est égal à sa trace. L'ensemble des projecteurs de rang  $k$  est donc déterminé, dans  $M_n^s(\mathbb{R})$ , par les équations continues  $M^2 = M$  et  $\text{tr}(M) = k$ .

L'entier  $k$  étant fixé, on considère la décomposition  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , et on décompose les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  (et donc de  $G(k, n)$ ) par blocs suivant cette décomposition. La matrice

$$I_k := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est un élément de  $G(k, n)$ . L'ensemble  $H(k, n)$  des éléments de  $G(k, n)$  qui s'écrivent  $M = \begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible constitue un voisinage ouvert de  $I_k$  dans  $G(k, n)$ . Comme le rang est  $k$ , on a nécessairement  $C = BA^{-1}B^t$  dans la matrice ci-dessus et l'image de  $M$  est celle de la matrice  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ . Autrement dit,  $M$  est la projection orthogonale sur le graphe de  $L := BA^{-1} \in M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ .

Réciproquement, pour  $L \in M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ , on peut chercher une expression pour la projection orthogonale sur le graphe de  $L$  de la forme  $\Pi_L = \begin{bmatrix} A & AL^t \\ LA & LAL^t \end{bmatrix}$ , avec une matrice symétrique inversible  $A$ . L'équation  $\Pi_L \circ \Pi_L = \Pi_L$  implique que  $A(I + L^t L)A = A$ . Cette équation est satisfaite pour  $A = (I + L^t L)^{-1}$ , (la matrice  $(I + L^t L)$  est définie positive donc inversible) et on vérifie effectivement que

$$\Pi_L := \begin{bmatrix} (I + L^t L)^{-1} & (I + L^t L)^{-1} L^t \\ L(I + L^t L)^{-1} & L(I + L^t L)^{-1} L^t \end{bmatrix},$$

vérifie  $\Pi_L^2 = \Pi_L$ , et donc est la matrice de la projection orthogonale sur le graphe de  $L$ .

L'application  $\Pi : L \mapsto \Pi_L$  est une application  $C^\infty$  de  $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$  dans  $M_n^s(\mathbb{R})$ , à valeurs dans  $H(k, n)$ . En notant  $\Gamma$  l'application  $\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix} \mapsto BA^{-1}$  (définie sur l'ouvert de  $M_n^s(\mathbb{R})$  des matrices dont le bloc  $A$  est inversible), on constate que  $\Gamma \circ \Pi(L) = L$ , ce qui implique que  $\Pi$  est un plongement de  $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$  dans  $M_n^s(\mathbb{R})$ , dont l'image est égale à  $H(k, n)$ . En effet, pour tout ouvert  $U$  de  $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ , on a  $\Pi(U) = H(k, n) \cap \Gamma^{-1}(U)$ , c'est donc un ouvert de  $H(k, n)$ . En conséquence,  $H(k, n)$  est une sous variété, c'est à dire que  $G(k, n)$  est une sous variété en chaque point de  $H(k, n)$ . L'espace tangent à  $G(k, n)$  au point  $I_k$  est l'image de l'application linéaire

$$M_{n-k, k} \ni \ell \mapsto d\Pi_{I_k} \cdot \ell = \begin{bmatrix} 0 & \ell^t \\ \ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme tout point  $M_0$  de  $G(k, n)$  peut s'écrire sous la forme  $M_0 = OI_k O^{-1}$  pour une matrice  $O \in O_n(\mathbb{R})$ , et que l'application  $L \mapsto OLO^{-1}$  est un isomorphisme de  $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$  qui préserve  $G(k, n)$ , on conclut que  $G(k, n)$  est une sous variété en  $M_0$ . On a donc montré que  $G(k, n)$  est une sous-variété de  $M_n^s(\mathbb{R})$ .

Si  $M$  est une sous variété de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^D$ , alors l'application

$$M \ni x \mapsto T_x M \in G(d, D)$$

est de classe  $C^{r-1}$ . En effet, en écrivant localement  $M$  comme le graphe d'une fonction  $F$ , on voit que  $T_x M$  est le graphe de l'application linéaire  $dF_x$ , qui est une fonction  $C^{r-1}$  de  $x$ .

On peut représenter les éléments de  $G(k, n)$  comme images de matrices  $n \times k$  de rang  $k$ . Nous avons vu que l'ensemble  $N_k(n, k)$  de ces matrices est un ouvert de  $M_{n,k}(\mathbb{R})$ . L'application  $R$  qui, à une matrice  $M \in N_k(n, k)$ , associe la projection orthogonale sur son image est une submersion surjective de  $N_k(n, k)$  dans  $G(k, n)$ . En effet, sur l'ouvert des matrices qui s'écrivent  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible, cette application s'écrit

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mapsto \Pi_{BA^{-1}}$$

qui est une submersion sur l'ouvert considéré car  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mapsto BA^{-1}$  en est une. On a montré que les éléments de  $H(k, n)$  sont des valeurs régulières de l'application  $R$ .

Étant donnée une matrice quelconque  $M_0 \in N_k(n, k)$ , on peut écrire  $M_0 = O \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A_0$  inversible. Comme  $R(OM) = OR(M)O^{-1}$  (en tant que projecteurs) ceci implique que  $F$  est une submersion au voisinage de  $M_0$ .

La donnée  $E(x)$  d'un élément de  $G(k, n)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^d$  est donc une application de classe  $C^r$  au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications  $V_1(x), \dots, V_k(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^r$ , telles que  $E(x)$  est l'espace engendré par les vecteurs  $V_i(x)$  pour tout  $x$  dans un voisinage de 0.

Comme pour les tores, la sous-variété  $G(k, n)$  est caractérisée à difféomorphisme près par l'existence de l'application  $R = N_k(k, n) \rightarrow G(k, n)$  vérifiant les propriétés suivantes (exercice 2.8) :

- $R$  est une submersion surjective.
- Deux points  $M$  et  $M'$  de  $N_k(k, n)$  ont la même image par  $R$  si et seulement si il existe  $g \in Gl_k$  tel que  $M' = Mg$ .

On dit que  $G(k, n) = N_k(k, n)/Gl_k$ .

Il y a une autre façon naturelle de représenter la Grassmannienne  $G(k, n)$ . On considère pour ceci l'espace  $N_{n-k}(n-k, n)$  des matrices  $n-k \times k$  de rang maximal, qui est un ouvert de  $M_{n-k,n}(\mathbb{R})$ . Le noyau d'une matrice  $M \in N_{n-k}(n-k, n)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^k$  de dimension  $n-k$ , que l'on identifie donc à un élément de  $G(k, n)$ . L'application  $K$  qui à une matrice associe son noyau est une submersion surjective de  $N_{n-k}(n-k, n)$  dans  $G(k, n)$ . On se ramène en fait à la paramétrisation précédente en remarquant que, en tant que sous espaces,  $K(M) = R(M^t)^\perp$  donc, en tant que projecteur,

$$K(M) = I - R(M^t).$$

La donnée  $E(x)$  d'un élément de  $G(k, n)$  pour  $x \in \mathbb{R}^d$  est donc une application de classe  $C^r$  au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications  $P_1(x), \dots, P_{n-k}(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ , de classe  $C^r$ , telles que  $E(x)$  est déterminé par les équations

$$E(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : P_1(x) \cdot v = P_2(x) \cdot v = \dots = P_{n-k}(x) \cdot v = 0\}$$

pour  $x$  proche de 0.

**Propriété 3.1.** Si  $E_0$  et  $F_0$  sont des éléments de  $G(k, n)$  et  $G(l, n)$  tels que  $E_0 \cap F_0 = \{0\}$ , alors l'application

$$G(k, n) \times G(l, n) \ni (E, F) \mapsto E + F \in G(k+l, n)$$

est  $C^\infty$  au voisinage de  $(E_0, F_0)$ .

Pour le montrer, on considère des applications locales  $V_1(E), \dots, V_k(E) : G(k, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  telles que  $E$  est engendré par les  $V_i(E)$  si  $E$  est proche de  $E_0$ , et des applications locales  $W_1(F), \dots, W_l(F) : G(n-k, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que les vecteurs  $W_i(F)$  engendrent  $F$  si  $F$  est proche de  $F_0$ . L'espace  $E + F$  est alors engendré par les vecteurs

$$V_1(E), \dots, V_k(E), W_1(F), \dots, W_l(F)$$

c'est donc une fonctions  $C^\infty$  de  $E$  et  $F$ . De la même façon :

**Propriété 3.2.** Si  $E_0$  et  $F_0$  sont des éléments de  $G(k, n)$  et  $G(l, n)$  tels que  $E_0 + F_0 = \mathbb{R}^n$  (on dit que  $E_0$  et  $F_0$  sont transverses), alors l'application

$$G(k, n) \times G(l, n) \ni (E, F) \mapsto E \cap F \in G(k+l-n, n)$$

est  $C^\infty$  au voisinage de  $(E_0, F_0)$ .

La preuve est identique à la précédente en remplaçant les vecteurs  $V_i(E)$  engendrant les espaces par des équations  $P_i(E)$  déterminant les espaces.

**Propriété 3.3.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a vu que l'ensemble  $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$  des applications linéaires de rang  $k$  est une sous-variété de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$ . L'application  $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n) \ni L \mapsto \text{Im } L \in G(k, d)$  est différentiable.

◀ Fixons  $L_0 \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ . On considère alors  $k$  vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  de  $\mathbb{R}^n$  dont les images  $L_0(v_i)$  sont indépendantes. Les applications  $L \mapsto L(v_i)$  sont différentiables, et donc l'application

$$L \mapsto \text{Vect}(Lv_1, \dots, Lv_k) = \text{Im } L$$

est différentiable au voisinage de  $L_0$ . ▶

**Propriété 3.4.** Soit  $E_0 \in G(k, n)$  et  $L_0 \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ . Supposons que  $L_0|_{E_0}$  est un isomorphisme. Alors, pour  $E$  proche de  $E_0$  et  $L$  proche de  $L_0$  l'application  $L|_E$  est un isomorphisme, et il existe une (unique) application locale

$$S(L, \pi) : M_{k,n}(\mathbb{R}) \times G(k, n) \longrightarrow M_{n,k}(\mathbb{R}),$$

de classe  $C^\infty$  dont l'image est  $\pi$  (vu comme sous-espace) et telle que  $L \cdot S(L, \pi) = \text{Id}$ .

◀ Soit  $G(\pi)$  une équation locale de  $\pi$  au voisinage de  $\pi_0$ , c'est à dire une application  $C^\infty$  locale

$$G : G(k, n) \longrightarrow M_{n, n-k}(\mathbb{R})$$

telle que  $\pi$  est le noyau de  $G(\pi)$ . L'application linéaire  $(L_0 \circ \pi_0, G(\pi_0))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Il en est donc de même de  $(L \circ \pi, G(\pi))$ , qui envoie  $\pi$  sur  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ , et l'inverse

$$R(L, \pi) := (L \circ \pi, G(\pi))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^n)$$

est une application  $C^\infty$  de  $\pi$  et  $L$  au voisinage de  $(L_0, \pi_0)$ . La restriction  $S(L, \pi)$  de  $R(L, \pi)$  à  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  a pour image  $\pi$ , et elle vérifie

$$L \circ S(L, \pi)(x) = L \circ \pi \circ R(L, \pi)(x, 0) = x. \blacktriangleright$$

L'ensemble  $G(1, n)$  est appelé espace projectif de dimension  $n-1$ , noté aussi  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Nous l'avons défini comme une sous variété de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . On a une submersion surjective  $\pi$  de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}P^n$  qui, à tout vecteur non nul  $(v_1, \dots, v_{n+1})$  associe la droite dirigée par ce vecteur. L'application  $f : \mathbb{R}P^n \longrightarrow N$  est différentiable si et seulement si la composée  $f \circ \pi$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (c'est un cas particulier d'une propriété générale des submersions surjectives).

L'espace  $\mathbb{R}P^1$  est difféomorphe à  $S^1$ . Attention toutefois, l'application naïve associant à tout point de  $S^1$  la droite vectorielle qu'il engendre n'est pas une bijection (chaque droite à deux préimages). On définit plutôt l'application qui, au point  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1$  (vu comme sous variété de  $\mathbb{R}^2$ ), associe la (projection orthogonale sur la) droite dirigée par  $\theta + (1, 0)$  si  $\theta \neq (-1, 0)$ , et par  $(\theta_2, 1 - \theta_1)$  si  $\theta \neq (0, 1)$ . Comme  $\theta_2(1 + \theta_1, \theta_2) = (1 - \theta_1)(\theta_2, 1 - \theta_1)$ , ces deux expressions définissent la même droite. Cette application est une bijection  $C^\infty$  de  $S^1$  sur  $\mathbb{R}P^1$ . Pour montrer que sa réciproque est aussi  $C^\infty$ , on calcule que le point d'intersection du cercle unité avec la droite affine passant par  $(-1, 0)$  et dirigée par le vecteur non-nul  $(v_1, v_2)$  est

$$\theta(v_1, v_2) = \left( \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} \right).$$

L'espace  $\mathbb{R}P^2$ , qui est de dimension 2, est défini ci-dessus comme une sous variété de  $\mathbb{R}^6$ . Nous verrons qu'il se plonge dans  $\mathbb{R}^5$ , (il se plonge aussi dans  $\mathbb{R}^4$ , mais pas dans  $\mathbb{R}^3$ ).

### 3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel.

Soit  $M$  une sous variété  $C^r$ ,  $r \geq 2$  de  $\mathbb{R}^D$ . L'ensemble  $TM := \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2D}, x \in M, v \in T_x M\}$  est une sous variété  $C^{r-1}$  de  $\mathbb{R}^{2D}$  appelée le fibré tangent de  $M$ . Si  $\psi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  est une équation locale de  $M$ , où  $U$  est un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ , alors

$$T\psi : U \times \mathbb{R}^D \ni (x, v) \longmapsto (\psi(x), d\psi_x \cdot v) \in \mathbb{R}^{2D}$$

est un submersion. Sa différentielle s'écrit en effet

$$dT\psi_{(x,v)} \cdot (y, w) = (d\psi_x \cdot y, d\psi_x \cdot w + d^2\psi_x \cdot (v, y))$$

et elle est surjective car  $d\psi_x$  l'est. L'application  $T\psi$  est donc une équation de  $TM \cap (U \times \mathbb{R}^D)$ . Cette variété est munie d'une projection canonique  $\pi : TM \longrightarrow M$  qui est la restriction de la projection sur le premier facteur.

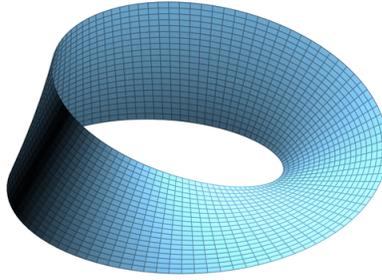


FIGURE 2 – Ruban de Moebius

**Exercice 3.1.** Soit  $M$  une hypersurface compacte de  $\mathbb{R}^D$  (une sous variété de codimension 1). Montrer que l'application  $x \mapsto T_x M$  est surjective de  $M$  dans  $G(D-1, D)$ . On pourra, pour chaque  $E \in G(D-1, D)$  considérer une forme linéaire  $l$  sur  $\mathbb{R}^D$  dont  $E$  est le noyau, et montrer que l'application  $l|_M$  admet un point critique.

Un champ de vecteurs de classe  $C^k$ ,  $k \leq r-1$  sur  $M$  est une application  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ , de classe  $C^k$ , telle que  $V(x) \in T_x M$  pour tout  $x$ . On peut aussi le définir comme une section  $S : M \rightarrow TM$ , c'est à dire à une application  $S : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ S = Id$ . Si  $V$  est un champ de vecteurs vu comme application à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$ , la section qui lui est associée est  $S(x) = (x, V(x))$ .

De manière générale, on appelle fibré vectoriel (de type fini, de rang  $k$ ) au dessus de  $M$  la donnée d'une application différentiable  $E(x)$  de  $M$  dans une Grassmannienne  $G(k, n)$ . L'ensemble  $N := \{(x, v), v \in E(x)\} \subset M \times \mathbb{R}^n$  est appelé espace total du fibré vectoriel. C'est une sous variété de  $M \times \mathbb{R}^n$ , elle est munie d'une projection  $\pi : N \rightarrow M$  qui est une submersion.

◀ Montrons que l'espace total est une sous-variété. On considère un point  $x_0 \in M$ . On étend l'application  $E(x) : M \rightarrow G(k, n)$  à un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ , et on considère une application  $x \mapsto L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$  telle que  $E(x)$  est le noyau de  $L(x)$ . On considère de plus une submersion locale  $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$  qui donne une équation de  $M$  au voisinage de  $x_0$ . L'application

$$\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^n \ni (x, v) \mapsto (\psi(x), L(x) \cdot v) \in \mathbb{R}^{D-d} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

est alors une submersion en  $(x_0, v)$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ , qui donne une équation de  $N$  au voisinage de chaque point  $(x_0, v), v \in E(x_0)$ . La projection  $\pi$  est différentiable car c'est la restriction à  $N$  d'une application différentiable. Elle admet de plus une section globale, l'application  $x \mapsto (x, 0)$ , c'est donc une submersion. ▶

Un fibré vectoriel de rang  $k$  est dit trivial si il existe  $k$  applications différentiables  $V_1, \dots, V_k : M \rightarrow \mathbb{R}^D$  telles que  $E(x)$  est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $V_i(x)$  pour tout  $x$ , c'est à dire si il existe une application différentiable  $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$  telle que  $E(x)$  est l'image de  $L(x)$  pour tout  $x$ . Tout fibré vectoriel est localement trivial, c'est à dire que, pour tout  $x_0 \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  dans  $M$  tel que la restriction du fibré à  $U$  est triviale.

Un morphisme de fibrés vectoriels entre  $\pi : N \rightarrow M$  et  $\tilde{\pi} : \tilde{N} \rightarrow M$  est une application différentiable  $G : N \rightarrow \tilde{N}$  entre les espaces totaux qui préserve chaque fibre  $F(x) = \pi^{-1}(x)$  et donc la restriction à chaque fibre est linéaire. Si les fibrés sont donnés par des applications  $F$  et  $\tilde{F}$  de  $M$  dans les grassmanniennes  $G(k, n)$  et  $G(\tilde{k}, \tilde{n})$ , alors un morphisme de fibré est de la forme  $G(x, v) = (g(x), L(x) \cdot v)$  où  $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\tilde{n}})$  est une application différentiable telle que  $L(x)$  préserve  $F(x)$  pour tout  $x \in M$ .

Le fibré  $\pi : N \rightarrow M$  est trivial si et seulement si il est isomorphe au fibré produit  $M \times \mathbb{R}^k$ .

**Exercice 3.2.** Le fibré  $\pi : N \rightarrow M$  est trivial si et seulement si il existe une application différentiable  $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$  telle que la restriction de  $L(x)$  à  $E(x)$  est un isomorphisme pour tout  $x$ .

Si  $M$  et  $N$  sont des variétés difféomorphes, alors les fibrés tangents  $T_x M$  et  $T_x N$  sont isomorphes. De plus, à tout difféomorphisme  $\phi : M \rightarrow N$  est associé l'isomorphisme canonique de fibrés

$$T\phi : (x, v) \mapsto (\phi(x), d\phi_x \cdot v).$$

On remarque la propriété fonctorialité

$$T(\phi \circ \psi) = T\phi \circ T\psi.$$

À titre d'exemple, considérons le fibré au dessus de la variété  $M = G(1, n)$  donné par l'application identité d e  $M$  dans  $G(1, n)$ . C'est un fibré en droites dont l'espace total est  $E_n = \{(x, v), x \in G(1, n), v \in x\} \subset G(1, n) \times \mathbb{R}^n$ . En identifiant  $G(1, 2)$  à  $S^1$ , on peut visualiser l'espace total  $E_2$  comme un ruban de Moebius dans  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ .

Soit  $\pi$  la projection sur le second facteur  $\pi : G(1, n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Notons  $\mathring{E}_n$  le complémentaire de la section nulle dans  $E_n$ , c'est à dire l'ensemble  $\mathring{E}_n = \{(x, v), x \in G(1, n), v \in x - \{0\}\}$ . La restriction de  $\pi$  à  $\mathring{E}_n$  est un difféomorphisme sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , dont le difféomorphisme inverse est  $v \mapsto (\mathbb{R}v, v)$ .

## 4 Espaces métriques localement compacts

On décrit quelques propriétés des espaces métriques localement compacts qui donneront le contexte topologique des variétés de dimension finie.

### 4.1 Suites exhaustives de compacts

Une suite exhaustive de compacts dans  $X$  est une suite  $K_i$  de parties compactes de  $X$  qui recouvrent  $X$ , et telles que  $K_i$  est contenu dans l'intérieur de  $K_{i+1}$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $X$  un espace métrique localement compact. Si  $X$  est connexe ou séparable, alors  $X$  admet une suite exhaustive de compacts.*

◀ Pour chaque point  $x \in X$ , on définit le réel  $r(x)$  comme le suprémum des rayons  $r$  tels que la boule fermée  $B(x, r)$  est compacte. Si il existe un point  $x$  tel que  $r(x) = +\infty$ , alors on pose  $K_i = B(x, i)$ .

Sinon,  $r(x)$  prend des valeurs réelles strictement positives (car  $X$  est localement compacte). Pour tous  $x$  et  $y$ , la boule  $B(y, r)$  est contenue dans la boule  $B(x, r + d(x, y))$ , donc  $r(y) \leq r(x) + d(x, y)$ . La fonction  $r$  est donc 1-Lipschitz, donc continue.

A tout compact  $K$ , on associe la réunion  $K'$  des boules fermées  $B(x, r(x)/2)$  centrées sur  $K$ . Montrons que  $K'$  est compact. Pour ceci on considère une suite  $x_n$  de points de  $K'$ . Chaque point  $x_n$  est dans une boule  $B(y_n, r(y_n)/2)$ , avec  $y_n \in K$ . Comme  $K$  est compact, on peut supposer en prenant une sous-suite que  $y_n$  a une limite  $y$  dans  $K$ . Comme  $r$  est continue, on peut de plus supposer que  $r(y_n) \leq 2r(y)/3$  pour tout  $n$  et donc que  $x_n$  est dans la boule compacte  $B(y, 3r(y)/4)$  pour  $n$  assez grand. La suite  $x_n$  admet donc une sous-suite convergente.

La réunion des boules ouvertes  $\mathring{B}(x, r(x)/2), x \in K$  est un ouvert contenu dans  $K'$  et contenant  $K$ , donc  $K$  est contenu dans l'intérieur de  $K'$ .

PREUVE DANS LE CAS CONNEXE : On construit maintenant la suite de compacts suivante : On prend n'importe quel compact  $K_1$  non vide (par exemple un point), et on pose  $K_{i+1} = (K_i)'$ .

Pour montrer que c'est une suite exhaustive de compacts, il suffit de montrer que la réunion  $U$  des  $K_i$  est égale à  $X$ . Comme  $U$  est la réunion des intérieurs des  $K_i$ , c'est un ouvert. Montrons maintenant qu'elle est fermée, et donc égale à  $X$  par connexité.

Considérons une suite  $x_n \in U$  telle que  $x_n \rightarrow x$  dans  $X$ . Choisissons  $n$  assez grand pour que  $r(x_n) > r(x)/2$  et  $d(x_n, x) < r(x)/4$ . Comme  $x_n \in U$ , il existe  $i$  tel que  $x_n \in K_i$ , et donc

$$x \in B(x_n, r(x)/4) \subset B(x_n, r(x_n)/2) \subset K'_i = K_{i+1}$$

PREUVE DANS LE CAS SÉPARABLE : On considère une suite dense  $x_i$ , et on fait comme ci-dessus, mais en posant  $K_{i+1} = (K_i)' \cup \{x_{i+1}\}$ . Comme  $\mathring{B}(x_i, r(x_i)/2) \subset K_i$ , on vérifie facilement que  $\cup K_i = X$ . ▶

**Corollaire 4.2.** *Tout espace métrique localement compact et connexe est séparable.*

Ceci découle immédiatement de l'existence d'une suite exhaustive de compacts.

**Corollaire 4.3.** *Si  $(X, d)$  est un espace métrique séparable localement compact, alors il est muni d'une distance complète  $D$  qui engendre la même topologie que  $d$ .*

◀ Soit  $f$  une fonction propre et positive sur  $X$ . On pose  $D(x, y) = d(x, y) + |f(y) - f(x)|$ , on vérifie facilement que c'est une distance. Comme  $D \geq d$ , la topologie engendrée par  $D$  est plus forte que celle de  $d$ . Réciproquement, si  $x_n \rightarrow x$  dans  $(X, d)$ , alors, par continuité de  $f$ ,  $D(x_n, x) \rightarrow 0$ . On conclut donc que les deux distances engendrent la même topologie.

Si  $x_n$  est une suite de Cauchy pour  $D$ , alors la suite  $f(x_n)$  est bornée. La suite  $x_n$  est donc contenue dans une partie compacte de  $X$ , et donc elle converge. ▶

**Corollaire 4.4.** *Le compactifié d'Alexandrov d'un espace métrique localement compact séparable  $(X, d)$  est métrisable.*

◀ Posons  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ . On considère une fonction propre positive  $f$  sur  $X$ , et on pose  $g = 1 - \arctan f$ , qui est une fonction propre de  $X$  dans  $]0, 1]$ . On pose alors

$$D(x, y) = \min (d(x, y) + |g(y) - g(x)|, g(x) + g(y)).$$

On vérifie facilement que  $|g(y) - g(x)| \leq D(x, y)$ . Vérifions maintenant l'inégalité triangulaire pour  $D$ . On considère trois points  $x, y, z$  dans  $X$ .

Dans le cas où  $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$  et  $D(z, y) = d(z, y) + |g(z) - g(y)|$ , on a

$$D(x, z) \leq d(x, z) + |g(z) - g(x)| \leq D(x, y) + D(y, z).$$

Dans le cas où  $D(x, y) = g(y) + g(x)$  et  $D(y, z) = g(z) + g(y)$ , l'inégalité

$$D(x, z) \leq g(x) + g(z) \leq D(x, y) + D(y, z)$$

est évidente.

Dans le cas où  $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$  et  $D(y, z) = g(y) + g(z)$ , alors

$$D(x, z) \leq g(z) + g(x) \leq g(z) + g(y) + D(x, y) = D(y, z) + D(x, y).$$

Nous avons vérifié l'inégalité triangulaire pour  $D$ , qui est donc une distance sur  $X$ . On vérifie facilement que  $D$  et  $d$  ont les mêmes suites convergentes. On définit alors  $\hat{d}$  sur  $\hat{X}$  par  $\hat{d} = D$  sur  $X \times X$ ,

$$\hat{d}(x, \infty) = \hat{d}(\infty, x) = g(x) \quad \forall x \in X,$$

et bien sûr  $\hat{d}(\infty, \infty) = 0$ . Vérifions l'inégalité triangulaire. Comme  $D$  est une distance sur  $X$ , il suffit de constater que

$$\hat{d}(x, y) = D(x, y) \leq g(x) + g(y) = \hat{d}(x, \infty) + \hat{d}(\infty, y)$$

et

$$\hat{d}(x, \infty) = g(x) \leq g(y) + D(x, y) = \hat{d}(y, \infty) + \hat{d}(x, y)$$

pour tous  $x$  et  $y$  dans  $X$ . Il est facile de vérifier directement que  $(\hat{X}, \hat{d})$  est compact. En effet, si  $x_n$  est une suite de  $X$ , ou bien  $\liminf g(x_n) = 0$ , et  $x_n$  admet une sous-suite qui converge vers  $\infty$ , ou bien  $\liminf g(x_n) > 0$ , et  $x_n$  est contenue dans un compact de  $X$ . ▶

## 4.2 Partitions de l'unité

Une partition de l'unité localement finie est une famille  $f_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$  de fonctions continues qui ont la propriété que, pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  et une famille finie  $A_V$  d'indices tels que toutes les fonctions  $f_\alpha, \alpha \notin A_V$  sont identiquement nulles sur  $V$ , et qui de plus vérifient  $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$  pour tout  $x$ , (la somme n'implique qu'un nombre fini de termes non nuls en chaque point  $x$  au vu du caractère localement fini). L'ensemble  $A$  des indices  $\alpha$  est a priori quelconque. Toutefois, dans le cas d'un espace ayant la propriété de Lindelöf (tout recouvrement admet un sous-recouvrement dénombrable), une partition de l'unité localement finie est forcément dénombrable. C'est en particulier le cas dans les espaces métriques séparables.

◀ Démontrons qu'une partition de l'unité localement finie sur un espace Lindelöf est dénombrable (ou plus précisément que l'ensemble des fonctions non identiquement nulles est dénombrable). Chaque point  $z \in X$  admet un voisinage  $U_z$  qui a la propriété que l'ensemble des indices  $A_z$  des fonctions  $f_\alpha$  qui ne sont pas identiquement nulles sur  $U_z$  est fini. Au vu de la propriété de Lindelöf il existe une suite  $z_i$  telle que les ouverts  $U_{z_i}$  recouvrent  $X$ . La réunion  $\bar{A} = \cup_i A_{z_i}$  est dénombrable. Toute fonction  $f_\alpha$  avec  $\alpha \notin \bar{A}$  est identiquement nulle sur chacun des ouverts  $U_{z_i}$ , donc sur  $X$ . ▶

La partition de l'unité localement finie  $(f_\alpha)$  est dite subordonnée au recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  si le support de  $f_\alpha$  est contenu dans  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . On dit qu'un espace topologique admet des partitions de l'unité si on peut subordonner une partition localement finie à tout recouvrement ouvert. On commence par un Lemme sur les indices.

**Lemme 4.5.** *Pour qu'il existe une partition de l'unité  $f_\alpha$  subordonnée au recouvrement  $U_\alpha$ , il suffit qu'il existe une partition de l'unité localement finie  $g_\beta$  dont chacune des fonctions  $g_\beta$  est à support dans l'un des  $U_\alpha$ .*

◀ Soit  $A$  l'ensemble des indices  $\alpha$  et  $B$  l'ensemble des indices  $\beta$ . On choisit d'abord une fonction  $a : B \rightarrow A$  qui a la propriété que  $g_\beta$  est à support dans  $U_{a(\beta)}$ . Pour tout  $\alpha \in A$ , on note  $b(\alpha) \subset B$  l'ensemble des indices  $b(\alpha) := a^{-1}(\alpha)$ . Les ensembles  $b(\alpha), \alpha \in A$  constituent donc une partition de  $B$ , et ont la propriété que  $g_\beta$  est à support dans  $U_\alpha$  pour  $\beta \in b(\alpha)$ . On définit la fonction  $f_\alpha := \sum_{\beta \in b(\alpha)} g_\beta$ , c'est une somme localement finie et la fonction  $f_\alpha$  est donc continue. La famille  $f_\alpha$  est localement finie. Comme  $b(\alpha), \alpha \in A$  est une partition de  $B$ , on a  $\sum_\alpha f_\alpha = \sum_\beta g_\beta = 1$ . La famille  $f_\alpha$  est donc une partition de l'unité localement finie. Montrons que chaque fonction  $f_\alpha$  est supportée dans  $U_\alpha$ . Soit  $x$  un point du support de  $f_\alpha$ . Soit  $U$  un voisinage de  $x$  assez petit pour que toutes les fonctions  $g_\beta$  sauf un nombre fini soient identiquement nulles sur  $U$ . Il existe donc une partie finie  $b_U(\alpha) \subset b(\alpha)$  telle que  $f_\alpha = \sum_{\beta \in b_U(\alpha)} g_\beta$  sur  $U$ . Pour que le point  $x$  soit dans le support de  $f_\alpha$ , il faut donc qu'il soit dans le support d'un des fonctions  $g_\beta$ , donc dans  $U_\alpha$ .

L'existence de la fonction  $a$  ci-dessus découle de l'axiome du choix. Si l'espace est Lindelöf, alors  $B$  est dénombrable, et on peut se contenter de l'axiome du choix dénombrable, qui est beaucoup moins problématique. ▶

**Proposition 4.6.** *Soit  $X$  un espace métrique séparable localement compact. Alors  $X$  admet des partitions de l'unité, c'est à dire que, pour tout recouvrement ouvert de  $X$ , il existe une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement.*

◀ Soit  $(U_\alpha, \alpha \in A)$  un recouvrement ouvert de  $X$ , et  $K_i$  une suite exhaustive de compacts. On recouvre  $K_2$  par un nombre fini de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts  $U_\alpha$  et dans  $K_3$ . On appelle  $\mathcal{B}_2$  cette famille de boules ouvertes. Pour tout  $i \geq 3$ , on recouvre le compact  $K_{i+1} - K_i$  par une famille finie  $\mathcal{B}_{i+1}$  de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts de  $\mathcal{U}$  et dans l'ouvert  $K_{i+2} - K_{i-1}$ . A chacune des boules ouvertes  $B$  de la famille  $\mathcal{B} = \cup_{i \geq 2} \mathcal{B}_i$ , on associe une fonction continue  $f_B : X \rightarrow [0, \infty)$  qui est strictement positive sur la boule et nulle en dehors. La famille  $f_B$  est localement finie puisque les fonctions  $f_B, B \in \cup_{i \geq j+1} \mathcal{B}_i$  sont nulles sur  $K_j$ . La somme  $f = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B$  est donc une fonction continue à valeurs strictement positives. Les fonctions  $g_B := f_B/f$  forment alors une partition de l'unité localement finie, dont chacune des fonctions est à support dans l'un des ouverts  $U_\alpha$ . On conclut par le lemme précédent. ▶

En fait, tout espace métrique admet des partitions de l'unité. Ce résultat général, qui dépend de l'axiome du choix, a des preuves assez simples. L'axiome du choix n'est pas nécessaire dans le cas séparable. L'avantage de se restreindre au cas localement compact est que l'on obtient, par la même preuve, le résultat supplémentaire suivant (que l'on peut appliquer sur une sous-variété avec  $\mathcal{F} = C^k(X, \mathbb{R})$ ) :

**Addendum 4.7.** *Soit  $X$  un espace métrique séparable localement compact et soit  $\mathcal{F}$  un sous espace vectoriel de  $C(X, \mathbb{R})$  qui est stable par somme localement finie et par quotient (par un élément de  $\mathcal{F}$  ne s'annulant pas), et qui a la propriété que, pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout point  $x \in U$ , il existe  $f \in \mathcal{F}$ , à valeurs positives, à support dans  $U$ , et strictement positive en  $x$ . L'espace  $X$  admet alors des partitions de l'unité composées de fonctions de  $\mathcal{F}$ .*

**Corollaire 4.8.** *Soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement ouvert d'une sous-variété. Il existe alors une partition de l'unité différentiable subordonnée à  $U_\alpha$ .*

◀ Il faut vérifier que l'espace  $\mathcal{F}$  des fonctions  $C^\infty$  vérifie les hypothèses de l'addendum ci-dessus. Pour ceci, il suffit de vérifier qu'il existe une fonctions  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs positives. C'est un grand classique, voir l'exercice ci-dessous. ▶

**Exercice 4.1.** – Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{-1/t^2}$  (étendue par 0 en 0) est  $C^\infty$ .

– Montrer que la fonction qui vaut  $f(t) = e^{(2-t)^{-1}(1-t)^{-1}}$  sur  $]1, 2[$  et 0 en dehors est  $C^\infty$ .

– En posant  $g(t)$  la primitive de  $f$  qui vaut 0 en  $t = 2$ , montrer que la fonction  $x \mapsto g(|x|/2)$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$ , positive sur la boule unité, et nulle en dehors.

**Exercice 4.2.** *Dans l'addendum 4.7, montrer que l'hypothèse  $X$  séparable peut être remplacée par l'hypothèse  $X$  localement connexe. On pourra considérer les composantes connexes de  $X$ , qui sont ouvertes et séparables.*

Les partitions de l'unité permettent de montrer :

**Propriété 4.9.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (sans aucune régularité) localement majorée sur l'espace métrique localement compact séparable  $X$ . Alors il existe une fonction  $g$  de classe  $C^\infty$  telle que  $g \geq f$ . Si  $X$  est une sous-variété  $C^k$ , alors  $g$  peut être prise  $C^k$ .*

◀ Tout point  $z \in M$  admet un voisinage ouvert  $U_z$  sur lequel  $f$  est majorée par le réel  $a_z > 0$ . On considère une partition de l'unité localement finie  $(h_z)$  (différentiable) adaptée au recouvrement  $(U_z)$ . On pose alors  $g = \sum_z a_z h_z$ . Cette fonction est continue (différentiable) comme somme localement finie de fonctions continues (différentiables). De plus, pour tout  $x$ ,  $g(x) = \sum_{z \in U_z} a_z h_z(x) \geq f(x) \sum_{z \in U_z} h_z = f(x)$ . ▶

Le corollaire suivant est important :

**Corollaire 4.10.** *Tout espace métrique localement compact séparable  $X$  (toute sous-variété) admet une fonction propre continue (différentiable)  $f : X \rightarrow [1, \infty)$ .*

La séparabilité de  $M$  est ici une condition nécessaire.

◀ On considère une suite exhaustive de compacts  $K_i$  et la fonction  $f$  qui vaut  $i$  sur  $K_i - K_{i-1}$ . On applique alors le résultat précédent pour trouver une fonction régulière  $g$  telle que  $g \geq i + 1$  en dehors de  $K_i$ . ▶

**Corollaire 4.11.** *Pour toute sous variété  $M$ , il existe un plongement propre  $J : M \rightarrow \mathbb{R}^D$  (son image est donc fermée).*

◀  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{D_M}$ . Si elle est fermée, il n'y a rien à montrer. Sinon, on considère une fonction propre  $f$  sur  $M$ . L'application  $x \mapsto (x, f(x))$  est alors un plongement propre de  $M$  dans  $\mathbb{R}^{d_M+1}$ . ▶

Voici un autre exemple d'utilisation des partitions de l'unité :

**Propriété 4.12.** *Soit  $M \subset N$  une sous-variété fermée, et soit  $f : M \rightarrow [0, 1]$  une fonction différentiable. Alors il existe une fonction différentiable  $\tilde{f} : N \rightarrow [0, 1]$ , qui prolonge  $f$ .*

◀ Pour chaque point  $z$  de  $M$ , il existe un voisinage  $U_z$  de  $z$  dans  $N$  et une fonction  $f_z : U_z \rightarrow [0, 1]$ , différentiable, telle que  $f_z|_{(U_z \cap M)} = f|_{U_z \cap M}$ . Ces ouverts  $U_z$  recouvrent  $M$ , et en ajoutant l'ouvert  $V = N - M$ , on obtient un recouvrement ouvert de  $N$ . Il existe une partition de l'unité différentiable subordonnée à ce recouvrement, et donc une famille localement finie de fonctions  $g_z : U_z \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\sum_z g_z = 1$  sur  $M$  et  $\sum_z g_z \leq 1$ . Alors, la fonction  $\sum_z g_z f_z$  est l'extension souhaitée. ▶

Un espace topologique est dit paracompact si il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un sous recouvrement localement fini. Il est (presque) évident qu'un espace qui admet des partitions de l'unité est paracompact. Réciproquement, il est classique en topologie (depuis Bourbaki) que tout espace paracompact admet des partitions de l'unité. Nous nous contenterons ici de remarquer qu'on peut étendre ce qui précède au cas des espaces paracompacts localement compacts (c'est à dire remplacer la métrisabilité par la paracompacité).

