Géométrie Différentielle, première partie

Patrick Bernard

23 février 2016

Version préliminaire des notes de cours.

Table des matières

1 Étude locale des applications.

On notera $\psi : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ pour désigner une application $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\psi(x_0) = y_0$. On utilisera la même notation même si ψ n'est définie que dans un voisinage de x_0.

1.1 Difféomorphismes

Étant donnés deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$, un difféomorphisme de $\psi : U \longrightarrow V$ est une application inversible C^1 d'inverse C^1. Si le difféomorphisme ψ est C^r, $r \geqslant 1$, alors son inverse est nécessairement C^r, comme on le montre par récurrence en utilisant la formule

$$d(\psi^{-1})(y) = \left(d\psi_{\psi^{-1}(y)}\right)^{-1}.$$

On rappelle :

Théorème 1.1 (Théorème d'inversion locale). *Soit $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 telle que $d\psi_{x_0}$ est inversible. Alors, ψ est un difféomorphisme local au voisinage de x_0, c'est à dire qu'il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et $\psi(x_0)$ tels que $\psi_{|U}$ est un difféomorphisme sur V.*

1.2 Immersions, plongements

Proposition 1.2 (Forme Normale des Immersions). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application C^r. Si df_{x_0} est injective, alors f est une immersion en x_0, c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, (x_0, 0))$$

tel que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ au voisinage de x_0.

Plus précisément, l'énoncé s'écrit : Il existe des ouvert U, V, W de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-n}, \mathbb{R}^m$ contenant $x_0, 0, y_0$, et un difféomorphisme $\varphi : (W, y_0) \longrightarrow (U \times V, (x_0, 0)$ tel que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ sur U.

◀ Soit F un supplémentaire de l'image de df_{x_0} dans $\mathbb{R}^m$. L'application

$$\mathbb{R}^n \times F \ni (x, y) \longmapsto f(x) + y \in \mathbb{R}^m$$

est un difféomorphisme local. Notons $\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times F, (x_0, 0))$ son inverse local. On voit que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$. ▶

Étant donné un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on dit que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une immersion si c'est une immersion en chaque point de U.

L'application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image (munie de la topologie induite).

Dans le cas $m = n$, les notions de plongement et de difféomorphisme sur son image sont équivalentes.

Les notions de plongement et d'immersion sont localement identiques :

Propriété 1.3. *Si $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ est une immersion en x_0, alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $f_{|V}$ est un plongement.*

Cette propriété découle immédiatement de la définition.

La première obstruction globale à ce qu'une immersion soit un plongement est l'injectivité. Les exemples dessinés ci-dessus montrent que même une immersion injective (de $]0, 1[$ et de $]0, 1[\cup]2, 3[$, en l'occurence) n'est pas nécessairement un plongement.

Proposition 1.4. *Une immersion injective et propre d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est un plongement.*

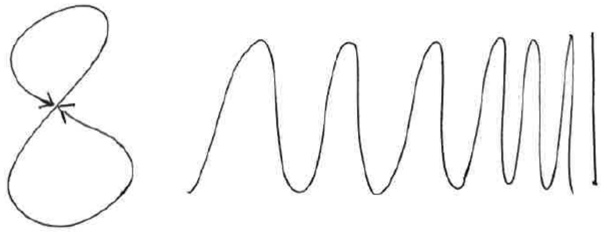

FIGURE 1 – immersions injectives

On rappelle qu'une application est dite propre si la préimage de tout compact est compacte. La proposition est une conséquence tautologique du lemme classique suivant.

Lemme 1.5. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue injective entre espaces métriques. Si f est propre, c'est un homéomorphisme sur son image.*

◀ Il faut montrer que f^{-1} est continue. On considère une suite $y_n \longrightarrow y$ dans $f(X)$, et les préimages x_n de y_n et x de y. Comme l'ensemble $\{y_n\} \cup \{y\}$ est compact, sa préimage Z est compacte. Comme x est la seule valeur d'adhérence possible de la suite x_n, on conclut que $x_n \longrightarrow x$. ▶

1.3 Submersions

Proposition 1.6 (Forme Normale des Submersions). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application $C^r, r \geqslant 1$, telle que df_{x_0} est surjective. Alors f est une submersion en x_0 c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, (y_0, 0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$$

tel que $f \circ \psi(y, z) = y$ au voisinage de y_0.

◀ Soit π une projection linéaire d'image $K := \ker df_{x_0}$ dans $\mathbb{R}^n$. L'application

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto (f(x), \pi(x - x_0)) \in \mathbb{R}^m \times K$$

est un difféomorphisme local en x_0. On note $\psi : (\mathbb{R}^m \times K, (y_0, 0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$ son inverse locale. On a alors $f \circ \psi(y, k) = y$. ▶

On verra plus loin une notion forte de submersion, les fibrations localement triviales, et on montrera que toute submersion propre est une fibration localement triviale.

1.4 Subimmersions

On dit en fait plutôt applications de rang constant. On ne les rencontre pas aussi souvent que les immersions et les submersions.

Proposition 1.7 (Forme Normale des Subimmersions). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application $C^r, r \geqslant 1$, telle que df est de rang constant (k) au voisinage de x_0. Alors f est une subimmersion en x_0 c'est à dire qu'il existe des difféomorphisme locaux*

$$\psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (0, 0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0) \quad , \quad \varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, (0, 0))$$

tels que $\varphi \circ f \circ \psi(y, z) = (y, 0)$ au voisinage de 0.

Dans le cas des immersions et submersions, le rang en x_0 est maximal, ce qui implique qu'il est localement constant. C'est la raison pour laquelle on peut se contenter d'un hypothèse ponctuelle dans ces cas.

◀ On considère une projection linéaire π_K sur $K := \ker df_{x_0}$ et une projection π_R sur l'image R de df_{x_0}. On définit ψ comme l'inverse du difféomorphisme local

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto (\pi_R(f(x) - y_0), \pi_K(x - x_0)) \in R \times K.$$

On a alors $\pi_R \circ (f - y_0) \circ \psi(x_1, x_2) = x_1$, L'application $f \circ \psi$ est de la forme

$$R \times K \ni (x_1, x_2) \longmapsto y_0 + x_1 + g(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m$$

où $g : (R \times K, (0,0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0))$ vérifie $\pi_R \circ g(y_R, z) \equiv 0$. Autrement dit, si l'on identifie $\mathbb{R}^m$ au produit $R \times \ker \pi_R$ et g (dont le premier facteur est nul) à son second facteur $(I - \pi_R) \circ g$:

$$f \circ \psi(x_1, x_2) = y_0 + (x_1, g(x_1, x_2)).$$

On a alors

$$d(f \circ \psi)_{(x_1,x_2)}(u, v) = (u, \partial_1 g_{(x_1,x_2)} u + \partial_2 g_{(x_1,x_2)} v).$$

Comme le rang de cette application linéaire est égal à $k = \dim R$, on conclut que $\partial_2 g \equiv 0$, et donc que g ne dépend pas de x_2 :

$$f \circ \psi(x_1, x_2) = x_1 + g(x_1).$$

On pose alors $\varphi(y) = y - g \circ \pi_R(y)$ soit en coordonnées $\varphi(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g(y_1))$. ▶

La première étape de la preuve ci-dessus donne le résultat général suivant :

Proposition 1.8 (Forme Normale des Applications). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application $C^r, r \geqslant 1$. Soit R l'image de df_{x_0} et F un supplémentaire de cette image. Alors il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, (0,0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0),$$

et un application locale $g : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, 0) \longrightarrow (F, 0)$, tels que $f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + \xi + g(\xi, z)$ au voisinage de 0. En identifiant $\mathbb{R}^m$ au produit $R \times F$, ceci se réécrit

$$f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + (\xi, g(\xi, z)).$$

2 Sous variétés.

2.1 Caractérisations des sous variétés.

Soit M une partie de $\mathbb{R}^D$, x_0 un point de M, et T un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^D$ (de dimension d). On dit que M est une sous variété de classe C^r tangente à T en x_0 si l'une les propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

Graphe : Il existe un supplémentaire E de T dans $\mathbb{R}^D$ et une application $g : (T, 0) \longrightarrow (E, 0)$ de classe C^r telle que $dg_0 = 0$ et telle que $M - x_0$ est localement le graphe de g. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans T tel que le graphe

$$\{x_0 + (x + g(x)), x \in V\},$$

est un ouvert de M.