**Proposition 4.13.** *Soit  $X$  un espace topologique séparé, connexe, localement compact et paracompact. Alors  $X$  admet une suite exhaustive de compacts.*

◀ On fait la preuve dans le cas connexe, l'adaptation au cas séparable est similaire à celle de la proposition 4.1. On considère un recouvrement localement fini  $\mathcal{U}$  de  $X$  par des ouverts relativement compacts. On choisit un des ouverts  $U$  de ce recouvrement, et on pose  $K_1 = \bar{U}$ , qui est un compact. On considère l'ensemble  $\mathcal{U}_1$  des ouverts du recouvrement qui intersectent  $K_1$ . Il découle du caractère localement fini du recouvrement et de la compacité de  $K_1$  que  $\mathcal{U}_1$  a un nombre fini d'éléments. La réunion  $K_2 = \cup_{U \in \mathcal{U}_1} \bar{U}$  est donc compacte. On définit alors inductivement le compact  $K_{i+1}$  comme la réunion des adhérences des ouverts du recouvrement qui intersectent  $K_i$ . On a  $K_i \subset \bar{K}_{i+1}$ , la réunion  $\mathcal{K} := \cup_i K_i = \cup_i \bar{K}_{i+1}$  est donc ouverte. Tout ouvert  $U \in \mathcal{U}$  est soit contenu dans  $\mathcal{K}$ , soit disjoint de  $\mathcal{K}$ . Le complémentaire de  $\mathcal{K}$  est donc ouvert, donc  $\mathcal{K} = X$ . ▶

À la différence du cas métrisable, ceci n'implique pas en général la séparabilité de  $X$ . On peut étendre (par la même preuve) la proposition 4.6 et son addendum (ainsi que tous les corollaires) :

**Proposition 4.14.** *Soit  $X$  un espace paracompact localement connexe et localement compact, et soit  $\mathcal{F}$  un sous espace vectoriel de  $C(X, \mathbb{R})$  qui est stable par somme localement finie et par quotient (par un élément de  $\mathcal{F}$  ne s'annulant pas), et qui a la propriété que, pour tout ouvert  $U$  de  $M$  et tout point  $x \in U$ , il existe  $f \in \mathcal{F}$ , à valeurs positives, à support dans  $U$ , et strictement positive en  $x$ . L'espace  $X$  admet alors des partitions de l'unité composées de fonctions de  $\mathcal{F}$ . Soit  $f_\alpha$  la fonction dont la restriction à*

◀ Soient  $(X_\beta)$  les composantes connexes de  $X$ . Elles sont ouvertes (et fermées) dans  $X$  car  $X$  est localement connexe.

Chacune de ces composantes connexes est paracompacte et connexe, elle admet donc une suite exhaustive de compacts, et des partitions de l'unité subordonnées à tout recouvrement constituées de fonctions de  $\mathcal{F}$ .

Soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement ouvert de  $X$ , et  $U_{\alpha\beta} := X_\beta \cap U_\alpha$ . Pour tout  $\beta$ , il existe une partition de l'unité  $f_{\alpha\beta}$  de  $X_\beta$ , subordonnée au recouvrement  $U_{\alpha\beta}$  et composée de fonctions de  $\mathcal{F}$  (ou plus exactement de fonctions qui sont les restrictions à  $X_\beta$  de fonctions de  $\mathcal{F}$ ).

On considère la fonction  $f_\alpha = \sum_\beta f_{\alpha\beta}$ , c'est une somme localement finie (au plus un des termes est non nul au voisinage de chaque point). C'est aussi la fonction sur  $X$  dont la restriction à chaque composante  $X_\beta$  est égale à  $f_{\alpha\beta}$ . Les fonctions  $f_\alpha$  constituent une partition de l'unité localement finie de  $X$  subordonnée au recouvrement  $(U_\alpha)$ .

▶

## 5 Champs de vecteurs, fibrations

Un champ de vecteurs (autonome) sur  $\mathbb{R}^d$  est une application  $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^r$ . Un champ de vecteurs dépendant du temps (ou non autonome) est une application  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^r$ . On s'intéresse à l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ . Pour un certain nombre de questions, l'étude des champs de vecteurs non-autonomes se réduit à celle des champs autonomes en considérant le champ  $Y(t, x) = (1, X(t, x))$ , qui est un champ de vecteurs autonome sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ . En effet la courbe  $x(t)$  résout l'équation  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$  si et seulement si la courbe  $y(t) := (t, x(t))$  résout l'équation autonome  $\dot{y}(t) = Y(y(t))$ .

Nous admettons l'énoncé global suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz :

**Théorème 5.1.** *Soit  $X(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  un champ de vecteurs  $C^r$  non nécessairement autonome. Supposons qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\|X(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|)$ .*

*Il existe une (unique) application  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , de classe  $C^r$ , ayant les propriétés suivantes :*

- $\varphi(s, s, x) = x$  pour tous  $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ .
- Pour tout  $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , la courbe  $t \mapsto \varphi(s, t, x)$  est une solution de l'équation différentielle. Autrement dit, pour tout  $(s, t, x)$ , on a

$$\partial_t \varphi(s, t, x) = X(t, \varphi(s, t, x)).$$

- Toute solution  $x(t)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert  $J$  vérifie  $x(t) = \varphi(s, t, x(s))$  pour tous  $s$  et  $t$  dans  $J$ .

On note souvent  $\varphi_s^t$  l'application  $x \mapsto \varphi(s, t, x)$ . La relation

$$\varphi_s^t \circ \varphi_\theta^s = \varphi_\theta^t$$

est satisfaite pour tous  $\theta, s$  et  $t$ . En effet, la courbe  $x(t) := \varphi_\theta^t(x)$  est une solution de l'équation différentielle, elle satisfait donc  $x(t) = \varphi_s^t(x(s)) = \varphi_s^t(\varphi_\theta^s(x))$ . En particulier,  $\varphi_s^t$  est l'inverse de  $\varphi_t^s$ . Chacune des applications  $\varphi_s^t$  est donc un difféomorphisme. On appelle l'application  $\varphi$  (ou parfois la famille des applications  $\varphi_s^t$ ) le flot de  $X$ . Dans le cas où le champ de vecteurs est autonome on note en général  $\varphi^t$  au lieu de  $\varphi_0^t$ . On remarque que  $\varphi_s^{s+t} = \varphi^t$  pour tous  $s$  et  $t$ . En effet, la courbe  $x(t) := \varphi_s^{s+t}(x)$  vérifie l'équation  $\dot{x}(t) = X(x(t))$ , elle vérifie donc  $x(t) = \varphi_0^t(x(0)) = \varphi^t(x)$ . On a alors la relation

$$\varphi^{t+s} = \varphi^s \circ \varphi^t.$$

**Addendum 5.2.** *La conclusion du théorème 5.1 est satisfaite si les hypothèses de régularité sur  $X$  sont affaiblies de la façon suivante :  $X$  est  $C^{r-1}$  ( $r \geq 1$ ),  $\partial_x X$  existe en chaque point, et  $(t, x) \mapsto \partial_x X$  est  $C^{r-1}$ . Il faut toujours supposer l'existence d'une constante  $C$  telle que  $\|X(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|)$ .*

La continuité par rapport à  $t$  n'est même pas essentielle pour obtenir un flot. Ce genre d'énoncé impliquant une régularité différente en  $t$  et  $x$  montre qu'il n'est pas toujours pertinent de ramener l'étude d'un système non autonome à celle d'un système autonome (l'énoncé de l'addendum ne s'obtient pas directement à partir d'un énoncé autonome).

Intéressons nous maintenant au cas d'un champ de vecteur  $C^r$  quelconque ne satisfaisant pas nécessairement la borne  $\|X(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|)$ .

**Théorème 5.3.** *Soit  $X(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  un champ de vecteurs  $C^r$  non nécessairement autonome. Il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , et une application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , de classe  $C^r$ , ayant les propriétés suivantes :*

- Pour tout  $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , on a  $(s, s, x) \in U$  et  $\varphi(s, s, x) = x$ .
- Pour tout  $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $(s, t, x) \in U$  est un intervalle ouvert  $]T^-(s, x), T^+(s, x)[$  contenant  $s$  et la courbe  $t \mapsto \varphi(s, t, x)$  est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle. En particulier, pour tout  $(s, t, x) \in U$ , on a

$$\partial_t \varphi(s, t, x) = X(t, \varphi(s, t, x)).$$

- Toute solution  $x(t)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert  $J$  contenant  $s$  vérifie  $x(t) = \varphi(s, t, x(s))$  sur  $J$  (en particulier,  $J \subset ]T^-(s, x(s)), T^+(s, x(s))]$ ).

Explicitons aussi le résultat dans le cas des champs autonomes.

**Théorème 5.4.** *Soit  $X(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  un champ de vecteurs  $C^r$  autonome. Il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , et une application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , de classe  $C^r$ , ayant les propriétés suivantes :*

- Pour tout  $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , on a  $(0, x) \in U$  et  $\varphi(0, x) = x$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $(t, x) \in U$  est un intervalle ouvert  $]T^-(x), T^+(x)[$  contenant 0 et la courbe  $t \mapsto \varphi(t, x)$  est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle. En particulier,  $\partial_t \varphi = X \circ \varphi$ .
- Toute solution  $x(t)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert  $J$  contenant  $s$  vérifie  $x(t) = \varphi(t - s, x(s))$  sur  $J$  (en particulier,  $J \subset ]s + T^-(x(s)), s + T^+(x(s))]$ ).

Le lecteur est invité à vérifier que les deux résultats ci-dessus sont équivalents l'un à l'autre. Nous allons démontrer la variante autonome.

◀ Il existe une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow ]0, 1[$ , de classe  $C^\infty$ , telle que le champ  $Y(x) := f(x)X(x)$  est borné. Notons  $\psi(t, x)$  le flot du champ  $Y$ , qui existe au vu du théorème 5.1. Supposons dans un premier temps que le flot  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de l'énoncé existe. On va montrer que les flots  $\varphi$  et  $\psi$  se déduisent l'un de l'autre par reparamétrisation, et plus précisément que l'on peut écrire  $\psi(t, x) = \varphi(\tau(t, x), x)$  pour une fonction  $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . En dérivant cette égalité par rapport à  $t$ , on trouve

$$Y(\psi(t, x)) = \partial_t \tau(t, x) X(\psi(t, x))$$

qui est satisfaite si

$$\partial_t \tau(t, x) = f(\psi(t, x))$$

pour tous  $t$  et  $x$ . Au vu de ces considérations informelles, on pose

$$\tau(t, x) := \int_0^t f(\psi(s, x)) ds,$$

on a  $\partial_t \tau(t, x) = f(\psi(t, x)) > 0$ . L'application  $(t, x) \mapsto (\tau(t, x), x)$  est donc un difféomorphisme sur son image, qui est un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ . Cette image contient  $\{0\} \times \mathbb{R}^d$ , et son intersection avec  $\mathbb{R} \times \{x\}$  est un intervalle pour tout  $x$ . L'inverse du difféomorphisme ci-dessus est de la forme  $(t, x) \mapsto (\theta(t, x), x)$ , où  $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^r$  telle que

$$\partial_t \theta(t, x) = 1/f(\psi(\theta(t, x), x)).$$

On pose alors

$$\varphi(t, x) := \psi(\theta(t, x), x),$$

et on constate que cette application (définie sur  $U$ ) vérifie toutes les propriétés de l'énoncé. ►

Le fait qu'un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$  est la même chose qu'une application de  $\mathbb{R}^d$  dans lui-même est propre au cas de  $\mathbb{R}^d$ . Ces objets deviennent différents sur une sous-variété. La première manifestation de cette différence tient à la manière dont les champs de vecteurs sont transformés par changement de coordonnées. Si  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  un difféomorphisme, on note alors  $\psi_* X$  le champ de vecteurs suivant :

$$\psi_* X(y) = d\psi_{\psi^{-1}(y)} \cdot X(\psi^{-1}(y)).$$

Le champ  $\psi_* X$  est la bonne expression de  $X$  dans les nouvelles coordonnées au vu de la propriété suivante :

**Propriété 5.5.** Si  $Y = \psi_* X$  et si  $x(t)$  résout l'équation  $\dot{x} = X(x)$ , alors  $y(t) := \psi(x(t))$  résout l'équation  $\dot{y} = Y(y)$ .

Le champ image  $\psi_* X$  n'est pas défini en général si  $\psi$  n'est pas un difféomorphisme. On utilisera toutefois la notation  $Y = \psi_* X$  si

$$Y(\psi(x)) = d\psi_x \cdot X(x)$$

pour tout  $x \in M$ , même lorsque  $\psi$  n'est pas un difféomorphisme. Si  $Y = \psi_* X$  et  $Z = \varphi_* Y$ , alors  $Z = (\varphi \circ \psi)_* X$ .

La relation

$$(\varphi \psi)_* X = \varphi_*(\psi_* X)$$

est satisfaite lorsque ses termes sont bien définis. Plus précisément, on étendra aussi la notation au cas des champs non autonomes,  $Y = \psi_* X$  si et seulement si  $Y(t, \psi(x)) = d\psi_x \cdot X(t, x)$ . C'est aussi équivalent à l'égalité  $Y_t = \psi_* X_t$  pour tout  $t$ , en posant  $Y_t(x) = Y(t, x)$ . La propriété ci-dessus reste satisfaite dans ce contexte.

## 5.1 Champ de vecteurs sur une sous variété

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ . Un champ de vecteurs  $C^r$  sur  $M$ , est la donnée, pour tout  $x \in M$ , d'un vecteur  $X(x) \in T_x M$  qui est de classe  $C^r$  en tant qu'application de  $M$  dans  $\mathbb{R}^D$ . De manière équivalente, le champ image  $\psi_* X$  est  $C^r$  pour tout difféomorphisme d'un ouvert de  $M$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On considèrera aussi des champs de vecteurs non autonomes  $X(t, x)$  qui sont des applications  $C^r$  de  $\mathbb{R} \times M$  dans  $\mathbb{R}^D$  telles que  $X(t, x) \in T_x M$  pour tout  $(t, x)$ . On associe souvent à un tel champ non-autonome le champ autonome  $(1, X(t, x))$  sur  $\mathbb{R} \times M$ , ceci permet de déduire un certain nombre de propriétés des champs non-autonomes à partir de l'étude des champs autonomes.

Si  $x(t)$  est une courbe  $C^1$  à valeurs dans la sous variété  $M$  de  $\mathbb{R}^D$ , alors pour chaque  $t$ , la dérivée  $\dot{x}(t)$ , vue comme un élément de  $\mathbb{R}^D$ , appartient à  $T_{x(t)} M$ . C'est le vecteur  $\dot{x}(t) = dx_t \cdot 1$ .

Étant donné un champ de vecteurs (non autonome)  $X(t, x)$  sur  $M$ , on dit que la courbe  $x$  satisfait l'équation  $\dot{x} = X(t, x)$  si  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$  dans  $T_{x(t)} M$  pour tout  $t$ . Si la courbe  $x(t)$  sur  $M$  résout l'équation  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ , alors la courbe  $(t, x(t))$  sur  $\mathbb{R} \times M$  résout l'équation autonome  $\dot{y} = (1, X(y))$ .

Soit  $X(t, x)$  un champ de vecteurs non autonome sur  $\mathbb{R}^D$  et  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ . On dit que  $X$  est tangent à  $M$  si  $X(t, x) \in T_x M$  pour tous  $(t, x)$ . La restriction de  $X$  à  $M$  est alors un champ de vecteurs sur  $M$ . Réciproquement :

**Lemme 5.6.** *Si  $M$  est une sous-variété fermée de  $\mathbb{R}^D$ , tout champ de vecteurs sur  $M$  est la restriction à  $M$  d'un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^D$ .*

◀ On considère ici le champ de vecteurs comme une application de  $M$  dans  $\mathbb{R}^D$ . Il suffit d'étendre chacune des composantes de cette application, en utilisant la propriété 4.12. ▶

**Lemme 5.7.** *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$  et  $X(t, x)$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^D$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

- Le champ  $X$  est tangent à  $M$ .
- Pour toute solution  $x(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^D$  de l'équation  $\dot{x}(t) = X(t, x)$ , l'ensemble  $J_M$  des temps  $t$  tels que  $x(t) \in M$  est ouvert dans  $J$ .

Si de plus  $M$  est fermée, alors toute solution passant par  $M$  est contenue dans  $M$  sur son intervalle de définition. Pour que l'équivalence ci-dessus soit satisfaite, il suffit que le champs  $X(t, x)$  soit continu, différentiable par rapport à  $x$ , et que l'application  $(t, x) \mapsto \partial_x(t, x)$  soit continue.

◀ Il est clair que le second point implique le premier.

Réciproquement, soit  $x(t)$  une solution telle que  $x(s) \in M$ . On considère un redressement  $\phi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$  de  $M$  en  $x(s)$ . La courbe  $\phi \circ x = (y, z)$  satisfait localement (au voisinage de  $t = s$ ) les équations  $\dot{y} = Y(t, y, z)$ ,  $\dot{z} = Z(t, y, z)$ , où  $(Y, Z)$  est le champ  $\phi_* X$ . On a  $Z(t, y, 0) = 0$  pour tous  $(t, y)$  puisque  $X$  est tangent à  $M$ . La courbe  $z$  est donc solution de l'équation  $\dot{z} = \tilde{Z}(t, z)$ , où  $\tilde{Z}(t, z) = Z(t, y(t), z)$ . Comme  $\tilde{Z}(t, 0) = 0$ , on en déduit que  $z(t)$  est nulle au voisinage de  $s$ , c'est à dire que  $x(t) \in M$ .

Finalement, si  $M$  est fermée, alors  $J_M$  est fermé. Comme c'est aussi un ouvert du connexe  $J$ , on a  $J_M = J$ . ▶

**Théorème 5.8.** *Soit  $X(t, x)$  un champ de vecteurs  $C^r$  non nécessairement autonome sur  $M$ . Il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ , et une application  $\varphi : U \rightarrow M$ , de classe  $C^r$ , ayant les propriétés suivantes :*

- Pour tout  $(s, x) \in \mathbb{R} \times M$ , on a  $(s, s, x) \in U$  et  $\varphi(s, s, x) = x$ .
- Pour tout  $(s, x) \in \mathbb{R} \times M$ , l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $(s, t, x) \in U$  est un intervalle ouvert  $]T^-(s, x), T^+(s, x)[$  contenant  $s$  et la courbe  $t \mapsto \varphi(s, t, x)$  est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle.
- Toute solution  $x(t)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert  $J$  contenant  $s$  vérifie  $x(t) = \varphi(s, t, x(s))$  sur  $J$  (en particulier,  $J \subset ]T^-(s, x(s)), T^+(s, x(s))]$ ).

◀ Supposons dans un premier temps que  $M$  est fermée. On étend alors  $X$  en un champ  $\tilde{X}(t, x)$  sur  $\mathbb{R}^D$ . On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz dans  $\mathbb{R}^D$ , qui nous donne l'existence d'un flot  $\tilde{\varphi}(s, t, x)$  défini sur un ouvert  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D$ . Le lemme ci-dessus implique que la solution  $t \mapsto \varphi(s, t, x)$  est contenue dans  $M$  sur tout son intervalle de définition  $]T^-(s, x), T^+(s, x)[$  si  $x \in M$ . En posant  $U = \tilde{U} \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M)$  et  $\varphi = \tilde{\varphi}|_U$ , on voit que toutes les conclusions de l'énoncé sont satisfaites.

Dans le cas où  $M$  n'est pas fermée, on considère une fonction  $C^\infty$  propre  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Le graphe  $\Gamma$  de  $f$  est une sous-variété fermée de  $M \times \mathbb{R}$ , donc de  $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ . On associe au champ  $X(t, x)$  sur  $M$  le champ  $Y(t, x) = (X(t, x), df_x \cdot X(t, x))$  sur  $\Gamma$ ; on a  $\pi_* Y = X$  où  $\pi$  est la restriction à  $\Gamma$  de la projection sur le premier facteur de  $M \times \mathbb{R}$ . On peut appliquer la première partie au champ  $Y$  sur  $\Gamma$ , on obtient un flot  $\varphi_Y$  défini sur un ouvert  $U_Y$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Gamma$ , puis le résultat voulu en posant  $\varphi(s, t, x) = \pi \circ \varphi_Y(s, t, x, f(x))$ , sur le domaine  $U = (id \times id \times \pi)(U_Y)$ .

▶

On dit que le champ est complet si on a  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ . Les temps d'existence vérifient

$$T^\pm(s, x) = T^\pm(s, \varphi(s, t, x))$$

pour tout  $t \in ]T^-(s, x), T^+(s, x)[$ . Ils sont semi-continus. Plus précisément,  $\pm T^\pm$  est semi-continu inférieurement (c'est une reformulation du fait que  $U$  est ouvert).

**Proposition 5.9.** *Si le temps d'existence  $T^+(s, x)$  de la solution maximale  $x(t)$  d'un problème de Cauchy vérifie  $T^+(s, x) < \infty$  (resp.  $T^-(s, x) > -\infty$ ), alors la solution  $x(t)$  n'a pas de valeur d'adhérence en  $T^+(s, x)$  (resp. en  $T^-(s, x)$ ).*

◀ Notons  $(s, x_s)$  le problème de Cauchy considéré, et  $T^+ = T^+(s, x_s)$ . On note comme dans l'énoncé  $x(t)$  la solution  $\varphi(s, t, x_s)$ . Supposons que  $T^+ < \infty$  et que la courbe  $x(t)$  a une valeur d'adhérence  $x^+ \in M$  lorsque  $t \rightarrow T^+$ . On a  $T^+(T^+, x^+) > T^+$ , donc  $T^+(t, x) > T^+$  sur un voisinage  $V$  de  $(T^+, x^+)$ . En prenant  $\tau$  tel que  $(\tau, x(\tau)) \in V$ , on obtient

$$T^+ = T^+(s, x_s) = T^+(\tau, x(\tau)) > T^+,$$

ce qui est une contradiction. ▶

On s'intéressera le plus souvent dans la suite à des champs de vecteurs autonomes et complets. Voici quelques critères de complétude :

**Proposition 5.10.** *Si il existe une fonction propre  $f$  sur  $M$  et une constante  $C > 0$  telle que  $|df \cdot X| \leq Cf$ , alors  $X$  est complet. C'est le cas lorsque  $X$  est à support compact.*

Sur  $\mathbb{R}^d$ , on peut prendre  $f = 1 + |x|^2$ , et on retrouve que  $X$  est complet si  $|X| \leq C(1 + |x|)$ .

◀ Soit  $x(t) : ]T^-, T^+[$  une solution maximale de l'équation différentielle. On montre le résultat par l'absurde en supposant, par exemple, que  $T^+$  est fini. On a  $|\partial_t(f \circ x)| \leq Cf \circ x$  donc, par le Lemme de Gronwall,  $f \circ x$  est bornée sur  $[s, T^+[$  pour tout  $s \in ]T^-, T^+[$ . Comme  $f$  est propre, ceci implique que la courbe  $x$  est contenue dans un compact, ce qui est une contradiction. Dans le cas où  $X$  est à support compact, on peut prendre n'importe quelle fonction propre  $f \geq 1$ . ▶

Comme dans  $\mathbb{R}^n$ , tout champ peut être rendu complet par reparamétrisation :

**Propriété 5.11.** *Si  $V$  est un champ autonome sur  $M$ , il existe une fonction différentiable  $g$  à valeurs strictement positives, telle que le champ  $gV$  est complet.*

◀ On considère une fonction  $f : M \rightarrow [1, \infty)$  propre. On a  $df \cdot gV = gdf \cdot V$  et il suffit que  $g|df \cdot V| \leq (1+f)$  pour que  $gV$  soit complet, au vu du critère ci-dessus. La conclusion est donc satisfaite pour toute fonction différentiable  $g \leq (1+f)/(1+|df \cdot V|)$ . L'existence d'une telle fonction découle du lemme 4.9. ▶

Le lemme de redressement ci-dessous est bien utile :

**Proposition 5.12.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^r$ , et  $x_0$  un point régulier, c'est à dire que  $X(x_0) \neq 0$ . Il existe alors une carte locale  $\phi : (M, x_0) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$  telle que  $\phi_*X$  est le champ constant  $(1, 0)$ .*

◀ Soit  $\psi : (\mathbb{R}^{d-1}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  une immersion locale telle que  $X(x_0) \notin d\psi_0(\mathbb{R}^{d-1})$ . Soit  $\varphi^t$  le flot de  $X$ . Alors l'application  $F : (t, y) \mapsto \varphi^t \circ \psi(y)$  est une paramétrisation locale de  $M$  telle que  $\partial_t F = X \circ F$ , c'est à dire  $F_*(1, 0) = X$ . ▶

**Exercice 5.1.** *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^d$  et  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$  tangent à  $M$ . Pour tout point régulier  $x_0$  de  $X$  dans  $M$ , montrer qu'il existe un difféomorphisme local  $\phi$  de  $\mathbb{R}^d$  en  $x_0$  qui redresse à la fois  $M$  et  $X$ .*

**Propriété 5.13.** *Soit  $\psi : N \rightarrow M$  une application différentiable, et  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs sur  $N$  et  $M$  tels que  $Y = \psi_*X$ . Si  $\varphi_X^t$  est le flot de  $X$ , et  $U_X \subset \mathbb{R} \times N$  est son domaine, alors pour tout  $(t, x) \in U_X$ , on a  $(t, \psi(x)) \in U_Y$  et  $\varphi_Y^t \circ \psi(x) = \psi \circ \varphi_X^t(x)$ .*

Finissons par une remarque sur les sous-groupes de Lie. Soit  $G$  un sous-groupe de  $Gl_n(\mathbb{R})$  qui en est aussi une sous-variété. On note  $\mathfrak{g}$  son espace tangent au point identité, qui est donc un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 5.14.** *La restriction à  $\mathfrak{g}$  de l'application exponentielle prend ses valeurs dans  $G$ .*

◀ Pour tout  $A \in G$ , l'application  $B \mapsto BA$  est un isomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$  qui préserve  $G$ . En conséquence, l'espace tangent à  $G$  au point  $A$  est l'espace  $\mathfrak{g}A$  constitué des matrices  $hA, h \in \mathfrak{g}$ . Pour tout  $h \in \mathfrak{g}$ , l'application  $A \mapsto hA$  est un champ de vecteurs sur  $Gl_n(\mathbb{R})$  qui est tangent à  $G$ , et qui engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs sur  $G$  (on parle de champ de vecteurs invariant à droite). L'équation différentielle associée  $A'(t) = hA(t)$  a une unique solution telle que  $A(0) = I$ , c'est  $A(t) = \exp(th)$ , qui est donc dans  $G$ . ▶

## 5.2 Fibrations localement triviales, voisinages tubulaires

**Théorème 5.15** (Ehresmann). *Soit  $f : M \rightarrow N$  une submersion de classe  $C^{r+1}$ ,  $r \geq 1$ . Si  $M$  est compacte (ou, plus généralement, si  $f$  est propre), alors  $f$  est une fibration localement triviale, c'est à dire que, pour tout  $x_0 \in N$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $N$  et un plongement  $\varphi : F \times U \rightarrow M$ , de classe  $C^r$ , où  $F$  est la sous variété  $f^{-1}(x_0)$ , vérifiant*

$$f \circ \varphi(y, x) = x$$

pour tout  $y \in F$  et  $x \in U$ .

Ceci implique en particulier, si  $M$  est connexe, que toutes les fibres  $f^{-1}(x)$  sont difféomorphes. Le terme *localement triviale* impose une mise en garde. Toute submersion est localement triviale au sens où elle s'écrit  $(x, y) \mapsto x$  dans un voisinage d'un point de sa source  $M$ . Ici, on obtient un résultat local au voisinage d'une fibre entière, autrement dit un résultat local du coté de l'image, ce qui est plus fort.

Remarquons qu'un fibré vectoriel est aussi une fibration localement triviale.

◀ On considère un plongement  $\psi$  de  $] -2, 2[^{d_N}$  dans  $N$  qui envoie l'origine sur  $x_0$ . Posons  $Z = f^{-1}(\psi(] -2, 2[^{d_N}))$  et

$$g = \psi^{-1} \circ f : X \rightarrow ] -2, 2[^{d_N}.$$

Soient  $e_i$  les vecteurs coordonnées de  $\mathbb{R}^{d_N}$ , et soient  $v_i(x)$  les champs de vecteurs

$$v_i(x) = g(x_1)g(x_2) \cdots g(x_{d_N})e_i,$$

où  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  est une fonction régulière qui vaut 1 sur  $[-1, 1]$  et dont le support est contenu dans  $] -2, 2[$ .

On construit des champs de vecteurs  $V_i$  sur la variété  $X$  tels que  $g_*V_i = v_i$ . Pour ceci, on considère l'orthogonal  $H'(z)$  du sous-espace  $K(z) := \ker dg_z$  dans  $\mathbb{R}^{D_M}$ , et son intersection  $H(z)$  avec  $T_z Z (= T_z M)$ . Ce sous-espace est un supplémentaire de  $K(z) = \ker dg_z$  dans  $T_z M$ . Comme  $dg_z$  est surjective, sa restriction à l'espace horizontal  $H(z)$  est un isomorphisme, et on pose

$$V_i(z) = (dg_z|_{H(z)})^{-1}(v_i(g(z))).$$

Comme  $f$  est propre, le support de  $V_i$  est compact.

Montrons que les champs  $V_i(z)$  sont  $C^r$ . On fixe un point  $z_0 \in Z$  et on étudie ces champs au voisinage de  $z_0$ . On étend localement la submersion  $g$  en une submersion

$$G : (\mathbb{R}^{D_M}, z_0) \rightarrow (] -2, 2[^{d_N} \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}, (g(z_0), 0))$$

telle que  $G(z) = (g(z), 0)$  pour  $z \in M$ . L'espace  $K(z)$ , vu comme sous espace de  $\mathbb{R}^{D_M}$  est le noyau de  $dG_z$ . L'application  $z \mapsto G(z)$  à valeurs dans la Grassmannienne  $G(d_F, D_M)$  est donc  $C^r$ . On en déduit en se référant à l'étude des Grassmanniennes plus haut que l'application

$$z \mapsto H(z) = (K(z)^\perp \cap T_z M) \in G(d_N, D_M)$$

est  $C^r$ . Comme l'application  $dG_z|_{H(z)}$  est un isomorphisme. Son inverse  $S(z)$ , vu comme application linéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$  dont l'image est  $H(z)$ , est une fonction  $C^r$  de  $z$  au vu de la propriété 3.4. Les champs  $V_i(z) = S(z) \cdot v_i(g(z))$  sont donc  $C^r$ .

Soit  $\phi_i^t$  le flot de  $V_i$ . Comme  $g_*V_i = v_i$ , on a

$$g \circ \phi_i^t(x) = x + te_i$$

tant que  $x$  et  $x + te_i$  sont dans  $[-1, 1]^{d_N}$ . En notant  $F$  la sous variété  $g^{-1}(0)$ , on définit l'application  $\tilde{\varphi} : F \times ] -1, 1[^{d_N} \rightarrow X$  par

$$\tilde{\varphi}(y, x) = \varphi(y, x_1, \dots, x_{d_N}) = \phi_{d_N}^{x_{d_N}} \circ \cdots \circ \phi_1^{x_1}(y).$$

On remarque que  $g \circ \varphi(y, x) = x$ . La différentielle

$$d\tilde{\varphi}_{(y,0,\dots,0)} \cdot (\zeta, t_1, \dots, t_{d_N}) = \zeta + t_1 V_1(y) + \cdots + t_{d_N} V_{d_N}(y)$$

est inversible, donc  $\varphi$  est un difféomorphisme local en  $(y, 0)$  pour tout  $y \in F$ . Au vu du Lemme ci-dessous, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\tilde{\varphi}$  engendre un plongement de  $F \times ] -\delta, \delta[^{d_N}$  dans  $X$ . On revient à l'énoncé en posant  $U = \psi(] -\delta, \delta[^{d_N})$  et  $\varphi(y, x) = \tilde{\varphi}(y, \psi(x))$ . ▶

**Lemme 5.16.** Soient  $M$  et  $N$  des sous variétés, soit  $F$  une sous variété de  $M$ , et soit  $J : M \rightarrow N$  une application différentiable dont la restriction à  $F$  est un plongement et qui est un difféomorphisme local en chaque point de  $F$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $F$  dans  $M$  tel que la restriction de  $J$  à  $U$  est un plongement.

◀ On munit toutes les sous-variétés des distances induites par l'espace ambiant. Pour chaque  $y \in F$ , on considère trois rayons  $\epsilon_y, r_y, \delta_y$  ayant les propriétés suivantes :

- L'application  $J$  est un difféomorphisme de  $B(y, 2r_y)$  sur son image, et cette image contient  $B(J(y), 2\delta_y)$ .
- $J^{-1}(B(J(y), 2\delta_y)) \cap F \subset B(y, r_y)$  (on peut obtenir cette condition en résolvant  $\delta_y$  car  $J$  est un plongement).
- $J(B(y, \epsilon_y)) \subset B(J(y), \delta_y)$  et  $\epsilon_y < r_y$ .

Montrons que  $J$  est injective sur l'ouvert  $U = \cup_y B(y, \epsilon_y)$ . On considère pour ceci deux points  $z_1$  et  $z_2$  dans  $U$  tels que  $J(z_1) = J(z_2)$ . Il existe  $y_1 \in F$  tel que  $z_1 \in B(y_1, \epsilon_1)$  et  $y_2 \in F$  tel que  $z_2 \in B(y_2, \epsilon_2)$ , en notant  $r_i, \epsilon_i, \delta_i$  les quantités associées à  $y_1$  et  $y_2$ . Supposons que  $\delta_1 \leq \delta_2$  pour fixer les idées. On a alors

$$d(J(y_1), J(y_2)) \leq d(J(y_1), J(z_1)) + d(J(z_2), J(y_2)) < \delta_1 + \delta_2 \leq \delta_1$$

donc  $d(y_1, y_2) < r_1$ .

Si  $r_1 \leq r_2$ , alors

$$d(z_1, y_2) \leq d(z_1, y_1) + d(y_1, y_2) < \epsilon_1 + r_1 < 2r_1 \leq 2r_2$$

donc  $z_1 = z_2$  par injectivité de  $J$  sur  $B(y_2, 2r_2)$ .

Si  $r_2 \leq r_1$ , alors  $d(y_1, z_2) < r_1 + \epsilon_2 \leq 2r_1$  donc  $z_1 = z_2$  par injectivité de  $J$  sur  $B(y_1, r_1)$ .

L'application  $J|_U$  est donc un difféomorphisme local injectif, donc un difféomorphisme sur son image. ▶

Ce lemme est aussi l'outil essentiel pour démontrer l'existence des voisinages tubulaires.

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ . On appelle fibré normal de  $M$ , noté  $T^\perp M$ , le fibré vectoriel au dessus de  $M$  dont la fibre en  $x$  est le sous-espace vectoriel  $E(x) = (T_x M)^\perp$ . L'application  $G(d, D) \ni E \mapsto E^\perp \in G(D-d, D)$  étant  $C^\infty$ , c'est un fibré  $C^{k-1}$ , comme  $TM$ .

**Théorème 5.17.** Il existe un voisinage  $U$  de la section nulle dans le fibré normal sur lequel l'application  $J : T^\perp M \ni (x, v) \mapsto x + v \in \mathbb{R}^D$  est un plongement (un difféomorphisme sur son image). L'image  $V$  de  $U$  est un voisinage ouvert de  $M$  dans  $\mathbb{R}^D$ . Il existe une submersion  $\pi : V \rightarrow M$  dont la restriction à  $M$  est l'identité.

On dit que  $V$  est un voisinage tubulaire de  $M$ , et que  $\pi$  est une rétraction de  $V$  sur  $M$ .

◀ On vérifie que l'application  $J : (x, v) \mapsto x + v$  vérifie les hypothèses du lemme ci-dessus. La submersion  $\pi$  est l'application  $J \circ P \circ J^{-1}$ , où  $P$  est la projection canonique  $(x, v) \mapsto x$  du fibré normal. ▶

**Exercice 5.2.** Montrer que si il existe une équation globale de  $M$ , c'est à dire une application  $\psi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^{D-d}$  dont 0 est une valeur régulière et telle que  $M = \psi^{-1}(0)$ , alors le fibré normal de  $M$  est trivial.

On peut étendre ce qui précède au cas où  $M$  est une sous-variété d'une sous variété  $N \subset \mathbb{R}^D$ . Le fibré normal de  $M$  (relativement à  $N$ ), noté  $T^{\perp N} M$ , est le fibré vectoriel au dessus de  $M$  dont la fibre en  $x$  est le sous-espace vectoriel  $E(x) = (T_x M)^\perp \cap T_x N$ . Soit  $W$  un voisinage tubulaire de  $N$  dans  $\mathbb{R}^D$  et  $\pi_W : W \rightarrow N$  une rétraction (c'est à dire une submersion dont la restriction à  $N$  est l'identité).

**Théorème 5.18.** Il existe un voisinage  $U$  de la section nulle dans le fibré  $T^{\perp N} M$  sur lequel l'application  $J : T^{\perp N} M \ni (x, v) \mapsto \pi_W(x + v) \in N$  est un plongement (un difféomorphisme sur son image). L'image  $V$  de  $U$  est un voisinage ouvert de  $M$  dans  $N$ . Il existe une submersion  $\pi : V \rightarrow M$  dont la restriction à  $M$  est l'identité.

◀ Il suffit de constater que l'application  $J$  vérifie les hypothèses du lemme. ▶

### 5.3 Fibration de Hopf

On considère le champ de vecteurs linéaire  $V(x, p)$  sur  $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -x_2.$$

Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont  $x_1$  et  $x_2$  sont les positions, et  $p_1$  et  $p_2$  les vitesses. En notation complexe  $z_i = x_i + ip_i$ , les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{it},$$

elles sont toutes périodiques de période  $2\pi$  (sauf la solution identiquement nulle). On obtient ainsi une partition de  $\mathbb{R}^4$  en un point et des cercles plongés. Au voisinage de n'importe quel point non nul de  $\mathbb{R}^4$ , cette partition peut être redressée par un difféomorphisme local en une collection de droites parallèles.

L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|p|^2.$$

On calcule facilement que  $dE \cdot V = 0$ . On conclut que l'énergie est constante le long des trajectoire, c'est à dire que  $E(x(t), p(t)) = E(x(0), p(0)) \forall t$  si  $(x(t), p(t))$  est une trajectoire de l'équation différentielle. Ceci est aussi évident directement sur l'expression des solutions.

Le champ de vecteur  $V$  engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs (toujours noté  $V$ ) sur la sous-variété  $\{E = 1/2\}$ , qui n'est autre que  $S^3$ . Les trajectoires du système différentiel  $\dot{x} = V$ , qui sont toutes des images plongées de  $S^1$ , forment donc une partition de la sphère  $S^3$ . Localement, cette partition se redresse en une collection de droites parallèles.

La formule suivante va nous permettre de faire mieux. On pose

$$h(z_1, z_2) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$

Le calcul suivant

$$|h(z_1, z_2)|^2 = 4z_1\bar{z}_2\bar{z}_1z_2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

montre que  $h(S^3) \subset S^2$ , et même que  $h^{-1}(S^2) = S^3$ . On constate encore une fois que  $h$  est constante le long des orbites, et même que les ensembles  $h = cte$  sont exactement les orbites. En effet, si  $h(z_1, z_2) = h(z'_1, z'_2)$ , alors

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |h(z_1, z_2)| = |h(z'_1, z'_2)| = |z'_1|^2 + |z'_2|^2$$

donc  $|z_j|^2 = |z'_j|^2$ . On écrit alors  $z'_j = z_j e^{it_j}$  pour des réels  $t_1$  et  $t_2$ . Comme  $z_1\bar{z}_2 = z'_1\bar{z}'_2$ , on conclut que  $e^{i(t_1-t_2)} = 1$ , et donc que les points  $(z_1, z_2)$  et  $(z'_1, z'_2)$  sont sur la même orbite.

L'application  $h : S^3 \rightarrow S^2$  est une submersion (nous le vérifierons ci-dessous), donc une fibration localement triviale. Toutes les fibres de cette fibration sont difféomorphes à  $S^1$ , en particulier,  $h$  est surjective. Les fibres de  $h$  sont exactement les orbites du système différentiel  $\dot{x} = V$  sur  $S^3$ .

On montrera plus tard que  $S^3$  n'est pas difféomorphe à  $S^2 \times S^1$ , la fibration de Hopf n'est donc pas globalement triviale.

Montrons maintenant que  $h$  est une submersion en tout point différent de  $(0, 0)$ . En un point où  $z_1$  et  $z_2$  sont non-nuls, on écrit l'application  $h$  en coordonnées polaires

$$(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \mapsto (2r_1r_2, \theta_1 - \theta_2, r_1^2 - r_2^2).$$

On vérifie par un calcul direct que l'application  $(r_1, r_2) \mapsto (2r_1r_2, r_1^2 - r_2^2)$  est un difféomorphisme de  $]0, \infty)^2$  dans  $]0, \infty) \times \mathbb{R}$ . L'autre facteur  $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_2 - \theta_1$  est une submersion de  $T^2$  dans  $S^1$ , donc  $h$  est une submersion sur l'ouvert  $\{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$ .

En écrivant en coordonnées cartésiennes la matrice

$$dh_{(x_1, p_1, x_2, p_2)} = 2 \begin{pmatrix} x_2 & p_2 & x_1 & p_1 \\ -p_2 & x_2 & p_1 & -x_1 \\ x_1 & p_1 & -x_2 & -p_2 \end{pmatrix}$$

on voit que cette différentielle est surjective aux points tels que  $z_1 = 0, z_2 \neq 0$  ou  $z_2 = 0, z_1 \neq 0$ .

## 5.4 Oscillateur non résonant

On considère le champ de vecteurs linéaire  $V(x, p)$  sur  $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = ap_2, \quad \dot{p}_2 = -ax_2,$$

avec un paramètre  $a$  irrationnel. Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont les fréquences d'oscillations sont différentes et incommensurables. L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}(x_1^2 + p_1^2 + ax_2^2 + ap_2^2) = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + a|z_2|^2).$$

La sous variété  $\mathcal{E} := \{E = 1/2\}$  est difféomorphe à  $S^3$ . Les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{iat}.$$

Contrairement au cas  $a = 1$ , la plupart des trajectoires sont injectives (toutes celles de l'ouvert  $\Omega := \{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$ ). Les trajectoires  $(z_1(t) \equiv 0, z_2(t) = z_2(0)e^{iat})$ , et  $(z_1(t) = z_1(0)e^{it}, z_2(t) \equiv 0)$  sont périodiques, et la trajectoire  $z(t) \equiv 0$  est fixe.

On vérifie facilement que les quantités  $|z_1|, |z_2|$  (et donc  $E$ ) sont constantes le long des trajectoires. Pour chaque  $r_1 > 0, r_2 > 0$ , la sous variété  $T(r_1, r_2)$  d'équation  $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2$  est invariante. Chacune de ces sous variétés est difféomorphe au tore  $T^2$  (presque tautologiquement).

L'application  $R : (z_1, z_2) \rightarrow (|z_1|^2, |z_2|^2)$  est une submersion et un fibration localement triviale (dont les fibres sont difféomorphes à  $T^2$ ) de  $\Omega$  sur  $]0, \infty)^2$ . On peut aussi la restreindre à une fibration localement triviale de l'ouvert  $\Omega \cap \mathcal{E}$  de la surface d'énergie, sur l'intervalle  $]1, 0), (0, 1[$  de  $\mathbb{R}^2$ . Toutefois, elle ne s'étend pas en une fibration localement triviale de toute la surface d'énergie, les fibres  $R^{-1}(0, 1)$  et  $R^{-1}(1, 0)$  sont des cercles, et non des tores. Ce sont des fibres singulières, sur lesquelles  $R$  n'est pas une submersion.

Le champ de vecteurs  $V$  engendre un champ de vecteurs sur chacun des tores  $T(r_1, r_2)$ . Les champs de vecteurs sur  $T(r_1, r_2)$  et  $T(r'_1, r'_2)$  sont conjugués par le difféomorphisme

$$(z_1, z_2) \mapsto (r'_1 z_1 / r_1, r'_2 z_2 / r_2)$$

(donc en un sens, leurs dynamiques sont identiques). Pour décrire les orbites, on considère la paramétrisation de  $T(r_1, r_2)$  par le difféomorphisme local non injectif

$$\pi : \mathbb{R}^2 \ni (\theta_1, \theta_2) \rightarrow (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in T(r_1, r_2).$$

La préimage du champ de vecteurs  $V$  est le champ de vecteur constant  $(1, a)$ , c'est à dire que  $\pi_*(1, a) = V$ . L'orbite du point  $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$  se représente donc dans ces coordonnées par la droite d'équation  $(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0)$ . Toutefois, en raison la non injectivité de  $\pi$ , la préimage de l'orbite contient toutes les droites translatées d'équation  $(\theta_2 - \theta_2^0 - n) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - m)$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ . Notons que l'ensemble  $Z$  des réels de la forme  $m - n/a$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  est une partie dense de  $\mathbb{R}$ . La préimage de l'orbite est l'ensemble des droites d'équation

$$(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - z), z \in Z.$$

C'est donc une famille "transversalement dense" de droites parallèles. Comme cette famille est dense dans  $\mathbb{R}^2$ , son image par  $\pi$ , qui est l'orbite de  $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$ , est dense dans  $T(r_1, r_2)$ . Localement, au voisinage de chacun de ses points, cette orbite se redresse en le produit d'un intervalle par un ensemble dénombrable dense.

## 5.5 Orbites d'un champ de vecteurs

Soit  $V(x)$  un champ de vecteurs sur la sous-variété  $M$ , et soit  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$  une solution de l'équation  $\dot{x}(t) = V(x(t))$  (ou plus généralement  $x(t) : I \rightarrow M$  une orbite maximale).

**Proposition 5.19.** *Il y a trois possibilités pour la solution  $x(t)$  :*

- La solutions  $x(t)$  est constante,  $x(t) \equiv x_0$ , où  $x_0$  est une singularité de  $V$ , c'est à dire que  $V(x_0) = 0$ .
- La solution  $x(t)$  est périodique, c'est à dire qu'il existe  $T > 0$  tel que  $x(t+T) = x(t)$  pour tout  $t$ . Dans ce cas, l'image de la courbe  $x$  est une sous-variété de  $M$  difféomorphe à  $S^1$ .
- La courbe  $t \mapsto x(t)$  est une immersion injective.

◀ Si  $x_0$  est une singularité de  $V$ , alors la courbe constant  $x \equiv x_0$  est une solution de l'équation différentielle. La partie unicité du théorème de Cauchy Lipschitz implique donc qu'aucune autre solution ne passe par  $x_0$ . En effet, si une solution  $\gamma(t)$  vérifie que  $\gamma(s) = x_0$  pour un certain réel  $s$ , alors la courbe constante  $x_0$  et la courbe  $\gamma(t)$  sont deux solution du problème de Cauchy avec la condition initial  $x(s) = x_0$ , et elles sont donc égales.

Supposons maintenant que la solution  $x(t)$  n'est pas constante, et donc que  $V(x(t)) \neq 0$  pour tout  $t$ , c'est à dire que l'application  $t \mapsto x(t)$  est une immersion.

Supposons que cette immersion n'est pas injective. Alors il existe des temps  $s$  et  $S > 0$  tels que  $x(s) = x(s+S)$ . On remarque que les courbes  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto x(t+S)$  sont solutions du même problème de Cauchy, et donc égales. Autrement dit, l'égalité  $x(t) = x(t+S)$  a lieu pour tout  $t$ . Considérons maintenant l'ensemble  $P$  des périodes de  $x$ , c'est à dire l'ensemble des réels  $S$  tels que  $x(t+S) = x(t)$  pour tout  $t$ . On voit que  $P$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un réel  $T > 0$  (que l'on appelle la période de  $x$ ) tel que  $P = T\mathbb{Z}$ .

Considérons l'application  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  donnée par  $\theta(t) = e^{it2\pi/T}$ . Cette application est un difféomorphisme local surjectif. On constate de plus que  $x(t) = x(s)$  si et seulement si  $\theta(t) = \theta(s)$ . La courbe  $x$  se factorise donc en  $x = g \circ \theta$ , en posant  $g(\theta) = x(t)$  où  $t$  vérifie  $\theta(t) = \theta$ . L'application  $g : S^1 \rightarrow M$  est injective

et différentiable car  $\theta$  est un difféomorphisme local. De plus, le rang de  $dg_{\theta(t)}$  est non nul comme le rang de  $dx_t$ , donc  $g$  est une immersion injective. Comme  $S^1$  est compact,  $g$  est un plongement. ►

Soit  $V$  un champ de vecteurs complet sur  $M$ , sous variété de dimension  $d$ . Considérons une orbite  $X$ , c'est à dire l'image  $x(\mathbb{R})$  d'une solution de l'équation  $\dot{x} = V$ . Nous avons vu que  $X$  est soit un point, soit une sous-variété compacte plongée difféomorphe à  $S^1$ , soit l'image d'une immersion injective.

**Propriété 5.20.** *Pour tout  $x \in X$ , Il existe une carte  $\phi : I \times B \rightarrow M$ , où  $I$  est un intervalle contenant 0 et où  $B$  est une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^{d-1}$  centrée en 0, ayant les propriétés suivantes :*

- $\phi(0, 0) = x$ ,
- $\phi^{-1}(X) = I \times Z$

où  $Z$  est une partie dénombrable de  $B^l$ .

Cette propriété est satisfaite par les orbites maximales non périodiques des champs de vecteurs, pas, en général, par les images d'immersions injectives (penser au huit)!

Si  $X$  était une sous variété plongée de  $M$ , on pourrait prendre  $Z = \{0\}$  dans le résultat ci-dessus. Mais en général, la "structure transverse"  $Z$  est plus complexe, comme nous l'avons illustré avec les oscillateurs non résonnants dans 5.4.

◀ Comme  $V(x) \neq 0$ , on peut redresser le champ  $V$  au voisinage de  $x$ , c'est à dire qu'il existe un plongement  $\phi : I \times B \rightarrow M$  tel que  $\phi_*(1, 0) = V$ , où  $(1, 0)$  est vu comme un champ de vecteurs constant sur  $I \times B$ . L'ensemble  $\phi^{-1}(X)$  est alors une réunion de segments verticaux de la forme  $I \times \{z\}$ . Notons  $Z$  la projection de  $\phi^{-1}(X)$  sur  $B$ , de sorte que  $X \cap \phi(I \times B) = \phi(I \times Z)$ . Notons alors  $\tau$  l'ensemble des temps  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $\phi^{-1} \circ x(t) \in \{0\} \times Z$ . L'application  $P = \pi \circ \phi^{-1} \circ x$ , où  $\pi$  est la projection sur le second facteur, induit une bijection entre  $\tau$  et  $Z$  (rappelons que la courbe  $x$  est injective). Pour chaque  $T \in \tau$ , l'application  $\phi^{-1} \circ x$  envoie l'intervalle  $T+I$  sur le segment vertical  $I \times \{P(T)\}$ . Ces segments verticaux sont disjoints, donc leur préimages le sont aussi. Les intervalle  $T+I, T \in \tau$  sont donc disjoints, ce qui implique que  $\tau$  est dénombrable, donc  $Z$  aussi. ►

L'espace  $Z$  est alors totalement discontinu (c'est à dire que ses composantes connexes sont des points) au vu du lemme ci-dessous. Les composantes connexes de l'ensemble  $X \cap U$  sont donc les couches  $\phi^{-1}(I \times \{z\})$ . L'ensemble  $X$  n'est pas localement connexe si ce n'est pas une sous variété.

**Lemme 5.21.** *Tout espace métrique dénombrable est totalement discontinu.*

◀ Fixons en effet un point  $x_0$  et considérons la fonction  $x \mapsto d(x_0, x)$ . L'image de la composante connexe de  $x_0$  est un intervalle dénombrable, et donc un point. ►

## 5.6 Sous-variétés de dimension 1

Soit  $M$  une sous variété connexe de dimension 1 de  $\mathbb{R}^D$ . On se propose de démontrer que  $M$  est difféomorphe, soit à  $\mathbb{R}$ , soit à  $S^1$ . On considère pour ceci la sous variété  $N$  de  $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$  définie par  $N = \{(x, v) \in \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D : \|v\|_{\mathbb{R}^D} = 1\}$ , et l'application  $\sigma : N \rightarrow N$  donnée par  $(x, v) \mapsto (x, -v)$ .

**Exercice 5.3.** *Vérifier que  $N$  est une sous variété, que  $\sigma$  est un difféomorphisme, et que  $\pi : N \rightarrow M$  est un difféomorphisme local ( $\pi$  est la projection  $(x, v) \mapsto x$ ).*

On définit le champ de vecteurs  $V$  sur  $N$  par  $V(x, v) := (d\pi_{(x,v)})^{-1} \cdot v$ . C'est un champ différentiable sur  $N$  qui ne s'annule pas, et  $\sigma_* V = -V$ . Ce champ n'est peut-être pas complet, on va y remédier. On considère une fonction propre  $\tilde{f} : M \rightarrow [1, \infty)$  sur  $M$ , la composée  $f := \tilde{f} \circ \pi$  est alors une fonction propre sur  $N$ . Il existe une fonction différentiable  $\tilde{g} > 0$  telle que  $\tilde{g}|df \cdot V| \leq f$ . La fonction  $g := (\tilde{g} + \tilde{g} \circ \sigma)/2$  vérifie alors la même inégalité, donc le champ  $W := gV$  est complet, et il vérifie encore  $\sigma_* W = -W$ .

On considère le flot  $\varphi^t$  de  $W$  sur  $N$ . Pour chaque point  $y \in N$ , l'application  $t \mapsto \pi \circ \varphi^t(y)$  est un difféomorphisme local dont l'image est un ouvert de  $M$ . La connexité de  $M$  implique que ce difféomorphisme local est surjectif. Si il est aussi injectif, alors c'est un difféomorphisme donc  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Pour étudier la possible non-injectivité, on commence par remarquer que  $\varphi^t(y) \neq \sigma(y)$  pour tout  $t$ . En effet, la relation  $\sigma_* W = -W$  implique que  $\sigma \circ \varphi^{-t} = \varphi^t \circ \sigma$ . Si  $\varphi^t(y) = \sigma(y)$  alors

$$\varphi^{t/2}(y) = \varphi^{-t/2} \circ \varphi^t(y) = \varphi^{-t/2} \circ \sigma(y) = \sigma \circ \varphi^{t/2}(y),$$

ce qui est une contradiction car  $\sigma$  n'a pas de point fixe.

On a donc équivalence entre  $\pi \circ \varphi^t(y) = \pi(y)$  et  $\varphi^t(y) = y$ . L'ensemble des temps  $t$  qui satisfont cette égalité (le point  $y$  étant fixé) est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ . Si il n'est pas réduit à  $\{0\}$ , il est de la forme  $T\mathbb{Z}$ . L'application  $s \mapsto \pi \circ \varphi^{sT}(x)$  se factorise alors par un difféomorphisme entre  $S^1$  et  $M$ .

## 6 Distances sur une sous-variété

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ . On peut munir  $M$  de la distance induite par celle de  $\mathbb{R}^D$ , mais on va construire une autre distance plus géométrique.

### 6.1 La distance géométrique

**Propriété 6.1.** Une sous variété connexe  $M$  est connexe par arcs  $C^1$  (et même  $C^\infty$ ).

◀ On considère la relation *il existe une courbe  $C^1$  de  $M$  connectant  $x$  à  $y$* .

Tout point  $x \in M$  admet un voisinage  $V$  tel que tout point  $y \in V$  est relié à  $x$ . On peut prendre comme voisinage  $V$  l'image d'une boule ouverte  $B$  par un plongement  $\varphi : B \rightarrow M$  qui envoie 0 (le centre de  $B$ ) sur  $x$ . La courbe  $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(t\varphi^{-1}(y))$  relie alors  $x$  à  $y$ .

La relation est une relation d'équivalence. Prouvons la transitivité. Soit  $\gamma_1 : [0, T_1] \rightarrow M$  une courbe reliant  $x$  à  $y$  et  $\gamma_2 : [0, T_2] \rightarrow M$  une courbe reliant  $y$  à  $z$ . On peut concaténer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour former une courbe reliant  $x$  à  $z$ , mais cette courbe n'est pas forcément  $C^1$ . On résout cette difficulté en considérant une fonction  $C^1$   $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\theta'(0) = 0 = \theta'(1)$  et  $\theta' > 0$  sur  $]0, 1[$ . Les courbes  $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i(T_i\theta(t)) : [0, 1] \rightarrow M$  relient  $x$  à  $y$  et  $y$  à  $z$ , et elles vérifient de plus que  $\dot{\gamma}_i = 0$  aux extrémités. La concaténation est alors une courbe  $C^1$  reliant  $x$  à  $z$ .

Les classes d'équivalence de la relation forment une partition de  $M$  en ouverts. Comme  $M$  est connexe, il n'y a qu'une classe. ▶

On définit la longueur de la courbe  $C^1$   $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  par

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

où  $|v|$  est la norme Euclidienne du vecteur  $v \in \mathbb{R}^D$ . La longueur est invariante par reparamétrisation :

**Propriété 6.2.** Soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  une courbe  $C^1$  et  $g : [S, S'] \rightarrow [0, T]$  une fonction  $C^1$  croissante et surjective. Alors  $\mathcal{L}(\gamma \circ g) = \mathcal{L}(\gamma)$ .

La preuve est un calcul immédiat de changement de variable, utilisant que  $|g'| = g'$ .

On définit la distance géométrique

$$\delta(x, y)$$

sur  $M$  comme l'infimum des longueurs des courbes  $C^1$  joignant  $x$  à  $y$  dans  $M$ . Vérifions l'inégalité triangulaire : Soient  $x, y$ , et  $z$  trois points de  $M$  et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe des courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$  qui joignent  $x$  à  $y$  et  $y$  à  $z$  et telles que  $\mathcal{L}(\gamma_1) \leq \delta(x, y) + \epsilon$  et  $\mathcal{L}(\gamma_2) \leq \delta(y, z) + \epsilon$ . Comme dans la preuve de la propriété 6.1, on peut supposer, en reparamétrisant les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  que  $\dot{\gamma}_1(1) = 0 = \dot{\gamma}_2(0)$ . La concaténation  $\gamma_3$  de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est alors une courbe  $C^1$  qui joint  $x$  à  $z$ . On a alors

$$\delta(x, z) \leq \mathcal{L}(\gamma_3) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z) + 2\epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , donc  $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ .

On remarque, ceci sera utile plus tard, qu'une distance géométrique peut être définie sur toute partie  $X \in \mathbb{R}^D$  connexe par arcs  $C^1$ .

On note immédiatement que

$$\delta(x, y) \geq |y - x|.$$

Contrairement à la plupart des constructions que nous avons faites jusqu'à présent, la distance géométrique  $\delta$  dépend de la manière dont  $M$  est plongée dans  $\mathbb{R}^D$ , et pas seulement sa structure intrinsèque de sous-variété.

**Proposition 6.3.** Au voisinage d'un point  $x_0 \in M$ , on a

$$\delta(x, x') \leq |x' - x|(1 + \epsilon(|x' - x_0| + |x - x_0|))$$

où  $\epsilon$  est une fonction qui tend vers 0 en 0.

◀ On peut supposer que  $x_0 = 0$  et  $T_0M$  est l'espace horizontal  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ . Localement au voisinage de  $x_0$ , la variété  $M$  s'écrit donc comme le graphe d'une application  $g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$ . Notons  $\rho(r)$  un module de continuité de  $dg$  en 0, c'est à dire que  $|dg_x| \leq \rho(|x|)$ . Étant donnés deux points  $x = (y, g(y))$  et  $x' = (y', g(y'))$  avec  $x, x' \in B_{\mathbb{R}^D}(0, r)$ , on a  $y, y' \in B_{\mathbb{R}^d}(0, r)$  et, en estimant la longueur de l'arc de  $M$  au dessus du segment  $[x, x']$ ,

$$\delta(x, x') \leq \sqrt{1 + \rho(r)^2} |y' - y| \leq \sqrt{1 + \rho(r)^2} |x' - x|. \blacktriangleright$$

**Corollaire 6.4.** La distance  $\delta$  engendre sur  $M$  la même topologie que la distance Euclidienne.

**Corollaire 6.5.** Si la variété  $M$  est fermée dans  $\mathbb{R}^D$  alors elle est complète pour la distance  $\delta$ .

**Corollaire 6.6.** Pour toute partie compacte  $K$  de  $M$ , il existe une fonction  $\epsilon(r)$  qui tend vers 0 en 0 et telle que

$$\delta(x, x') \leq |x' - x|(1 + \epsilon(|x' - x|))$$

pour tous  $x$  et  $x'$  dans  $K$ .

◀ La fonction  $q(x, x') := \delta(x, x')/|x' - x|$  est continue sur  $M \times M$ , égale à 1 sur la diagonale. L'énoncé découle alors d'arguments de compacité classiques. ▶

La distance géométrique sur  $M$  possède la propriété suivante :

**Propriété 6.7.** Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de  $M$ . Si  $r_0$  et  $r_1$  sont des réels positifs tels que  $r_0 + r_1 > \delta(x_0, x_1)$ , alors  $B_\delta(x_0, r_0) \cap B_\delta(x_1, r_1)$  est non vide.

On remarquera que cette propriété n'est pas satisfaite par la distance  $\arctan(|y - x|)$  sur  $\mathbb{R}^d$ .

◀ Si  $r_0 = 0$  ou  $r_1 = 0$ , le résultat est clair, on suppose donc  $r_0 > 0$ ,  $r_1 > 0$  et on choisit  $r'_0 \in ]\delta(x_0, x_1) - r_1, \delta(x_0, x_1)[$ . Il existe alors une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  et telle que  $\mathcal{L}(\gamma) < r'_0 + r_1$ . La courbe  $\gamma$  est continue, donc continue pour la distance  $\delta$ . La fonction continue  $t \mapsto \mathcal{L}(\gamma_{[0,t]})$  prend toutes les valeurs entre 0 et  $\mathcal{L}(\gamma)$ , donc en particulier la valeur  $r'_0$ . En notant  $t_0$  un temps tel que  $\delta(x_0, \gamma(t_0)) = r'_0$ , on a

$$\begin{aligned} \delta(x_0, \gamma(t_0)) &\leq \mathcal{L}(\gamma_{[0,t_0]}) = r'_0 < r_0 \\ \delta(\gamma(t_0), x_1) &\leq \mathcal{L}(\gamma_{[t_0,1]}) = \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_{[0,t_0]}) < r'_0 + r_1 - r_0 = r_1 \end{aligned} \blacktriangleright$$

Si toutes les boules fermées d'un espace métrique sont compactes, alors il est complet. Réciproquement, pour la distance géométrique, on a :

**Théorème 6.8.** Soit  $M$  une sous-variété munie de sa distance géométrique  $\delta$ . Si  $M$  est complète pour  $\delta$ , alors toutes les boules fermées de  $M$  sont compactes.

Dans un espace métrique localement compact général, les boules fermées ne sont pas forcément toutes compactes.

Comme on le voit dans la preuve, la conclusion tient dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact  $(M, \delta)$  qui est complet et vérifie la propriété 6.7.

◀ Fixons  $x \in M$  et montrons que les boules fermées de centre  $x$  sont compactes. Pour ceci on considère le supremum  $R$  des rayons  $r > 0$  tels que la boule  $\bar{B}(x, r)$  est compacte. On veut montrer que  $R = +\infty$ , on suppose que c'est un nombre fini.

La boule  $\bar{B}(x, R)$  est compacte. Cette boule est fermée dans  $M$  complet, donc elle est complète. Pour montrer qu'elle est précompacte, on fixe  $\epsilon > 0$  et on considère une partie  $x_1, \dots, x_n$  qui est  $\epsilon/3$ -dense dans la boule compacte  $\bar{B}(x, R - \epsilon/3)$ . Cette partie est alors  $\epsilon$ -dense dans  $\bar{B}(x, R)$ . En effet pour tout  $y \in \bar{B}(x, R)$ , il existe un point  $z \in B(x, R - \epsilon/3)$  tel que  $\delta(y, z) < \epsilon/2$  (par le lemme 6.7). En choisissant  $i$  tel que  $d(x_i, z) < \epsilon/3$ , on voit que  $\delta(x_i, y) < \epsilon$ .

Il existe  $\eta > 0$  tel que la boule  $\bar{B}(x, R + \eta)$  est compacte. Comme  $M$  est localement compacte, chaque point  $y$  de  $M$  est le centre d'une boule compacte  $\bar{B}_y$ , la boule ouverte associée étant notée  $B_y$ . Les boules  $B_y, y \in \bar{B}(x, R)$  recouvrent le compact  $\bar{B}(x, R)$ , et on extrait un sous-recouvrement fini. La réunion des boules fermées correspondantes est alors un compact  $K$  qui contient  $\bar{B}(x, R)$  dans son intérieur. La distance entre  $\bar{B}(x, R)$  et le complémentaire de  $K$  est strictement positive, c'est à dire qu'il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout point  $y$  qui appartient à une boule de rayon  $2\eta$  et dont le centre est dans  $\bar{B}(x, R)$ , on a  $y \in K$ . Au vu de la propriété 6.7, on conclut que  $B(x, R + \eta) \subset K$  et donc que la boule  $\bar{B}(x, R + \eta)$  est compacte. Ceci est en contradiction avec la définition de  $R$ , on conclut que  $R$  est infini, ce qui termine la preuve. ▶

Sous les hypothèses du Théorème, les boules fermées  $\bar{B}(x_0, r_0)$  et  $\bar{B}(x_1, r_1)$ , qui sont compactes, ont une intersection non-vide dès que  $r_0 + r_1 \geq \delta(x_0, x_1)$ .

## 6.2 Géodésiques minimisantes.

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$  et  $\delta$  sa distance géométrique. On définit La longueur d'une courbe quelconque  $\gamma : [S, T] \rightarrow M$  comme le supremum

$$\mathcal{L}_\delta(\gamma) = \sup_{S=t_0 < t_1 < \dots < t_k = T} (\delta(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \delta(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)))$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des suites finies croissantes de temps intermédiaires  $S = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = T$ . On notera  $\mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S,T]})$  lorsqu'on veut préciser le domaine de la courbe. La formule définissant la longueur des courbes a un sens dans tout espace métrique  $(M, \delta)$ . On peut notamment considérer la longueur  $\mathcal{L}_d$  associée à la distance euclidienne  $d(x, x') = |x' - x|$  sur  $M$ .

Les quelques propriétés ci dessous de la longueur découlent directement de la définition :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\delta(\gamma_{[s,t]}) &\geq \delta(\gamma(s), \gamma(t)), \quad \forall s \leq t \\ \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S,T]}) &= \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S,t]}) + \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[t,T]}) \quad \forall t \in [S, T].\end{aligned}$$

**Propriété 6.9.** Si  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$  et si  $\gamma : [S, T] \rightarrow M$  est une courbe  $C^1$ , alors

$$\mathcal{L}_d(\gamma) = \mathcal{L}_\delta(\gamma) = \int_S^T |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

◀ Notons  $\mathcal{I}(\gamma)$  le temps de cette preuve le terme de droite de l'égalité. Par définition de  $\delta$ , on a

$$\delta(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \mathcal{I}(\gamma_{[s,t]})$$

pour tous  $s$  et  $t$ , et  $\mathcal{I}$  vérifie la relation de Chasles. On en conclut que  $\mathcal{I}(\gamma) \geq \mathcal{L}_\delta(\gamma)$ , et, comme  $\delta \geq d$ ,  $\mathcal{L}_\delta(\gamma) \geq \mathcal{L}_d(\gamma)$ . Réciproquement, considérons un module de continuité  $\omega$  de  $\dot{\gamma} : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^D$ . Pour tout  $[s, t] \subset [S, T]$ , on a

$$\left| |\gamma(t) - \gamma(s)| - (t-s)|\dot{\gamma}(s)| \right| \leq \left| \int_s^t \dot{\gamma}(\sigma) - \dot{\gamma}(s) d\sigma \right| \leq (t-s)\omega(t-s)$$

et

$$\left| \int_s^t |\dot{\gamma}(\sigma)| d\sigma - (t-s)|\dot{\gamma}(s)| \right| \leq (t-s)\omega(t-s)$$

donc

$$\left| \int_s^t |\dot{\gamma}(\sigma)| d\sigma - |\gamma(s) - \gamma(t)| \right| \leq 2(t-s)\omega(t-s).$$

En prenant une décomposition  $T = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  telle que  $t_{i+1} - t_i < \epsilon$ , on a donc

$$\mathcal{L}_d(\gamma) \geq |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| + \dots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| \geq \mathcal{I}(\gamma) - 2(T-S)\omega(\epsilon).$$

Comme on peut choisir  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit, on a  $\mathcal{L}_d(\gamma) \geq \mathcal{I}(\gamma)$ . ▶

**Exercice 6.1.** En utilisant le corollaire 6.6, montrer que l'égalité  $\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_\delta$  est vraie pour toute courbe continue.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une géodésique minimisante Lipschitzienne :

**Théorème 6.10.** Soit  $M$  une sous-variété fermée, munie de sa distance géométrique  $\delta$ . Étant donnés deux points  $x_0$  et  $x_1$ , il existe une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  qui est Lipschitz de constante  $\delta(x_0, x_1)$ , et telle que  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ . Cette courbe est donc de longueur  $\delta(x_0, x_1)$ .

La preuve qui suit montre en fait le résultat dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact et complet  $(M, \delta)$  vérifiant la propriété 6.7.

◀ Posons  $L = \delta(x_0, x_1)$ . En utilisant la Propriété 6.7 et le Théorème 6.8, on voit que l'intersection  $\bar{B}(x_0, L/2) \cap \bar{B}(x_1, L/2)$  est non vide, et on choisit un point  $\gamma(1/2)$  dans cette intersection. On a alors  $\delta(x_0, \gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2), x_1) = L/2$ .

On construit ainsi des points  $\gamma(1/4)$  et  $\gamma(3/4)$  tels que

$$\delta(x_0, \gamma(1/4)) = \delta(\gamma(1/4), \gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2), \gamma(3/4)) = \delta(\gamma(3/4), x_1) = L/4.$$

Par récurrence, on construit ainsi une application  $\gamma$  définie sur l'ensemble des nombres dyadiques de  $[0, 1]$ , à valeur dans  $M$ , et  $L$ -Lipschitz. On l'étend alors par continuité en une courbe  $L$ -Lipschitz de  $[0, 1]$  dans  $M$  telle que  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma(1) = x_1$ . Comme la courbe  $\gamma$  est  $L$ -Lipchitz, il est immédiat que sa longueur est inférieure ou égale à  $L$ . Comme  $\delta(x_0, x_1) = L$ , et que  $\gamma$  relie  $x_0$  à  $x_1$ , on conclut que  $\mathcal{L}(\gamma) = L$ . ▶

La géodésique minimisante est en fait différentiable, mais c'est une autre histoire.

### 6.3 Métriques Riemanniennes

Dans les sections précédentes, nous avons utilisé la distance ambiante de  $\mathbb{R}^D$  pour définir une distance géométrique sur la sous variété  $M$ . En fait, ce qui était utile pour mesurer la longueur d'une courbe est la donnée, pour chaque point  $x$  de  $M$ , d'un norme sur  $T_x M$ , nous avons pris comme norme la restriction de la norme Euclidienne de  $\mathbb{R}^D$  à  $T_x M$ .

On aurait aussi pu se donner une métrique Riemannienne quelconque :

**Définition 6.11.** Une métrique Riemannienne sur une sous variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'un produit scalaire  $g_x(v, w)$  sur l'espace vectoriel  $T_x M$ . On demande de plus que ce produit scalaire dépende différentiablement du point  $x$ , c'est à dire que la fonction  $x \mapsto g_x(V(x), W(x))$  est différentiable pour tous champs de vecteurs différentiables  $V$  et  $W$ .

**Exercice 6.2.** Si  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ , et si  $g_x$  est une métrique Riemannienne sur  $M$ , alors il existe une application différentiable  $G : M \rightarrow S^+(D)$  (l'ensemble des matrices symétriques définies positives  $D \times D$ ) telle que  $g_x(v, w) = \langle G(x)v, w \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^D$ .

Étant donnée une métrique Riemannienne  $g_x$  sur  $M$ , on définit comme ci-dessus la longueur d'une courbe de  $M$  par

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

puis la distance  $\delta_g$  donnée comme l'infimum des longueurs des courbes. Cette distance vérifie la propriété 6.7, et donc les Théorèmes 6.8 et 6.10.

On dit que la métrique  $g$  est complète si  $M$  est complète pour la distance géodésique associée. La métrique Riemannienne naturelle sur une sous-variété fermée est complète. Nous montrerons plus tard que toute (sous) variété admet un plongement dans un espace  $\mathbb{R}^D$  dont l'image est fermée, et donc une métrique Riemannienne complète. Cependant, il existe aussi des métriques non complètes (sauf sur une variété compacte).

**Exercice 6.3.** Soit  $g_x$  une métrique Riemannienne sur une sous-variété  $M$ . Montrer qu'il existe une fonction différentiable  $f$  à valeurs strictement positives telles que  $f g$  est une métrique complète.

◀ On munit dans un premier temps la sous-variété  $M$  de la distance  $d$  associée à  $g$ . On considère la fonction  $R(x)$  définie comme le supréum des rayons  $r > 0$  tels que la boule fermée  $\bar{B}(x, r)$  est compacte. On rappelle que la fonction  $x \mapsto R(x)$  est 1-Lipschitz. On considère alors une fonction différentiable  $f$  telle que  $f(x) > 1/R(x)$ , on note  $g' = f^2 g$  et  $d'$  la distance associée,  $B'$  les boules associées.

Montrons que la boule fermée  $\bar{B}'(x, 1/3)$  est contenue dans la boule fermée  $\bar{B}(x, R(x)/2)$ . En effet, si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est une courbe, alors

$$L_{g'}(\gamma) = \int_0^1 f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt \geq \frac{L_g(\gamma)}{\max R(\gamma(t))} \geq \frac{L_g(\gamma)}{R(\gamma(0)) + L_g(\gamma)}.$$

En conséquence, si  $L_{g'}(\gamma) < 1/3$ , alors  $L_g(\gamma) < R(\gamma(0))/2$ . On conclut que la boule fermée  $\bar{B}'(x, 1/4)$  est contenue dans la boule  $B(x, R(x)/2)$ , elle est donc compacte. Toutes les boules fermées de  $d'$  de rayon  $1/4$  sont compactes, donc  $d'$  est complète. ▶

**Exercice 6.4.** Soit  $X(t, x)$  un champ de vecteurs non autonome sur une sous-variété  $M$ . Supposons qu'il existe une métrique complète sur  $M$  et une constante  $C$  telle que  $|X(t, x)| \leq C$  pour tout  $(t, x)$ . Montrer que le flot de  $X$  est complet.

Exemple, la métrique  $g_x(v, w) = \langle v, w \rangle / (1 + |x|)^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  est complète. L'hypothèse ci-dessus dans cette métrique correspond à l'inégalité classique  $|X(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ .

### 6.4 Feuilles et feuilletages

Soit  $M$  une sous variété. Un champ de sous-espaces est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'un sous-espace vectoriel  $E(x)$  de  $T_x M$  de dimension  $k$  fixée qui dépend régulièrement du point  $x$ , c'est à dire que l'application  $x \mapsto E(x)$  est régulière à valeurs dans  $G(k, D_M)$ . Il est équivalent de dire que le champ de sous-espaces est localement engendré par  $k$  champs de vecteurs réguliers (cette seconde définition ayant l'avantage de ne pas faire explicitement référence à l'espace ambiant).

On dit que le champ de sous espaces  $E(x)$  est intégrable si il satisfait la propriété de redressement suivante :

Pour tout  $x \in M$ , il existe une paramétrisation  $\phi : (B^k \times B^l, 0) \longrightarrow (M, x)$ , où  $B^k$  et  $B^l$  sont des boules ouvertes centrées en 0 dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$ , telle que

$$E(\phi(y)) = d\phi_y(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

pour tout  $y \in B^k \times B^l$ . Une telle paramétrisation est appelée un redressement du champ de sous-espaces.

On dit alors que le champ  $E(x)$  engendre un feuilletage. Le théorème de redressement des champs de vecteurs affirme que les champs de droites (champs de sous-espaces de dimension 1) engendrent tous des feuilletages, on verra que ce n'est pas le cas en dimension supérieure.

Étant donné un point  $x \in M$ , on appelle orbite de  $x$  l'ensemble  $X$  des points qui peuvent être reliés à  $x$  par une courbe tangente au champ de sous-espace. Dans le cas où le sous-espace est de dimension un, et où il est engendré par un champ de vecteurs  $V(x)$  ne s'annulant pas, l'orbite  $X$  est l'image de la solution maximale de l'équation différentielle associée à  $\dot{x} = V \circ x$  issue du point  $x$ .

Le résultat suivant généralise la propriété 5.20 à ce cadre.

**Propriété 6.12.** *Supposons que le champ  $E(x)$  est intégrable. Pour tout  $x_0 \in M$  et tout redressement  $\phi$  de  $E$  en  $x_0$ , il existe une partie dénombrable  $Z \subset B^l$  telle que*

$$\phi^{-1}(X(x_0)) = B^k \times Z.$$

◀ La préimage  $\phi^{-1}(X)$  d'une orbite  $X$  est de la forme  $B^k \times Z$ , il faut montrer que  $Z$  est dénombrable. On munit l'orbite  $X$  de sa distance géométrique  $\delta(x, y)$  définie comme l'infimum des longueurs des courbes tangentes au champ de sous-espaces joignant  $x$  à  $y$ .