Équation : Il existe une submersion $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$ telle que le noyau de $d\psi(x_0)$ est T et telle que, localement, $M = \psi^{-1}(0)$. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert U de x_0

et une submersion $\psi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$ de classe C^r telle que $M \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$ et $\ker d\psi_{x_0} = T$.

Redressement : Il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^D$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et un difféomorphisme local C^r

$$\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0,0))$$

tel que $\varphi(U \cap M) = V \times \{0\}$ et $d\varphi_{x_0}(T) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$.

Paramétrisation : Il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une immersion C^r

$$\phi : (V, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$$

dont l'image $\phi(V)$ est un ouvert de M (muni de la topologie induite).

Graphe fort : Pour tout supplémentaire E de T et tout supplémentaire F de E, il existe une application $g : (F, 0) \longrightarrow (E, 0)$ de classe C^r telle que $M - x_0$ est localement le graphe de g, et telle que T est le graphe de dg_0.

◄ Soit π une projection linéaire sur T.

Si M est localement le graphe de $g : T \longrightarrow E$, on note π_T et π_E les projections linéaires associées à la décomposition $\mathbb{R}^D = T \oplus E$, et on définit $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (F, 0)$ par $\psi(x) = \pi_E(x - x_0) - g \circ \pi_T(x - x_0)$. On constate que $d\psi_{x_0} = \pi_E$, donc ψ est une submersion en x_0 et $\ker d\psi_{x_0} = T$.

Si $M = \{\psi = 0\}$, on pose $\varphi(x) = (\pi_T(x), \psi(x))$, où π_T est une projection sur T.

Si $\varphi(M) = T$, on pose $\phi = \varphi^{-1}_{|N} : T \longrightarrow M$.

Si $M = \phi(T)$, et si E et F sont donnés, on remarque que $\pi_F \circ (\phi - x_0) : (T, 0) \longrightarrow (F, 0)$ est un difféomorphisme local de T et on pose $g = \pi_E \circ (\pi_F \circ (\phi - x_0))^{-1}$. ►

On déduit même de la forme normale des immersions que, si ϕ est une paramétrisation locale de M, alors il existe une redressement $\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0,0))$ tel que $\phi = \varphi^{-1}_{|\mathbb{R}^d \times \{0\}}$ au voisinage de 0.

On dit que M est une sous-variété de dimension d en x_0 si il existe un sous espace T de dimension d tel que M est une sous variété tangente à T en x_0. On dit alors que T est l'espace tangent à M en x_0. L'espace tangent T (et donc la dimension d) sont bien déterminés, on le note $T_{x_0}M$.

Si M est à la fois une sous variété tangente à T est une sous variété tangente à $\tilde{T}$, alors $T = \tilde{T}$. En effet, si T et $\tilde{T}$ sont deux espaces tangents à M en x_0, il existe deux redressements $\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0,0))$ et $\tilde{\varphi} : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \mathbb{R}^{D-\tilde{d}}, (0,0))$ de M tels que $d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T$ et $d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = \tilde{T}$. Comme $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme local qui envoie (localement) $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$, $d\tilde{\varphi}_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$ est un isomorphisme linéaire qui envoie $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$. On en conclut que $d = \tilde{d}$ et que

$$\tilde{T} = d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\} = T.$$

On dit que $M \subset \mathbb{R}^D$ est une sous variété si c'est une sous variété en chacun de ses points. La dimension est alors localement constante. On considérera en général des variétés de dimension constante.

La propriété suivante est évidente, mais bien utile :

Propriété 2.1. *Si M est une sous variété de $\mathbb{R}^{D_M}$ et N une sous variété de $\mathbb{R}^{D_N}$, alors $M \times N$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{D_M + D_N}$. De plus,*

$$T_{(x,y)}M \times N = T_xM \times T_yM$$

pour tout $(x, y) \in N \times M$.

2.2 Applications différentiables entre sous variétés

On notera $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ une application de M dans N telle que $f(x_0) = y_0$. On utilisera aussi cette notation lorsque f n'est définie que dans un voisinage de x_0.

Soit M une sous variété de classe $C^r, r \geqslant 1$ de $\mathbb{R}^D$.

La fonction $f : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable (resp. de classe $C^k, 1 \leqslant k \leqslant r$) en x_0 si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. Il existe une paramétrisation locale $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ telle que $f \circ \phi$ est différentiable (resp. C^k).
2. Il existe une fonction différentiable (resp. C^k) $\tilde{f} : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = \tilde{f}_{|M}$ au voisinage de x_0.
3. Pour toute paramétrisation locale $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$, la composée $f \circ \phi$ est différentiable (resp. C^k).

◄ Montrons que 1. ⇒ 2., les autres implications sont claires. On utilise le théorème de forme normale des immersions, qui donne l'existence d'un difféomorphisme local $\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (x_0, 0))$ tel que $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0)$ (φ est donc un redressement local de M). On étend alors f par $\tilde{f} := f \circ \pi \circ \varphi^{-1}$, où π est la projection sur le premier facteur dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$. ►

Pour comprendre directement l'équivalence entre 1. et 3. lorsque $k \leqslant r$, il est utile de souligner :

Propriété 2.2. *Si $\tilde{\phi}$ et $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$ sont deux paramétrisations locales de M en x_0, alors l'application*

$$\phi^{-1} \circ \tilde{\phi} : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0).$$

est un difféomorphisme local de classe C^r.

◄ On redresse chacune de ces applications injectives (et donc la sous variété M) par des difféomorphismes locaux φ et $\tilde{\varphi}$ tels que $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\phi}(x)$. On a donc $(\phi^{-1}, 0) = \varphi_{|M}$ et $\tilde{\phi}(x) = \big(\tilde{\varphi}_{|\mathbb{R}^d \times \{0\}}\big)^{-1}(x, 0)$. Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}, 0)(x) = \varphi_{|M} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, 0) = \big(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}\big)(x, 0)$$

donc $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$, qui est la première composante de $(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{|\mathbb{R}^d \times \{0\}}$, est un difféomorphisme local. ►

Une application $f : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite différentiable (resp. C^k) si chacune de ses coordonnées est différentiable.

Si N est une sous-variété de $\mathbb{R}^{D_N}$, l'application $f : (M, x_0) \longrightarrow N$ est dite différentiable (resp. C^k) si elle l'est en tant qu'application à valeurs dans $\mathbb{R}^{D_N}$.