**Lemme 6.13.** *Pour tout  $z \in Z$ , l'application*

$$\phi_z : B^k \ni y \longmapsto \phi(y, z) \in (X, \delta),$$

*est un homéomorphisme sur son image  $\phi(B^k \times \{z\})$ , qui est un ouvert de  $(X, \delta)$ .*

On déduit de ce lemme que  $(X, \delta)$  est localement compact. Comme deux points de  $X$  sont reliés par une courbe tangente au champ de sous-espaces, et qu'une telle courbe est continue pour la distance  $\delta$ , l'espace métrique  $(X, \delta)$  est connexe. L'espace métrique  $(X, \delta)$  étant connexe et localement compact, il est séparable (voir la section 4). Finalement, les ouverts  $\phi(B^k \times \{z\})$ ,  $z \in Z$  de  $(X, \delta)$  étant disjoints,  $Z$  est dénombrable. ▶

◀ **DÉMONSTRATION DU LEMME 6.13.** On fixe  $z \in Z$  et on pose  $U = \phi(B^k \times \{z\})$ , c'est un disque plongé dans  $\mathbb{R}^{D_M}$ . Soit  $\delta_U$  la distance géométrique sur  $U$ , on a

$$\delta_U \geq \delta \geq d$$

où  $d$  est la distance Euclidienne de  $\mathbb{R}^D$ . L'inégalité  $\delta_U \geq \delta$  découle de l'observation que toute courbe  $C^1$  sur  $U$  est tangente au champ de sous-espaces. La proposition 6.3 implique que  $\delta_U$  et  $d$  (et donc aussi  $\delta$ ) engendrent la même topologie sur  $U$ . Comme l'application  $\phi_z$  est un homéomorphisme à valeurs dans  $(U, d)$ , c'est un homéomorphisme à valeurs dans  $(U, \delta)$ .

Il reste à démontrer que  $U$  est un ouvert de  $(X, \delta)$ . Pour tout  $x_1 = \phi(y_1, z) \in U$ , il existe  $R > 0$  tel que  $\bar{B}^k(y_1, R) \subset B^k$ . Soit  $S$  l'image par  $\phi_z$  de la sphère  $\partial \bar{B}^k(y_1, R)$ , c'est un compact de  $U$  disjoint de  $x_1$ . Posons  $r = \delta(x_1, S)$ . Toute courbe qui sort de  $\phi_z(\bar{B}^k(y_1, R))$  coupe  $S$ , et donc a une longueur supérieure à  $r$ . En conséquence

$$B_\delta(x_0, r) \subset \partial \bar{B}^k(y_0, R) \subset U. \blacktriangleright$$

On utilisera la généralisation suivante du Lemme, qui découle de la même preuve :

**Lemme 6.14.** *Soit  $X \subset \mathbb{R}^D$  une partie connexe par arcs  $C^1$ , et soit  $\delta$  la distance géométrique sur  $X$  (c'est à dire que  $\delta(x, x')$  est défini comme l'infimum des courbes  $C^1$  sur  $X$  joignant  $x$  à  $x'$ ). Soit  $U$  une boule plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , de dimension  $d$ , qui est contenue dans  $X$  et a la propriété suivante : Pour toute courbe  $\gamma : ]0, 1[ \longrightarrow X$  sur  $X$  de classe  $C^1$ , l'ensemble  $\gamma^{-1}(U)$  est ouvert. Alors  $U$  est un ouvert de  $X$ , et les distances  $\delta_U$  (distance géométrique sur  $U$ ),  $\delta$  et  $d$  (distance de l'espace ambiant) engendrent la même topologie sur  $U$ . En particulier,  $(U, \delta)$  est homéomorphe à une boule ouverte de dimension  $d$  munie de sa topologie standard.*

La structure des feuilletages conduit à la définition générale ci-dessous :

**Définition 6.15.** *Soit  $M$  une sous variété et  $X$  une partie de  $M$ . On dit que  $X$  est une feuille (de dimension  $k$ ) si, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une paramétrisation  $\phi : (B^k \times B^l, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  de  $M$  en  $x_0$  telle que  $\phi^{-1}(X) = B^k \times Z$  avec  $Z$  totalement discontinu.*

Toute orbite d'un feuilletage est une feuille.

On appelle les paramétrisations de la définition des redressement locaux de la feuille  $X$ . Si  $\phi$  et  $\varphi$  sont deux redressements de  $X$  en un même point  $x_0$ , alors  $\phi^{-1} \circ \varphi(B^k \times \{0\}) \subset B^k \times \{0\}$  donc  $d\phi_0(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Il est donc légitime de dire que ce sous-espace de  $T_{x_0}M$  est l'espace tangent à la feuille  $X$  au point  $x_0$ .

Bien que les feuilles ne soient en général pas des sous-variétés, un certain nombre de concepts définis sur les sous-variétés s'étendent au cas des feuilles, on a vu que c'est le cas de la dimension et de l'espace tangent.

Soit  $X$  une feuille de  $M$ , et  $Y$  une sous-variété. Une application  $h : Y \rightarrow X$  est dite différentiable si elle est différentiable en tant qu'application à valeurs dans  $M$ . Une application  $g : X \rightarrow N$  est dite différentiable si  $g \circ h$  est différentiable pour tout sous-variété  $Y$  et toute application différentiable  $h : Y \rightarrow X$ . De manière équivalente,  $g$  est différentiable si et seulement si, pour tout  $x_1 \in X$ , il existe un redressement  $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \rightarrow (M, x_1)$  de  $X$  en  $x_1$  tel que la restriction de  $f \circ \phi$  à  $B^k \times \{0\}$  est différentiable. Une application différentiable  $h : X \rightarrow Y$  a une différentielle  $d_x h \in \mathcal{L}(T_x X, T_{h(x)} Y)$  en chaque point  $x \in X$ . On dit que c'est une immersion si  $d_x h$  est injective pour tout  $x$ .

Attention, quand on munit  $X$  de la topologie induite de celle de  $M$ , une fonction différentiable sur  $X$  au sens ci-dessus n'est pas forcément continue!

Pour résoudre cette difficulté, on considère la distance géométrique  $\delta$  sur une feuille connexe  $X$ . La topologie associée à  $\delta$  est plus fine que la topologie induite de celle de  $M$ . Une application  $f : M \rightarrow Y$  ( $Y$  un espace métrique) est continue pour la distance  $\delta$  si et seulement si pour tout  $x_1 \in X$ , il existe un redressement  $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \rightarrow (M, x_1)$  de  $X$  en  $x_1$  tel que la restriction de  $f \circ \phi$  à  $B^k \times \{0\}$  est continue. En particulier, les fonctions différentiables sur  $X$  sont continues pour la distance  $\delta$ .

**Exercice 6.5.** *La feuille  $X$  est une sous-variété si et seulement si la topologie associée à  $\delta$  est égale à la topologie induite (sinon, elle est strictement plus fine).*

Au vu du lemme 6.14 toute feuille connexe (munie de sa distance géométrique) est localement homéomorphe à une boule ouverte de dimension  $k$ , donc localement compacte et donc séparable. Dans le cas d'une feuille connexe, l'ensemble transverse  $Z$  est donc dénombrable pour tout redressement local. L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions différentiables sur une feuille connexe  $X$  vérifie les conditions de la proposition 4.14, il existe donc des partitions de l'unité différentiables, et il existe une fonction différentiable propre (pour la distance  $\delta$ ) sur  $X$ .

**Proposition 6.16.** *Soit  $X$  une feuille connexe de  $M$ . Il existe une unique structure de sous-variété  $I : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui est une immersion injective différentiable en tant qu'application sur  $X$ .*

*Plus explicitement, il existe une immersion  $I : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $I(X)$  est une sous-variété et telle que l'application  $I$  est différentiable sur la feuille  $X$ . Si  $I' : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une autre immersion ayant les mêmes propriétés, alors  $I' \circ I^{-1}$  est un difféomorphisme entre les sous-variétés  $I(X)$  et  $I'(X)$ .*

◀ Soit  $\mathbb{R}^D$  l'espace ambiant de  $M$ , et soit  $f$  une fonction différentiable propre. On considère l'application  $I(x) = (x, f(x)) : M \rightarrow \mathbb{R}^{D+1}$ . Cette application est une immersion (au sens des feuilles). Elle est continue et propre pour la distance  $\delta$ , c'est donc un homéomorphisme de  $(X, \delta)$  sur son image. Si  $x_0$  est un point de  $X$  et  $\phi : B^k \times B^{d-k} \rightarrow M$  un redressement de  $X$  en  $x_0$ , alors la restriction de  $I \circ \phi$  à  $B^k \times \{0\}$  est un plongement dont l'image est un ouvert de  $I(X)$  contenant  $I(x_0)$ . Ceci montre que  $I(X)$  est une sous-variété au voisinage de  $x_0$ .

Soit  $I' : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une autre immersion différentiable dont l'image est une sous-variété. Pour tout redressement  $\phi$  de  $X$ , la restriction de  $I'$  à  $\phi(B^k \times \{0\})$  est une immersion différentiable au sens classique, donc un difféomorphisme local à valeurs dans la variété  $I'(X)$ . Ce difféomorphisme local étant de plus injectif, c'est un difféomorphisme sur son image. L'inverse  $J' : I'(X) \rightarrow X \subset M$  de  $I'$  est donc différentiable. L'application  $I \circ J'$  l'est donc aussi. Par symétrie, il en est de même de  $I^{-1} \circ I'$ , qui est donc un difféomorphisme. ►

On a démontré aussi l'énoncé suivant :

**Proposition 6.17.** *Soit  $X$  une feuille connexe. Il existe une sous-variété connexe  $N$  et une immersion injective  $J : N \rightarrow M$  d'image  $X$ . Si  $J' : N' \rightarrow M$  est une autre immersion injective d'image  $X$ , alors  $J^{-1} \circ J'$  est un difféomorphisme.*

## 6.5 Théorème de l'orbite

Considérons maintenant un champ de sous-espaces  $E(x)$  de dimension constante  $m$  d'une sous-variété  $M$ , sans hypothèse d'intégrabilité. Pour chaque  $x_0 \in M$ , on considère comme ci-dessus l'orbite  $X(x_0)$ , c'est à dire l'ensemble des points de  $M$  qui peuvent être reliés à  $x_0$  par une courbe  $C^1$  tangente à  $E$ . On a, et c'est plus surprenant, un résultat assez semblable au cas intégrable, la différence principale étant que la dimension de l'orbite peut être supérieure à la dimension  $m$  des espaces  $E$ .

**Théorème 6.18.** *Supposons que  $E(x)$  est de dimension constante  $m$ . Pour tout  $x_0 \in M$ , l'orbite  $X(x_0)$  est une feuille connexe de dimension supérieure ou égale à  $m$ .*

Présentons maintenant un point de vue légèrement différent. On considère une famille  $\mathcal{V}$  de champs de vecteurs complets sur  $M$ , et on note  $\mathcal{G}$  le groupe de difféomorphismes de  $M$  engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{V}$ . Tout élément de  $\mathcal{G}$  est donc de la forme

$$g = \varphi_n^{t_n} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}$$

où  $\varphi_i^{t_i}$  sont des flots d'éléments de  $\mathcal{V}$ . Pour tout  $x \in M$ , on note  $\mathcal{G}(x)$  l'ensemble  $\{g(x), g \in \mathcal{G}\}$ . On a la version suivante du théorème précédent :

**Théorème 6.19.** *Pour tout  $x_0 \in M$ , l'orbite  $\mathcal{G}(x_0)$  est une feuille connexe de  $M$ . L'espace tangent de  $\mathcal{G}(x_0)$  en chacun de ses points  $x_1$  contient les évaluations  $V(x_1)$  des champs  $V \in \mathcal{V}$  en  $x_1$ .*

Le théorème 6.19 implique le théorème 6.18. En effet, si  $E(x)$  est un champ de sous espaces sur  $M$ , on définit la famille  $\mathcal{V}_E$  des champs de vecteurs de  $M$  à support compact tangents à  $E$  (c'est à dire que  $V(x) \in E(x)$  pour tout  $x$ ). On note  $\mathcal{G}_E$  le groupe de difféomorphismes de  $M$  engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{V}_E$ . Pour tout  $x_0 \in M$ , on a  $\mathcal{G}_E(x_0) \subset X(x_0)$ , la réunion des courbes  $C^2$  tangentes à  $E$  et passant par  $x_0$ . En utilisant le théorème 6.19, montrons que  $\mathcal{G}_E(x_0) = X(x_0)$ , ce qui donne le théorème 6.18.

On doit montrer que toute courbe  $\gamma : ]-1, 1[ \rightarrow M$  de classe  $C^2$  et tangente à  $E$  est contenue dans une  $\mathcal{G}$ -orbite. Par un argument de connexité, il suffit de montrer que tout  $s_1 \in ]-1, 1[$  admet un voisinage sur lequel  $\gamma(s) \in \mathcal{G}(\gamma(s_1))$ . Posons  $x_1 = \gamma(s_1)$  et considérons un redressement local  $\phi$  de  $\mathcal{G}(x_1)$  au point  $x_1$ . Posons

$$F(x) := (d\phi_x)^{-1} \cdot E(\phi(x)),$$

on a  $F(x) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$  pour tout  $x \in \phi^{-1}(\mathcal{G}(x_1))$ . On considère  $m$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  sur  $B^k \times B^l$  dont les évaluations en tout point  $x$  proche de  $x_1$  forment une base de  $F(x)$ . Comme la courbe  $\gamma$  est tangente à  $E$ , il existe des fonctions  $f_1, \dots, f_m$  de classe  $C^1$  telles que

$$(\phi^{-1} \circ \gamma)'(s) = \sum f_i(s) X_i(\phi^{-1} \circ \gamma(s))$$

au voisinage de  $s_1$ . En définissant  $X(s, x) := \sum f_i(s) X_i(x)$ , on constate que :

- La courbe  $\theta := \phi^{-1} \circ \gamma$  est, localement au voisinage de  $s_1$ , une solution de l'équation différentielle  $\dot{\theta}(s) = X(s, \theta(s))$ .
- Le champ de vecteurs dépendant du temps  $X(s, x)$  est tangent à  $B^k \times \{0\}$ .
- Le point  $\theta(s_1)$  est contenu dans  $B^k \times \{0\}$ .

On conclut par le lemme 5.7 que la courbe  $\theta(s)$  est, localement au voisinage de  $s_1$ , contenue dans  $B^k \times \{0\}$ , et donc que la courbe  $\gamma$  est localement contenue dans  $\mathcal{G}(x_0)$  (le champ  $X(s, x)$  vérifie précisément les hypothèses de régularité nécessaires). On a démontré que  $X(x_0) = \mathcal{G}_E(x_0)$ , et donc déduit le théorème 6.18 du théorème 6.19. ►

L'exemple suivant montre qu'il faut être prudent dans les énoncés : On se donne une fonction  $f$  nulle sur  $(-\infty, 0]$  et positive sur  $]0, \infty)$ , et on considère la famille  $\mathcal{V}$  de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  formée par les deux champs  $V_1(x) = e_1$  et  $V_2(x) = f(x_2)e_2$ . L'espace vectoriel  $E(x)$  engendré par ces deux champs est  $\mathbb{R}e_1$  si  $x_2 \leq 0$  et c'est  $\mathbb{R}^2$  si  $x_2 > 0$ . Les  $\mathcal{G}$ -orbites sont les droites horizontales  $x_2 = c, c \leq 0$  et l'ouvert  $\{x_2 > 0\}$ , ce sont des sous variétés. Cependant, l'ensemble  $X(0)$  des points atteignables depuis l'origine par une courbe  $C^1$  tangente à  $E$  est l'ensemble  $\{x_2 \geq 0\}$ , il ne satisfait pas la conclusion des énoncés ci-dessus, et n'est pas égal à  $\mathcal{G}(0)$ .

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.19.** Soit  $\mathcal{W}$  l'espace des champs de vecteurs de la forme  $g_*V, V \in \mathcal{V}, g \in \mathcal{G}$ . On a donc  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ , mais il n'y a pas nécessairement égalité.

**Lemme 6.20.** *Les champs de vecteurs de  $\mathcal{W}$  sont complets et leurs flots appartiennent à  $\mathcal{G}$ .*

◀ Soit  $W = g_*V$  un élément de  $\mathcal{W}$ . Si  $\varphi^t$  est le flot de  $V$ , alors le flot de  $W$  est  $\psi^t = g \circ \varphi^t \circ g^{-1}$ . C'est donc un élément de  $\mathcal{G}$ . ►

Notons  $H(x)$  le sous-espace de  $T_x M$  engendré par les vecteurs  $W(x), W \in \mathcal{W}$ . Les champs de  $\mathcal{W}$  et donc ceux de  $\mathcal{V}$ , sont tangents à  $H$ . La dimension de  $H(x)$  n'est pas forcément constante. Cependant :

**Lemme 6.21.** *Le champ de sous-espaces  $H$  est invariant par  $\mathcal{G}$ , c'est à dire que  $dg_x \cdot H(x) = H(g(x))$  pour tout  $x \in M$  et  $g \in \mathcal{G}$ . En particulier, la dimension de  $H(x)$  est constante le long des  $\mathcal{G}$ -orbites.*

◀ Soient  $x \in M$  et  $g \in \mathcal{G}$ . Soient  $W_1, \dots, W_k$  une famille d'éléments de  $\mathcal{W}$  telle que les vecteurs  $W_i(x), 1 \leq i \leq k$  forment une base de  $H(x)$ . Alors, les champs  $g_*W_i$  sont des éléments de  $\mathcal{W}$ , donc  $(g_*W_i)(g(x)) = dg_x \cdot W_i(x) \in$

$H(g(x))$  pour tout  $i$ . On conclut que  $dg_x \cdot H(x) \subset H(g(x))$ . On obtient l'inclusion réciproque en appliquant la même remarque au point  $g(x)$  avec le difféomorphisme  $g^{-1}$ . ►

Fixons un point  $x_1 \in \mathcal{G}(x_0)$ , et considérons un plongement  $J : (B^l, 0) \rightarrow (M, x_1)$  transverse à  $H(x_1)$  (c'est à dire que  $dJ_0(\mathbb{R}^l) \oplus H(x_1) = T_{x_1}M$ ) d'une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^l$  dans  $M$ . On considère des champs de vecteurs  $W_1, \dots, W_k$  de  $\mathcal{W}$  dont les évaluations en  $x_0$  constituent une base de  $H(x_0)$ . On note  $\varphi_i^t$  les flots associés. L'application

$$\phi : \mathbb{R}^k \times B^l \ni (t_1, \dots, t_k, z) \mapsto \varphi_k^{t_k} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1} \circ J(z)$$

est un difféomorphisme local en  $(0, 0)$ , car

$$\partial_t \phi(0, z) \cdot (s_1, \dots, s_k) = \sum_i s_i W_i(J(z)).$$

Quitte à restreindre  $B^l$ , on suppose donc que c'est un plongement de  $B^k \times B^l$  dans  $M$ , où  $B^k$  est une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^k$  centrée en 0.

La préimage  $\phi^{-1}(\mathcal{G}(x_0))$  est une réunion de boules horizontale, c'est à dire de la forme  $B^k \times Z$  avec  $Z \subset B^l$ . Il reste à montrer que  $Z$  est dénombrable.

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des courbes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  ayant la propriété suivante : Il existe un point  $x \in M$ , un entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  fonctions  $\tau_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , et  $n$  champs de vecteurs  $W_i, 1 \leq i \leq n$  de  $\mathcal{W}$  tels que

$$\gamma(s) = \varphi_n^{\tau_n(s)} \circ \dots \circ \varphi_1^{\tau_1(s)}(x)$$

en notant  $\varphi_i^t$  le flot de  $W_i$ . L'orbite  $\mathcal{G}(x_0)$  est la réunion des (images des) courbes de  $\mathcal{C}$  passant par  $x_0$ .

On munit chaque  $\mathcal{G}$ -orbite de la distance  $\delta(x, y)$  définie comme l'infimum des longueurs des courbes de  $\mathcal{C}$  joignant  $x$  à  $y$ .

**Propriété 6.22.** *Les courbes de  $\mathcal{C}$  sont tangentes au champ de sous-espaces  $H(x)$ .*

◀ On a la formule  $\frac{d}{dt}(g \circ \varphi_V^t(x)) = (g_*V)(g \circ \varphi_V^t(x))$  pour tout difféomorphisme  $g$  et tout champ de vecteurs  $V$ . Considérons la courbe

$$\gamma(s) = \varphi_n^{\tau_n(s)} \circ \dots \circ \varphi_1^{\tau_1(s)}(x)$$

ou  $\varphi_i^t$  est le flot d'un champ  $W_i \in \mathcal{W}$ . On obtient pour sa dérivée la somme

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{i=1}^n \tau_i'(s) ((g_i)_* W_i)(\gamma(s))$$

où  $g_i$  est le difféomorphisme  $\varphi_n^{\tau_n(s)} \circ \dots \circ \varphi_{i+1}^{\tau_{i+1}(s)}$ . Comme chacun des champs  $(g_i)_* W_i$  appartient à  $\mathcal{W}$ , on en conclut que  $\dot{\gamma}(s) \subset H(\gamma(s))$ . ►

On obtient en particulier que

$$d\phi_{\phi^{-1}(x)} \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset H(x)$$

pour tout  $x \in \phi(B^k \times B^l)$  et cette inclusion est une égalité lorsque  $x \in \mathcal{G}(x_0)$ , puisque les deux espaces ont alors la même dimension.

**Propriété 6.23.** *Soit  $\gamma$  une courbe de  $\mathcal{C}$  passant par  $x_0$ . Alors la courbe  $\theta$  sur  $B^l$  définie par  $\theta := \pi_{B^l} \circ \phi^{-1} \circ \gamma$  est localement constante sur son domaine de définition (qui n'est pas forcément connexe).*

◀ Soit  $V \subset [0, 1]$  le domaine de  $\phi^{-1} \circ \gamma$ . La courbe  $\gamma$  est contenue dans l'orbite de  $x_0$ , donc

$$d(\phi^{-1})_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) \subset d(\phi^{-1})_{\gamma(t)} \cdot H(\gamma(t)) = \mathbb{R}^k \times 0$$

pour tout  $t \in V$ , c'est à dire que  $\dot{\theta} = 0$  en chaque point de son ouvert de définition. ►

**Propriété 6.24.** *Pour chaque  $z \in Z$ , la restriction de  $\phi$  à  $B^k \times \{z\}$  est un homéomorphisme sur son image  $U_z$ , munie de la distance  $\delta$ . La boule plongée  $U_z$  est de plus un ouvert de  $(X, \delta)$ .*

◀ C'est une variante des Lemmes 6.13 et 6.14, qui se démontre exactement de la même façon. On ne peut toutefois pas appliquer directement ce dernier, car l'ensemble  $\mathcal{C}$  des courbes utilisées pour définir la distance est a priori plus petit que l'ensemble des courbes contenues dans l'orbite (à posteriori, c'est le même). ►

L'espace  $(\mathcal{G}(x_0), \delta)$  est donc localement compact. Il est connexe car les courbes de  $\mathcal{C}$  sont continues à valeurs dans  $(\mathcal{G}(x_0), \delta)$ , il est donc séparable. Les ouverts  $U_z$  sont disjoints dans cet espace séparable, donc  $Z$  est dénombrable. Ceci termine la preuve du Théorème 6.19. ►

## 7 Variétés

### 7.1 Première définition

Soit  $M$  un espace métrique (ou plutôt un espace topologique métrisable). On dit que  $M$  est une variété topologique de dimension  $d$  si il est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^d$ . On appelle carte topologique de  $M$  tout homéomorphisme entre un ouvert  $U$  de  $M$  et un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Une famille  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \alpha \in A$  de cartes de  $M$  est un atlas  $C^r$  si les applications

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont  $C^r$  et si les domaines  $U_\alpha$  recouvrent  $M$ . Notons que les ensembles  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  sont des ouverts de  $V_\alpha$ , donc de  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 7.1.** Une variété de classe  $C^r$  est un espace métrique  $M$  muni d'un atlas  $C^r$ .

Les applications  $C^k, k \leq r$  entre variétés  $C^r$  sont les applications  $C^k$  dans les cartes. Plus précisément, si  $M$  et  $N$  sont deux variétés munies de leurs atlas  $(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A$  et  $(V_\beta, \psi_\beta), \beta \in B$ , l'application  $f : M \rightarrow N$  est dite  $C^k$  si  $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$  est  $C^k$  sur son domaine  $\phi_\alpha(U_\alpha)$  pour tous  $\alpha$  et  $\beta$ . Comme  $(\phi_\alpha)$  et  $(\psi_\beta)$  sont des atlas, il suffit de vérifier que, pour tout  $x$ , il existe  $\alpha \in A$  et  $\beta \in B$  tels que  $x \in U_\alpha, f(x) \in V_\beta$ , et  $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$  est  $C^k$  au voisinage de  $\phi_\alpha(x)$ .

Nous appellerons carte  $C^r$  de la variété  $M$  tout couple  $(U, \phi)$ , où  $\phi$  est un plongement différentiable dans  $\mathbb{R}^d$ . L'ensemble des cartes  $C^r$  est un atlas  $C^r$  qui contient l'atlas initial de  $M$ .

Toute sous variété  $M$  de  $\mathbb{R}^D$  est naturellement munie d'une structure de variété dont les cartes sont les difféomorphismes entre des ouverts de  $M$  et des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ .

Toute variété différentiable est localement compacte et localement connexe. Elle est donc paracompacte et admet des partitions de l'unité  $C^\infty$ , voir l'exercice 4.2. Toute variété séparable admet une fonction propre  $C^\infty$ . Les composantes connexes d'une variété sont séparables.

**Exercice 7.1.** Considérons deux atlas  $A$  et  $B$  sur l'espace topologique métrisable  $M$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes (on dit que les deux atlas sont équivalents, ou qu'ils engendrent la même structure de variété  $C^r$  sur  $M$ ) :

- La réunion de  $A$  et  $B$  est un atlas  $C^r$ .
- l'identité est un difféomorphisme de  $(M, A)$  dans  $(M, B)$ .
- Les éléments de  $A$  sont des cartes de  $(M, B)$
- Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , l'espace  $C_A^r(U)$  des fonctions  $C^r$  sur  $U$  pour l'atlas  $A$  est égal à l'espace  $C_B^r(U)$ .

### 7.2 Seconde définition

Soit  $M$  un ensemble (a priori sans structure) et soit  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \alpha \in A$  une famille d'applications bijectives, où les  $U_\alpha$  sont des parties de  $M$  qui recouvrent  $M$  et les  $V_\alpha$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . On dit que les applications  $\phi_\alpha$  forment un atlas  $C^r$  si chacun des ensembles  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), (\alpha, \beta) \in A^2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et si chacune des applications

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^d \supset \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

est  $C^r$ .

**Définition 7.2.** Une pré-variété de classe  $C^r$  est un ensemble  $M$  muni d'un atlas  $C^r$ .

Il existe alors une unique topologie sur  $M$  telle que les applications  $\phi_\alpha$  sont des homéomorphismes, c'est la topologie dont les ouverts sont les parties  $U$  de  $M$  telles que  $\phi(U \cap U_\alpha)$  est ouvert (dans  $\mathbb{R}^d$ ) pour tout  $\alpha$ .

On remarque que les domaines  $U_\alpha$  sont des ouverts pour cette topologie. De plus, si  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , alors l'ensemble  $\phi_\alpha^{-1}(V)$  est ouvert pour tout  $\alpha$ . En effet, pour tout  $\beta$ ,

$$\phi_\beta(\phi_\alpha^{-1}(V)) = (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(V \cap \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$$

est ouvert puisque  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  est un difféomorphisme. Les applications  $\phi_\alpha$  sont donc continues. La continuité des applications réciproques est claire.

La topologie de  $M$  associée à l'atlas  $\phi_\alpha$  est séparée, mais elle n'est pas nécessairement métrisable.

**Propriété 7.3.** Une variété ( $C^r$ ) est une pré-variété ( $C^r$ ) dont la topologie sous-jacente est métrisable.

La littérature utilise souvent le terme variété pour ce que nous avons appelé pré-variété. La proposition 4.14 implique que toute pré-variété paracompacte admet des partitions de l'unité différentiables. Au vu de la Proposition 4.13, on conclut que pour toute pré-variété paracompacte et connexe  $M$ , il existe une fonction différentiable propre  $f : M \rightarrow [1, \infty)$ . On verra ci-dessous qu'une pré-variété paracompacte est une variété.

### 7.3 Plongement

On montre ici que la notion de variété n'est pas vraiment plus générale que la notion de sous variété :

**Théorème 7.4** (Whitney). *Pour toute variété  $C^\infty$  séparable  $M$ , il existe un plongement  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ , de classe  $C^\infty$ , dont la première composante est propre. Son image  $F(M)$  est donc une sous variété fermée de  $\mathbb{R}^{2d+1}$  difféomorphe à  $M$ .*

L'hypothèse de séparabilité est bien sûr nécessaire. On rappelle que toute variété connexe est séparable. On rappelle aussi que, si la première composante de  $F$  est propre, alors  $F$  est propre. La démonstration utilise seulement que  $M$  est une pré-variété admettant une fonction propre. Comme toute pré-variété paracompacte connexe admet une fonction propre, on a :

**Addendum 7.5.** *La conclusion du Théorème de Whitney est vraie pour toute pré-variété paracompacte connexe. Une telle pré-variété est donc une variété.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE WHITNEY.

**Lemme 7.6.** *Soit  $M$  une (pré-) variété de dimension  $d$  admettant un atlas fini. Alors il existe  $D \in \mathbb{N}$  et un plongement  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ .*

◀ Soient  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq k$  un atlas fini de  $M$ . Les ouverts  $U_i$  recouvrent donc  $M$  et les applications  $\phi_i$  sont des plongements. Soit  $f_i$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert  $U_i$ . Les fonctions  $f_i$  sont à support dans  $U_i$ . Chaque application  $f_i \phi_i$  peut donc s'étendre en une application  $C^r$  sur tout  $M$ , valant 0 en dehors de  $U_i$ . L'application

$$F : M \ni x \mapsto (f_1(x), f_1(x)\phi_1(x), f_2(x), f_2(x)\phi_2(x), \dots, f_k(x), f_k(x)\phi_k(x)) \in \mathbb{R}^{k(d+1)}$$

est alors une immersion injective. En effet, si  $F(x) = F(y)$ , alors  $f_i(x) = f_i(y)$  pour tout  $i$ . En choisissant un indice  $i$  tel que  $f_i(x) \neq 0$  (et donc  $x \in U_i$  et  $y \in U_i$ ) on déduit alors de l'égalité  $f_i(x)\phi_i(x) = f_i(y)\phi_i(y)$  que  $\phi_i(x) = \phi_i(y)$  et donc que  $x = y$  puisque  $\phi_i$  est injective sur  $U_i$ .

Pour montrer que  $F$  est une immersion, on calcule

$$dF_x \cdot v = (df_{1x} \cdot v, \phi_1(x)df_{1x} \cdot v + f_1(x)d\phi_{1x} \cdot v, \dots, \phi_k(x)df_{kx} \cdot v + f_k(x)d\phi_{kx} \cdot v).$$

Si  $v$  est dans le noyau de cette application linéaire, alors  $df_{ix} \cdot v = 0$  pour tout  $i$ , donc  $f_i(x)d\phi_{ix} \cdot v = 0$ . En choisissant  $i$  tel que  $f_i(x) > 0$ , on conclut que  $d\phi_{ix} \cdot v = 0$ , et, comme  $\phi_i$  est une immersion en  $x$ , que  $v = 0$ .

Finalement, on considère une fonction propre  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . L'application  $\psi = (f, F)$  est une immersion injective car  $F$  l'est, et elle est propre car  $f$  l'est. C'est donc un plongement. ▶

**Lemme 7.7.** *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ , de dimension  $d$ . Alors l'ensemble des applications linéaires  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^D, \mathbb{R}^{2d+1})$  telles que  $L|_M$  est une immersion injective est dense dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^D, \mathbb{R}^{2d+1})$ .*

En conséquence, Toute variété de dimension  $d$  admettant un atlas fini admet une immersion injective à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .

◀ Soit  $\mathring{TM} \subset TM$  l'ouvert constitué des points  $(x, v) \in TM$  tels que  $v \neq 0$ . L'application

$$e : \mathring{TM} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni (x, v, L) \mapsto L \cdot v \in \mathbb{R}^{2d+1}$$

est une submersion. En effet on a  $\partial_L e_{x,v,L} \cdot \ell = \ell \cdot v$ . Comme  $v \neq 0$  l'application linéaire

$$\partial_L e_{x,v,L} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni \ell \mapsto \ell \cdot v \in \mathbb{R}^{2d+1}$$

est surjective. On en déduit que  $e^{-1}(0)$  est une sous variété de codimension  $2d + 1$  de  $\mathring{TM} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$ , donc de dimension  $n(2d + 1) - 1$ . Le cas facile du théorème de Sard implique que la projection  $\Sigma_1$  de  $e^{-1}(0)$  sur le facteur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$  est de mesure nulle. Une application linéaire  $L$  est dans  $\Sigma_1$  si et seulement si il existe un point  $(x, v) \in \mathring{TM}$  tel que  $d(L \circ f)_x \cdot v = 0$ , c'est à dire si et seulement si  $L \circ f$  n'est pas une immersion.

Soit  $\mathring{M}^2 \subset M^2$  l'ouvert constitué des couples  $(x, y)$  tels que  $x \neq y$ . Considérons l'application

$$h : \mathring{M}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni (x, y, L) \longmapsto L \cdot (y - x) \in \mathbb{R}^{2d+1},$$

qui est une submersion. En effet, pour tout  $(x, y) \in \mathring{M}^2$ , l'application  $\partial_L h : \ell \mapsto \ell \cdot (y - x)$  est donc surjective. La préimage  $h^{-1}(0)$  est donc une sous variété de dimension  $n(2d+1) - 1$ , et sa projection  $\Sigma_2$  sur le facteur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$  est de mesure nulle. Or  $\Sigma_2$  est précisément l'ensemble des applications  $L$  telles que  $L \circ f$  n'est pas injective.

L'ensemble  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  est de mesure nulle, et, pour tout  $L$  est dans son complémentaire, la restriction  $L|_M$  est une immersion injective. ►

**Exercice 7.2.** Soit  $M$  une sous variété de dimension  $d$ . Montrer qu'il existe une immersion de  $M$  dans  $\mathbb{R}^{2d}$ . On peut pour ceci considérer la restriction de l'application  $e$  apparaissant dans la démonstration du Lemme 7.7 à la sous variété

$$STM = \{(x, v) \in TM, |v| = 1\}.$$

**Lemme 7.8.** Soit  $M$  une (pré-) variété et  $f$  une fonction propre sur  $M$ . Alors il existe un plongement  $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{4d+3}$  dont la première composante est égale à  $f$ .

◀ Considérons une partition de l'unité  $g_i$  de  $\mathbb{R}$  subordonnée au recouvrement  $]i, i+2[$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Soit  $U_i$  l'ouvert  $f^{-1}(]i, i+2[)$ . Comme  $U_i$  est relativement compact, c'est une variété admettant un atlas fini, et donc un plongement  $\psi_i$  dans  $\mathbb{R}^{2d+1}$ . On prolonge l'application  $(g_i \circ f)\psi_i$  par 0 en dehors de  $U_i$ . L'application (dans laquelle les sommes se réduisent à un seul terme pour chaque  $x$ )

$$F : x \longmapsto (f(x), \sum_l g_{2l} \circ f(x) \psi_{2l}(x), \sum_l g_{2l+1} \circ f(x) \psi_{2l+1}(x))$$

est un plongement. Comme la première composante de  $F$  est une fonction propre,  $F$  est propre et il suffit de montrer que c'est une immersion injective. Si  $F(x) = F(y)$ , alors  $f(x) = f(y)$ . Il existe alors au plus deux entiers  $i$  tels que  $g_i \circ f(x) > 0$ , l'un est pair, on l'écrit l'autre impair.

Supposons qu'il existe un entier pair  $i = 2k$  tel que  $g_{2k} \circ f(x) > 0$ , cet entier est alors unique, et on a

$$g_{2k} \circ f(x) \psi_{2k}(x) = \sum_l g_{2l} \circ f(x) \psi_{2l}(x) = \sum_l g_{2l} \circ f(y) \psi_{2l}(y) = g_{2k} \circ f(y) \psi_{2k}(y)$$

donc  $\psi_{2k}(x) = \psi_{2k}(y)$ , ce qui implique que  $x = y$ . Si il n'existe pas d'entier pair tel que  $g_i \circ f(x) > 0$ , alors il existe un unique entier impair tel que  $g_i \circ f(x) > 0$ , ce cas se traite de la même façon.

Pour montrer que  $F$  est une immersion, on calcule

$$dF_x \cdot v = (df_x \cdot v, \sum_l (\psi_{2l}(x) d(g_{2l} \circ f)_x + g_{2l} \circ f(x) d\psi_{2l,x} \cdot v, \\ \sum_l (\psi_{2l+1}(x) d(g_{2l+1} \circ f)_x + g_{2l+1} \circ f(x) d\psi_{(2l+1)x} \cdot v).$$

Si  $v$  est dans le noyau de cette application linéaire, alors  $df_x \cdot v = 0$ , donc  $d(g_i \circ f)_x \cdot v = 0$  pour tout  $i$ . Alors, pour tout  $i$  tel que  $g_i \circ f(x) > 0$ , on a  $d\psi_i(x) \cdot v = 0$ , ce qui implique que  $v = 0$ . ►

PREUVE DU THÉORÈME DE WHITNEY. On considère le plongement  $F = (f, g)$  de  $M$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4d+2}$  donné par le Lemme précédent, où  $f$  est une fonction propre. Soit  $\phi : \mathbb{R}^{4d+2} \longrightarrow B^{4d+2}$  (la boule unité ouverte) une difféomorphisme. Alors  $(f, \phi \circ g)$  est un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4d+2}$ . Au vu du lemme 7.7, il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{4d+3}, \mathbb{R}^{2d+1})$ , dont le coefficient  $L_{11}$  est non nul, et telle que  $L \circ (f, g)$  est une immersion injective. La première composante de  $L \circ (f, g)$  s'écrit  $L_{11}f + l \circ g$ , où  $l$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^{4d+2}$ . Comme la fonction  $l \circ g$  est bornée, la fonction  $L_{11}f + l \circ g$  est propre. L'application  $L \circ (f, g)$  est donc un plongement. ►

## 7.4 Feuilles

Soit  $X$  une feuille connexe de dimension  $d$ , voir la définition 6.15. Nous avons montré que  $X$  pouvait être munie d'une structure de sous-variété naturelle, et donc d'une structure de variété, la seule structure de variété à difféomorphisme près pour laquelle l'inclusion de la feuille dans sa variété ambiante est une immersion.

Pour illustrer la définition abstraite de variété, décrivons maintenant directement cette structure de variété.

On munit  $X$  de la distance géométrique  $\delta$ . Au vu du Lemme 6.14, l'espace  $(X, \delta)$  est une variété topologique.

On rappelle qu'une application  $f : Y \rightarrow X$  est dite différentiable si elle est différentiable en tant qu'application à valeurs dans la variété ambiante  $M$ . Elle est alors continue vers  $(X, \delta)$ . Une application  $h : X \rightarrow N$  est dite différentiable si  $h \circ f$  est différentiable pour toute application différentiable  $f : Y \rightarrow X$ . Elle est alors continue sur  $(X, \delta)$ .