L'application $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ est différentiable en x_0 si et seulement si $\phi^{-1} \circ f$ est différentiable pour toute paramétrisation locale ϕ de N.

En effet, si ϕ est une paramétrisation locale de N en y_0, il existe un redressement φ tel que $\phi^{-1} = \varphi_{|M}$, et donc $\varphi \circ f = \phi^{-1} \circ f$. Comme φ est un difféomorphisme, f est différentiable si et seulement si $\varphi \circ f$ l'est, et donc si et seulement si $\phi^{-1} \circ f$ l'est.

Définition 2.3. *Soit $f : (M, x_0) \longrightarrow N$ une application différentiable en x_0. Il existe alors une application linéaire $L : T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}^{D_N}$ qui est la restriction à $T_{x_0}M$ de $d\tilde{f}_{x_0}$ pour n'importe quel prolongement différentiable $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{D_N}$. Cette application prend ses valeurs dans $T_{f(x_0)}M$. C'est la différentielle de f en x_0, on la note*

$$df_{x_0} \in \mathcal{L}(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}N).$$

Elle est aussi caractérisée par la propriété

$$df_{x_0} \circ d\phi_0 = d(f \circ \phi)_0$$

pour toute paramétrisation locale $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$.

◀ Soit $\tilde{f}$ un prolongement de f et ϕ une paramétrisation locale de M. On a alors $d\tilde{f}_{x_0} \circ d\phi_0 = d(\tilde{f} \circ \phi)_0 = d(f \circ \phi)_0$. Comme $d\phi_0$ est un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^{d_M}$ et $T_{x_0}M$, on obtient

$$d\tilde{f}_{x_0|T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}.$$

Cette application linéaire ne dépend donc pas du prolongement $\tilde{f}$. Pour montrer qu'elle prend ses valeurs dans $T_{f(x_0)}N$, on considère une équation locale $\psi : (N, f(x_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D_N - d_N}, 0)$. On a alors $\psi \circ f = 0$ au voisinage de x_0, donc $\psi \circ f \circ \phi = 0$ au voisinage de 0, donc $d\psi_{f(x_0)} \circ d(f \circ \phi)_0 = 0$. L'application linéaire $d(f \circ \phi)_0$ prend donc ses valeurs dans $\ker d\psi_{f(x_0)} = T_{f(x_0)}N$, il en est donc de même de $d\tilde{f}_{x_0|T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}$. ▶

La définition par prolongement local implique directement la règle de composition :

Propriété 2.4. *Si $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ et $g : (N, y_0) \longrightarrow (N', z_0)$ sont différentiables (resp. C^k) en x_0 et y_0, alors $g \circ f$ est différentiable (resp. C^k) en x_0 et*

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{y_0} \circ df_{x_0}.$$

Si $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ est une paramétrisation locale de M, alors son inverse locale $\phi^{-1} : (M, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$ est différentiable (puisque $\phi^{-1} \circ \phi = Id$ est différentiable). La paramétrisation ϕ peut donc être vue comme un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^{d_M}, 0)$ dans (M, x_0), c'est à dire une application différentiable admettant une inverse différentiable. On appellera carte de M en x_0 l'inverse d'une paramétrisation, c'est à dire un difféomorphisme local de (M, x_0) dans $(\mathbb{R}^d, 0)$.

Propriété 2.5 (Théorème d'inversion local entre variétés)**.** *L'application $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ est un difféomorphisme local si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- *La différentielle df_{x_0} est un isomorphisme de $T_{x_0}M$ dans $T_{y_0}N$.*
- *Pour toutes paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (N, x_0)$, la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ est un difféomorphisme local.*

◀ La règle de composition implique que df_{x_0} est un isomorphisme si et seulement si $d(\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M)_0$ en est un. Au vu du théorème d'inversion locale dans $\mathbb{R}^d$ les deux propriétés sont donc équivalentes. Il est clair aussi que la seconde propriété est satisfaite si et seulement si f est un difféomorphisme local. ▶

On étend naturellement les notions d'immersions et submersions (et subimmersions) aux sous variétés :

Définition 2.6 (Immersion)**.** *On dit que l'application $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ est une immersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- *La différentielle df_{x_0} est injective de $T_{x_0}M$ dans $T_{y_0}N$.*
- *Pour toutes paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$, la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est une immersion.*
- *Il existe des paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$ telles que la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est localement une injection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme $x \longmapsto (x, 0)$).*

Définition 2.7 (Submersion)**.** *On dit que l'application $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ est une submersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- *La différentielle df_{x_0} est surjective de $T_{x_0}M$ dans $T_{y_0}N$.*
- *Pour toutes paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$, la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est une submersion.*

— *Il existe des paramétrisations locales* $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ *et* $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$ *telles que la composée* $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ *est localement une surjection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme* $(x, y) \longmapsto x$*).*

La proposition suivante sur les submersions sera très utile :

Propriété 2.8. *Soit* $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ *une submersion de classe* C^r *et soit* $f : M \longrightarrow N$ *une application. L'image de* π *est un ouvert de* U *de* M*, et l'application* $f \circ \pi$ *est* C^r *si et seulement si* f *est* C^r *sur* U*.*

◄ Supposons que $f \circ \pi$ est C^r, fixons un point x_0 de M et un point y_0 tel que $\pi(y_0) = x_0$. Il existe alors une section locale de π, c'est à dire une application $s : (M, x_0) \longrightarrow (\tilde{M}, y_0)$ de classe C^r telle que $\pi \circ s = Id$. Localement, $f = (f \circ \pi) \circ s$ est donc C^r. ►

Propriété 2.9. *Soit* M *une sous variété de* $\mathbb{R}^{D_M}$ *de dimension* d_M *et* $\psi : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ *une submersion locale. Alors il existe une submersion locale*

$$\Psi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow N \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}$$

telle que $\Psi(x) = (\psi(x), 0)$ *si* $x \in M$*.*

◄ On considère une extension locale $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$, une submersion locale $\varphi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D_M - d_M}, 0)$ donnant une équation locale de M, et on pose $\Psi = (\tilde{\psi}, \varphi)$. ►

Définition 2.10 (Sous variétés d'une sous variété)**.** *Soit* M *une sous variété de* $\mathbb{R}^D$*,* N *une partie de* M*, et* x_0 *un point de* N*. on dit que* N *est une sous variété de* M *en* x_0 *si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

— N *est un sous variété de* $\mathbb{R}^D$ *en* x_0*.*

— *Il existe une carte de* M *en* x_0 *qui redresse* N*.*

— *Il existe un difféomorphisme local*

$$\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \mathbb{R}^{D - d_M}$$

qui envoie N *sur* $\mathbb{R}^{d_N} \times \{(0, 0)\}$ *et* M *sur* $\mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \{0\}$*.*

◄ Le premier point implique le second. Soit $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$ une paramétrisation locale de N. Alors ϕ_N, vue comme application à valeurs dans M, est aussi une immersion. Il existe donc une carte $\phi_M : (M, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$ tel que $\phi_M \circ \phi_N$ prend localement la forme $x \longrightarrow (x, 0)$, l'image d'un petit voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{d_N}$ est donc un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{d_M} \times \{0\}$.