L'ensemble des homéomorphismes bi-différentiables  $\varphi : U \rightarrow B^d$ , où  $U$  est un ouvert de  $(X, \delta)$ , constitue un atlas différentiable de  $X$ , qui la munit de la structure de variété voulue. Le fait que les changements de cartes  $\varphi \circ \psi^{-1}$  sont différentiables est une conséquence directe des définitions.

## 7.5 Quotients

La plupart des constructions de variétés les donnent directement comme sous-variété. Nous montrons ici que les quotients de variétés par certaines actions de groupes sont naturellement munies de structures de variétés (qui ne sont pas immédiatement données comme plongées dans un espace vectoriel).

Soit  $G$  un sous groupe de  $Gl_n(\mathbb{R})$  qui en est aussi une sous variété. Une action de  $G$  sur une variété  $M$  est une application  $a : G \times M \rightarrow M$ , de classe  $C^\infty$ , telle que  $a_{Id} = Id$  et telle que  $a_g \circ a_h = a_{gh}$  pour tous  $g$  et  $h$  de  $G$ , où  $a_g$  est l'application  $x \mapsto a(g, x)$ . L'application  $g \mapsto a_g$  est alors un morphisme du groupe  $G$  dans le groupe des difféomorphismes de  $M$ . On appelle orbite de  $x$  l'ensemble  $a(G, x) = a_x(G)$ .

Tout ce qui suit s'étend au cadre plus général où  $G$  est un groupe de Lie, c'est à dire un groupe muni d'une structure de variété  $C^\infty$  pour laquelle les opérations de produit et d'inversion sont différentiables. Dans ce cas, on continuera à noter  $gh$  le produit, on notera  $r_g$  le difféomorphisme  $h \mapsto hg$  et  $l_h$  le difféomorphisme  $g \mapsto gh$ .

On dit que l'action  $a$  est libre si l'application  $a_x : g \mapsto a(g, x)$  est injective pour tout  $x \in M$ .

On dit que l'action  $a$  est propre si l'application  $(g, x) \mapsto (a(g, x), x)$  est propre (c'est moins fort que de demander la propriété de l'application  $a$ ). De manière équivalente, l'action  $a$  est propre si, pour tout compact  $K$  de  $M$ , l'application  $a|_{G \times K}$  est propre.

En particulier, si  $G$  est compact, toute action de  $G$  est propre.

**Exercice 7.3.** Montrer que l'action de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$  par translations est propre.

**Exercice 7.4.** Montrer qu'une action  $a$  est propre si et seulement si, pour tout  $K \in M$ , l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $a_g(K) \cap K \neq \emptyset$  est compact.

Commençons par une remarque générale sur les actions de groupe.

**Proposition 7.9.** Soit  $a$  une action différentiable de  $G$  sur  $M$ . Pour tout  $x \in M$ , l'application  $a_x$  est de rang constant sur  $G$ , et le sous groupe isotrope  $I_x := a_x^{-1}(x)$  est une sous variété fermée de  $G$  de dimension  $d_G - k$  où  $k$  est le rang de  $da_x$ .

◀ En dérivant par rapport à  $h$  en  $h = Id$  l'expression  $a(gh, x) = a(g, a(h, x))$ , on obtient l'égalité  $\partial_g a(g, x) \circ dl_g(Id) = \partial_x a(g, x) \circ \partial_g a(Id, x)$  ou  $l_g$  est la multiplication à gauche par  $g$ , qui est un difféomorphisme. Comme  $\partial_x a(g, x)$  est un isomorphisme, on conclut que le rang de  $d(a_x)_g = \partial_g a(g, x)$  est égal au rang de  $d(a_x)_{Id} = \partial_g a(Id, x)$ .

Le théorème de forme normale des applications de rang constant implique que  $I_x$  est une sous variété dont l'espace tangent en  $Id$  est le noyau de  $\partial_g a(Id, x)$ . ▶

Le théorème suivant permet notamment de munir le tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  d'une structure de variété qui fait de la projection un difféomorphisme local. Il donne aussi un cadre théorique contenant la fibration de Hopf (dans le cas  $G = S^1 = SO_2(\mathbb{R})$ ).

**Théorème 7.10.** Soit  $a(g, x)$  une action libre et propre du groupe de Lie  $G$  sur une variété  $M$ . Alors il existe une variété  $N$  de dimension  $d_M - d_G$  et une submersion  $\pi : M \rightarrow N$  ayant la propriété suivante :

Tout point  $z_0 \in N$  admet un voisinage  $U$  et un difféomorphisme  $F = (\pi, \theta) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  vérifiant

$$F \circ a(g, x) = (\pi(x), g\theta(x))$$

pour tout  $(g, x) \in G \times \pi^{-1}(U)$ . On dit que  $\pi : M \rightarrow N$  est un fibré principal de groupe  $G$ .

La submersion  $\pi$  n'est pas forcément propre (sauf si  $G$  est compact), c'est malgré tout une fibration.

◀ Pour tout  $x \in M$ , l'application  $a_x$  est un plongement propre de  $G$  dans  $M$ . En effet, elle est propre en raison de la propriété de l'action  $a$ , et c'est une immersion en raison de la liberté de l'action, au vu de la proposition 7.9 (elle est de rang constant égal à  $d_G$ ). L'orbite du point  $x$  est donc une sous variété fermée. L'action  $a$  décompose donc la variété  $M$  en une réunion disjointe d'orbites qui sont des sous-variétés fermées difféomorphes à  $G$ .

Soit  $N$  l'ensemble des orbites, et  $\pi : M \rightarrow N$  la projection canonique qui, à un point, associe son orbite. Traitons d'abord l'aspect métrique.

**Lemme 7.11.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\pi : X \rightarrow N$  une application dont les fibres sont fermées, c'est à dire que  $\pi^{-1}(y)$  est fermé pour tout  $y \in N$ . Il existe une distance sur  $N$  pour laquelle l'application  $\pi$  est 1-Lipschitz (donc continue) et ouverte.

◀ On peut supposer (quitte à remplacer  $d$  par  $\min(d, 1)$ ) que la distance  $d$  est bornée.

On rappelle que si  $(X, d)$  est un espace métrique, alors l'espace  $C_b(X, \mathbb{R})$  des fonctions continues bornées sur  $X$ , muni de la norme uniforme, est un espace vectoriel normé (et même un espace de Banach).

Dans le cas où la distance  $d$  est bornée, on associe à toute partie  $A \subset X$  la fonction  $D_A : x \mapsto \inf_{a \in A} d(x, a)$ , qui est continue et bornée. L'application  $A \mapsto D_A$  est injective sur l'ensemble des parties fermées.

On obtient ainsi une distance  $d_H$  sur l'ensemble des fermés de  $X$ , la distance de Hausdorff, définie par

$$d_H(F, F') := \|D_F, D_{F'}\|_\infty.$$

On définit alors  $d_N(y, y') := d_H(\pi^{-1}(y), \pi^{-1}(y'))$ , on a

$$d_N(\pi(x), \pi(x')) \leq |D_{\pi(x)}(x') - D_{\pi(x)}(x)| = |D_{\pi(x)}(x')| \leq d(x, x').$$

Montrons maintenant que  $\pi$  est ouverte. Il suffit de montrer que, pour tout  $x \in M$  et toute suite  $y_n \rightarrow y = \pi(x)$  dans  $N$ , il existe une suite  $x_n \in \pi^{-1}(y_n)$  qui tend vers  $x$ . C'est le cas au vu de la définition de la distance, puisqu'il existe  $x_n \in \pi^{-1}(y_n)$  tel que  $d(x_n, x) \leq 2D_{\pi^{-1}(y_n)}(x) \leq 2d_N(y_n, y)$ . ▶

Pour munir  $N$  d'une structure de variété, on utilise :

**Lemme 7.12.** Pour tout  $x_0 \in X$ , il existe un disque plongé  $D$  centré en  $x_0$  et tel que l'action  $a$  induit un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image) de  $G \times D$  dans  $M$ .

On dit que  $D$  est un disque régulier si c'est un disque plongé qui vérifie la conclusion du lemme.

◀ Soit  $d_G$  la dimension de  $G$ ,  $d_M$  la dimension de  $M$ , et  $d := d_M - d_G$ . Considérons une immersion locale  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$  telle que l'image de  $d\phi_0$  est un supplémentaire de l'image de  $\partial_g a(Id, x_0)$ . L'application  $A : G \times \mathbb{R}^d \ni (g, y) \mapsto a(g, \phi(y))$  est alors un difféomorphisme local en  $(Id, 0)$ . Il existe donc une boule ouverte  $B^d(0, r)$  et un voisinage ouvert  $U$  de  $Id$  dans  $G$  tels que  $A$  est un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image) sur  $B^d(0, r) \times U$ .

Montrons que  $A$  est un difféomorphisme local en chaque point de  $G \times B^d(0, r)$ . On a en effet  $A(gh, x) = a_g(A(h, x))$ , qui se réécrit

$$A(h, x) = a_g \circ A(l_g^{-1}(h), x).$$

Comme  $a_g$  et  $l_g : (G, Id) \rightarrow (G, g)$  sont des difféomorphismes, et comme  $A$  est un difféomorphisme local en  $(Id, x)$ , on conclut que  $A$  est un difféomorphisme local en  $(g, x)$ .

Montrons finalement que  $A$  peut être rendu injective en réduisant la boule  $B^d$ . Si ce n'était pas le cas, il existerait deux suite  $y_n$  et  $y'_n$  tendant vers 0 dans  $B^d(0, r)$  et des suites  $g_n \neq g'_n$  dans  $G$  telles que  $A(g_n, y_n) = A(g'_n, y'_n)$ . En notant  $x_n = \phi(y_n)$ ,  $x'_n = \phi(y'_n)$ , ceci implique que  $x_n = a(g_n^{-1}g'_n, x'_n)$ . Comme les suite  $x_n$  et  $x'_n$  restent dans un compact, la propriété de l'action implique que  $h_n := g_n^{-1}g'_n$  admet une sous-suite convergente dans  $G$ . On suppose que  $h_n \rightarrow h$ . À la limite, on obtient  $x_0 = a(h, x_0)$  et donc  $h = Id$  (car l'action est libre). A partir d'un certain rang, on a donc  $h_n \in U$ . L'égalité  $x_n = a(h_n, x'_n) = A(h_n, y'_n)$  est alors en contradiction avec l'injectivité de  $A$  sur  $B^d(0, r) \times U$ .

L'application  $A$  est un difféomorphisme local injectif, et donc un difféomorphisme sur son image. On pose alors  $D = \phi(B)$ , et  $a(g, x) = A(g, \phi^{-1}(x))$  est un difféomorphisme de  $G \times D$  sur son image. ▶

Si  $D$  est un disque régulier, c'est à dire vérifiant la conclusion du lemme précédent, alors  $a(G, D) = \pi^{-1}(\pi(D))$  est un ouvert saturé de  $M$ , c'est à dire une réunion d'orbite. Chaque orbite intersecte  $D$  en un seul point en raison de l'injectivité de  $A = a_{G \times D}$ . On a donc une projection  $\Pi_D : a(G, D) \rightarrow D$ , qui est la seconde composante de l'inverse de  $A$ , et qui est donc une submersion différentiable. Comme l'application  $\pi : M \rightarrow N$  est ouverte, l'image  $U_D := \pi(D) = \pi(a(G, D))$  est ouverte. De plus, la projection  $\pi|_D : D \rightarrow U_D$  est un homéomorphisme (c'est une application bijective, continue, et ouverte). Notons  $\phi_D$  son inverse.

Les applications  $\phi_D : U_D \rightarrow D$  forment un atlas topologique de  $N$ , qui est donc une variété topologique.

Montrons pour terminer que cet atlas est différentiable. Si  $D$  et  $\tilde{D}$  sont deux disques réguliers, alors le changement de carte  $\phi_D \circ \phi_{\tilde{D}}$  est simplement la restriction à  $\tilde{D} \cap a(G, D)$  de la projection  $\Pi_D$ , qui est différentiable. C'est donc une application différentiable. ▶

**Addendum 7.13.** Si  $\pi : M \rightarrow N$  est une application vérifiant les conclusions du théorème, alors toute application différentiable  $f : M \rightarrow X$  (à valeurs dans une variété  $X$ ) invariante par l'action  $a$  (c'est à dire que  $f \circ a_g = f$  pour tout  $g \in G$ ) se factorise par  $\pi$ , c'est à dire s'écrit  $f = \tilde{f} \circ \pi$  avec une application différentiable  $\tilde{f} : N \rightarrow X$ .

En particulier, l'application  $\pi : M \rightarrow N$  est unique : Toute autre application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow \tilde{N}$  vérifiant le théorème est de la forme  $\tilde{\pi} = \tilde{\phi} \circ \pi$  avec un difféomorphisme  $\tilde{\phi}$ .

◀ Toute application  $f : M \rightarrow X$  invariante par l'action  $a$  se factorise en  $f = \tilde{f} \circ \pi$  où  $\tilde{f}(y)$  est défini comme  $f(x)$  pour n'importe quel point  $x$  de  $\pi^{-1}(y)$ . La valeur  $f(x)$  ne dépend pas du choix de  $x$  au vu de l'invariance de  $f$ . Comme  $\pi$  est une submersion surjective, la différentiabilité de  $f$  implique celle de  $\tilde{f}$ .

Si  $\tilde{\pi} : M \rightarrow \tilde{N}$  est une autre application satisfaisant les conclusions du théorème, alors il existe une application différentiable  $\phi$  telle que  $\tilde{\pi} = \phi \circ \pi$ , et réciproquement il existe une application différentiable  $\tilde{\phi}$  telle que  $\pi = \tilde{\phi} \circ \tilde{\pi}$ . On a alors  $\tilde{\pi} = \phi \circ \pi = \phi \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\pi}$ . Comme  $\tilde{\pi}$  est surjective, on conclut que  $\tilde{\phi} \circ \phi = Id$ , et de la même façon que  $\phi \circ \tilde{\phi} = Id$ . Les applications  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont donc des difféomorphismes. ▶

Pour vérifier que ce résultat s'applique à la fibration de Hopf, et plus généralement à tous les champs de vecteurs dont toutes les orbites sont 1-périodiques, on utilise :

**Exercice 7.5.** Soit  $V$  un champ de vecteurs sur une sous variété  $M$  dont toutes les orbites sont périodiques de période (minimale) 1. Montrer qu'il existe une action libre  $a$  de  $S^1$  sur  $M$  telle que  $\varphi_V^t(x) = a(e^{2it\pi}, x)$ .

On dit que le groupe  $G$  agit librement proprement discontinûment sur  $M$  si il agit par une action libre  $a$  qui est propre pour la topologie discrète. Dans ce cas, la submersion  $\pi : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme local puisque les variétés  $M$  et  $N$  ont la même dimension. C'est même un revêtement :

**Définition 7.14.** L'application différentiable  $\pi : M \rightarrow N$  est un revêtement si tout  $y_0 \in N$ , admet un voisinage ouvert  $U$  ayant la propriété suivante : Il existe un ensemble au plus dénombrable discret  $Z$  et un difféomorphisme  $\psi : U \times Z \rightarrow \pi^{-1}(U)$  qui commute avec les projections sur  $U$ .

Le théorème D'Erhesman implique que tout difféomorphisme local propre est un revêtement fini (c'est à dire que  $Z$  est fini). Nous invitons le lecteur à donner une preuve directe de ce fait.

Soit  $H$  un groupe de Lie et soit  $G$  un sous-groupe de  $H$  qui est une sous variété fermée de  $H$  (en fait, le caractère fermé est automatique). On définit l'action de  $G$  sur  $H$  par  $a(g, h) = hg^{-1}$ . Cette action est propre (car  $G$  est fermé dans  $H$ ). L'ensemble des orbites de cette action est le quotient  $H/G$ , que le théorème 7.10 munit d'une structure de variété telle que la projection canonique est une submersion.

Il y a une action naturelle de  $H$  sur  $H/G$ . En effet la composition  $A : \pi \circ p : H \times H \rightarrow H/G$  du produit et de la projection canonique est invariante par l'action du sous groupe  $\{Id\} \times G$  donnée par  $((Id, g), (h, h')) \mapsto (h, h'g^{-1})$  sur  $H \times H$ , et donc se factorise en une application  $a$  de  $(H \times H)/(Id \times G) = H \times (H/G)$  dans  $H/G$ . Cette application est une action de  $H$  sur  $H/G$ .

Réciproquement, soit  $M$  une variété munie d'une action transitive  $a(h, x)$  de  $H$ . On dit que l'action est transitive si chaque orbite est égale à  $M$ , c'est à dire si chacune des applications  $a_x : H \rightarrow M$  est surjective. Alors, pour tout  $x \in M$  le sous-groupe isotrope  $I_x := a_x^{-1}(x)$  est une sous variété fermée de  $H$ , et l'application  $a_x$  se factorise en  $a_x = \phi \circ \pi$  où  $\pi : H \rightarrow H/I_x$  est la projection canonique et  $\phi : H/I_x \rightarrow M$  est un difféomorphisme. En effet, l'application  $a_x$  est de rang  $\dim M$  au vu de la proposition 7.9, donc l'application  $\phi$  aussi.

Plus généralement, si  $a$  est une action différentiable de  $H$  sur  $M$  et si  $x$  est un point de  $M$ , alors l'application  $a_x$  se factorise en  $\phi \circ \pi$  où  $\phi : H/I_x \rightarrow M$  est une immersion injective. Dans le cas où l'action  $a$  est propre, l'immersion injective  $\phi$  l'est aussi, c'est donc un plongement. Chaque orbite d'une action propre (pas nécessairement libre) est donc une sous variété.

**Exercice 7.6.** Montrer que l'orbite du point  $x$  est une feuille même lorsque l'action n'est pas propre.

◀ On considère au voisinage de  $x$  un disque  $\Sigma \subset M$  transverse à l'orbite, et un disque  $T \subset G$  transverse au sous-groupe  $I_x$  en  $I$ . L'action  $a$  plonge  $T \times \Sigma$  dans  $M$ . On montre alors comme dans le cas des feuilletages en utilisant la préimage de l'orbite de  $x$  par cette paramétrisation est de la forme  $T \times Z$  avec  $Z \subset \Sigma$ . Les ensembles  $a_x^{-1}(T \times \{z\}), z \in Z$  sont des ouverts disjoints de  $G$ . Comme  $G$  est séparable,  $Z$  est dénombrable. ▶

**Exercice 7.7.** Expliquer les égalités  $G(k, n) = \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)/Gl_k(\mathbb{R})$ ,  
 $G(k, n) = \mathcal{L}_{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})/Gl_{n-k}(\mathbb{R})$ ,  $G(k, n) = O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ .

## 7.6 Actions libres et propres de $\mathbb{R}^k$ .

Dans le cas d'une action libre et propre de  $\mathbb{R}^k$ , la fibration est globalement triviale :

**Théorème 7.15.** Soit  $a$  une action libre et propre du groupe additif  $\mathbb{R}^k$  sur une variété  $M$ , soit  $N$  la variété quotient, et soit  $\pi : M \rightarrow N$  la projection. Il existe une section différentiable globale  $\sigma$  de  $\pi$ , c'est à dire une application  $\sigma : N \rightarrow M$  telle que  $\pi \circ \sigma = Id$ . La variété  $M$  est donc difféomorphe à  $\mathbb{R}^k \times N$ .

L'exemple de la fibration de Hopf montre que ce résultat ne s'étend pas aux actions de  $S^1$ .

◀ Il existe un recouvrement ouvert  $U_\alpha$  de  $N$  et des difféomorphismes  $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^k \times U_\alpha$  qui conjuguent l'action  $a$  à l'action de  $\mathbb{R}^k$  sur  $\mathbb{R}^k \times U_\alpha$  par translation. On note  $F_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^k$  la première composante de  $\phi_\alpha$ , elle vérifie donc  $F_\alpha(t, x) = t + F_\alpha(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^k$  et  $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ .

On considère une partition de l'unité  $g_\alpha$  de  $N$  subordonnée au recouvrement  $U_\alpha$ , et on définit les applications  $G_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  par  $G_\alpha(x) = g_\alpha(\pi(x))F_\alpha(x)$  pour  $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  et  $G_\alpha(x) = 0$  sinon. Finalement, on pose  $F = \sum_\alpha G_\alpha$  (la somme est localement finie). L'application  $F$  vérifie  $F(a(t, x)) = t + F(x)$  (c'est donc une submersion). L'équation  $F = 0$  définit une sous-variété en restriction de laquelle  $\pi$  est un difféomorphisme. On pose  $\sigma = (\pi|_F)^{-1}$ .

►

## 8 Espace tangent et crochet de Lie

### 8.1 Espaces tangents et champs de vecteurs.

Deux courbes  $\gamma, \tilde{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, x)$  sont dites tangentes en 0 si les courbes  $\phi \circ \gamma$  et  $\phi \circ \tilde{\gamma}$  ont la même dérivée en 0 pour toute carte de  $M$  en  $x$ . Il suffit que cette propriété soit satisfaite dans une carte. C'est une relations d'équivalence  $R$  sur l'ensemble  $C_x^1(\mathbb{R}, M)$  des courbes sur  $M$  qui satisfont  $\gamma(0) = x$ . Définissons l'espace tangent comme l'ensemble des classes d'équivalences

$$T_x M := C_x^1(\mathbb{R}, M)/R.$$

Pour toute carte  $\phi$  en  $x$ , l'application  $\gamma \mapsto \phi \circ \gamma'(0)$  engendre une bijection entre  $T_x M$  et  $\mathbb{R}^d$  (car deux courbes ont la même image si et seulement si elles appartiennent à la même classe d'équivalence). On munit  $T_x M$  de la structure d'espace vectoriel qui fait de cette bijection un isomorphisme. Cette structure ne dépend pas du choix de la carte  $\phi$ . En effet, si  $\tilde{\phi}$  est une autre carte en  $x$ , alors

$$(\tilde{\phi} \circ \gamma)'(0) = d(\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})_0((\phi \circ \gamma)'(0)),$$

où  $d(\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})_0$  est un isomorphisme.

Toute application différentiable  $f : M \rightarrow N$  définie au voisinage de  $x$  engendre naturellement une application dérivée

$$d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N.$$

Cette application associe à tout vecteur  $v \in T_x M$  le vecteur défini par la courbe  $f \circ \gamma$ , où  $\gamma$  est n'importe quelle courbe représentant  $v$ . Si  $\tilde{\gamma}$  est une autre courbe représentant  $v$ , alors pour toute carte  $\phi$  de  $M$  en  $x$  et toute carte  $\varphi$  de  $N$  en  $y$ , on a

$$(\varphi \circ f \circ \tilde{\gamma})'(0) = d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_0 \cdot (\phi \circ \tilde{\gamma})'(0) = d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_0 \cdot (\phi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ f \circ \gamma)'(0)$$

donc la classe de  $f \circ \tilde{\gamma}$  est la même que celle de  $f \circ \gamma$ . Si  $J$  est un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^D$ , l'application  $dJ_x : [\gamma] \mapsto (J \circ \gamma)'(0)$  est un isomorphisme entre l'espace tangent  $T_x M$  de  $M$  vue comme variété abstraite et l'espace tangent  $T_x(J(M))$  de  $J(M)$  vue comme sous variété.

Le représentant  $[\gamma] \in T_x M$  d'une courbe  $C^1$  n'est autre que

$$[\gamma] = d\gamma_0(1),$$

que l'on continuera à noter  $\dot{\gamma}(0)$ .

Présentons maintenant un autre point de vue très utile. On dit qu'une application linéaire

$$L : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

est une dérivation ponctuelle en  $x$  si elle a la propriété de Leibnitz

$$L(fg) = g(x)L(f) + f(x)L(g).$$

Si  $L$  est une dérivation en  $x$  sur  $M$ , et si  $\psi : M \rightarrow N$  est une application  $C^\infty$  au voisinage de  $x$ , alors l'application

$$\psi_* L : f \mapsto L(f \circ \psi)$$

est une dérivation ponctuelle en  $f(x)$ . L'application  $L \mapsto \psi_* L$  est linéaire. À toute vecteur tangent  $v \in T_x M$ , on associe la dérivation ponctuelle

$$L_v(f) := df_x \cdot v = (f \circ \gamma)'(0)$$

pour toute courbe  $\gamma$  représentant  $v$ . si  $M$  et  $N$  sont deux (pré) variétés et  $\psi : (M, x) \rightarrow (N, y)$  une application différentiable, alors  $\psi_*(L_v) = L_{d\psi_x \cdot v}$  dans  $\mathcal{D}_y$  (les dérivations ponctuelles en  $y$ ).

**Proposition 8.1.** *L'espace  $\mathcal{D}_x$  des dérivations en  $x$  est un espace vectoriel de dimension  $d$ , et l'application  $v \mapsto L_v$  est un isomorphisme de  $T_x M$  dans  $\mathcal{D}_x M$ .*

Même dans le cas d'une sous variété, la proposition ci-dessus n'est pas évidente.

◀ Montrons dans un premier temps le résultat pour  $M = \mathbb{R}^n$  et  $x = 0$ , c'est à dire que

$$\mathbb{R}^d \ni v \mapsto L_v \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^d)$$

est un isomorphisme. Pour démontrer la surjectivité, on considère une dérivation ponctuelle  $L$  en 0 sur  $\mathbb{R}^d$ .

On commence par constater, si 1 est la fonction constante égale à 1, que  $L(1) = L(1 \cdot 1) = 1L(1) + 1L(1) = 2L(1)$ , donc  $L(1) = 0$ .

On rappelle alors qu'une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  s'écrit  $f(x) = f(0) + F(x) \cdot x$  où

$$F(x) := \int_0^1 df_{tx} dt$$

est une application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$ , telle que  $F(0) = df_0$ . On a donc,  $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^d x_i F_i(x)$ , et donc

$$Lf = \sum_{i=1}^d F_i(0)L(x_i) = D_v f$$

où  $v = (L(x_1), L(x_2), \dots, L(x_d))$ . Le cas général découle du cas de  $\mathbb{R}^n$  et du lemme suivant. ▶

**Lemme 8.2.** *Soit  $\phi : N \rightarrow M$  un difféomorphisme sur son image. Alors l'application  $\phi_* : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_{\phi(x)}$  est un isomorphisme.*

◀ Soit  $U$  l'image de  $\phi$ , qui est un ouvert de  $M$ . Considérons une fonction  $h : M \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  égale à 1 au voisinage de  $\phi(x)$  et à support dans  $U$ , et la fonction  $g = 1 - (1 - h)^2$ , qui a les mêmes propriétés.

Pour toute dérivation ponctuelle  $L$  en  $\phi(x)$  sur  $M$  on a  $L(f) = L(gf)$ . En effet,

$$L(f) - L(gf) = L((1 - h)^2 f) = (1 - h)(x)L((1 - h)f) + (1 - h)(x)f(x)L(1 - h) = 0.$$

Le même calcul montre que  $L(f) = L(f(g \circ \phi))$  pour tout  $L \in \mathcal{D}_x(N)$  et tout  $f \in C^\infty(N)$ . Considérons l'application  $R$  qui, à  $L \in \mathcal{D}_{\phi(x)}(M)$ , associe la forme linéaire

$$f \mapsto L(g(f \circ \phi^{-1})),$$

l'application  $g(f \circ \phi^{-1})$  étant étendue par 0 en dehors de  $U$ . Il découle des calculs précédents que  $R \circ \phi_* = Id$  et  $\phi_* \circ R = Id$ . ▶

Un champ de vecteurs sur une (pré) variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'un vecteur  $V(x) \in T_x M$ . On demande de plus que ce vecteur  $V(x)$  dépende régulièrement de  $x$ . Il y a plusieurs façons équivalentes d'exprimer cette régularité. On peut par exemple demander que le champ de vecteurs soit différentiable dans les cartes. On peut aussi demander que la fonction  $x \mapsto df_x \cdot V(x)$  soit  $C^\infty$  pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$ . On associe alors au champ  $V(x)$  une l'application linéaire

$$\mathcal{L}_V : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

telle que  $\mathcal{L}_V f(x) = df_x \cdot V(x)$ . Cette application vérifie la propriété de Leibnitz

$$\mathcal{L}_V(fg) = f\mathcal{L}_V g + g\mathcal{L}_V f,$$

On dit que c'est un dérivation globale. Réciproquement, si  $\mathcal{L} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  est une dérivation globale, alors pour chaque  $x \in M$  l'application  $L_x : f \mapsto \mathcal{L}f(x)$  est une dérivation ponctuelle. Elle est donc engendrée par un vecteur de  $T_x M$ . Toute dérivation globale est donc engendrée par un champ de vecteurs. On prendra garde à la formule de calcul :

**Propriété 8.3.** *Si  $V$  est un champ de vecteurs sur  $M$ , et  $\varphi : M \rightarrow N$  est une application différentiable telle que  $\varphi_* V$  existe, alors*

$$(\mathcal{L}_{\varphi_* V} f) \circ \varphi = \mathcal{L}_V(f \circ \varphi).$$

En général, il n'y a pas de manière canonique de représenter la dérivée seconde  $\ddot{\gamma}(t)$  d'une courbe comme un élément de  $T_{\gamma(t)}M$ . Dans le cas où  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ , ceci se manifeste notamment par le fait que  $\ddot{\gamma}(t)$  (définie en considérant  $\gamma$  comme une courbe de  $\mathbb{R}^D$ ) n'appartient pas à  $T_{\gamma(t)}M$ .

Il y a toutefois un cas particulier important dans lequel c'est possible : lorsque  $\dot{\gamma}(t) = 0$ .

Dans la suite, on dit qu'une courbe  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  est différentiable si il existe une courbe différentiable  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$  qui coïncide avec  $\gamma$  sur  $[0, \infty)$ . La différentielle  $\tilde{\gamma}'(0)$  ne dépend que de  $\gamma$ , on dit que c'est la dérivée à droite de  $\gamma$ , ou tout simplement la dérivée de  $\gamma$ . On la note  $\gamma'(0)$  ou  $\dot{\gamma}(0)$ . Si  $\phi$  est une application différentiable et si  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  est différentiable, alors  $\phi \circ \gamma$  est différentiable et  $(\phi \circ \gamma)'(0) = d\phi_{\gamma(0)} \cdot \gamma'(0)$ .

**Proposition 8.4.** Soit  $\gamma$  une courbe  $C^2$  sur  $M$  telle que  $\dot{\gamma}(0) = 0$ . Alors la courbe  $\eta : t \mapsto \gamma(\sqrt{t})$  est  $C^1$  sur  $[0, \infty)$ . En notant  $\ddot{\gamma}(0) := 2\eta'(0) \in T_{\gamma(0)}M$ , on a

$$d\phi_{\gamma(0)} \cdot \ddot{\gamma}(0) = (\phi \circ \gamma)''(0)$$

pour toute carte locale  $\phi : (M, \gamma(0)) \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

◀ La courbe  $z(t) := \phi \circ \gamma$  est une courbe sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $\dot{z}(0) = 0$ . Un développement limité élémentaire montre alors que  $z(\sqrt{t}) = 2t\dot{z}(0) + o(t)$ . La courbe  $t \mapsto z(\sqrt{t})$  est donc dérivable à droite en  $t = 0$  de dérivée égale à  $2\dot{z}(0)$ . La courbe  $t \mapsto \gamma(t^{1/2}) = \phi^{-1} \circ z(t^{1/2})$  est donc dérivable à droite en  $t = 0$ , de dérivée  $(d\phi_{\gamma(0)})^{-1} \cdot \ddot{\gamma}(0)$ . ▶

On peut aussi faire une preuve directe du fait que la dérivée seconde est bien un vecteur tangent en un temps où la dérivée est nulle :

**Exercice 8.1.** Soit  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  un difféomorphisme et soit  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  une courbe  $C^2$ . Montrer par un calcul direct que  $(\phi \circ \gamma)''(0) = d\phi_0 \cdot \gamma''(0)$  si  $\dot{\gamma}(0) = 0$ , mais que ce n'est pas le cas en général.

Plus généralement :

**Proposition 8.5.** Soit  $f : M \rightarrow N$  est une fonction  $C^2$  telle que  $df_{x_0} = 0$ . Alors il existe une unique application bilinéaire symétrique  $d^2f_{x_0}$  de  $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$  dans  $T_{f(x_0)}N$  telle que, pour toute paramétrisation locale  $\psi$  de  $M$  en  $x_0$  et tout carte locale  $\varphi$  de  $N$  en  $f(x_0)$ ,

$$d^2(\varphi \circ f \circ \psi)_0 \cdot (v, w) = d\varphi_{f(x_0)} \circ d^2f_{x_0}(d\psi_0 \cdot v, d\psi_0 \cdot w).$$

◀ Pour chaque choix de  $\psi$  et  $\varphi$ , la formule ci-dessus détermine une forme bilinéaire symétrique  $b$  de  $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$  dans  $T_{f(x_0)}N$ . Il nous faut montrer que cette forme bilinéaire ne dépend pas du choix de  $\varphi$  et  $\psi$ . On peut le faire par un calcul direct (pas si facile, mais instructif), mais nous allons utiliser une autre méthode. Pour tout  $v \in T_{x_0}M$ , on choisit une courbe  $\gamma$  telle que  $\gamma(0) = x_0$  et  $\dot{\gamma} = v$ . On constate alors que la courbe  $f \circ \gamma$  est de dérivée nulle en 0, et sa dérivée seconde vérifie  $(f \circ \gamma)''(0) = b(v, v)$ . Pour le vérifier, on pose  $\eta = \psi^{-1} \circ \gamma$ . L'application  $\varphi \circ f \circ \psi : \mathbb{R}^{d_M} \rightarrow \mathbb{R}^{d_N}$  est de dérivée nulle en 0, et on a

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f \circ \gamma)''(0) &= (\varphi \circ f \circ \psi \circ \eta)''(0) = d^2(\varphi \circ f \circ \psi)_0 \cdot (\eta'(0), \eta'(0)) \\ &= d\varphi_{f(x_0)} \cdot b(d\psi_0 \cdot \eta'(0), d\psi_0 \cdot \eta'(0)) = d\varphi_{f(x_0)} \cdot b(v, v). \end{aligned}$$

D'autre part, il découle de la proposition 8.4 que

$$(\varphi \circ f \circ \gamma)''(0) = d\varphi_{f(x_0)} \cdot (f \circ \gamma)''(0)$$

ce qui démontre l'égalité  $(f \circ \gamma)''(0) = b(v, v)$ . On conclut que  $b(v, v)$  est indépendant de  $\varphi$  et  $\psi$  pour tout  $v$ , et donc, par polarisation, que la forme bilinéaire symétrique  $b$  est indépendante de  $\varphi$  et  $\psi$ . ▶

Dans le cas où  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ , on a encore une autre interprétation naturelle pour  $d^2f_{x_0}$  : C'est la restriction à  $T_{x_0}M$  de la forme bilinéaire  $d^2\tilde{f}_{x_0}$ , où  $\tilde{f}$  est n'importe quelle extension  $C^2$  de  $f$  à un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ .

## 8.2 Crochets de Lie

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs, que nous supposons complets dans un premier temps, sur la (pré) variété  $M$ .

On veut décrire dans quelle mesure les flots  $\varphi_X$  et  $\varphi_Y$  commutent. On considère, pour chaque  $x \in M$ , l'application  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  donnée par

$$\phi_x(t, s) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^{-s} \circ \varphi_X^{-t}(x).$$

Il est immédiat que  $\phi(t, s) = x$  si  $t = 0$  ou  $s = 0$ , donc  $\partial_t \phi(0, s) = \partial_t \phi(t, 0) = 0$  dans  $T_x M$ . La dérivée seconde  $d^2 \phi_0$  est donc bien définie comme application bilinéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $T_x M$ . De plus, comme  $\phi_x(0, s) = \phi_x(t, 0) = x$ , les dérivées partielles  $\partial_{tt} \phi(0, 0)$  et  $\partial_{ss} \phi(0, 0)$  sont nulles. On pose

$$\boxed{[X, Y](x) = \partial_{st}^2 \phi(0, 0)},$$

de sorte que  $d^2 \phi_x(0, 0) \cdot ((u_s, u_t), (v_s, v_t)) = (u_s v_t + u_t v_s)[X, Y](x)$ . C'est le **Crochet de Lie** de  $X$  et  $Y$ . C'est un champ de vecteurs  $C^\infty$  si  $X$  et  $Y$  le sont. En considérant la courbe  $\gamma_x(t) := \phi_x(t, t)$ , qui a une dérivée nulle  $\dot{\gamma}_x(0) = 0$ , on a

$$[X, Y](x) := \ddot{\gamma}_x(0)/4.$$

Si  $\eta(t) = \phi_x(\sqrt{t}, \sqrt{t})$ , alors  $[X, Y](x)\eta'(0)/2$ .

**Propriété 8.6.** Soit  $\psi : M \rightarrow N$  une application différentiable. Soient  $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$  des champs de vecteurs sur  $M$  et  $N$  tel que  $\tilde{X} = \psi_* X$  et  $\tilde{Y} = \psi_* Y$ . Alors,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \psi_* [X, Y].$$

◀ Fixons un point  $x$  et considérons la courbe  $x(t) = \phi(\sqrt{t}, \sqrt{t})$ , de sorte que  $x'(0) = 2[X, Y](x)$ .

$$x(t) := \varphi_Y^{\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{\sqrt{t}} \circ \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{-\sqrt{t}}(x)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \psi \circ x(t) &= \psi \circ \varphi_Y^{\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{\sqrt{t}} \circ \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{-\sqrt{t}}(x) = \varphi_{\tilde{Y}}^{\sqrt{t}} \circ \psi \circ \varphi_X^{\sqrt{t}} \circ \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{-\sqrt{t}}(x) \\ &= \varphi_{\tilde{Y}}^{\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{\sqrt{t}} \circ \psi \circ \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{-\sqrt{t}}(x) = \dots = \varphi_{\tilde{Y}}^{\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{\sqrt{t}} \circ \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_X^{-\sqrt{t}} \circ \psi(x), \end{aligned}$$

et, en dérivant (à droite) en  $t = 0$ ,  $d\psi_x \cdot [X, Y](x) = [\tilde{X}, \tilde{Y}](\psi(x))$ . ▶

L'exercice suivant montre que le crochet n'est pas toujours nul :

**Exercice 8.2.** Soit  $X$  un champ de vecteurs constant et  $Y$  un champ de vecteurs linéaire donné par  $Y(x) = bx$ . Alors  $[X, Y]$  est le champ constant égal à  $bX$ .

**Exercice 8.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^d$ , donnés par  $X(x) = ax, Y(x) = bx$ . Montrer que  $[X, Y](x) = (ba - ab)(x)$ .

**Exercice 8.4.** Soient  $a$  et  $b$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ . Considérons les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $Gl_n(\mathbb{R})$  donnés par  $X(g) = ag, Y(g) = bg$ . On a alors  $\varphi_X^t(g) = \exp(ta)g, \varphi_Y^t(g) = \exp(tb)g$ . Montrer que  $\partial_t \phi_g(0, s) = \exp(sb)a \exp(-sb)g - ag$  et donc que  $[X, Y](g) = (ba - ab)g$ .

Si  $G$  est un sous groupe de  $Gl_n(\mathbb{R})$  qui est aussi une sous variété, alors l'espace tangent  $\mathfrak{g} = T_{Id}G \subset M_n(\mathbb{R})$  est stable par l'opération  $a, b \mapsto ab - ba$ .