Le second point implique le troisième. La carte $\phi_M : M \longrightarrow \mathbb{R}^{d_M}$ se prolonge localement en $\tilde{\phi}_M : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^{d_M}$. Si ψ est une équation locale de M, alors $(\tilde{\phi}_M, \psi)$ est le difféomorphisme local cherché. ►

Lorsque N est une sous variété de M en x_0 on a naturellement $T_{x_0}N \subset T_{x_0}M$.

Si N est une sous variété de M, alors l'inclusion de N dans M est un plongement (sa différentielle est l'inclusion de $T_{x_0}N$ dans $T_{x_0}M$). Réciproquement :

Propriété 2.11. *L'image* $J(N)$ *d'un plongement* $J : N \longrightarrow M$ *est une sous variété de* M*.*

◄ Pour qu'une partie $\Sigma \subset M$ soit une sous variété de M (de dimension d), il suffit que, pour tout $y_0 \in \Sigma$, il existe une immersion $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, y_0)$ et un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ dont l'image $\phi(V)$ est un ouvert de Σ.

On veut le démontrer pour $\Sigma = J(N)$. Soit $y_0 = J(x_0)$ un point de $J(N)$. Il existe un difféomorphisme local $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$ et un voisinage ouvert U de 0 tel que $\phi_N(U)$

est un voisinage de x_0 dans N. Comme J est un homéomorphisme sur son image, il existe un voisinage ouvert W de y_0 dans M tel que $J^{-1}(W) \subset \phi_N(U)$, et donc tel que $V = (J \circ \phi_N)^{-1}(W)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'application $J \circ \phi_N$ est alors une immersion en 0, et $J \circ \phi_N(V)$ est un voisinage de y_0 dans $J(M)$. ►

Il est facile de vérifier que la proposition 1.4 reste vraie dans un contexte plus général :

Proposition 2.12. *Si $J : N \longrightarrow M$ est une immersion injective et propre, alors c'est un plongement et son image $J(N)$ est une sous variété fermée de M.*

Tout plongement n'est pas forcément propre, mais on a :

Proposition 2.13. *L'image $J(N)$ du plongement $J : N \longrightarrow M$ est fermée si et seulement si J est propre.*

◄ Si $J(N)$ est fermée, alors pour tout compact K de M, l'intersection $K \cap J(N)$ est compacte. Comme J est un homéomorphisme sur son image, $J^{-1}(K) = J^{-1}(K \cap J(N))$ est alors compacte, c'est à dire que J est propre.

Si J est propre, considérons une suite $y_n = J(x_n)$ dans M, qui converge vers une limite y. La propreté de J implique que la suite x_n admet une valeur d'adhérence x. On a alors $J(x) = y$ et donc $y \in J(N)$. ►

Exercice 2.1. *Soit $J : M \longrightarrow N$ une immersion propre. Montrer que chaque point de N a un nombre fini de préimages.*

En supposant que chaque point de $J(M)$ a le même nombre de préimages, montrer que $J(M)$ est une sous-variété de N.

Si $\psi : M \longrightarrow N$ est une submersion en chaque point, alors pour tout $y_0 \in M$ la préimage $\psi^{-1}(y_0)$ est une sous variété de M, de dimension $d_M - d_N$. En fait, il suffit pour ceci que ψ soit une submersion en chaque point de $\psi^{-1}(y_0)$. On dit alors que y_0 est une valeur régulière de ψ.

Définition 2.14. *On dit que $x_0 \in M$ est un point critique de $\psi : M \longrightarrow N$ si $d\psi_{x_0}$ n'est pas surjective. On dit que $y_0 \in N$ est un valeur critique de ψ si il existe un point critique $x_0 \in M$ tel que $\psi(x_0) = y_0$. Les points de N qui ne sont pas des valeurs critiques sont dits valeurs régulières.*

En particulier, les points qui n'appartiennent pas à l'image $\psi(M)$ sont des valeurs régulières.

Soit N une sous variété de dimension d_N et B la boule ouverte de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{d_N}$. On dit qu'une partie $A \subset N$ d'une sous variété N est de mesure nulle si, pour tout plongement φ de B dans N, la préimage $\varphi^{-1}(A)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{d_N}$. Cette définition est cohérente dans le cas $N = \mathbb{R}^{d_N}$.

Théorème 2.15 (Sard)**.** *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Si f est C^∞, alors l'ensemble des valeurs singulières de f est de mesure nulle dans N. Le résultat est vrai si f est de classe C^r avec $r \geqslant 1$ et $r \geqslant 1 + d_M - d_N$.*

◄ La preuve est assez difficile. On se limite ici au cas facile $d_M \leqslant d_N$. Au vu des définitions, il suffit de montrer le résultat lorsque $N = \mathbb{R}^{d_N}$. On note Σ l'ensemble des points critiques de f.

On dit que $K \subset M$ est un cube plongé si il existe une carte ϕ, définie au voisinage de $\bar{\Omega}$, telle que $\phi(K) = [0,1]^{d_M}$. On va montrer que $f(\Sigma \cap K)$ est de mesure nulle pour tout cube plongé K. Comme les intérieurs des cubes plongés recouvrent M, le Lemme 2.18 implique que M est recouvert par une famille dénombrable de cubes plongés. On conclut que $f(\Sigma)$ est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, et donc qu'il est de mesure nulle.

Cas $d_M < d_N$. On a alors $\Sigma = M$.

Lemme 2.16. *Il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante : Tout cube X de coté $1/k$ contenu dans $[0,1]^{d_M}$ vérifie*

$$\mathrm{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leqslant Ck^{-(1+d_M)},$$

où Vol est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d_N}$.

◄ Comme df est borné sur $[0,1]^{d_M}$, l'image du cube est contenu dans une boule de $\mathbb{R}^{d_N}$ de rayon au plus C/k. Ceci implique que son volume est majoré par $Ck^{-d_N} \leqslant Ck^{-(1+d_M)}$. ►

Comme on peut recouvrir le cube K par k^{d_M} cubes de coté $1/k$, on conclut du Lemme que

$$\mathit{Vol}(f(K)) = \mathit{Vol}(f \circ \phi^{-1}([0,1]^{d_M})) \leqslant k^{d_M} Ck^{-(1+d_M)} = C/k.$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a *Vol*$(f(K)) = 0$, ce qui termine la preuve dans le cas $d_M < d_N$.

Cas $d_M = d_N$. On remarque que les points critiques de $f \circ \phi^{-1}$ sont les points de $\phi(\Sigma)$.

Lemme 2.17. *Il existe un module de continuité ϵ ayant la propriété suivante : Tout cube X de coté $1/k$ contenu dans $[0,1]^{d_M}$ et contenant un point critique de $f \circ \phi^{-1}$ vérifie :*

$$\mathrm{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leqslant k^{-d_M} \epsilon(1/k).$$

Ce Lemme permet de conclure dans le cas $d_M = d_N$ exactement comme ci-dessus. On recouvre $\phi(\Sigma \cap K)$ par au plus k^{d_M} cubes de coté $1/k$ intersectant $\phi(\Sigma)$. L'image par $f \circ \phi^{-1}$ de l'union de ces cubes, qui contient $f(K \cap \Sigma)$, a donc un volume majoré par $\epsilon(1/k)$. Le volume de $f(K \cap \Sigma)$ est donc majoré par $\epsilon(1/k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est donc nul.