On obtient une autre interprétation du crochet de Lie en remarquant que

$$\varphi_Y^s \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^{-s} = \varphi_{(\varphi_Y^s)_* X}^t$$

et donc

$$\phi_x(t, s) = \varphi_{(\varphi_Y^s)_* X}^t \circ \varphi_X^{-t}(x).$$

On a alors

$$\partial_t \phi_x(0, s) = (\varphi_Y^s)_* X(x) - X(x)$$

dont on déduit :

**Propriété 8.7.**

$$\boxed{[X, Y](x) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_Y^s)_* X(x))}.$$

**Exercice 8.5.** Montrer la formule

$$\partial_s ((\varphi_Y^s)_* X(x)) = [(\varphi_Y^s)_* X, Y] = (\varphi_Y^s)_* [X, Y]$$

Calculons les crochets de Lie en coordonnées. Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , vus comme applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On dérive par rapport à  $s$ , en  $s = 0$ , l'expression

$$(\varphi_Y^s)_* X(x) = d(\varphi_Y^s)_{\varphi_Y^{-s}(x)} \cdot X(\varphi_Y^{-s}(x)).$$

En remarquant que  $\partial_{s|s=0} d(\varphi_Y^s)_x \cdot X(x) = d(\partial_{s|s=0} \varphi_Y^s)_x \cdot X(x) = dY_x \cdot X(x)$ , on obtient :

$$[X, Y](x) = dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x)$$

ce qui s'écrit aussi en coordonnées

$$([X, Y])_i = \sum_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j.$$

Il est instructif de revenir aux exercices 8.2 et 8.3 avec ces formules. Finalement, on a

**Propriété 8.8.**

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

Cette propriété caractérise le champ  $[X, Y]$ , et est souvent donnée comme sa définition.

◀ Soit  $\varphi$  une carte. On remarque d'abord que  $\mathcal{L}_X(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}_{\varphi_* X} f) \circ \varphi$ . En utilisant cette formule, on obtient

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}_{\varphi_* [X, Y]} f) \circ \varphi = (\mathcal{L}_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} f) \circ \varphi$$

et

$$(\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f \circ \varphi) = ((\mathcal{L}_{\varphi_* X} \circ \mathcal{L}_{\varphi_* Y} - \mathcal{L}_{\varphi_* Y} \circ \mathcal{L}_{\varphi_* X})f) \circ \varphi.$$

Il suffit donc de montrer l'égalité dans les cartes, c'est à dire dans  $\mathbb{R}^d$ . On fait le calcul direct

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y f(x) &= d(df_x \cdot Y(x))_x \cdot X(x) = d^2 f_x \cdot (Y(x), X(x)) + df_x \circ dY_x \cdot X(x) \\ \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X f(x) &= d(df_x \cdot X(x))_x \cdot Y(x) = d^2 f_x \cdot (X(x), Y(x)) + df_x \circ dX_x \cdot Y(x) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y f(x) - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X f(x) = df_x \cdot (dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x)) = df_x \cdot [X, Y](x).$$

Le point remarquable de ce calcul est la simplification des termes de second ordre. ►

Il est remarquable que l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$  est une dérivation (a priori, c'est un opérateur du second ordre). C'est un exercice facile et intéressant de vérifier directement qu'il vérifie la propriété de Leibnitz. La propriété 8.8 implique :

**Propriété 8.9.** L'application qui aux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  associe leur crochet de Lie  $[X, Y]$  est bilinéaire et antisymétrique :

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

Elle vérifie de plus l'identité de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

**Exercice 8.6.** Soit  $\eta(t)$  la courbe égale à  $\phi_x(\sqrt{t}, \sqrt{t})$  pour  $t \geq 0$  et à  $\varphi_X^{\sqrt{-t}} \circ \varphi_Y^{\sqrt{-t}} \circ \varphi_X^{-\sqrt{-t}} \circ \varphi_Y^{-\sqrt{-t}}(x)$  pour  $t \leq 0$ . Montrer que  $\eta$  est différentiable en  $t = 0$ , et que  $\eta'(0) = [X, Y](x)$ .

L'antisymétrie implique notamment que

$$[X, Y](x) = -\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_X^s)_* Y(x)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_X^{-s})_* Y(x)) =: \mathcal{L}_X(Y).$$

Le dernier opérateur est appelé dérivée de Lie de  $Y$  par rapport à  $X$ . L'identité de Jacobi est équivalente à

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]],$$

elle s'interprète comme la relation

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$$

où cette fois les opérateurs  $\mathcal{L}$  agissent sur les champs de vecteurs et plus, comme plus haut, sur les fonctions.

**Propriété 8.10.** On a la relation  $[fX, gY] = fg[X, Y] - (\mathcal{L}_Y f)gX + (\mathcal{L}_X g)fY$ .

Le cas particulier  $[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y$  se réécrit  $\mathcal{L}_X(gY) = g\mathcal{L}_X(Y) + (\mathcal{L}_X g)Y$ , c'est une règle de Leibnitz pour l'opérateur  $\mathcal{L}_X$ . La démonstration est immédiate en utilisant propriété 8.8. Revenons maintenant à la question de la commutation :

**Théorème 8.11.** Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs tels que le champ  $[X, Y]$  est identiquement nul. Alors les flots de  $X$  et de  $Y$  commutent. Plus précisément, pour tout  $x \in M$ , si  $I$  et  $J$  sont des intervalles contenant 0 tels que  $\varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$  est défini pour tout  $s \in I$ ,  $t \in J$  alors on a la relation

$$\varphi_X^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$$

pour tous  $s \in I, t \in J$  (en particulier, le membre de gauche est bien défini). Si  $X$  et  $Y$  sont complets, alors la relation de commutation est valable pour tous  $t$  et  $s$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le cas complet, ceci implique aussi que  $(\varphi_Y^s)_*X = X$  pour tout  $s$ .

► Il suffit de démontrer le résultat dans le cas où  $I$  et  $J$  sont compacts. Soit  $U$  le domaine de définition commun des flots  $\varphi_Y^s, s \in J$ . C'est un ouvert contenant  $x$ . On a  $(\varphi_Y^s)_*X = X$  sur  $U$ , ceci découle du calcul

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}((\varphi_Y^{-s})_*X(x)) &= \frac{d}{d\sigma}|_{\sigma=0}((\varphi_Y^{-\sigma})_*(\varphi_Y^{-s})_*X(x)) \\ &= [Y, (\varphi_Y^{-s})_*X] = [(\varphi_Y^{-s})_*Y, (\varphi_Y^{-s})_*X] = (\varphi_Y^{-s})_*[Y, X] = 0. \end{aligned}$$

Les champs  $(\varphi_Y^{-s})_*X, s \in J$  sont tous définis sur  $U$ , et ils y satisfont la relation  $\frac{d}{ds}((\varphi_Y^{-s})_*X(x)) = 0$ , donc  $(\varphi_Y^{-s})_*X = X$ .

Considérons la restriction  $X_U$  de  $X$  à l'ouvert  $U \subset M$ . On conclut que les flots  $\varphi_Y^{-s} \circ \varphi_{X_U}^t \circ \varphi_Y^s$  et  $\varphi_{X_U}^t$  de ces champs sont égaux sur le domaine de définition de  $\varphi_{X_U}^t$  (qui, à priori, peut être strictement contenu dans  $U \cap \text{dom} \varphi_X^t$ ). Il découle de notre hypothèse que  $U$  contient le segment d'orbite  $\varphi_X(I \times \{x\})$ , et donc que  $x$  est dans le domaine de  $\varphi_{X_U}^t$  pour tout  $t \in I$ . On a donc  $\varphi_Y^{-s} \circ \varphi_{X_U}^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_{X_U}^t(x)$  pour tout  $t \in I, s \in J$ , ce qui est le résultat annoncé. ►

L'exercice suivant montre qu'il faut être un peu prudent dans le cas de champs non complets.

**Exercice 8.7.** Considérons l'application exponentielle  $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  et les champs de vecteurs constants  $X_1 = 1$  et  $X_2 = i$  sur  $\mathbb{C}^*$ .

Montrer qu'il existe des champs  $Y_1$  et  $Y_2$  sur  $\mathbb{C}$  tels que  $e_*Y_i = X_i$ . Montrer que  $[Y_1, Y_2] = 0$ .

Notons  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les flots de  $Y_1$  et  $Y_2$ . Montrer que  $\varphi_1^1 \circ \varphi_2^1(z) \neq \varphi_2^1 \circ \varphi_1^1(z)$  pour  $z = -3i\pi/4$ .

On rappelle que tout champ de vecteurs peut être redressé au voisinage d'un point régulier. En présence de plusieurs champs de vecteurs, on a :

**Théorème 8.12.** Soient  $X_1, \dots, X_k$  des champs de vecteurs au voisinage de  $x_0$  dont les valeurs en  $x_0$  forment une famille libre. Il existe une carte locale  $\phi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, c'est à dire telle que

$$\phi_*X_i = e_i$$

(le champ de vecteur constant égal au  $i$ -ème vecteur de base) si et seulement si  $[X_i, X_j] \equiv 0$  dans un voisinage de  $x_0$ .

► Supposons que les champs  $X_i$  peuvent être redressés. Alors  $X_i = \phi_*^{-1}e_i$ , donc  $[X_i, X_j] = \phi_*^{-1}[e_i, e_j] = 0$ .

Réciproquement, soit  $E \subset T_{x_0}M$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $X_i(x_0), 1 \leq i \leq k$ . On considère alors une immersion  $\psi : (\mathbb{R}^{d-k}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  transverse à  $E$  en 0, c'est à dire telle que l'image de  $d\psi_0$  est un supplémentaire de  $E$  dans  $T_{x_0}M$ . Les flots  $\varphi_{X_i}^t$  sont bien définis dans un voisinage de  $(0, x_0)$  et ils commutent deux à deux. Soit  $\Psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  l'application définie par

$$\Psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{X_k}^{t_k}(\psi(y)).$$

On voit facilement que  $\partial_y \Psi_0 = d\psi_0$  et que  $\partial_{t_i} \Psi_0 = X_i(0)$ , et on conclut que  $\Psi$  est un difféomorphisme local de  $M$  en  $x_0$ . Ceci est vrai sans hypothèse de commutation. On voit directement dans l'expression du flot que  $\partial_{t_1} \Psi(y, t) = X_1(\Psi(y, t))$ , c'est à dire que  $\Psi_*e_1 = X_1$ , où  $e_1, \dots, e_k$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ . En utilisant la commutation locale des flots, on observe que

$$\Psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{X_i}^{t_i} \circ \dots \circ \varphi_{X_{i-1}}^{t_{i-1}} \circ \varphi_{X_{i+1}}^{t_{i+1}} \circ \dots \circ \varphi_{X_k}^{t_k}(\psi(y)),$$

et donc que  $\partial_{t_i} \Psi(y, t) = X_i(\Psi(y, t))$ , c'est à dire que  $\Psi_* e_i = X_i$  pour tout  $i$ . L'inverse locale  $\phi$  de  $\Psi$  est la carte locale cherchée. ►

Considérons maintenant un champ de sous-espaces  $E(x)$  de rang  $k$ , c'est à dire la donnée, pour tout  $x \in M$ , d'un sous-espace vectoriel  $E(x)$  de  $T_x M$ . On suppose que ce champ est différentiable, c'est à dire qu'il est représenté dans une carte par une application différentiable à valeurs dans la Grassmannienne  $G(k, n)$ . Il est équivalent de dire que, au voisinage de tout point  $x_0 \in M$ , il existe des champs de vecteur différentiables  $X_1, \dots, X_k$  tels que les  $X_i(x)$  engendrent  $E(x)$  pour tout  $x$  voisin de  $x_0$ . Ce champ de sous-espaces est dit intégrable au voisinage de  $x_0$  si il existe une carte dans laquelle il est constant. Il engendre alors un feuilletage, voir la section 6.4.

**Théorème 8.13** (Frobenius). *Soit  $E(x)$  un champ de sous-espaces différentiable de dimension  $k$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un point  $x_0 \in M$  :*

1. *Le champ  $E(x)$  est intégrable au voisinage de  $x_0$ .*
2. *Le champ  $E(x)$  est, localement au voisinage de  $x_0$ , engendré par  $k$  champs de vecteurs qui commutent deux à deux.*
3. *Il existe  $k$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_k$  tangents à  $E$  dont les évaluations en  $x_0 \in M$  constituent une base de  $E(x_0)$ , et tels que  $[X_i, X_j] \in E$  au voisinage de  $x_0$ .*
4. *Si  $Z$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs tangents à  $E$ , alors leur crochet  $[Z, Y]$  est aussi tangent à  $E$  au voisinage de  $x_0$ .*

◀ L'équivalence entre 1 et 2 découle du théorème 8.12.

Il est évident que 2 implique 3.

Montrons que 3 implique 4. On écrit  $Y = \sum y_i X_i, Z = \sum z_i X_i$ , où  $y_i, z_i$  sont des fonctions régulières. Le crochet  $[Y, Z]$  est donc une somme de termes de la forme

$$[y_i X_i, z_j X_j] = y_i [X_i, z_j X_j] - z_j (X_j y_i) X_i = y_i z_j [X_i, X_j] + y_i (X_i z_j) X_j - z_j (X_j y_i) X_i \in E.$$

Montrons finalement que 4 implique 2. On considère pour ceci une submersion  $\psi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$  telle que  $d\psi_{x_0|E(x_0)}$  est un isomorphisme. L'application linéaire  $d\psi_x|E(x)$  est alors un isomorphisme pour tout  $x$  proche de  $x_0$ , et on définit les champs de vecteurs

$$Y_i(x) := (d\psi_x|E(x))^{-1}(e_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Comme dans la preuve du Théorème D'Ehresmann (5.15), les champs  $Y_i$  sont réguliers et vérifient  $\psi_* Y_i = e_i$ . On a donc  $\psi_* [Y_i, Y_j] = [e_i, e_j] = 0$ , c'est à dire que  $d\psi_x \cdot [Y_i, Y_j](x) = 0$ . L'hypothèse 4 implique que  $[Y_i, Y_j] \in E(x)$  et donc  $[Y_i, Y_j] = 0$  puisque  $d\psi_x$  est injective sur  $E(x)$ . ►

Considérons, sur  $\mathbb{R}^3$ , les champs  $X_1 = e_1, X_2 = e_2 + x_1 e_3$ . On a  $[X_1, X_2] = e_3$ . C'est un exemple classique où les hypothèses du théorème de Frobenius ne sont pas satisfaites, le champ de plans  $E(x)$  engendré par  $X_1$  et  $X_2$  n'est pas intégrable.

Dans le cas général d'un champ de sous-espaces de dimension  $k$  non nécessairement intégrable, ou plus généralement d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  de champs de vecteurs, le théorème de l'orbite donne l'existence d'orbites qui sont localement difféomorphes au produit d'un disque de dimension  $d$  et d'un ensemble dénombrable. L'espace tangent  $H(x) \subset T_x M$  de l'orbite de  $x$  contient l'espace  $E(x) = \text{Vect}(\mathcal{V}(x))$ . La structure des orbites implique de plus que le crochet de deux champs tangents aux orbites est un champ tangent aux orbites. On définit l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}\mathcal{V}$  engendrée par  $\mathcal{V}$  comme le plus petit espace vectoriel de champs de vecteurs contenant  $\mathcal{V}$  et invariant par crochet de Lie. Plus explicitement, on note  $\mathcal{L}^2\mathcal{V} := [\mathcal{V}, \mathcal{V}]$  l'espace des champs de la forme  $[X, Y]$ , avec  $X, Y \in \mathcal{V}$ . On définit alors récurrence,  $\mathcal{L}^i\mathcal{V} := [\mathcal{V}, \mathcal{L}^{i-1}\mathcal{V}]$ , et on a  $\mathcal{L}\mathcal{V} = \sum_i \mathcal{L}^i\mathcal{V}$ . On voit alors par récurrence que

$$H(x) \supset \mathcal{L}\mathcal{V}(x).$$

On conclut en particulier :

**Théorème 8.14** (Chow). *Soit  $M$  une variété connexe et  $\mathcal{V}$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$  telle que  $\mathcal{L}\mathcal{V}(x) = T_x M$  pour tout  $x$ . Alors l'orbite de tout point de  $M$  est égale à  $M$ , en définissant l'orbite du point  $x_0$  comme la réunion des images des courbes passant par  $x_0$  et tangentes au champ de sous-espaces  $E(x) = \text{Vect} \mathcal{V}(x)$  (qui n'est pas forcément de dimension constante)*

◀ Nous avons vu que cet énoncé découle du théorème de l'orbite. Nous en donnons cependant une preuve directe. Il suffit de démontrer que chaque point est dans l'intérieur de son orbite.

Pour illustrer la méthode de preuve, commençons par le cas simple où  $M$  est de dimension 3, et où il existe deux champs  $X_1$  et  $X_2$  au voisinage de  $x_0$  tels que  $(X_1(x_0), X_2(x_0), [X_1, X_2](x_0))$  est une base de  $T_{x_0}M$ . On considère alors la courbe  $\gamma(t)$  définie par

$$\gamma(t) = \varphi_2^{\sqrt{t}} \circ \varphi_1^{\sqrt{t}} \circ \varphi_2^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{t}}(x_0)$$

pour  $t \geq 0$  et

$$\gamma(t) = \varphi_1^{\sqrt{t}} \circ \varphi_2^{\sqrt{t}} \circ \varphi_1^{-\sqrt{t}} \circ \varphi_2^{-\sqrt{t}}(x_0)$$

pour  $t \leq 0$ . La courbe  $\gamma$  est contenue dans l'orbite de  $x_0$ , elle est  $C^1$ , et  $\gamma'(0) = [X_1, X_2](x_0)$ . L'application

$$(t_1, t_2, t) \mapsto \varphi_1^{t_1} \circ \varphi_2^{t_2} \circ \gamma(t)$$

est alors un difféomorphisme local en 0. Son image, qui est contenue dans l'orbite de  $x_0$ , contient donc un voisinage de  $x_0$ . Il n'est pas facile d'extrapoler directement sur l'argument ci-dessus pour tenir compte des crochets de Lie itérés, nous allons plutôt donner un argument indirect inspiré de la preuve du théorème de l'orbite.

On peut supposer, sans changer les orbites, que les champs de  $\mathcal{V}$  ont été rendus complets par reparamétrisation. On considère le groupe  $\mathcal{G}$  engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{V}$ , puis l'ensemble  $\mathcal{W}$  des champs de la forme  $g_*V, g \in \mathcal{G}, V \in \mathcal{V}$ .

On remarque que les flots des éléments de  $\mathcal{W}$  appartiennent à  $\mathcal{G}$ .

On définit finalement l'espace  $H(x) \subset T_xM$  engendré par  $\mathcal{W}(x)$  (les évaluations en  $x$  des champs de  $\mathcal{W}$ ). Les difféomorphismes de  $\mathcal{G}$  préservent  $H$ , c'est à dire que  $H(g(x)) = dg_x \cdot H(x)$  pour tout  $g \in \mathcal{G}$ .

Soit  $V$  un champ de  $\mathcal{V}$  et  $X$  un champ tangent à  $H$ . Le champ  $(\varphi_V^t)_*X$  est tangent à  $H$  pour tout  $t$  (car les difféomorphismes  $\varphi_V^t \in \mathcal{G}$  préservent  $H$ ) donc sa dérivée  $[V, X]$  aussi. On en conclut que les champs de  $\mathcal{L}\mathcal{V}$  sont tangents à  $H$ , et donc, sous les hypothèses du théorème de Chow, que  $H(x) = T_xM$  pour tout  $x$ .

Il existe donc des éléments  $W_1, \dots, W_d$  de  $\mathcal{W}$  dont les évaluations en  $x_0$  forment une base de  $T_{x_0}M$ . L'application

$$(t_1, \dots, t_d) \mapsto \varphi_{W_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{W_d}^{t_d}(x_0)$$

est un difféomorphisme local en 0, son image, qui est contenue dans l'orbite de  $x_0$ , est donc un voisinage de  $x_0$ . ►

**Exercice 8.8.** Dans le cas analytique, l'inclusion  $H(x) \supset \mathcal{L}\mathcal{V}(x)$  est une égalité.

Il suffit de démontrer que  $(\varphi_Y^t)_*X(x) \subset \mathcal{L}\mathcal{V}(x)$  pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{L}\mathcal{V}$  (revenir à la preuve du théorème de l'orbite).

On vérifie pour ceci que la courbe  $t \mapsto (\varphi_X^{-t})_*Y(x) \in T_xM$  est tangente à  $\mathcal{L}\mathcal{V}(x)$  à tous les ordres en 0. Ses dérivées successives sont en effet  $(\mathcal{L}_X)^k Y$ .

Soit  $G$  un sous groupe de Lie de  $Gl_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\mathfrak{g}$  l'espace tangent de  $G$  en l'identité et soit  $a$  une action différentiable de  $G$  sur une variété  $M$ . A tout vecteur  $v \in \mathfrak{g}$ , on associe le champ de vecteurs sur  $M$  défini par  $V_v(x) = \partial_g a(Id, x) \cdot v$ . Rappelons que  $\mathfrak{g}$  est un sous espace vectoriel de l'ensemble des matrices  $\mathfrak{g}$  invariant par le crochet de Lie  $[v, w] = vw - wv$  (produit de matrices). On en conclut que l'ensemble des champs  $V_v$  est invariant par crochet de Lie. Si  $G$  est connexe, alors le groupe  $a_g, g \in G$  est précisément le groupe  $\mathcal{G}$  engendré par les flots des champs  $V_v$ . On peut donc appliquer directement le théorème de l'orbite et conclure que les orbites  $a(G, x)$  vérifient sa conclusion pour tout  $x$  (avec  $H(x) = \partial_g a(Id, x) \cdot \mathfrak{g}$ ).

Si  $G$  n'est pas connexe, alors on considère la composante  $G_0$  de l'identité dans  $G$ . C'est un sous groupe distingué de  $G$ , qui est aussi une sous-variété. Le quotient  $G/G_0$  est discret, donc dénombrable. Chaque  $G$ -orbite est donc une réunion au plus dénombrable de  $G_0$ -orbites difféomorphes, elle vérifie donc les conclusions du théorème de l'orbite (avec le même espace tangent  $H(x)$  que ci-dessus).

### 8.3 Formes de Pfaff

Une forme différentielle de degré un, ou forme de Pfaff, sur la variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'une forme linéaire  $\alpha_x$  sur  $T_xM$ . On demande de plus que cette forme linéaire dépende régulièrement du point  $x$ , c'est à dire par exemple que la fonction  $x \mapsto \alpha_x \cdot V(x)$  soit différentiable pour tout champ de vecteurs  $x$ .

**Exercice 8.9.** Toute forme de Pfaff  $\alpha$  engendre une application linéaire  $A$  des champs de vecteurs vers les fonctions, qui est  $C^\infty(M)$ -linéaire, c'est à dire telle que  $A(fX) = fA(X)$ . Réciproquement, montrer que tout application linéaire de l'espace des champs de vecteurs  $C^\infty$  vers  $C^\infty(M)$  qui est  $C^\infty(M)$ -linéaire est engendré par une forme de Pfaff.

Pour toute fonction  $f$ , on définit la forme  $\alpha_x = df_x$ . Les formes de Pfaff de ce type sont dites exactes. Les formes localement exactes sont dites fermées.

Si  $\alpha$  est une forme de Pfaff sur  $M$  et si  $\psi : N \rightarrow M$  est une application différentiable, alors on définit la forme  $\psi^*\alpha$  sur  $N$  par

$$(\psi^*\alpha)_x = \alpha_{\psi(x)} \circ d\psi_x.$$

En particulier, si  $\psi$  est une paramétrisation locale de  $M$ , alors  $\psi^*\alpha$  est la représentation locale de  $\alpha$ . On remarque que, pour tout champ de vecteurs  $V$  sur  $M$ , on a

$$(\psi^*\alpha) \cdot (\psi_*^{-1}V) = (\alpha \cdot V) \circ \psi$$

c'est à dire qu'on peut calculer  $\alpha \cdot V$  dans les cartes. Comme  $\psi^*(df) = d(f \circ \psi)$ , être exacte ou fermée est invariant par difféomorphisme.

Les formes de Pfaff s'intègrent le long des courbes. Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est une courbe  $C^1$ , on définit  $\int_\gamma \alpha := \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) dt$ . Pour toute application  $\psi$ , on a  $\int_{\psi \circ \gamma} \alpha = \int_\gamma \psi^*\alpha$ . Dans le cas d'une forme exacte, on a  $\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$ .

De la même façon que le dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$  s'identifie à  $\mathbb{R}^n$  on pourrait penser qu'il y a peu de différences entre les champs de vecteurs et les formes de Pfaff. Mais ce n'est pas le cas. Par exemple, deux champs de vecteurs sont équivalents en des points non singuliers, mais il n'en est pas de même des formes de Pfaff : si toutes les formes de Pfaff étaient localement équivalentes, elles seraient toutes fermées, ce n'est pas le cas.

**Exercice 8.10.** Montrer que la forme  $\alpha = x_1 dx_2$  sur  $\mathbb{R}^2$  n'est pas fermée. En effet, si  $\alpha = df$ , alors  $\partial_{12}f = 1$  et  $\partial_{21}f = 0$ , ce qui contredit le théorème de Schwarz.

À toute forme de Pfaff  $\alpha$ , on associe le champ de sous-espaces  $K(x) = \ker \alpha_x$ . C'est un champ d'hyperplans si la forme ne s'annule pas. Réciproquement, tout champ d'hyperplans peut localement être représenté comme noyau d'une forme de Pfaff  $\alpha$  non nulle. Si les formes de Pfaff  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même champ de noyaux, alors il existe une fonction non nulle  $f$  telle que  $\alpha = f\beta$ .

**Propriété 8.15.** Soit  $\alpha$  une forme de Pfaff non nulle en  $x_0$ . Le champ de noyaux de  $\alpha$  est intégrable si et seulement si il existe des fonction  $f$  et  $g$  telles que  $\alpha = gdf$  au voisinage de  $x_0$ .

On dit parfois que  $g$  est un facteur intégrant de  $f$ . Le champ de noyau d'une forme fermée est donc intégrable.

◀ Si  $\alpha = gdf$ , alors  $df_{x_0}$  est non nul, donc  $f$  est la première coordonnée d'une carte locale  $\phi$  en  $x_0$ . La carte  $\phi$  redresse le champ  $K$ .

Si le champ  $K$  est redressé en le champ constant  $x_1 = 0$  dans la carte  $\phi$ , et si  $f$  est la première coordonnée de  $\phi$ , alors  $df$  et  $\alpha$  ont le même noyau, donc il existe une fonction  $g$  telle que  $\alpha = gdf$ . ▶

La thermodynamique classique offre un exemple célèbre. On décrit une système physique par des quantités macroscopiques  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a alors une forme  $\alpha$  qui donne les échanges de chaleurs, c'est à dire que si les quantités macroscopiques  $x$  du système évoluent au cours du temps (assez lentement pour rester en équilibre) à l'échelle microscopique) suivant une courbe  $\gamma(t)$ , alors l'intégrale  $\int_\gamma \alpha$  donne l'échange de chaleur total entre le système et son milieu. Les physiciens notent cette forme  $\delta Q$ .

Les évolutions  $\gamma(t)$  tangentes au noyau de  $\alpha$  sont les transformations adiabatiques. Si le champ de noyaux de la forme  $\alpha$  n'était pas intégrable, il existerait un état  $x_0$  depuis lequel on pourrait faire évoluer le système vers n'importe quel état  $x$  voisin de  $x_0$  par des transformations adiabatiques. En effet ou bien les hypothèses du théorème de Frobenius sont satisfaites en chaque point, ou bien il existe un point  $x_0$  et deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  tangents au noyau de  $\alpha$  tels que  $\alpha \cdot [X, Y] \neq 0$  en  $x_0$ , et donc au voisinage de  $x_0$ . On peut alors appliquer le théorème de Chow (qui dans ce cadre est plutôt dû à Carathéodory) à un voisinage de  $x_0$ .

Le second principe de la thermodynamique affirme que ce n'est pas le cas (sinon, on pourrait trouver une petite courbe fermée  $\gamma$  au voisinage de  $x_0$  le long de laquelle le bilan de chaleur  $\int_\gamma \alpha$  est non-nul). On conclut que le champ d'hyperplans  $\ker \alpha$  est intégrable, et que la forme  $\alpha$  admet localement un facteur intégrant, c'est à dire qu'il existe localement des fonctions  $T > 0$  et  $S$  telles que  $\alpha = TdS$ .

## 8.4 Complément : fibrés vectoriels

Un fibré vectoriel de rang  $k$  au dessus de la variété  $M$  est la donnée, pour chaque point  $x$  de  $M$ , d'une espace vectoriel  $F(x)$  de dimension  $k$ . On a alors un espace total  $E := \{(x, v), x \in M, v \in F(x)\}$  et une projection naturelle  $\pi : E \rightarrow M$ . On suppose de plus qu'est donné un espace vectoriel  $\mathcal{S}$  de sections de  $\pi$  qui vérifie :

Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe  $k$  sections  $s_1, \dots, s_k$  dans  $\mathcal{S}$  et un voisinage  $U$  de  $x_0$  telles que, pour chaque  $x \in U$ , les vecteurs  $s_i(x)$  forment une base de  $F(x)$  et tel que toute section  $s \in \mathcal{S}$  est, sur  $U$ , une combinaison linéaire à coefficients  $C^\infty$  des sections  $s_1, \dots, s_k$ . En particulier,  $\mathcal{S}$  est un module sur  $C^\infty(M)$ , c'est à dire que  $fs \in \mathcal{S}$  pour toute  $f \in C^\infty(M)$  et  $s \in \mathcal{S}$ .

On dit que le fibré est trivial sur  $U$  si il existe des sections  $s_1, \dots, s_k$  comme ci-dessus.

L'application

$$U \times \mathbb{R}^k \ni (x, t) \mapsto (x, \sum t_i s_i(x)) \in \pi^{-1}(U)$$

est alors bijective et linéaire dans les fibres, son inverse est appelé une trivialisation locale du fibré.

Il existe une unique structure de pré variété sur  $E$  telle que  $\pi$  est une submersion et telle que les sections de  $\mathcal{S}$  sont différentiables. Pour tout ouvert  $U$  de la base  $M$  qui est un ouvert de carte de  $M$  et qui est tel que le fibré est trivial au dessus de  $U$ , on a une paramétrisation

$$V \times \mathbb{R}^k \ni (y, t) \mapsto (\phi(y), \sum t_i s_i(\phi(y)))$$

de  $\pi^{-1}(U)$ , où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et où  $\phi : V \rightarrow U$  est un difféomorphisme. Ces paramétrisations forment un atlas de  $E$ .

**Exercice 8.11.** Soient  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$  deux fibrés vectoriels de base  $M$ . Soit  $g : E \rightarrow \tilde{E}$  une application différentiable qui envoie chaque fibre  $F(x) = \pi^{-1}(x)$  dans la fibre  $\tilde{F}(x) = \tilde{\pi}^{-1}(x)$  par une injection linéaire. Montrer que  $g$  est un plongement de  $E$  dans  $\tilde{E}$ .

Les plongements de l'exercice sont appelés plongements de fibré vectoriel au dessus de l'identité.

**Théorème 8.16.** Tout fibré vectoriel de rang  $k$  au dessus de la variété  $M$  admet un plongement de fibré vectoriel au dessus de l'identité à valeurs dans le fibré trivial  $M \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ . Son espace total est une variété différentiable.

On rappelle qu'un sous fibré équivalent à un sous-fibré d'un fibré trivial est dit de type fini. Tout fibré vectoriel de rang fini au dessus d'une variété est donc de type fini.

**Lemme 8.17.** Si  $\pi : E \rightarrow M$  est un sous fibré vectoriel de  $M \times \mathbb{R}^n$  de rang  $k$ , alors il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$  telle que l'application  $(x, v) \mapsto (x, L(v))$  est un plongement au dessus de l'identité de  $E$  dans  $M \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ .

◀ On suppose que  $k > 0$ . Soit  $SE \subset M \times \mathbb{R}^n$  l'ensemble des  $(x, v) \in E$  tels que  $|v| = 1$  (norme Euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ ). C'est une sous variété de  $E$ , de dimension  $d_M + k - 1$ , car 1 est une valeur régulière de l'application  $v \mapsto |v|^2$  sur chaque fibre  $F(x)$  et donc une valeur régulière de l'application  $(x, v) \mapsto |v|^2$  sur  $E$ .

Considérons maintenant l'application  $g : SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k}) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M+k}$  définie par

$$g(x, v, L) = L \cdot v.$$

C'est un submersion sur  $SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ , et  $g^{-1}(0)$  est donc une sous variété de  $SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$  de codimension  $d_M + k$ , c'est à dire de dimension strictement inférieure à la dimension de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ . Sa projection sur ce facteur est donc de mesure nulle, et il existe un point  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$  qui n'est pas dans cette projection. Pour un tel  $L$ , on voit que  $L|_{E(x)}$  est injective pour tout  $x$ , c'est à dire que l'application  $(x, v) \mapsto (x, L \cdot v)$  est un plongement. ▶

**Lemme 8.18.** Si  $\pi : E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel et si  $V$  est un ouvert relativement compact de  $M$ , alors il existe un plongement au dessus de l'identité de  $\pi^{-1}(V)$  à valeurs dans  $V \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ .

◀ On recouvre  $V$  par un nombre fini  $N$  d'ouverts  $V_i$  pour lesquels il existe une trivialisation  $\phi_i : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^k$ . On note  $h_i : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$  la seconde composante de  $\phi_i$ . On considère une partition de l'unité  $f^i$  subordonnée aux ouverts  $V_i$ . Les applications  $H_i(x, v) := f^i(x)h_i(x, v)$  sont étendues par 0 en dehors de  $\pi^{-1}(V_i)$ . L'application  $H : E \rightarrow (\mathbb{R}^k)^N$  ayant pour composantes les  $H_i$  est linéaire et injective dans chaque fibre. En effet, pour tout  $x \in M$ , il existe  $i$  tel que  $f_i(x) > 0$ , mais alors l'application  $H_i$  est injective sur la fibre  $F(x)$ . On a donc un plongement  $z \mapsto (\pi(z), H(z))$  de  $E$  dans  $M \times \mathbb{R}^{kN}$ . En appliquant le premier lemme, on en déduit l'existence d'un plongement linéaire dans les fibres à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_M+k}$ , de la forme  $z \mapsto (\pi(z), L \circ H(z))$ . ▶

**Lemme 8.19.** Si  $\pi : E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel sur la variété  $M$  alors il existe un plongement au dessus de l'identité de  $E$  dans  $V \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ .

◀ On considère une fonction propre  $g$  sur  $M$ , les ouverts  $U_i = g^{-1}(]i, i+2[)$  et une partition de l'unité  $f_i$  adaptée aux ouverts  $U_i$ . Pour chaque  $i$ , il existe une application linéaire dans les fibres  $\theta_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M+k}$  telle que  $z \mapsto (\pi(z), \theta_i(z))$  est un plongement. On prolonge  $\theta_i$  par 0 en dehors de  $\pi^{-1}(U_i)$ , et on considère les application  $\Theta := \sum_k \theta_{2k}$  (au plus un des termes de cette somme est non nul pour chaque point) et  $\tilde{\Theta} = \sum_k \theta_{2k+1}$ . L'application  $(\Theta, \tilde{\Theta}) : E \rightarrow \mathbb{R}^{2(d_M+k)}$  induit une injection linéaire sur chaque fibre. Au vu du premier lemme, il existe donc  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2(d_M+k)}, \mathbb{R}^{d_M+k})$  telle que  $L \circ (\Theta, \tilde{\Theta})$  induit une injection linéaire dans chaque fibre. ▶

Le fibré tangent  $TM$  d'une variété est le fibré dont les sections sont les champs de vecteurs, le fibré cotangent  $T^*M$  est le fibré dont les sections sont les formes de Pfaff.

## 9 Formes différentielles

### 9.1 Formes multilinéaires alternées.

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , on note  $A^k E$  l'espace des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $E$ . Il est pratique de définir aussi  $A^0 E = \mathbb{R}$ .

Pour  $k = 1$ ,  $A^1 E$  est le dual de  $E$ . Pour  $k = \dim E$ ,  $A^k E$  est de dimension 1. En particulier,  $A^k(\mathbb{R}^k)$  est engendré par le déterminant. Les  $k$ -formes non-nulles sur un espace de dimension  $k$  sont dites formes volumes.

Si  $L : E \rightarrow F$  est linéaire, alors pour tout  $k$  on définit l'application linéaire  $A^k L : A^k F \rightarrow A^k E$  par

$$(A^k L)\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Av_1, \dots, Av_k).$$

On la notera  $L^*$  au lieu de  $A^k L$  lorsqu'on ne souhaite pas insister sur le degré  $k$ . Si  $l_1, \dots, l_k$  sont des éléments de  $E^*$ , on définit

$$l_1 \wedge \dots \wedge l_k := L^* \omega \in A^k E$$

où  $L$  est l'application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^k$  dont les formes  $l_i$  sont les coordonnées, et  $\omega$  est la  $k$  forme déterminant sur  $\mathbb{R}^k$ . On a

$$l_1 \wedge \dots \wedge l_k(v_1, \dots, v_k) = \det(Lv_1, \dots, Lv_k) = \det((l_i(v_j))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}).$$

On remarque que l'application

$$(l_1, \dots, l_k) \mapsto l_1 \wedge \dots \wedge l_k$$

est linéaire et antisymétrique. Son image engendre linéairement  $A^k E$ . Si  $1 < k < d - 1$ , son image n'est pas égale à  $A^k E$ , on appelle décomposables les formes linéaires alternées de la forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ . La forme décomposable  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  est non nulle si et seulement si les formes linéaires  $l_i$  sont indépendantes dans  $E^*$ .

Le noyau  $\ker \alpha$  de la forme  $\alpha$  est défini comme l'ensemble des vecteurs  $v$  tels que la  $(k-1)$ -forme  $i_v \alpha$  est nulle.

**Propriété 9.1.** *Le noyau d'une  $k$ -forme non-nulle  $\alpha$  est de dimension au plus  $d - k$ . De plus, si ce noyau est de dimension  $d - k$ , alors la forme  $\alpha$  est décomposable, et elle est proportionnelle à  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  pour toute base  $(l_1, \dots, l_k)$  de l'orthogonal de  $\ker \alpha$ .*

◀ Soit  $F$  l'espace quotient de  $E$  par le noyau de  $\alpha$ , et  $\pi : E \rightarrow F$  la projection. On vérifie facilement qu'il existe une forme  $\beta$  sur  $F$  telle que  $\alpha = \pi^* \beta$ . Si  $\alpha$  est non nulle, alors  $\beta$  est non nulle ce qui implique que la dimension de  $F$  est supérieure ou égale à  $k$ . Si la dimension de  $F$  est égale à  $k$ , alors la forme  $\beta$  est décomposable, donc la forme  $\alpha$  l'est aussi. Si  $l_1, \dots, l_k$  est une base de l'orthogonal de  $\ker \alpha$ , alors il existe une base  $\ell_1, \dots, \ell_k$  de  $F^*$  telle que  $l_i = \pi^* \ell_i$ . Comme  $A^k F$  est de dimension 1, les formes  $\beta$  et  $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k$  sont proportionnelles, il en est donc de même des formes  $\alpha = L^* \beta$  et  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k = L^* \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k = L^*(\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k)$ .