◄ Soit $x_0 \in X$ un point critique de $f \circ \phi^{-1}$. Soit R l'image de l'application linéaire $L := d(f \circ \phi^{-1})_{x_0}$, c'est un sous espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^{d_N}$. Soit ρ un module de continuité de $d(f \circ \phi^{-1})$ sur $[0,1]^{d_M}$. Pour tout $x \in X$, on a

$$f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0) = \int_0^1 (d(f \circ \phi^{-1})_{x_0 + t(x - x_0)} - L) \cdot (x - x_0) dt$$

donc

$$\left| f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0) \right| \leqslant |x - x_0| \rho(|x - x_0|).$$

Comme le diamètre de X est $\sqrt{n}/k$, on conclut que $f \circ \phi^{-1}(X)$ est contenu dans une bande de largeur $\sqrt{d_M}/k \rho(\sqrt{d_M}/k)$ autour de l'espace affine $x_0 + R$. Comme $d(f_\phi^{-1})$ est borné sur $[0,1]^{d_M}$, cette image $f \circ \phi^{-1}(X)$ est aussi contenue dans une boule de rayon C/k autour de x_0. Son volume est donc majoré par $Ck^{-d_M} \rho(\sqrt{d_M}/k)$. Ceci conclut la preuve du Lemme et du théorème 2.15. ►

Lemme 2.18. *Soit (X, d) un espace métrique séparable. Tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable (on dit que X a la propriété de Lindelöf).*

◄ Considérons une partie dénombrable dense de $Y \subset X$, et appelons boule rationnelle toute boule ouverte de X centrée sur Y et de rayon rationnel. L'ensemble des boules rationnelles est donc dénombrable. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, alors l'ensemble $\mathcal{B}_\mathcal{U}$ des boules rationnelles contenues dans des ouverts de $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert dénombrable de X. A chaque boule $B \in \mathcal{B}_\mathcal{U}$, on peut associer un ouvert $U_B \in \mathcal{U}$ qui la contient. L'ensemble $\{U_B, B \in \mathcal{B}_\mathcal{U}\}$ est un sous-recouvrement dénombrable de $\mathcal{U}$. ►

Même le cas $d_M < d_N$ du théorème de Sard n'est pas complètement anodin. Il affirme que l'image d'une variété par une application différentiable dans une variété de dimension strictement plus grande est de mesure nulle. À l'inverse, il existe une application continue surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$

(la courbe de Péano). Une telle courbe ne peut donc pas être différentiable (ni même localement Lipschitzienne).

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, et soit Z une sous variété de N. Si chaque point de N est une valeur régulière de f, alors $f^{-1}(Z)$ est une sous variété de M. La restrictions de f à $f^{-1}(Z)$ est de plus une submersion en chaque point.

La propriété que $f^{-1}(Z)$ est une sous variété de M reste vraie sous la condition plus générale que f est transverse à Z :

Définition 2.19. *L'application différentiable $f : M \longrightarrow N$ est dite transverse à la sous variété $Z \subset N$ si, pour tout point $x \in f^{-1}(Z)$, on a l'égalité*

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}Z + df_x(T_xM).$$

Proposition 2.20. *Si $f : M \longrightarrow N$ est transverse à Z, alors $f^{-1}(Z)$ est une sous variété de M.*

◄ Soit x un point de $f^{-1}(Z)$. Considérons une submersion $g : N \longrightarrow \mathbb{R}^d$, définie au voisinage de $f(x)$, et telle que Z est localement défini par l'équation $g = 0$. L'application $g \circ f$ est alors une submersion en x, qui donne localement l'équation de $f^{-1}(Z)$. Vérifions que $g \circ f$ est une submersion en x, c'est à dire que $dg_{f(x)} \circ df_x$. La transversalité de f en x se réecrit $df_x(T_xM) + \ker dg_{f(x)} = T_{f(x)}N$. L'image de $dg_{f(x)} \circ df_x$ est donc la même que celle de $dg_{f(x)}$. ►

Exercice 2.2. *Soit M et N deux sous variétés de X en x_0. Supposons que M et N sont transverses en x_0, au sens que $T_{x_0}M + T_{x_0}N = T_{x_0}X$. Alors $M \cap N$ est une sous variété en x_0, tangente à $T_{x_0}M \cap T_{x_0}N$.*

Beaucoup de ce qui a été dit sur les submersions se généralise au cas du rang constant.

Exercice 2.3. *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Si df est de rang constant k, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété pour tout $y \in N$, de codimension k dans M. Il suffit que le rang de df soit constant sur $f^{-1}(y)$.*

Soit Z une sous variété de N. Si la dimension de $T_{f(x)}Z + df_x(T_xM)$ est constante (égale à k) sur $f^{-1}(Z)$, alors cette préimage est une sous-variété de M, de codimension $k - \dim Z$.

Exercice 2.4. *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application propre de rang constant telle que chacune des préimages $f^{-1}(y), y \in N$, est connexe. Montrer que l'image $f(M)$ est une sous-variété de N.*

Montrer la conclusion dans le cas plus général où les sous-variétés $f^{-1}(y), y \in N$ ont un nombre de composantes connexes indépendant de y (ce nombre est fini au vu de la propreté).

2.3 Complément, structure de sous-variété.

Une structure de sous-variété sur un ensemble X est une injection de X dans un espace vectoriel de dimension finie E dont l'image est une sous-variété. On dit que deux structures de sous-variétés $I : X \longrightarrow E$ et $J : X \longrightarrow F$ sont égales si $J \circ I^{-1}$ est un difféomorphisme de $I(X)$ dans $J(X)$, et qu'elles sont difféomorphes si les images $I(X)$ et $J(X)$ sont difféomorphes.

Exercice 2.5. *Montrer que l'application $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $I(x) = x^3$ munit $\mathbb{R}$ d'une structure de sous-variété différente de sa structure standard.*

Montrer que la structure de sous-variété donnée par I est difféomorphe à la structure standard.

Exercice 2.6. *Soit M une sous-variété, X un ensemble et $P : M \longrightarrow X$ une application surjective. Montrer qu'il existe au plus une structure de sous-variété sur X pour laquelle P est une submersion.*

Exercice 2.7. *Soit $f : M \longrightarrow N$ une immersion injective. Montrer qu'il existe une unique structure de sous-variété $J : f(M) \longrightarrow E$ sur $f(M)$ telle que $J \circ f$ est un plongement.*

Si X est un ensemble et $J : X \longrightarrow E$ est une structure de sous-variété, on dit que l'application $f : X \longrightarrow M$ est C^r si $f \circ J^{-1}$ l'est sur $J(X)$. L'ensemble $C^r(X, \mathbb{R})$ détermine la structure de sous-variété de X. Supposons en effet que $I : M \longrightarrow F$ est une autre structure de sous-variété. En effet, les coordonnées I_i de l'application I sont des éléments de $C^r_I(X, \mathbb{R})$, c'est à dire qu'elles sont C^r pour la structure I. Si $C^r_I(X, \mathbb{R}) = C^r_J(X, \mathbb{R})$, alors les coordonnées I_i sont aussi C^r pour la structure J, c'est à dire que les fonctions $I_i \circ J^{-1}$ sont C^r sur $J(X)$. En conséquence, l'application $I \circ J^{-1}$ est C^r sur $J(X)$. Par symétrie, l'application $J \circ I^{-1}$ est C^r sur $I(X)$, et donc la bijection $I \circ J^{-1}$ est un difféomorphisme.