Réciproquement, si  $\alpha$  est une forme décomposable non nulle, alors il existe une application linéaire surjective  $L : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  telle que  $\alpha = L^* \omega$  (forme déterminant sur  $k$ ). On vérifie alors facilement que le noyau de  $\alpha$  n'est autre que le noyau de  $L$ , donc de codimension  $k$ . ▶

On verra que toute  $(d-1)$ -forme sur  $\mathbb{R}^d$  est décomposable. On en déduit comme ci-dessus que le noyau d'une  $k$ -forme non décomposable est de codimension au moins  $k+2$ .

**Propriété 9.2.** *Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $E$  et soit  $l_i$  la base duale. Alors les éléments  $l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  forment une base de  $A^k E$ , dans laquelle chaque élément  $a \in A^k E$  se décompose en*

$$a = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}.$$

L'espace vectoriel  $A^k E$  est donc de dimension  $\binom{d}{k}$ .

◀ Pour calculer  $a(v_1, \dots, v_k)$ , on écrit  $v_i = \sum_j l_j(v_i) e_j$  et on décompose alors par multilinéarité

$$\begin{aligned} a(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} a(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) l_{j_1}(v_1) \cdots l_{j_k}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}}) l_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots l_{i_{\sigma(k)}}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} s(\sigma) l_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots l_{i_{\sigma(k)}}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) l_1 \wedge \cdots \wedge l_k(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition découle facilement de l'observation que, si  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  et  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  sont des suites différentes, alors  $l_{i_1} \wedge \cdots \wedge l_{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ . ▶

On constate que  $L^* l_1 \wedge \cdots \wedge L^* l_k = L^*(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k)$  pour  $l_i \in E^*$ . Si  $L$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$  et si  $\dim E = k$ , alors  $A^k L$  est la multiplication par  $\det L$ , ce que l'on peut réécrire  $L^* \alpha = (\det L) \alpha$ . Plus généralement, si  $L : E \rightarrow F$  est linéaire, si  $(e_i)$  est une base de  $E$  et  $(f_j)$  une base de  $F$ , alors les coefficients de  $A^k L$  dans les bases  $f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}$  et  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$  sont les déterminants des matrices  $k \times k$  extraites de la matrice représentant  $L$ .

Le  $k$ -produit

$$(E')^k \ni l_1, \dots, l_k \mapsto l_1 \wedge \cdots \wedge l_k \in A^k E'$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante.

**Propriété 9.3.** L'application  $M : (A^k E')' \rightarrow A^k(E')$  qui, à une forme linéaire  $h$  sur  $A^k E'$ , associe la forme  $k$ -linéaire sur  $E'$

$$M(h) : l_1, \dots, l_k \mapsto h \circ (l_1 \wedge \cdots \wedge l_k)$$

est un isomorphisme.

◀ Toute forme linéaire  $h$  telle que  $M(h) = 0$  est nulle sur les formes décomposables. Comme les formes décomposables engendrent linéairement  $A^k E'$ , ceci implique que  $h = 0$ . L'application  $M$  est donc injective. Comme les espaces  $(A^k E')'$  et  $A^k(E')$  ont même dimension, c'est un isomorphisme. ▶

**Définition 9.4.** Il existe une unique application bilinéaire, pour  $k \geq 0$ , et  $l \geq 0$ ,

$$A^k E' \times A^l E' \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \in A^{k+l} E'$$

telle que

$$(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k) \wedge (l_{k+1} \wedge \cdots \wedge l_{k+l}) = l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$$

pour toutes formes linéaires  $l_1, \dots, l_{k+l}$ . On l'appelle produit extérieur, il est associatif et vérifie

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Dans le cas  $k = 0$ ,  $\alpha$  est un nombre réel et  $\alpha \wedge \beta = \alpha \beta$ .

◀ L'existence est une conséquence de la propriété universelle du  $k$ -produit. En effet, si on fixe les formes  $l_{k+1}, \dots, l_{k+l}$  et  $k+l$  vecteurs  $v_1, \dots, v_{k+l}$ , alors l'application

$$l_1, \dots, l_k \mapsto l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}(v_1, \dots, v_{k+l})$$

est une forme  $k$ -linéaire antisymétrique sur  $(E')^k$ . Il existe donc une unique forme linéaire  $h$  sur  $A^k E'$  telle que

$$h(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k) = l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}(v_1, \dots, v_{k+l})$$

pour toutes  $l_1, \dots, l_k$ . Pour tout  $\alpha \in A^k E'$ , l'application

$$(l_{k+1}, \dots, l_{k+l}) \mapsto h(\alpha)$$

est une forme  $l$ -linéaire antisymétrique. On peut donc de la même façon l'étendre de façon unique en une forme linéaire sur  $A^l E'$  (qui dépend des vecteurs  $v_1, \dots, v_{k+l}$ ). On a ainsi défini une forme bilinéaire antisymétrique  $\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l})$  pour tous  $v_1, \dots, v_{k+l}$ . Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont des sommes finies de formes décomposables,

l'application  $\alpha \wedge \beta$  est une somme finie d'applications  $(k+l)$ -linéaires antisymétriques, elle est donc elle-même linéaire et antisymétrique.

La formule de commutation découle de sa validité pour les formes décomposables. Le signe  $(-1)^{kl}$  est celui de la permutation  $(1, \dots, k+l) \mapsto (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$ . ►

La formule suivante étant satisfaite par les formes décomposables, elle l'est par toutes les formes :

$$L^*(\alpha \wedge \beta) = (L^*\alpha) \wedge (L^*\beta).$$

Le produit extérieur  $\wedge : A^k E \times A^l E \rightarrow A^{k+l} E$  peut aussi être défini par les formules

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1 \dots v_{k+l}) &:= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} s(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in Q(k,l)} s(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}), \end{aligned}$$

où  $Q(k,l) \subset \mathfrak{S}_{k+l}$  est l'ensemble des permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k)$  et  $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+l)$ ; cet ensemble contient un élément dans chaque classe à droite de  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l$ . Pour montrer que cette formule donne bien le produit extérieur, il suffit de le vérifier pour les formes décomposables. On laisse cette vérification en exercice.

Étant donné une  $k$ -forme alternée  $\alpha$  sur  $E$  et un vecteur  $v \in E$ , on définit le produit intérieur  $i_v \alpha$  comme la  $(k-1)$  forme alternée

$$i_v \alpha(v_1 \dots v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

### Propriété 9.5.

$$\begin{aligned} i_v(l_1 \wedge \dots \wedge l_k) &= \sum_i (-1)^{i+1} l_i(v) l_1 \wedge \dots \wedge l_{i-1} \wedge l_{i+1} \wedge \dots \wedge l_k. \\ i_v(\alpha \wedge \beta) &= (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_v \beta. \end{aligned}$$

◀ La première égalité est le développement du déterminant

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_k)(v, v_2, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} l_1(v) & l_1(v_2) & \dots & l_1(v_k) \\ l_2(v) & l_2(v_2) & \dots & l_2(v_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_k(v) & l_k(v_2) & \dots & l_k(v_k) \end{vmatrix}$$

par rapport à la première colonne. La seconde égalité découle facilement de la première. ►

L'ensemble des  $k$ -formes décomposables est un cône. Pour l'étudier, on considère son image  $N$  dans le projectif  $G(1, A^k E)$ .  $N$  est donc l'ensemble des droites vectorielles de  $A^k E$  dirigées par des formes décomposables non nulles. On fixe une base et on identifie  $E$  à  $\mathbb{R}^d$ . Le groupe orthogonal  $O(d)$  agit sur  $G(1, A^k \mathbb{R}^d)$  par  $(O, \alpha) \mapsto (O^{-1})^* \alpha$ . Comme  $O(d)$  est compact cette action est propre, ses orbites sont des variétés. La trace  $N$  des formes décomposables sur  $G(1, A^k \mathbb{R}^d)$  est une orbite de cette action, c'est donc une variété. Le groupe isotrope des transformations qui fixent  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  est le groupe  $O(k) \times O(d-k)$  des transformations orthogonales qui fixent  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ . La variété  $N$  est donc difféomorphe à la grassmannienne  $G(k, d)$ , ou à la Grassmannienne  $G(d-k, d)$ .

On construit directement une bijection de  $G(k, d)$  dans  $N$  de la façon suivante : étant donné  $F \in G(d-k, d)$  on prend une base  $l_1, \dots, l_k$  de l'orthogonal de  $F$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$  et on associe à  $F$  la droite vectorielle dirigée forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ , qui est non-nulle. Cette droite ne dépend pas du choix de la base (mais la forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  en dépend, à un facteur près). Le passage par l'action du groupe orthogonal ci-dessus permet de montrer sans effort que l'application que nous venons de définir est bien un difféomorphisme.

L'ensemble des formes décomposables non nulles est donc une sous-variété de  $A^k E$  de dimension  $1 + k(d-k)$ . On vérifie que  $1 + k(d-k) < \binom{d}{k}$  sauf si  $k \leq 1$  ou  $k \geq d-1$ .

Il est évident que toutes les 1-formes sont décomposables.

Il en est de même des  $(d-1)$ -formes sur  $\mathbb{R}^d$ . Notons en effet  $\omega$  la forme déterminant sur  $\mathbb{R}^d$ . L'application  $\mathbb{R}^d \ni v \mapsto i_v \omega \in A^{d-1} \mathbb{R}^d$  est injective, donc au vu des dimensions, c'est un isomorphisme. Explicitement, si  $\alpha$  est une  $(d-1)$ -forme, elle s'écrit

$$\alpha = \sum_i a_i \beta_i = i_v \omega,$$

où  $\beta_i$  est la  $(d-1)$ -forme  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d$ , où  $v$  est le vecteur  $(a_1, -a_2, a_3, \dots, (-1)^{d+1}a_d)$ . En particulier, le vecteur  $v$  appartient au noyau de  $\alpha$ , qui est donc de dimension  $1 = d - (d-1)$ . On conclut par le lemme 9.1 que la forme  $\alpha$  est décomposable.

Soit  $E$  un espace Euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\pi_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Pour tout  $k$ , l'application  $\pi_F^* : A^k F \rightarrow A^k E$  est injective, puisque la restriction à  $F$  de  $\pi^* \alpha$  est égale à  $\alpha$ . Elle réalise donc une bijection entre l'espace  $A^k F$  et son image, notée  $A_F^k(E)$ . L'application  $F \mapsto A_F^k(E)$  est différentiable de la variété  $G(d, E)$  des sous-espaces de dimension  $d$  dans  $E$  à valeurs dans la grassmannienne  $G(b, A^k E)$  avec  $b = \binom{n}{k}$ .

En effet l'application  $\pi \mapsto \pi^*$  est linéaire donc différentiable de  $\mathcal{L}(E, E)$  dans  $\mathcal{L}(A^k E, A^k E)$ . L'image de la grassmannienne  $G(d, E) \subset \mathcal{L}(E, E)$  (rappelons que l'on identifie les sous-espaces aux projections orthogonales sur ces sous-espaces) est contenue dans l'ouvert  $\mathcal{L}_b(A^k E, A^k E)$  des applications linéaires de rang  $b = \binom{n}{k}$ , et l'application qui a un élément de  $\mathcal{L}_b(A^k E, A^k E)$  associe son image est différentiable.

## 9.2 Formes différentielles

Une  $k$ -forme différentielle sur la variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'une forme  $k$ -linéaire alternée  $\alpha_x$  sur  $T_x M$ . On suppose de plus que  $\alpha_x$  dépend régulièrement de  $x$ , c'est à dire que, étant donné  $k$  champs de vecteurs différentiables  $X_1, \dots, X_k$  sur  $M$ , la fonction  $x \mapsto \alpha_x(X_1, \dots, X_k)$  est différentiable. Il est pratique d'assimiler les fonctions à des 0-formes.

Il existe un unique fibré vectoriel  $A^k(TM)$  au dessus de  $M$  dont les fibres sont les espaces  $A^k T_x M$  et dont les sections différentiables sont les formes différentielles de degré  $k$ . Les formes de Pfaff sont les formes différentielles de degré un.

Une  $k$ -forme différentielle  $\alpha$  engendre donc une application  $\mathbb{R}$ -multilinéaire alternée sur l'espace des champs de vecteurs dans  $C^\infty(M)$ . Réciproquement, une telle application multilinéaire alternée  $a$  "vient" d'une forme différentielle si et seulement si elle vérifie

$$a(fX_1, X_2, \dots, X_k) = fa(X_1, \dots, X_k)$$

pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  (la preuve est la même que pour les formes de Pfaff).

On note  $\Lambda^k M$  l'ensemble des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ . On définit fibre à fibre le produit  $\wedge : \Lambda^k M \times \Lambda^l M \rightarrow \Lambda^{k+l} M$ .

Si  $\varphi : M \rightarrow N$  est une application différentiable et si  $\alpha$  est une  $k$ -forme sur  $N$ , alors on définit la forme  $\varphi^* \alpha$  sur  $M$  par

$$(\varphi^* \alpha)_x = A^k(d\varphi_x) \alpha_{\varphi(x)}$$

c'est à dire

$$(\varphi^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\varphi(x)}(d\varphi_x \cdot v_1, \dots, d\varphi_x \cdot v_k).$$

On voit que  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$  et on rappelle que  $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$  pour toute fonction  $f$ . La propriété suivante découle de l'étude ponctuelle des  $k$ -formes linéaires :

**Propriété 9.6.**  $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta$ .

Une  $k$ -forme différentielle est dite décomposable si elle s'écrit  $gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k$ . Si  $\alpha$  est décomposable, alors  $\varphi^* \alpha$  l'est aussi puisque

$$\varphi^*(gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (\varphi^* g)(\varphi^* df_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* df_k) = (g \circ \varphi)d(f_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi).$$

Toute  $k$ -forme différentielle sur  $\mathbb{R}^d$  est de la forme

$$\alpha(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

où  $dx_i$  désigne la forme linéaire  $l_i$  de la base duale canonique (qui est aussi la forme  $df$  pour  $f = x_i$ ). C'est donc une somme finie de formes décomposables.

Si  $\alpha$  est une forme sur  $M$  et si  $\varphi$  est une paramétrisation locale de  $M$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $\varphi^* \alpha$  est une forme sur  $\mathbb{R}^d$ , c'est donc une somme finie de formes décomposables. On en déduit que  $\alpha$  est localement une somme finie de formes décomposables. En utilisant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de  $M$  par des disques plongés, on conclut :

**Proposition 9.7.** *Toute  $k$ -forme différentielle sur la variété  $M$  est une somme localement finie de formes décomposables.*

La proposition suivante sera utile :

**Proposition 9.8.** Soit  $\alpha$  une forme décomposable non nulle en  $x_0$ . Considérons deux décompositions  $\alpha = f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$  et  $\alpha = f d\tilde{g}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{g}_k$  au voisinage de  $x_0$ . Alors il existe un difféomorphisme local  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  tel que, au voisinage de  $x_0$ ,

$$(\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_k(x)) = \phi(g_1(x), \dots, g_k(x)).$$

En conséquence,

$$(d\tilde{g}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{g}_k)_x = \det(d\phi(g_1(x), \dots, g_k(x)))(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)_x.$$

◀ Considérons le champ de sous-espaces de dimension  $d - k$  donné par  $H(x) = \ker \alpha_x$ . Ce champ est intégrable, ses feuilles locales sont les fibres de la submersion  $\psi : M \ni x \mapsto (g_1(x), \dots, g_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ . Ce sont aussi les fibres de la submersion  $\tilde{\psi} : M \ni x \mapsto (\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ . Soit  $N$  un petit disque de dimension  $k$  transverse à  $H(x_0)$ . La restriction à  $N$  de chacune des submersions  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  est un difféomorphisme sur son image. L'application  $\phi := \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$  convient. ▶

On dit que  $\alpha(t), t \in \mathbb{R}$  est une famille différentiable de  $k$  formes sur  $M$  si, pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha(t)$  est une  $k$ -forme sur  $M$ , et si, pour tous champs de vecteurs différentiables  $X_1, \dots, X_k$ , la fonction

$$(t, x) \mapsto \alpha(t)_x \cdot (X_1(x), \dots, X_k(x))$$

est différentiable sur  $\mathbb{R} \times M$ . Pour chaque  $x \in M$ , la courbe  $t \mapsto \alpha(t)_x$  est donc différentiable sur  $T_x M$ . On définit la  $k$ -forme linéaire sur  $T_x M$

$$\frac{d}{dt} \alpha(t)_x = \alpha'(t)_x.$$

Si  $X_1, \dots, X_k$  sont des champs de vecteurs, alors

$$\alpha'(t)_x(X_1(x), \dots, X_k(x)) = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(t)_x(X_1(x), \dots, X_k(x))),$$

c'est une fonction différentiable, donc  $\alpha'(t)$  est un  $k$ -forme différentiable sur  $M$ . Dans  $\mathbb{R}^d$ , les familles différentiables de  $k$ -formes s'écrivent

$$\alpha(t) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(t, x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

et alors

$$\alpha'(t) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}}{\partial t}(t, x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Sur une variété, toute famille régulière de  $k$ -forme s'écrit donc localement comme une somme finie de familles de la forme  $f(t, x)\beta$  où  $\beta$  est une forme indépendante de  $t$ .

Étant donné un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ , on définit l'opérateur  $\mathcal{L}_X$  sur  $\Lambda^k M$  par

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_x = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_X^s)^* \alpha)_x.$$

On a donc

$$\partial_t (\varphi_X^t)^* \alpha = (\varphi_X^t)^* (\mathcal{L}_X \alpha) = \mathcal{L}_X ((\varphi_X^t)^* \alpha).$$

On remarque que, dans le cas où  $\alpha$  est de degré 0, c'est à dire une fonction  $f$ , on a  $(\varphi_X^s)^* f = f \circ \varphi_X^s$  et l'opérateur  $\mathcal{L}_X$  coïncide avec celui que nous avons déjà défini. On déduit de la propriété 9.6 par bilinéarité que :

**Propriété 9.9.**  $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$ .

**Propriété 9.10.** Pour toute fonction  $f$  on a  $\mathcal{L}_X f = df \cdot X$  et  $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$ .

◀ La première égalité est claire. Considérons pour montrer la seconde la fonction  $g(t, x) = f \circ \varphi^t(x)$ . On a

$$\mathcal{L}_X(df)_x = \partial_t|_{t=0} ((\varphi_X^t)^*(df))_x = \partial_t(\partial_x g)(0, x) = \partial_x \partial_t g(0, t) = d(\mathcal{L}_X f)_x. \blacktriangleright$$

Les deux propriétés précédentes caractérisent l'opérateur  $\mathcal{L}_X$ .

**Propriété 9.11.** Soit  $\psi : M \rightarrow N$  une application différentiable, et  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs sur  $M$  en  $N$  tels que  $Y = \psi_* X$ . Alors  $\psi^*(\mathcal{L}_Y \alpha) = \mathcal{L}_X(\psi^* \alpha)$  pour toute forme  $\alpha$  sur  $N$ .

◀  $\partial_t|_{t=0} ((\varphi_X^t)^* \psi^* \alpha) = \partial_t|_{t=0} ((\psi \circ \varphi_X^t)^* \alpha) = \partial_t|_{t=0} ((\psi \circ \varphi_X^t)^* \alpha) = \partial_t|_{t=0} ((\varphi_Y^t \circ \psi)^* \alpha) = \partial_t|_{t=0} (\psi^* (\varphi_Y^t)^* \alpha) = \psi^* (\mathcal{L}_Y \alpha)$ . ▶

**Propriété 9.12.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs, on a les identités

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \quad , \quad i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X.$$

◀ On vérifie ces inégalités pour les formes  $\alpha = fdg$ , ce qui est un calcul direct. On constate alors que ces relations sont satisfaites par la forme  $\alpha \wedge \beta$  si elles sont satisfaites par les formes  $\alpha$  et  $\beta$ . On conclut par récurrence qu'elles sont satisfaites par toute forme décomposable, donc par toute forme. ▶

On montre de la même façon la relation suivante :

$$\mathcal{L}_f X \omega = f \mathcal{L}_X \omega + (\mathcal{L}_X f) \omega.$$

**Exercice 9.1.** Montrer que, si  $\alpha(t)$  est une famille différentiable de  $k$ -formes sur  $M$ , il existe une  $k$ -forme  $\hat{\alpha}$  sur  $\mathbb{R} \times M$  telle que  $\alpha(t) = J_t^* \hat{\alpha}$ , où  $J_t(x) = (t, x)$ . Montrer que  $\alpha'(t) = J_t^* \mathcal{L}_\tau \hat{\alpha}$ , où  $\tau = (1, 0) \in T_{(t,x)}(\mathbb{R} \times M) = T_t \mathbb{R} \times T_x M$ .

Il existe un unique fibré vectoriel au dessus de  $M$ , noté  $A^k TM$ , dont la fibre en  $x$  est  $A^k(T_x M)$  et dont les sections sont les  $k$ -formes différentielles. L'application  $(x, \alpha) \mapsto (x, \pi_x^* \alpha)$ , où  $\pi_x$  est la projection orthogonale sur  $T_x M$  est un plongement de  $A^k TM$  dans le fibré produit  $M \times A^k \mathbb{R}^D$ . On a vu que l'application qui, au point  $x \in M$ , associe la fibre  $F(x) = \text{Im}(\pi_x^*) \subset G(b, A^k \mathbb{R}^d)$  est différentiable.

### 9.3 Intégration et formule de Stokes sur le cube.

On peut intégrer les  $d$ -formes différentielles sur  $\mathbb{R}^d$ . En définissant la  $d$ -forme de référence  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ , on peut écrire toute  $d$ -forme  $\alpha$  sous la forme  $\alpha_x = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ . Dans le cas où  $\alpha$  est à support compact, on définit alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx,$$

où le terme de droite est l'intégrale de la fonction  $a$  sur  $\mathbb{R}^n$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx$ . Plus généralement, pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ , et toute forme  $\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}^d$  (ou sur un voisinage de  $K$ ), on définit

$$\int_K \alpha := \int_K a(x) dx.$$

Cette définition est moins naïve qu'il n'y paraît au vu de la proposition suivante. On dit que le difféomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^d$  (ou entre ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ) préserve l'orientations si  $\det d\varphi > 0$  en tout point.

**Proposition 9.13.** Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\alpha$  une forme différentielle sur  $V$ , et  $K$  un compact contenu dans  $V$ . Soit  $\varphi : W \rightarrow V$  un difféomorphisme qui préserve l'orientation, alors

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_K \alpha.$$

◀ En écrivant  $\alpha$  sous la forme  $\alpha_x = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ , on a

$$(\varphi^* \alpha)_x = (\det d\varphi_x) a(\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

On a donc  $\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} (\det d\varphi_x) a(\varphi(x)) dx$ , et, comme  $\varphi$  préserve l'orientation

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} |\det d\varphi_x| a(\varphi(x)) dx = \int_K a(x) dx,$$

où la dernière égalité est la formule de changement de variables dans les intégrales multiples. ▶

Considérons maintenant un espace vectoriel  $E$  de dimension  $d$  et une  $d$ -forme  $\alpha$  sur  $E$  à support compact. Pour définir l'intégrale de la forme  $\alpha$ , on peut identifier  $E$  à  $\mathbb{R}^d$  au moyen d'une base. Toutefois, le signe de l'intégrale dépend de la base choisie.

On dit que deux bases  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  de  $E$  ont même orientation si la matrice de changement de base a un déterminant positif, ce qui est équivalent au fait que les  $d$ -formes  $l_1 \wedge \dots \wedge l_d$  et  $\tilde{l}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{l}_d$  sont positivement proportionnelles ( $l_i, \tilde{l}_i$  sont les bases duales).

L'ensemble des bases de  $E$  est partitionné en deux classes, qui sont telles que deux bases de la même classe ont la même orientation. Chacune des ces classes est une orientation de  $E$ . L'espace  $E$  est dit orienté si il est muni d'une

orientation. Les bases appartenant à l'orientation sont alors dites bases orientées. Il y a une bijection canonique entre les orientations de  $E$  et les composantes connexes de  $A^d E - \{0\}$ .

Chaque base de  $E$ , ou chaque forme volume de  $E$  détermine une orientation de  $E$ . On oriente en général l'espace  $\mathbb{R}^d$  par la base canonique, ou ce qui est équivalent par la  $d$ -forme déterminant.

Si  $E$  est un espace vectoriel orienté, et si  $\alpha$  est une  $d$ -forme sur  $E$ , alors on définit

$$\int_E \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_{(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d)}(e_1, \dots, e_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

Cette intégrale ne dépend pas du choix de la base orientée.

Considérons le cube  $C = [0, 1]^d$ . Il a  $2d$  faces que nous notons  $C_1^0 = \{0\} \times [0, 1]^{d-1}$ ,  $C_1^1 = \{1\} \times [0, 1]^{d-1}$ ,  $C_2^0 = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]^{d-2}$ , etc.. En notant  $\omega_i$  la forme  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d$ , toute  $(d-1)$ -forme  $\alpha$  s'écrit  $\sum_i a_i(x) \omega_i$ . On pose

$$\int_{C_i^0} \alpha := \int_{[0,1]^{d-1}} (J_i^0)^* \alpha = \int_{[0,1]^{d-1}} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d$$

où  $J_i^t$  est l'application de  $\mathbb{R}^{d-1}$  dans  $\mathbb{R}^d$  donnée par  $(y_1, \dots, y_{d-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, t, y_i, \dots, y_d)$ .

$$\int_{C_i^1} \alpha := \int_{[0,1]^{d-1}} (J_i^1)^* \alpha = \int_{[0,1]^{d-1}} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d.$$

Dans les intégrales ci-dessus, nous avons implicitement fait le choix d'orienter la face  $C_i^j$  selon la base

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d).$$

Ce choix d'orientation ne tient pas compte de la position de  $C_i^j$  en tant que bord du cube  $[0, 1]^d$ , et on va la modifier en une orientation plus cohérente géométriquement. Pour les faces  $C_i^1$ , le vecteur  $e_i$  pointe vers l'extérieur du domaine d'intégration, et on dit qu'une base  $b_1, \dots, b_{d-1}$  de l'espace tangent à  $C_i^1$  est orientée si la base  $e_i, b_1, \dots, b_{d-1}$  est orientée dans  $\mathbb{R}^d$ . C'est donc bien l'orientation ci-dessus pour  $i$  impair, et l'orientation opposée pour  $i$  pair. Pour les faces  $C_i^0$  au contraire, c'est le vecteur  $-e_i$  qui pointe vers l'extérieur du domaine, et on dit qu'une base  $b_1, \dots, b_{d-1}$  de l'espace tangent à  $C_i^0$  est orientée si la base  $-e_i, b_1, \dots, b_{d-1}$  est orientée dans  $\mathbb{R}^d$ . C'est donc l'orientation ci-dessus pour  $i$  pair, et l'orientation opposée pour  $i$  impair.

On définit ainsi l'intégrale de  $\alpha$  sur le bord de  $C$  par

$$\int_{\partial C} \alpha := \sum_{i=1}^d (-1)^i \left( \int_{C_i^0} \alpha - \int_{C_i^1} \alpha \right).$$

Comme

$$a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d) - a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) = \int_0^1 \partial_i a_i(x_1, \dots, x_d) dx_i,$$

on obtient

$$\int_{\partial C} \alpha = \int_C \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \partial_i a_i(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

En notant  $d\alpha$  la  $d$ -forme

$$d\alpha := \left( \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \partial_i a_i(x_1, \dots, x_d) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

on a démontré :

**Proposition 9.14.**  $\int_{\partial C} \alpha = \int_C d\alpha$

La formule est aussi vraie (même preuve) en remplaçant le cube  $C$  par n'importe quel cube  $x_0 + \epsilon C$ , avec la même forme  $d\alpha$ . Ces formules de Stokes sur les cubes déterminent la forme  $d\alpha$  (car l'intégrale d'une fonction continue sur tous les cubes  $x_0 + \epsilon C$  détermine cette fonction).

La formule de Stokes sur les cubes implique aussi la formule de Stokes sur le demi-plan  $H^d = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

**Proposition 9.15.** Pour toute  $(d-1)$ -forme  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^d$  à support compact, on a

$$\int_{H^d} d\alpha = \int_{\partial H^d} \alpha := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (J_1^0)^* \alpha$$

Dans cette formule, le bord  $\partial H^d$  est orienté par la base  $e_2, \dots, e_d$  conformément à la règle générale évoquée ci-dessus. L'application  $J_1^0 : \mathbb{R}^{d-1} \ni y \rightarrow (0, y) \in \partial H^d$  préserve donc l'orientation.

Revenons à la définition de la différentielle  $d : \Lambda^{d-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \Lambda^d(\mathbb{R}^d)$ . On constate d'abord que

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^d \partial_i a_i(x_1, \dots, x_d) dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d \\ &= \sum_{i=1}^d da_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d. \end{aligned}$$

Ce qui, au vu de la linéarité de  $d$ , se résume en

$$d(a_i \omega_i) = da_i \wedge \omega_i.$$

On montre aussi la formule, pour toute fonction  $f$  et  $(d-1)$ -forme  $\alpha$  :

$$d(f\alpha) = f d\alpha + df \wedge \alpha.$$

On rappelle que toute  $d-1$ -forme sur  $\mathbb{R}^d$  s'écrit  $\alpha = i_X \omega$  avec un champ de vecteurs  $X$ .

**Propriété 9.16.**

$$d(i_X \omega) = \mathcal{L}_X \omega =: (\operatorname{div} X) \omega$$

La seconde égalité est la définition de la divergence  $\operatorname{div} X$  de  $X$ , qui est une fonction sur  $\mathbb{R}^d$ .

◀ Il suffit de le montrer pour les champs de la forme  $X = f(x)e_i$ . Alors,  $i_X \omega = f(x)\omega_i$ , donc  $d(i_X \omega) = df \wedge \omega_i$ . D'autre part,  $\mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_{f e_i} \omega = f \mathcal{L}_{e_i} \omega + (\partial_i f) \omega = (\partial_i f) \omega$ . ▶

On obtient, si  $X = \sum_i X_i e_i$ ,

$$\operatorname{div} X = \sum_i \partial X_i / \partial x_i,$$

ce qui une définition souvent donnée pour la divergence d'un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$ .

La propriété précédente a été énoncée dans le cas de la forme déterminant  $\omega$ . La relation

$$d(i_X \beta) = \mathcal{L}_X \beta$$

est en fait valable pour toute  $d$ -forme différentielle  $\beta$ . En effet, si  $\beta$  est une  $d$ -forme, elle s'écrit  $\beta = b\omega$  avec une fonction  $b$ . En remarquant que  $db \wedge \omega = 0$ , donc  $(i_X db) \wedge \omega = db \wedge i_X \omega$ , on obtient

$$di_X \beta = d(bi_X \omega) = db \wedge i_X \omega + b \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X b \omega + b \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X \beta.$$

**Propriété 9.17.** Pour toute application  $\varphi : \mathbb{R}^d \ni U \rightarrow \mathbb{R}^d$  et toute forme  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^d$ , on a  $d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha)$ .

◀ En un point  $x_0$  où  $d\varphi$  n'est pas inversible, les deux membres sont nuls. Il suffit donc de considérer le cas où  $\varphi$  est un difféomorphisme. Notons  $\beta$  la forme  $\varphi^* \alpha$ , et  $Y$  le champ de vecteurs  $\varphi_*^{-1} X$ . On a

$$d(\varphi^*(i_X \alpha)) = d(i_Y \beta) = \mathcal{L}_Y \beta = \varphi^*(\mathcal{L}_X \alpha). \quad \blacktriangleright$$

**Propriété 9.18.** Pour toutes fonctions  $f, g_2, \dots, g_d$ , on a

$$d(f dg_2 \wedge \dots \wedge dg_d) = df \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_d.$$

◀ On considère l'application  $F = (f, g_2, \dots, g_d)$ , de sorte que  $\alpha = f dg_2 \wedge \dots \wedge dg_d = F^*(x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d)$ . On a alors  $d\alpha = F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = df \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_d$ . ▶

Le théorème de Stokes se reformule comme théorème de la divergence :

$$\int_C \operatorname{div} X = \int_{\partial C} \langle N, X \rangle$$

Dans cette égalité,  $N$  désigne le vecteur normal unitaire sortant au bord, et les intégrales sont prises par rapport aux mesures de Lebesgue  $d$  dimensionnelles sur  $C$  et  $(d-1)$ -dimensionnelle sur les faces. C'est la formule de Stokes sur  $C$  appliquée à la forme  $\alpha = i_X \omega$ . Si  $X = \sum_i X_i e_i$ , alors  $\alpha = \sum_i a_i \omega_i$  avec  $a_i = (-1)^i X_i$ . La normale sortante sur la face  $C_i^0$  est  $-e_i$ , et c'est  $e_i$  sur la face  $C_i^1$ , on a donc  $\langle N, X \rangle = X_i = (-1)^{i+1} a_i$  sur  $C_i^1$  et  $\langle N, X \rangle = -X_i = (-1)^i a_i$  sur  $C_i^0$ , si bien que

$$\int_{\partial C} \alpha := \sum_{i=1}^d (-1)^i \left( \int_{C_i^0} \alpha - \int_{C_i^1} \alpha \right) = \sum_i \left( \int_{C_i^0} \langle N, X \rangle + \int_{C_i^1} \langle N, X \rangle \right).$$

Pour finir, rappelons la définition d'un autre opérateur classique, le rotationnel. Le rotationnel d'un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ . On utilise à nouveau que le produit intérieur  $X \mapsto i_X \omega$  est une bijection entre les champs de vecteurs et les 2-formes. Le champ  $\text{rot } X$  est caractérisé par la propriété :

$$d(\alpha_X) = i_{\text{rot } X} \omega$$

où  $\alpha_X$  est la 1-forme  $\alpha_X \cdot V = \langle X, V \rangle$ . Attention, la définition du rotationnel n'est pas invariante par difféomorphismes.

## 9.4 Différentielle extérieure

On a défini ci-dessus la différentielle extérieure des  $(d-1)$ -formes sur  $\mathbb{R}^d$ . On étend maintenant la différentielle extérieure à toute  $k$ -forme sur une variété  $M$ . C'est une famille d'applications linéaires

$$d : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{k+1} M.$$

Pour  $k = 0$ ,  $d$  est la différentielle habituelle des fonctions. Pour  $k \geq d$ ,  $d = 0$ .

**Théorème 9.19.** *Il existe une unique famille d'applications linéaires  $d : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{k+1} M$  telles que*

$$d(f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$$

pour toutes fonctions différentiables  $f, g_1, \dots, g_k$ . Ces applications sont aussi caractérisées par le fait que

$$F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha)$$

pour toute application  $F : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow M$  ( $F^*\alpha$  est une  $k$ -forme sur  $\mathbb{R}^{k+1}$ , dont la différentielle a déjà été définie).

◀ L'unicité est claire. Pour montrer l'existence, on considère une  $k$ -forme  $\alpha$ , un point  $x_0$  et  $k+1$  vecteurs  $v_1, \dots, v_{k+1}$  de  $T_{x_0} M$ . On considère de plus une application différentiable  $F : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow M$  qui envoie 0 sur  $x_0$  et telle que  $dF_0 \cdot e_i = v_i$ , où  $e_i$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Pour toute écriture de  $\alpha$  comme somme de formes décomposables,

$$\alpha = \sum_j f^j dg_1^j \wedge \cdots \wedge dg_k^j,$$

On a

$$F^*\alpha = \sum_j (f^j \circ F) d(g_1^j \circ F) \wedge \cdots \wedge d(g_k^j \circ F)$$

donc

$$d(F^*\alpha)_{x_0} = \sum_j d(f^j \circ F) \wedge d(g_1^j \circ F) \wedge \cdots \wedge d(g_k^j \circ F) = F^* \sum_j df^j \wedge dg_1^j \wedge \cdots \wedge dg_k^j$$

et finalement

$$d(F^*\alpha)_0 \cdot (e_1, \dots, e_{k+1}) = \left( \sum_j df^j \wedge dg_1^j \wedge \cdots \wedge dg_k^j \right)_{x_0} \cdot (v_1, \dots, v_{k+1}).$$

La forme  $\sum_j df^j \wedge dg_1^j \wedge \cdots \wedge dg_k^j$  ne dépend donc que de  $\alpha$ , et pas du choix de la décomposition. ▶

On déduit immédiatement de la définition :

**Propriété 9.20.**  $(d\alpha)_x = 0$  si  $\alpha$  est nulle au voisinage de  $x$ .

$df$  est la différentielle habituelle de  $f$  pour toute fonction  $f$ .

$d \circ d = 0$ .

$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$  pour toute application différentiable  $\varphi$ .

$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$ .

Ces propriétés caractérisent la différentielle extérieure, et sont en général utilisées pour la définir. Elles permettent de montrer des propriétés de la différentielle extérieure pas récurrenente croissante sur le degré.

◀ Chacune de ces propriétés est évidente pour l'une des caractérisations de la différentielle extérieure données dans le théorème. ▶

**Proposition 9.21** (Formule de Cartan). *Pour tout champ de vecteurs  $X$ , on a*

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

◀ On montre en utilisant les formules  $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta$ ,  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$  et  $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$  que la relation est satisfaite par la forme  $\alpha \wedge \beta$  si elle est satisfaite par les formes  $\alpha$  et  $\beta$ .

Il suffit donc de la montrer pour les formes  $\alpha = f$  et  $\alpha = df$ , on l'obtient alors par récurrence pour toute forme décomposable, donc pour toute forme. Le cas  $\alpha = f$  est évident. Dans le cas  $\alpha = df$  se ramène à la relation déjà démontrée  $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$ . ▶

On en déduit :

**Propriété 9.22.** *Pour tout champ de vecteurs  $X$  on a  $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X = d \circ i_X \circ d$ .*

**Propriété 9.23.** *Si  $\alpha(t)$  est une famille différentiable de  $k$ -formes, alors  $\partial_t(d\alpha(t)) = d(\partial_t\alpha(t))$ . On a aussi  $\int_S^T d\alpha(t)dt = d(\int_S^T \alpha(t)dt)$  pour tous  $S$  et  $T$ .*

◀ Il suffit de le montrer pour les familles de formes du type  $\alpha(t) = f(t, x)\beta$ . Pour une telle famille de formes,

$$\partial_t d(\alpha(t)) = \partial_t(d_x f \wedge \beta) = \partial_t(d_x f) \wedge \beta = d_x(\partial_t f) \wedge \beta = d(\partial_t f \wedge \beta).$$

Voici une autre preuve : On considère une forme  $\hat{\alpha}$  sur  $\mathbb{R} \times M$  telle que  $\alpha(t) = J_t^* \hat{\alpha}$ , où  $J_t(x) = (t, x)$ . Alors  $\alpha'(t) = J_t^*(\mathcal{L}_\tau \hat{\alpha})$  ( $\tau$  est le champ de vecteurs tel que  $\mathcal{L}_\tau f = \partial_t f$  pour toute fonction  $f$ ), l'égalité voulue découle de la propriété de commutation entre  $d$  et  $\mathcal{L}_\tau$ .