3 Exemples

3.1 Sphères

Toutes les valeurs non nulles de l'application $x \longrightarrow |x|^2$ sont régulières. La sphère unité

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$$

est donc une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$. Son espace tangent au point θ est l'orthogonal de θ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, puisque la fonction $x \longmapsto |x|^2$ a pour différentielle en θ la forme $x \longmapsto 2\langle \theta, x \rangle$.

L'application $(r, \theta) \longmapsto r\theta$ est un difféomorphisme entre $]0, \infty) \times S^1$ et $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (c'est une version des coordonnées polaires). Son inverse est donnée explicitement par $x \longmapsto (|x|, x/|x|)$.

3.2 Tores

Le produit $M \times N$ de deux sous-variétés (de $\mathbb{R}^{D_M}$ et $\mathbb{R}^{D_N}$) est une sous variété de $\mathbb{R}^{D_N + D_M}$, et on a l'identification

$$T_{(x,y)} N \times M = T_x N \times T_y M.$$

Par exemple, le produit $S^1 \times S^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$, le tore de dimension 2. Plus généralement, le tore $\mathbb{T}^n$ est défini comme le produit de n facteurs S^1. C'est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$.

On peut aussi plonger le tore $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, en formant l'image classique de "chambre à air". On écrit pour ceci $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, on se souvient que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, et, pour un point $\theta \in S^1$, on note (θ_1, θ_2) ses coordonnées en tant qu'élément de $\mathbb{R}^2$. Fixant $a \in]0, 1[$, on plonge $S^1 \times S^1$ par l'application

$$J(\theta, \varphi) = \big((1 + a\varphi_1)\theta, a\varphi_2\big).$$

La différentielle de J, vue comme une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$, en un point $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est donc l'application linéaire

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y_1, y_2) \longmapsto \big((1 + a\varphi_1)x + a\theta y_1, a y_2\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Son noyau est la droite de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dirigée par le vecteur $V(\theta, \varphi) = (-a\theta, 1 + a\varphi_1, 0)$. Pour vérifier que J est une immersion sur $S^1 \times S^1$, il suffit de constater que le vecteur $V(\theta, \varphi)$ n'est jamais tangent à $S^1 \times S^1$ en $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1$, puisque $-a\theta$ n'est pas orthogonal à θ (rappelons que θ, qui appartient à S^1, est non nul).

Comme $S^1 \times S^1$ est compact, il suffit de vérifier que l'immersion J est injective pour conclure que c'est un plongement (dont l'image est donc une sous variété de $\mathbb{R}^3$ difféomorphe à $S^1 \times S^1$). Si $J(\theta, \varphi) = J(\theta', \varphi')$, alors $\varphi_2 = \varphi'_2$, et de plus

$$1 + a\varphi_1 = |(1 + a\varphi_1)\theta| = |(1 + a\varphi'_1)\theta'| = 1 + a\varphi'_1$$

donc $\varphi = \varphi'$. On voit alors que $\theta = \theta'$.

Il y a une autre façon de procéder. On remarque que l'application $F : (x_1, x_2) \longmapsto (e^{ix_1}, e^{ix_2})$ est un difféomorphisme local surjectif de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{T}^2$. En conséquence, l'application $J : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion différentiable si et seulement si $J \circ F$ est une immersion différentiable. On écrit alors

$$J \circ F(x_1, x_2) = ((1 + a\cos x_2)\cos x_1, (1 + a\cos x_2)\sin x_1, a\sin x_2)$$

et on calcule la matrice de la différentielle de $J \circ F$

$$\begin{bmatrix} -(1 + a\cos x_2)\sin x_1 & -a\sin x_2 \cos x_1 \\ (1 + a\cos x_2)\cos x_1 & -a\sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & a\cos x_2 \end{bmatrix}.$$

Comme le coefficient $(1+\cos x_2)$ est non nul, cette matrice est de rang 2 en tout point où $\cos x_2 \neq 0$. Si $\cos x_2 = 0$, alors $\sin x_2 = \pm 1$, et le de bloc supérieur est inversible, puisque

$$\det \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -a\sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_1 & -a\sin x_2 \sin x_1 \end{bmatrix} = \sin x_2 \neq 0.$$

On peut plonger le tore $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par le même type de formule. Plus précisément, si $F = (F_1, F_2)$ est un plongement de $\mathbb{T}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, alors on obtient un plongement de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'expression

$$S^1 \times \mathbb{T}^{n-1} \ni (\theta, \varphi) \longmapsto \big((1 + aF_1(\varphi))\theta, F_2(\varphi)\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$$

lorsque $a > 0$ est assez petit.

L'application $\Pi : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \big(e^{2i\pi x_1}, \ldots, e^{2i\pi x_n}\big) \in \mathbb{T}^n$ est surjective et engendre une bijection de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{T}^n$. Il y a une unique structure de groupe sur $\mathbb{T}^n$ qui fait de cette bijection un isomorphisme de groupe, ou, ce qui est équivalent, qui fait de la surjection Π un morphisme de groupe. La structure de (sous)-variété de $\mathbb{T}^n$ à difféomorphisme près est aussi déterminée par le fait que Π est une submersion (en l'occurrence un difféomorphisme local), voire l'exercice 2.6. Plus précisément, si M est une sous variété et si $F : \mathbb{T}^n \longrightarrow M$ est une bijection, F est un difféomorphisme si et seulement si $F \circ \Pi$ est une submersion. On dit que l'égalité $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ a lieu aussi en tant que (sous)-variété.

Les opérations de groupe de $\mathbb{T}^n$ sont différentiables. En effet l'inverse $J : \Pi(x) \longmapsto \Pi(-x)$ est une bijection de $\mathbb{T}^n$ telle que $J \circ \Pi(x) = \Pi(-x)$ est une submersion, c'est donc un difféomorphisme. Le produit est l'application $P : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ telle que $P(\Pi(x), \Pi(y)) = \Pi(x + y)$. Comme la projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \longmapsto (\Pi(x), \Pi(y)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ est une submersion surjective, La différentiabilité de l'application $(x, y) \longmapsto P(\Pi(x), \Pi(y))$ implique celle de l'application P.

On dit que $\mathbb{T}^n$ est un groupe de Lie : une (sous)-variété munie d'une structure de groupe dont les opérations sont différentiables.

3.3 Groupes de Matrices

Notons $M_n(\mathbb{R})$ (ou M_n) l'ensemble des matrices réelles carrées de taille n, que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$.

Le groupe $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ donc une sous variété de dimension maximale n^2. Les opérations de groupes $(M, N) \longmapsto MN$ et $M \longmapsto M^{-1}$ sont différentiables. Concernant l'inversion, on rappelle le calcul classique $(M + N)^{-1} = (M(I + M^{-1}N)^{-1}) = (I + M^{-1}N)^{-1}M^{-1} = (I - M^{-1}N + o(N))M^{-1} = I - M^{-1}NM^{-1} + o(N)$ dont on déduit que l'application $M \longmapsto M^{-1}$ est différentiable, et que sa différentielle en M est l'application linéaire $N \longmapsto -M^{-1}NM^{-1}$.

Notons $M_n^s(\mathbb{R})$ et $M_n^a(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ce sont des espaces vectoriels que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$, son espace tangent en l'identité est $M_n^a(\mathbb{R})$. Les opérations de groupe, qui sont les restrictions de celles de $Gl_n(\mathbb{R})$, sont donc différentiables. Pour montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété, il suffit de montrer que l'identité est une valeur régulière de l'application $M_n(\mathbb{R}) \ni M \longmapsto {}^tMM \in M_n^s(\mathbb{R})$. La différentielle en M de cette application est

$$d_M : N \longmapsto {}^tMN + {}^tNM = {}^tMN + {}^t({}^tMN)$$

En $M = Id$, c'est donc $d_I : N \longmapsto N + {}^tN$, qui est surjective sur $M_n^s(\mathbb{R})$, et de noyau $M_n^a(\mathbb{R})$. Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est donc une sous variété au voisinage de l'identité, tangente à $M_n^a(\mathbb{R})$. En un autre point M de $O_n(\mathbb{R})$, on a $d_M = d_I \circ L$, où L est la multiplication à gauche par ${}^tM$, qui est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. Ceci implique que d_M est surjective, et donc que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété en M tangente à $\ker d_M = L^{-1}(\ker d_I) = M \cdot M_n^a(\mathbb{R})$. On aurait aussi pu conclure ceci directement en constatant que la multiplication par M est un difféomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui préserve $O_n(\mathbb{R})$ et qui envoie I sur M.

Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est aussi une sous variété. En fait, c'est la composante connexe de l'identité dans $O_n(\mathbb{R})$. Remarquons pour terminer que $SO_2(\mathbb{R})$ est difféomorphe à S^1. Le morphisme de groupe surjectif

$$\theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{R}$ dans SO_2 est en effet un difféomorphisme local qui se factorise par $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3.4 Matrices de rang fixé

Soit $k \leqslant \min(n,m)$ et soit $N_k(n,m) \subset M_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de rang k. Alors $N_k(n,m)$ est une sous variété de $M_{n,m}(\mathbb{R})$, de dimension $k(n+m-k)$ (Il faut prendre garde toutefois au fait que la fermeture $\bar{N}_k(n,m)$, constituée des matrices de rang inférieur à k, n'est pas une sous variété. En particulier, le complémentaire de $Gl_n(\mathbb{R})$ n'est pas une sous variété, mais c'est une union finie de sous-variétés.)

Comme les permutations de lignes ou de colonnes sont des isomorphismes de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ qui préservent $N_k(n,m)$, il suffit de démontrer que $N_k(n,m)$ est une sous variété au voisinage d'une matrice qui s''écrit par blocs

$$X_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$$

où A_0 est un bloc $k \times k$ inversible. Toute matrice X proche de X_0 s'écrit alors $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ avec un bloc A inversible. En multipliant à gauche la matrice X par la matrice inversible $O = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$, on obtient

$$OX = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B. \end{bmatrix}$$

La matrice A est donc de rang k si et seulement si $D = CA^{-1}B$. L'ensemble $N_k(n,m)$ est donc localement un graphe de codimension $(n-k)(m-k)$, c'est à dire de dimension $nm-(n-k)(m-k) = k(n+m-k)$. En supposant par exemple que $m < n$, la sous variété $N_{m-1}(m,n)$ est donc de codimension $n-m+1$.

On peut traiter de manière similaire le cas des matrices symétriques. Soit $N_k^s(n)$ le sous ensemble de $S_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques $n \times n$) constitué des matrices de rang k. Toute matrice X_0 de

$N_k^s(n)$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice orthonormée O telle que $O^t X_0 O$ s'écrit par blocs $Y_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec un bloc A_0 de taille $k \times k$ inversible. Comme l'application $X \longmapsto O^t X O$ est un isomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ qui préserve $N_k^s(n)$, il suffit de montrer que N_k^s est une sous variété au voisinage de Y_0. On montre exactement comme ci-dessus qu'un matrice symétrique $\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & D \end{bmatrix}$ proche de Y_0 est de rang k si et seulement si $D = B^t A^{-1} B$. L'ensemble $N_k^s(n)$ est donc localement un graphe de codimension $k(k+1)/2$.

Pour se représenter un peu plus concrètement les choses, on peut considérer l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques 2×2. On l'identifie à $\mathbb{R}^3$ en écrivant ses éléments sous la forms $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Les matrices non inversibles sont celles qui satisfont l'équation $b^2 = ac$, qui est l'équation d'un cône dans $\mathbb{R}^3$. Ce cône est une sous variété sauf au point $(0, 0, 0)$, qui en est une singularité. Le complémentaire de cette singularité correspond exactement aux matrices de rang 1.

3.5 Grassmaniennes

Soit $G(k, n)$ l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Pour écrire $G(k, n)$ comme une sous-variété, on identifie chaque sous-espace à la projection orthogonale dont il est l'image. On définit donc $G(k, n)$ comme l'ensemble des matrices symétriques de rank k qui vérifient la relation $M^2 = M$. Nous allons montrer que c'est une sous variété compacte de $M_n^s(\mathbb{R})$ (matrices symétriques $n \times n$).

On remarque dans un premier temps que c'est une partie compacte, car fermée et bornée, de $M_n^s(\mathbb{R})$. Pour montrer la fermeture, on constate que le rang d'une projection est égal à sa trace. L'ensemble des projecteurs de rank k est donc déterminé, dans $M_n^s(\mathbb{R})$, par les équations continues $M^2 = M$ et tr $(M) = k$.

L'entier k étant fixé, on considère la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, et on décompose les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ (et donc de $G(k, n)$) par blocs suivant cette décomposition. La matrice

$$I_k := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est un élément de $G(k, n)$. L'ensemble $H(k, n)$ des éléments de $G(k, n)$ qui s'écrivent $M = \begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix}$ avec un bloc A inversible constitue un voisinage ouvert de I_k dans $G(k, n)$. Comme le rang est k, on a nécessairement $C = BA^{-1}B^t$ dans la matrice ci-dessus et l'image de M est celle de la matrice $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$. Autrement dit, M est la projection orthogonale sur le graphe de $L := BA^{-1} \in M_{n-k,k}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, pour $L \in M_{n-k,k}(\mathbb{R})$, on peut chercher une expression pour la projection orthogonale sur le graphe de L de la forme $\Pi_L = \begin{bmatrix} A & AL^t \\ LA & LAL^t \end{bmatrix}$, avec une matrice symétrique inversible A. L'équation $\Pi_L \circ \Pi_L = \Pi_L$ implique que $A(I + L^t L)A = A$. Cette équation est satisfaite pour $A = (I + L^t L)^{-1}$, (la matrice $(I + L^t L)$ est définie positive donc inversible) et on vérifie effectivement que

$$\Pi_L := \begin{bmatrix} (I + L^t L)^{-1} & (I + L^t L)^{-1} L^t \\ L(I + L^t L)^{-1} & L(I + L^t L)L^t \end{bmatrix},$$

vérifie $\Pi_L^2 = \Pi_L$, et donc est la matrice de la projection orthogonale sur le graphe de L.