Concernant l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_S^T d\alpha(t) dt &= \int_S^T (\partial_x f(t, x)\beta) dt = \int_S^T \partial_x f \wedge \beta dt = \left( \int_S^T \partial_x f dt \right) \wedge \beta \\ &= \partial_x \left( \int_S^T f dt \right) \wedge \beta = d \left( \left( \int_S^T f dt \right) \wedge \beta \right) = d \left( \int_S^T \alpha(t) dt \right). \end{aligned} \blacktriangleright$$

**Proposition 9.24.** *Si  $\alpha$  est une 1-forme, et  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs, alors*

$$d\alpha(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha \cdot Y) - \mathcal{L}_Y(\alpha \cdot X) - \alpha([X, Y]).$$

Cette formule admet une généralisation pour les formes de degré supérieur, mais elle est un peu plus compliquée.

◀ Il suffit une fois encore de vérifier la relation pour les formes décomposables, ce qui est facile ▶

Supposons que le forme  $\alpha$  ne s'annule pas, et soit  $K(x)$  le champ de ses noyaux.  $K(x)$  est donc, pour tout  $x \in M$ , l'hyperplan de  $T_x M$  sur lequel  $\alpha$  s'annule. Si le champ de sous-espaces  $K(x)$  est intégrable, alors  $\alpha$  est localement de la forme  $\alpha = fdg$ , avec  $f$  localement non nulle, donc  $d\alpha = df \wedge dg$  s'annule sur  $K(x)$  (c'est à dire que  $(d\alpha)_x \cdot (X, Y) = 0$  pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $K(x)$ ).

Réciproquement, si  $d\alpha$  s'annule sur  $K$ , et si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs localement tangents à  $K$ , alors la formule ci-dessus implique que  $\alpha([X, Y]) = 0$ , et donc que  $[X, Y]$  est tangent à  $K$ . Le théorème de Frobenius implique alors que  $K$  est intégrable.

On a obtenu une nouvelle formulation du théorème de Frobenius pour les hyperplans ; l'extension au cas général qui suit se démontre de la même façon.

**Théorème 9.25.** *Soit  $H(x)$  un champ de sous-espaces différentiable de dimension constante. Le champ  $H$  est intégrable au voisinage de  $x_0$  si et seulement si il vérifie la condition suivante : Pour tout 1-forme  $\alpha$  qui s'annule sur  $H$  au voisinage de  $x_0$ , la différentielle  $d\alpha$  s'annule sur  $H$  au voisinage de  $x_0$ .*

## 9.5 Formes fermées, formes exactes

La  $k$ -forme  $\alpha$  est dite exacte si il existe une  $(k-1)$ -forme  $\beta$  telle que  $\alpha = d\beta$ . Elle est dite fermée si elle est localement exacte.

**Théorème 9.26** (Lemme de Poincaré). *Sur la boule unité ouverte  $B^d$ , ou de manière équivalente sur  $\mathbb{R}^d$  entier, la forme  $\alpha$  est exacte si et seulement si  $d\alpha = 0$ .*

*Sur une variété quelconque, une forme  $\alpha$  est fermée si et seulement si  $d\alpha = 0$ .*

Attention, le premier point n'est valable que dans  $\mathbb{R}^d$  entier, ou dans certaines variétés particulière (voire ci-dessous), mais pas dans toute variété, ni même dans tout ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Les formes fermées sont en général définies comme les formes vérifiant  $d\alpha = 0$ .

◀ La seconde affirmation découle de la première. Comme  $d \circ d = 0$ , toute forme exacte est de différentielle nulle. Pour démontrer la réciproque, on considère l'application  $\varphi(t, x) = tx$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Comme  $\varphi_1 = Id$  et  $\varphi_0 = 0$ , on a  $\alpha = \varphi_1^* \alpha - \varphi_0^* \alpha$ , et le résultat découle du théorème suivant. ▶

**Théorème 9.27.** *Soit  $\varphi(t, x) : \mathbb{R} \times M \rightarrow N$  une application différentiable, et soit  $\alpha$  une forme sur  $N$  telle que  $d\alpha = 0$ . Alors la forme  $\varphi_1^* \alpha - \varphi_0^* \alpha$  est exacte, où  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ .*

Ce théorème très important est lui-même une conséquence du Lemme suivant, appliqué à la forme  $\hat{\alpha} = \varphi^* \alpha$ .

**Lemme 9.28.** *Soit  $\hat{\alpha}$  une forme sur  $\mathbb{R} \times M$  vérifiant  $d\hat{\alpha} = 0$ , et soit  $\alpha(t)$  la famille de formes  $\alpha(t) = J_t^* \hat{\alpha}$ , où  $J_t(x) = (t, x)$ . Alors  $\alpha(t) - \alpha(s)$  est exacte pour tous  $s$  et  $t$ .*

Plus précisément en définissant, pour toute  $k$ -forme  $\hat{\alpha}$  sur  $\mathbb{R} \times M$ , la  $k$ -forme  $K_S^T(\hat{\alpha}) := \int_S^T J_t^* i_\tau \hat{\alpha} dt$  sur  $M$  ( $\tau = \partial/\partial t$ ), on a

$$\alpha(T) - \alpha(S) = dK_S^T(\hat{\alpha}) + K_S^T(d\hat{\alpha}).$$

◀ En utilisant la formule de Cartan et la différentiation extérieure sous l'intégrale, on calcule :

$$\alpha(T) - \alpha(S) = \int_S^T \alpha'(t) dt = \int_S^T J_t^* \mathcal{L}_\tau \hat{\alpha} dt = \int_S^T J_t^* i_\tau d\hat{\alpha} + J_t^* di_\tau \hat{\alpha} dt = K_S^T(d\hat{\alpha}) + d(K_S^T(\hat{\alpha})). \blacktriangleright$$

On dit que la variété  $M$  est contractible si il existe une homotopie  $\varphi(t, x) : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  telle que  $\varphi_1$  est l'identité et  $\varphi_0$  est constante. Le lemme implique la généralisation suivante du Lemme de Poincaré :

**Corollaire 9.29.** *Si  $M$  est contractible, alors toute forme fermée sur  $M$  est exacte.*

Le complément suivant est aussi très important :

**Théorème 9.30.** *Soit  $\omega$  une  $d$ -forme à support compact sur  $\mathbb{R}^d$ . Il existe une  $(d-1)$ -forme à support compact  $\beta$  telle que  $\omega = d\beta$  si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}^d} \omega = 0$ .*

Contrairement aux énoncés précédents, ce résultat se généralise à toute variété connexe  $M$ , comme nous le montrerons plus tard.

◀ On montre par récurrence sur  $d$  l'énoncé suivant : Pour toute forme  $\omega$  à support dans  $[-1/2, 1/2]^d$  et d'intégrale nulle, il existe une forme  $\alpha$  à support dans  $] -1, 1[^d$  telle que  $d\alpha = \omega$ . Le cas  $d = 1$  est facile.

Considérons maintenant  $d \geq 2$ . Au vu du théorème de Poincaré, il existe une forme  $\alpha$  telle que  $d\alpha = \omega$ . Cette forme est loin d'être unique, on peut ajouter n'importe quelle forme fermée à  $\alpha$  et obtenir une nouvelle primitive de  $\omega$ . On va construire par modifications successives une primitive à support dans  $] -1, 1[^d$ . Revenons à une construction d'une primitive  $\alpha_1$  donnée par les considérations ci-dessus. On considère l'application  $\varphi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  définie par

$$\varphi(t, x) = \varphi_t(x) = (x_1, \dots, x_{d-1}, tx_d)$$

et la forme  $\hat{\omega} = \varphi^* \omega$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ . La forme  $\hat{\omega}$  est nulle sur le complémentaire de  $\mathbb{R} \times [-1/2, 1/2]^{d-1} \times \mathbb{R}$ . On a  $\varphi_0^* \hat{\omega} = 0$  et  $\varphi_1^* \hat{\omega} = \omega$ . La primitive  $\alpha_1 := K_0^1(\hat{\omega})$  de  $\omega$  donnée par le lemme ci-dessus est nulle en dehors de  $[-1/2, 1/2]^{d-1} \times \mathbb{R}$ .

Appliquons le théorème de Stokes sur le cube  $[-1, 1]^d$ . Comme la forme  $\alpha$  est nulle sur toutes les faces sauf  $\{x_i = \pm 1\}$ , on obtient

$$0 = \int_{[-1, 1]^d} d\alpha_1 = \int_{[-1, 1]^{d-1}} \alpha_1^+ - \int_{[-1, 1]^{d-1}} \alpha_1^-$$

où  $\alpha_1^\pm$  sont les  $(d-1)$ -formes sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  données par  $\alpha_1^\pm = F_\pm^* \alpha_1$  avec  $F_\pm : \mathbb{R}^{d-1} \ni x \mapsto (x, \pm 1) \in \mathbb{R}^d$ .

Considérons une  $(d-1)$ -forme  $\beta$  sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  à support dans  $[-1/2, 1/2]^{d-1}$  et telle que  $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \beta = 1$  (on prend  $\beta = b(x_1, \dots, x_{d-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{d-1}$ , avec  $\int b = 1$ ). Soit  $\pi$  la projection de  $\mathbb{R}^d$  sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  oubliant le dernier facteur. On pose  $\alpha_2 = \alpha_1 - a\pi^*\beta$ , avec  $a = \int_{[-1,1]^{d-1}} \alpha_1^+ = \int_{[-1,1]^{d-1}} \alpha_1^-$ . La forme  $\alpha_2$  est une primitive de  $\omega$ , elle est à support dans  $[-1/2, 1/2]^{d-1} \times \mathbb{R}$ , et elle vérifie

$$\int_{[-1,1]^{d-1}} \alpha_2^+ = 0 = \int_{[-1,1]^{d-1}} \alpha_2^-.$$

L'hypothèse de récurrence donne l'existence de  $(d-2)$ -formes  $\chi^\pm$  sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  vérifiant  $d\chi^\pm = \alpha_2^\pm$  et supportées dans  $] -1, 1[^{d-1}$ . Soit  $f$  une fonction réelle  $C^\infty$  égale à 1 sur  $[2/3, \infty)$  et à 0 sur  $(-\infty, 1/3]$ . On considère la forme

$$\alpha_3 := \alpha_2 - d(f(x_d)\pi^*\chi^+ + f(-x_d)\pi^*\chi^-).$$

C'est une primitive de  $\omega$ , qui est supportée dans  $] -1, 1[^{d-1} \times \mathbb{R}$  et telle que les formes  $\alpha_3^\pm$  sont nulles.

On considère finalement l'application  $\psi : \mathbb{R}^d \ni (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_{d-1}, g(x_d)) \in \mathbb{R}^d$  où  $g : \mathbb{R} \rightarrow ] -1, 1[$  est une fonction différentiable égale à l'identité sur  $[-2/3, 2/3]$ , à  $-1$  sur  $(-\infty, -3/4]$ , et à  $1$  sur  $[3/4, \infty)$ . On pose  $\alpha_4 := \psi^*\alpha_3$ . On constate alors que  $d\alpha_4 = \psi^*d\alpha_3 = \psi^*\omega = \omega$ . De plus  $\alpha_4$  est, comme  $\alpha_3$ , à support dans  $] -1, 1[^{d-1} \times \mathbb{R}$ . Finalement, sur  $\{x_d > 3/4\}$ ;  $\alpha_4 = \pi^*\alpha_3^+ = 0$  et, sur  $\{x_d < -3/4\}$ ,  $\alpha_4 = \pi^*\alpha_3^- = 0$ . La forme  $\alpha_4$  est donc à support dans  $] -1, 1[^d$ . ►

## 9.6 Orientation et intégration

Le bon comportement par changement de variables de l'intégrale des formes différentielles sur  $\mathbb{R}^d$  (proposition 9.13) permet d'envisager une extension de l'intégrale aux variétés. Comme sur les espaces vectoriel, il y a toutefois un problème d'orientation.

Une orientation d'une variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'une orientation de l'espace vectoriel  $T_x M$ . On demande de plus que cette orientation de  $T_x M$  dépende régulièrement de  $x$  c'est à dire que, si  $V_1, \dots, V_d$  sont des champs de vecteurs (différentiables) dont les évaluations en un point  $x$  forment une base orientée de  $T_x M$ , alors il existe un voisinage de  $x$  en chaque point  $y$  duquel les vecteurs  $V_1(y), \dots, V_d(y)$  forment une base orientée de  $T_y M$ . De manière équivalente, si  $\varphi$  est une carte en  $x$  pour laquelle  $d\varphi_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^d$  est orientée, alors  $d\varphi_y$  est orientée pour tout  $y$  dans un voisinage de  $x$ .

Toute forme volume  $\omega$  (c'est à dire toute  $d$ -forme ne s'annulant pas) définit une orientation de  $M$  : la base  $v_1, \dots, v_d$  de  $T_x M$  est orientée si  $\omega_x \cdot (v_1, \dots, v_d) > 0$ . Cette orientation dépend continument du point car la fonction  $\omega(V_1, \dots, V_d)$  est différentiable (donc continue) si  $V_i$  sont des champs de vecteurs différentiables.

Réciproquement :

**Proposition 9.31.** *Si  $M$  est orientée, il existe sur  $M$  une forme volume compatible avec l'orientation de  $M$  c'est à dire une  $d$ -forme  $\omega$  telle que  $\omega_x \cdot (v_1, \dots, v_d) > 0$  pour toute base orientée  $v_1, \dots, v_d$  de  $T_x M$ .*

◀ Considérons un recouvrement de  $M$  par des ouverts de carte  $U_i$  difféomorphes à  $\mathbb{R}^d$ . Sur chacun de ces ouverts, il existe une forme volume orientée  $\omega_i$  (ou prend la préimage de la forme déterminant, ou son opposé). On considère aussi une partition de l'unité  $f_i$  localement finie subordonnée au recouvrement  $U_i$ . La forme  $f_i\omega_i$  se prolonge par 0 en une forme sur  $M$ . La somme  $\sum_i f_i\omega_i$  est localement finie, et définit une  $d$ -forme  $\omega$ . Pour tout  $x \in M$  et toute base orientée  $v_1, \dots, v_d$  de  $T_x M$ , on a  $\omega_x \cdot (v_1, \dots, v_d) = \sum_i f_i(x)(\omega_i)_x \cdot (v_1, \dots, v_d)$ . Dans cette somme, tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux (et au moins un) qui sont strictement positifs. La forme  $\omega_x$  est donc non-nulle est orientée. ►

On dit qu'une variété est orientable si elle admet une orientation. C'est équivalent à l'existence d'une forme volume (c'est à dire d'une  $d$ -forme ne s'annulant pas), et c'est donc aussi équivalent à la trivialité du fibré vectoriel  $A^d TM$  (qui est de rang 1). Une variété orientable connexe admet exactement deux orientations, car la donnée de deux orientations détermine un signe localement constant et donc constant.

**Propriété 9.32.** *La sphère  $S^d$  est orientable pour tout  $d$ , l'espace projectif  $\mathbb{R}P^d = S^d/\pm Id$  est orientable si et seulement si  $d$  est impair.*

◀ On obtient une orientation de  $T_x S^d$  en choisissant les bases  $v_1, \dots, v_d$  telles que  $x, v_1, \dots, v_d$  est une base orientée de  $\mathbb{R}^{d+1}$  (c'est l'orientation de la sphère en tant que bord de la boule).

L'application  $-Id$  préserve cette orientation de la sphère si et seulement si  $d$  est impair. En effet, l'orientation de  $-x, -v_1, \dots, -v_d$  est  $(-1)^{d+1}$ . On conclut avec le lemme ci-dessous. ►

**Lemme 9.33.** Soit  $\pi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme local, et soit  $\varphi$  un difféomorphisme de  $M$  tel que  $\pi \circ \varphi = \pi$ . Si  $N$  est orientable, alors  $M$  l'est aussi. Si de plus  $M$  est connexe, alors  $\varphi$  préserve l'orientation.

◀ Soit  $\omega$  une forme volume sur  $N$ . Alors  $\pi^*\omega$  est une forme volume sur  $M$ , qui est donc orientable. De plus,  $\varphi^*(\pi^*\omega) = (\pi \circ \varphi)^*\omega = \pi^*\omega$  donc  $\varphi$  préserve la forme volume  $\pi^*\omega$  sur  $M$ , et donc l'orientation. ▶

Les variétés non orientables admettent un revêtement à deux feuillets orientable, dont voici une construction. Soit  $A^d TM$  le fibré vectoriel de rang un au-dessus de  $M$  dont les  $d$ -formes sont les sections. On peut le considérer comme un sous-fibré de  $M \times \mathbb{R}^{d+1}$ . Son intersection  $\hat{M}$  avec  $M \times S^d$  est une variété de dimension  $d$ , qui est telle que la projection  $\pi : \hat{M} \rightarrow M$  est un revêtement à deux feuillets. La symétrie  $\sigma : (x, v) \mapsto (x, -v)$  préserve  $\hat{M}$  et sa restriction est un difféomorphisme  $\sigma$  tel que  $\pi \circ \sigma = \pi$  et  $\sigma \circ \sigma = Id$ .

**Proposition 9.34.** La variété  $\hat{M}$  est orientable. Si  $M$  est connexe, alors  $\hat{M}$  est connexe si et seulement si  $M$  est non orientable.

On appelle  $\hat{M}$  le revêtement des orientations.

◀ Tout point  $\hat{x}$  de  $\hat{M}$  est de la forme  $(x, \omega)$  où  $\omega$  est une  $d$ -forme non-nulle sur  $T_x M$ . On définit une forme volume  $\alpha$  sur  $\hat{M}$  par

$$\alpha_{(x, \omega)} := d\pi_{(x, \omega)}^* \omega.$$

La variété  $\hat{M}$  étant munie d'une forme volume, elle est orientable. De plus, la symétrie  $\sigma$  inverse l'orientation de  $\hat{M}$  que nous venons de définir. En effet

$$(\sigma^* \alpha)_{(x, \omega)} = d\sigma_{(x, \omega)}^* \alpha_{(x, -\omega)} = d\sigma_{(x, \omega)}^* d\pi_{(x, -\omega)}^* (-\omega) = -d(\pi \circ \sigma)_{(x, \omega)} \omega = -\alpha_{(x, \omega)}.$$

Si  $\hat{M}$  est connexe, le lemme ci-dessus implique que  $M$  n'est pas orientable. Si  $M$  est connexe, mais pas  $\hat{M}$ , alors  $\hat{M}$  est la réunion de deux composantes connexes en restriction de chacune desquelles  $\pi$  est un difféomorphisme. En particulier, la projection  $\pi$  admet une section globale, qui est une forme volume sur  $M$ . La variété  $M$  est alors orientable. ▶

Soit  $\alpha$  une  $d$ -forme sur la variété orientée  $M$  supportée dans un compact d'un domaine de carte orientée. On définit l'intégrale

$$\int_M \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^* \alpha$$

où  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$  est n'importe quel plongement orienté dont l'image contient le support de  $\alpha$ . La proposition 9.13 implique que cette valeur ne dépend pas du choix de  $\varphi$ . En effet, si  $\psi$  est un autre plongement orienté, alors  $\psi^* \alpha = (\varphi^{-1} \circ \psi)^*(\varphi^* \alpha)$ , et  $\varphi^{-1} \circ \psi$  préserve l'orientation, donc  $\int \psi^* \alpha = \int \varphi^* \alpha$ .

Soit  $\Lambda_c^d M$  l'espace des  $d$  formes à support compact sur  $M$ .

**Définition 9.35.** L'intégrale  $\alpha \mapsto \int_M \alpha$  est l'unique forme linéaire sur  $\Lambda_c^d M$  telle que  $\int_M \alpha = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^* \alpha$  lorsque  $\varphi$  est un difféomorphisme orienté de  $\mathbb{R}^d$  dans un ouvert de  $M$  et  $\alpha$  une  $d$ -forme supportée dans l'image de  $\varphi$ .

Pour toute partie compacte  $K$  de  $M$ , l'intégrale  $\alpha \mapsto \int_K \alpha$  est l'unique forme linéaire sur  $\Lambda^d M$  telle que  $\int_K \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha$  lorsque  $\varphi$  est un difféomorphisme orienté de  $\mathbb{R}^d$  dans un ouvert de  $M$  et  $\alpha$  une  $d$ -forme supportée dans l'image de  $\varphi$ .

Pour calculer  $\int_K \alpha$ , on recouvre le compact  $K$  par un nombre fini d'images  $U_i$  de paramétrisations orientées  $\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ , on choisit une partition de l'unité  $f_i$  de  $M$  subordonnée au recouvrement  $(U_i, M - K)$  de  $M$ , et on pose

$$\int_K \alpha = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(K)} \varphi_i^*(f_i \alpha) = \sum_i \int_K f_i \alpha.$$

Si  $(g_j)$  est une autre partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par ouverts de cartes, alors

$$\sum_j \int_K g_j \alpha = \sum_{i,j} \int_K f_i g_j \alpha = \sum_i \int_K f_i \alpha,$$

c'est à dire que la somme est indépendante de la partition de l'unité choisie.

**Propriété 9.36.** Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme préservant l'orientation, soit  $K$  un compact de  $N$ , et soit  $\alpha$  une  $d$ -forme sur  $N$ . On a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha = \int_K \alpha$$

◀ Il suffit de montrer la formule pour les formes  $\alpha$  supportées dans l'image d'une paramétrisation orientée  $\varphi$ . Dans ce cas, la forme  $\phi^*\alpha$  est supportée dans l'image de la paramétrisation orientée  $\phi^{-1} \circ \varphi$ , et on a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^*\alpha = \int_{(\phi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(\varphi^{-1}(K))} (\phi^{-1} \circ \varphi)^*\phi^*\alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\alpha = \int_K \alpha. \blacktriangleright$$

## 9.7 Domaines à bord et formule de Stokes

On note  $H^d$  le demi plan  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  et  $\partial H^d$  son bord  $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , et  $\overset{\circ}{H}^d$  son intérieur  $(-\infty, 0[ \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

**Définition 9.37.** Soit  $N$  une variété. On dit que  $M \subset N$  est un domaine à bord si c'est un fermé de  $N$  qui est l'adhérence de son intérieur  $\overset{\circ}{M}$  et dont le bord topologique  $\partial M$  est une sous-variété.

Si le bord n'est pas vide (c'est à dire que  $M \neq N$ ), son complémentaire est la réunion de deux ouverts disjoints  $\overset{\circ}{M}$  et  $N - M$ , ce complémentaire n'est donc pas connexe ce qui implique que  $\partial M$  est de codimension un.

**Proposition 9.38.** Soit  $M$  un domaine à bord, et  $x \in \partial M$ . Il existe un redressement à bord de  $M$  en  $x$ , c'est à dire un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $N$  et un difféomorphisme  $\phi : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  tel que  $\phi(U \cap M) = H^d$ .

◀ Considérons un redressement  $\phi$  de  $\partial M$  en  $x$ , c'est à dire un difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui envoie  $x \in U$  sur  $0$  et  $\partial M$  sur  $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Les ouverts  $\phi(U \cap \overset{\circ}{M})$  et  $\phi(U \cap (N - M))$  partitionnent  $\mathbb{R}^d - (\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1})$ . L'un de ces ouverts est donc  $\overset{\circ}{H}^d$ , l'autre  $\mathbb{R}^d - H^d$ . Si  $\phi(U \cap M) = \overset{\circ}{H}^d$ , l'énoncé est démontré. Sinon, on remplace  $\phi$  par  $s \circ \phi$ , où  $s$  est le difféomorphisme  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_d)$ . ▶

On obtient donc une variante de la définition : Le fermé  $M \subset N$  est un domaine à bord si et seulement si, pour tout  $x \in M - \overset{\circ}{M}$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $N$  et une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\phi(x) = 0$  et  $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap H^d$ .

Pour chaque  $x \in \partial M$ , l'espace tangent  $T_x(\partial M) \subset T_x N$  est un hyperplan. Son complémentaire  $T_x N - T_x(\partial M)$  a deux composantes connexes. Le vecteur  $v \in T_x(\partial M)$  est dit sortant si il existe une carte à bord  $\phi$  en  $x$  telle que  $d\phi_x \cdot v \notin H^d$ . Il est dit entrant si  $-v$  est sortant. Si  $v$  est sortant, alors pour toute courbe  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$  vérifiant  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\gamma([- \epsilon, 0]) \subset M$  et  $\gamma(]0, \epsilon) \not\subset M$ . En particulier, un vecteur ne peut pas être à la fois entrant et sortant. On obtient donc une décomposition de l'espace  $T_x N$  en trois parties disjointes : les vecteurs sortants, les vecteurs entrants, et les vecteurs tangents au bord. Pour toute carte à bord  $\phi$  en  $x$ ,  $d\phi_x$  envoie ces 3 parties, respectivement, sur  $\mathbb{R}^d - H^d$ ,  $\overset{\circ}{H}^d$ ,  $\partial H^d$ .

**Proposition 9.39.**  $M \subset N$  est un domaine à bord fermé si et seulement si il existe une fonction différentiable  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  dont  $0$  est une valeur régulière et telle que  $M = \{f \leq 0\}$ . Le bord de  $M$  est alors la sous-variété  $\{f = 0\}$ . Les vecteurs sortants de  $M$  en  $x \in \partial M$  sont ceux qui satisfont  $df_x \cdot v > 0$ .

◀ Soit  $M \subset N$  un domaine à bord fermé. Si  $x$  est un point de  $\partial M$ , il existe un voisinage ouvert de  $U_x$  de  $x$  et un difféomorphisme  $\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que  $U_x \cap M = \{y \in U_x : \phi_x(y) \in H^d\}$ . Notons  $z_x$  la première composante de  $\phi$ . On considère le recouvrement de  $N$  par les ouverts  $U_x$ , l'ouvert  $\overset{\circ}{M}$ , et l'ouvert  $N - M$ . On considère une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement. Elle est constituée d'une fonction  $h_i$  supportée dans  $\overset{\circ}{M}$ , d'une fonction  $h_e$  supportée dans  $N - M$ , et d'une suite  $g_k$  de fonctions dont chacune est supportée dans un ouvert  $U_{x_k}$ . Sur chacun des ouverts  $U_{x_k}$ , on considère la fonction  $y \mapsto f_k z_{x_k}$ , que l'on prolonge en une fonction différentiable sur  $N$  nulle en dehors de  $U_{x_k}$ . La fonction  $f = h_e - h_i + \sum_k f_k z_{x_k}$  est différentiable comme somme localement finie de fonctions différentiables, elle est négative ou nulle sur  $M$  et strictement positive hors de  $M$ . Vérifions finalement que  $0$  est une valeur régulière de  $f$ , c'est à dire que les points de  $\partial M$  sont des points réguliers de  $f$ . Soit  $x$  un point de  $\partial M$  et  $v$  un vecteur sortant de  $M$  en  $x$ . Alors  $(dz_{x_k})_x \cdot v > 0$  pour chaque  $k$  pour lequel le domaine de  $z_{x_k}$  contient  $x$ . On conclut que  $df_x \cdot v = \sum_k f_k dz_{x_k} \cdot v$  est une somme de termes positifs, dont l'un au moins est strictement positif. On a donc  $df_x \cdot v > 0$ , donc  $df_x \neq 0$ .

Réciproquement, soit  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dont  $0$  est un niveau critique. L'ensemble  $\{f < 0\}$  est ouvert et il est dense dans  $\{f \leq 0\}$  et l'ensemble  $\{f = 0\}$  est une sous-variété de codimension 1. ▶

**Proposition 9.40.** Si  $M \subset N$  est un domaine à bord, il existe un champ de vecteurs  $V$  sur  $N$  qui est sortant (c'est à dire que  $V(x)$  est sortant pour tout  $x \in \partial M$ ) et complet.

◀ On construit un champ sortant par un argument de partitions de l'unité similaire à la preuve précédente (une autre façon est de prendre la gradient de la fonction  $f$  ci-dessus relativement à une métrique Riemannienne). On rend le champ de vecteurs complet en le multipliant par une fonction positive. ▶

Pour  $t > 0$ , l'ouvert  $\varphi_t^V(\overset{\circ}{M}) \subset N$  contient  $M$ . On peut donc toujours prendre un variété ambiante  $N$  difféomorphe à  $\overset{\circ}{M}$ .

On dit que  $M$  est orientable si son intérieur l'est. Dans ce cas,  $M$  admet dans  $N$  un voisinage ouvert orientable, et on peut donc supposer que  $N$  est orientable. Plus précisément :

**Proposition 9.41.** *Si  $\overset{\circ}{M}$  est orientable, il existe un voisinage orientable  $U$  de  $M$  dans  $N$  qui est difféomorphe à  $\overset{\circ}{M}$  et qui a la propriété que toute orientation de  $\overset{\circ}{M}$  s'étend de manière unique en une orientation de  $U$ .*

◀ On prend  $U = \varphi_V^{-1}(\overset{\circ}{M})$  pour un champ sortant  $V$ . Si  $\omega$  est une forme volume sur  $\overset{\circ}{M}$ , alors  $\omega^t := (\varphi_V^{-t})^*\omega$  est une forme volume sur  $\varphi_V^t(\overset{\circ}{M})$  pour tout  $t > 0$ . Pour  $x \in \overset{\circ}{M}$ , la  $d$ -forme linéaire  $\omega_x^t$  est non-nulle pour tout  $t$ , et elle dépend continument de  $t$ , donc elle reste positivement proportionnelle à  $\omega_x$ . La restriction à  $\overset{\circ}{M}$  de  $\omega^1$  détermine donc la même orientation que  $\omega$ .

Réciproquement, soit  $\alpha$  une autre forme sur  $U$  dont la restriction à  $M$  est orientée. Pour tout  $t$ , la restriction de  $(\varphi_V^t)^*\alpha$  à  $\overset{\circ}{M}$  est orientée. Les formes  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $(\varphi_V^t)^*\alpha$  déterminent donc la même orientation sur  $M$ . En particulier,  $(\varphi_V^t)^*\alpha = f\omega$  avec une fonction  $f$  strictement positive, donc  $\alpha = (f \circ \varphi_V^{-1})\omega^1$ , donc  $\alpha$  et  $\omega^1$  déterminent la même orientation de  $U$ . ▶

En particulier, l'orientation de  $M$  se prolonge par continuité en une unique orientation de  $T_x M$  pour  $x \in \partial M$ . L'unicité d'un tel prolongement est claire, son existence découle de la proposition ci-dessus.

L'orientation de  $M$  détermine une orientation de  $\partial M$  définie de la façon suivante : Soit  $\omega$  une forme volume sur un voisinage  $U$  de  $M$  compatible avec l'orientation de  $M$ , et soit  $V$  un champ de vecteurs sortant, alors la restriction à  $\partial M$  de  $i_V \omega$  est une forme volume sur  $\partial M$ , qui détermine son orientation.

Si  $x \in \partial M$  et  $(v_2, \dots, v_d)$  est une base de  $T_x(\partial M)$ , alors  $(i_V \omega)_x(v_2, \dots, v_d) = \omega_x(V(x), v_2, \dots, v_d) \neq 0$  car  $(V(x), v_2, \dots, v_d)$  est une base de  $T_x M$ . Ceci montre que la restriction à  $\partial M$  de  $i_V \omega$  est bien une forme volume. De plus,  $(v_2, \dots, v_d)$  est une base orientée de  $T_x(\partial M)$  pour l'orientation définie par  $i_V \omega$  si et seulement si  $(V(x), v_2, \dots, v_d)$  est une base orientée de  $T_x M$ . L'orientation ainsi déterminée ne dépend donc pas du choix de la forme volume  $\omega$  (compatible avec l'orientation de  $M$ ). Elle ne dépend pas non plus du choix du champ sortant  $V$ . En effet, si  $v$  est un vecteur sortant en  $T_x M$  et si  $(v_2, \dots, v_d)$  est une base de  $T_x(\partial M)$ , alors  $(v, v_2, \dots, v_d)$  est une base de  $T_x M$ . Comme l'ensemble des vecteurs sortants est connexe, l'orientation de cette base ne dépend pas du vecteur sortant  $v$ . On peut donc caractériser l'orientation sur  $T_x(\partial M)$  de la façon suivante :

La base  $(v_2, \dots, v_d)$  de  $T_x(\partial M)$  est orientée si et seulement si  $(v, v_2, \dots, v_d)$  est une base orientée de  $T_x M$  pour tout vecteur sortant  $v$ .

On remarque que l'orientation de  $\partial H^d$  donnée par le principe ci-dessus est bien celle déterminée par la forme  $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d$ , autrement dit pas la base  $(e_2, \dots, e_d)$ .

**Propriété 9.42.** *Si  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset N$  est un difféomorphisme orienté et un redressement à bord de  $M$  (c'est à dire que  $\phi(H^d) = U \cap M$ ), alors  $\phi|_{\partial H^d}$  est une carte orientée du bord  $\partial M$ .*

◀ Soit  $y \in \partial H^d$  et soit  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Alors  $e_1$  est un vecteur sortant de  $H^d$  et  $(e_2, \dots, e_d)$  est une base orientée de  $T_y(\partial H^d) = \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Posons  $v_i = d\phi_i \cdot e_i$ . Le vecteur  $v_1$  est sortant pour  $M$  en  $x = \phi(y)$ , et les vecteurs  $(v_2, \dots, v_d)$  sont tangents au bord. Comme  $\phi$  préserve l'orientation,  $(v_1, \dots, v_d)$  est une base orientée de  $T_x M$ . Donc  $(v_2, \dots, v_d)$  est une base orientée de  $T_x(\partial M)$ , c'est à dire que  $d(\phi|_{\partial H^d})_y : T_y(\partial H^d) \rightarrow T_x(\partial M)$  préserve l'orientation. ▶

**Théorème 9.43 (Stokes).** *Soit  $M \subset N$  un domaine à bord orienté et  $\alpha$  une  $(d-1)$ -forme sur  $N$  telle que  $\text{supp}(\alpha) \cap M$  est compact. Alors*

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha$$

si  $\partial M$  est muni de l'orientation induite de celle de  $M$ .

◀ Commençons par le cas particulier  $M = \mathbb{R}^d$ . Dans ce cas, il n'y a pas de bord et l'énoncé est  $\int_M d\alpha = 0$  pour toute  $(d-1)$ -forme  $\alpha$  à support compact. Ceci découle de la formule de Stokes appliqué sur un grand cube contenant le support de  $\alpha$ .

On rappelle aussi la formule de Stokes sur le demi-plan, qui découle de celle sur le cube sous la condition que  $\text{supp}(\alpha) \cap H^d$  est compact :

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (J_1^0)^* \alpha = \int_{\partial H^d} \alpha = \int_{H^d} d\alpha$$

où  $J_1^0 : (x_2, \dots, x_d) \mapsto (0, x_2, \dots, x_d)$  est la paramétrisation naturelle (et orientée) de  $\partial H^d$ .

Venons-en au cas général. Quitte à remplacer  $N$  par un voisinage de  $M$ , on peut la supposer orientée, et munie d'une orientation compatible avec celle de  $M$ . On note  $K$  le compact  $\text{supp}(\alpha) \cap M$ . On considère un recouvrement fini  $U_i$  de  $K$  par des images de paramétrisations orientées  $\phi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow N$  dont chacun est de l'un des types suivants :

Ou bien  $U_i$  est contenu dans l'intérieur de  $M$ , ou bien  $\phi_i$  est un redressement à bord c'est à dire que  $U_i \cap M = \phi_i(H^d)$ . On considère une partition de l'unité  $(f_i, g)$  de  $N$  subordonnée au recouvrement ouvert de  $N$  constitué des ouverts  $U_i$  et du complémentaire de  $K$  (chaque fonction  $f_i$  est donc supportée dans  $U_i$ , et  $g$  est nulle au voisinage de  $K$ ). On a  $\alpha = \sum_i f_i \alpha + g \alpha$ , et il suffit de montrer la formule de Stokes pour chacune des formes  $f_i \alpha$  et pour  $g \alpha$ . Elle est claire pour  $g \alpha$ , les deux termes de l'égalité à montrer étant nuls. Pour les  $i$  tels que  $U_i \subset \overset{\circ}{M}$ , on a

$$\int_{\partial M} f_i \alpha = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_i^*(f_i \alpha) = \int_{U_i} f_i \alpha = \int_M f_i \alpha$$

en appliquant la formule de Stokes sur  $\mathbb{R}^d$  à la forme  $\phi_i^* \alpha$ . Pour les  $i$  tels que  $\phi_i$  est un redressement à bord, on a :

$$\int_{\partial M} f_i \alpha = \int_{U_i \cap \partial M} f_i \alpha = \int_{\partial H^d} \phi_i^*(f_i \alpha) = \int_{H^d} \phi_i^*(f_i \alpha) = \int_{M \cap U_i} f_i \alpha = \int_M f_i \alpha. \blacktriangleright$$

## 9.8 Une application

**Proposition 9.44.** *Si  $M \subset N$  est un domaine à bord, il n'existe pas d'application différentiable  $f : N \rightarrow \partial M$  telle que  $f|_{\partial M} = id$ .*

◀ Supposons qu'une telle application  $f$  existe, et considérons une  $(d-1)$ -forme  $\omega$  sur  $\partial M$  d'intégrale non nulle. On obtient une telle forme en prenant la préimage par une carte de la  $(d-1)$ -forme  $\alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{d-1}$  sur  $\mathbb{R}^{d-1}$ , où  $f$  est une fonction positive à support compact. Soit  $j : \partial M \rightarrow N$  l'inclusion, on a  $f \circ j = j$ , si bien que  $j^* \omega = f^* j^* \omega$ . On remarque aussi que  $d\omega = 0$  sur  $\partial M$ , et donc que  $d(f^* \omega) = f^* d\omega = 0$ . Le théorème de Stokes implique :

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} f^* \omega = \int_M d(f^* \omega) = 0,$$

ce qui est une contradiction. ▶

**Théorème 9.45** (Brouwer). *Toute application continue  $\phi : B^d \rightarrow B^d$  admet un point fixe.*

◀ Supposons qu'il existe une application  $\phi : B^d \rightarrow B^d$  sans point fixe. Par compacité la distance  $d(x, \phi(x))$  est minorée sur  $B^d$ . En multipliant  $\phi$  par un coefficient  $\lambda < 1$  proche de 1, on obtient une application continue

$$g : \overset{\circ}{B}^d(1) \rightarrow \overset{\circ}{B}^d(1 - 5\epsilon)$$

sans point fixe, avec  $\epsilon > 0$ . Par régularisation, on obtient alors une application

$$h : \overset{\circ}{B}^d(1 - \epsilon) \rightarrow \overset{\circ}{B}^d(1 - 4\epsilon)$$

de classe  $C^\infty$  sans point fixe. Pour tout point  $x \in \overset{\circ}{B}^d(1 - \epsilon)$ , la demi-droite issue de  $h(x)$  et passant par  $x$  intersecte la sphère  $S^{d-1}(1 - 2\epsilon)$  en un seul point, que l'on note  $f(x)$ . L'application

$$f : \overset{\circ}{B}^d(1 - \epsilon) \rightarrow S^{d-1}(1 - 2\epsilon)$$

est de classe  $C^\infty$  et elle fixe  $S^{d-1}(1 - 2\epsilon)$ , ce qui contredit la proposition ci-dessus. ▶