L'application $\Pi : L \longmapsto \Pi_L$ est une application C^∞ de $M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ dans $M_n^s(\mathbb{R})$, à valeurs dans $H(k, n)$. En notant Γ l'application $\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix} \longmapsto BA^{-1}$ (définie sur l'ouvert de $M_n^s(\mathbb{R})$ des matrices dont le bloc A est inversible), on constate que $\Gamma\circ\Pi(L)=L$, ce qui implique que Π est un plongement de $M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ dans $M_n^s(\mathbb{R})$, dont l'image est égale à $H(k,n)$. En conséquence, $H(k,n)$ est une sous variété, c'est à dire que $G(k,n)$ est une sous variété en chaque point de $H(k,n)$. L'espace tangent à $G(k,n)$ au point I_k est l'image de l'application linéaire

$$M_{n-k,k}\ni \ell\longmapsto d\Pi_{I_k}\cdot\ell=\begin{bmatrix}0 & \ell^t\\ \ell & 0\end{bmatrix}.$$

Comme tout point M_0 de $G(k,n)$ peut s'écrire sous le forme $M_0=OI_kO^{-1}$ pour une matrice $O\in O_n(\mathbb{R})$, et que l'application $L\longmapsto OLO^{-1}$ est un isomorphisme de $M_n^s(\mathbb{R})$ qui préserve $G(k,n)$, on conclut que $G(k,n)$ est une sous variété en M_0. On a donc montré que $G(k,n)$ est une sous-variété de $M_n^s(\mathbb{R})$.

Si M est une sous variété de classe C^r de $\mathbb{R}^D$, alors l'application

$$M\ni x\longmapsto T_xM\in G(d,D)$$

est de classe C^{r-1}. En effet, en écrivant localement M comme le graphe d'une fonction F, on voit que T_xM est le graphe de l'application linéaire dF_x, qui est une fonction C^{r-1} de x.

On peut représenter les éléments de $G(k,n)$ comme images de matrices $n\times k$ de rang k. Nous avons vu que l'ensemble $N_k(n,k)$ de ces matrices est un ouvert de $M_{n,k}(\mathbb{R})$. L'application R qui, a une matrice $M\in N_k(n,k)$, associe la projection orthogonale sur son image est une submersion surjective de $N_k(n,k)$ dans $G(k,n)$. En effet, sur l'ouvert des matrices qui s'écrivent $\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$ avec un bloc A inversible, cette application s'écrit

$$\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}\longmapsto \Pi_{BA^{-1}}$$

qui est une submersion sur l'ouvert considéré car $\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}\longmapsto BA^{-1}$ en est une. On a montré que les éléments de $H(k,n)$ sont des valeurs régulières de l'application R.

Étant donnée une matrice quelconque $M_0\in N_k(n,k)$, on peut écrire $M_0=O\begin{bmatrix}A_0\\ 0\end{bmatrix}$ avec un bloc A_0 inversible. Comme $R(OM)=OR(M)O^{-1}$ (en tant que projecteurs) ceci implique que F est une submersion au voisinage de M_0.

La donnée $E(x)$ d'un élément de $G(k,n)$ pour chaque $x\in\mathbb{R}^d$ est donc une application de classe C^r au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications $V_1(x),\ldots,V_k(x):(\mathbb{R}^d,0)\longrightarrow\mathbb{R}^n$, de classe C^r, telles que $E(x)$ est l'espace engendré par les vecteurs $V_i(x)$ pour tout x dans un voisinage de 0.

Comme pour les tores, la sous-variété $G(k,n)$ est caractérisée à difféomorphisme près par l'existence de l'application $R=N_k(k,n)\longmapsto G(k,n)$ vérifiant les propriétés suivantes (exercice 2.6) :

— R est une submersion surjective.

— Deux points M et M' de $N_k(k,n)$ ont la même image par R si et seulement si il existe $g\in Gl_k$ tel que $M'=Mg$.

On dit que $G(k,n)=N_k(k,n)/Gl_k$.

Il y a une autre façon naturelle de représenter la Grassmanienne $G(k,n)$. On considère pour ceci l'espace $N_{n-k}(n-k,n)$ des matrices $n-k\times k$ de rang maximal, qui est un ouvert de $M_{n-k,n}(\mathbb{R})$. Le noyau d'une matrice $M\in N_{n-k}(n-k,n)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, que l'on identifie donc à un élément de $G(k,n)$. L'application K qui a une matrice associe son noyau est une submersion surjective de $N_{n-k}(n-k,n)$ dans $G(k,n)$. On se ramène en fait à la paramétrisation précédente en remarquant que, en tant que sous espaces, $K(M) = R(M^t)^\perp$ donc, en tant que projecteur,

$$K(M) = I - R(M^t).$$

La donnée $E(x)$ d'un élément de $G(k,n)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ est donc une application de classe C^r au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications $P_1(x), \dots P_{n-k}(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, de classe C^r, telles que $E(x)$ est déterminé par les équations

$$E(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : P_1(x) \cdot v = P_2(x) \cdot v = \cdots = P_{n-k}(x) \cdot v = 0\}$$

pour x proche de 0.

Propriété 3.1. *Si E_0 et F_0 sont des éléments de $G(k,n)$ et $G(l,n)$ tels que $E_0 \cap F_0 = \{0\}$, alors l'application*

$$G(k,n) \times G(l,n) \ni (E,F) \longmapsto E + F \in G(k+l,n)$$

est C^∞ au voisinage de (E_0, F_0).

Pour le montrer, on considère des applications locales $V_1(E), \dots V_k(E) : G(k,n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telles que E est engendré par les $V_i(E)$ si E est proche de E_0, et des applications locales $W_1(F), \dots W_k(F) : G(n-k,n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que les vecteurs $W_i(F)$ engendrent F si F est proche de F_0. L'espace $E + F$ est alors engendré par les vecteurs

$$V_1(E), \dots, V_k(E), W_1(F), \dots, W_l(F)$$

c'est donc une fonctions C^∞ de E et F. De la même façon :

Propriété 3.2. *Si E_0 et F_0 sont des éléments de $G(k,n)$ et $G(l,n)$ tels que $E_0 + F_0 = \mathbb{R}^n$ (on dit que E_0 et F_0 sont transverses), alors l'application*

$$G(k,n) \times G(l,n) \ni (E,F) \longmapsto E \cap F \in G(k+l-n,n)$$

est C^∞ au voisinage de (E_0, F_0).

La preuve est identique à la précédente en remplacant les vecteurs $V_i(E)$ engendrant les espaces par des équations $P_i(E)$ déterminant les espaces.

Propriété 3.3. *Soit $E_0 \in G(k,n)$ et $L_0 \in M_{k,n}(\mathbb{R})$. Supposons que $L_{0|E_0}$ est un isomorphisme. Alors, pour E proche de E_0 et L proche de L_0 l'application $L_{|E}$ est un isomorphisme, et il existe une (unique) application locale*

$$S(L,\pi) : M_{k,n}(\mathbb{R}) \times G(k,n) \longrightarrow M_{n,k}(\mathbb{R}),$$

de classe C^∞ dont l'image est π (vu comme sous-espace) et telle que $L \cdot S(L,\pi) = Id$.

◀ Soit $G(\pi)$ une équation locale de π au voisinage de π_0, c'est à dire une application C^∞ locale

$$G : G(k,n) \longrightarrow M_{n,n-k}(\mathbb{R})$$

telle que π est le noyau de $G(\pi)$. L'application linéaire $(L_0 \circ \pi_0, G(\pi_0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Il en est donc de même de $(L \circ \pi, G(\pi))$, qui envoie π sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, et l'inverse

$$R(L,\pi) := (L \circ \pi, G(\pi))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^n)$$

est une application C^∞ de π et L au voisinage de (L_0, π_0). La restriction $S(L,\pi)$ de $R(L,\pi)$ à $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ a pour image π, et elle vérifie

$$L \circ S(L,\pi)(x) = L \circ \pi \circ R(L,\pi)(x,0) = x. \blacktriangleright$$

L'ensemble $G(1,n)$ est appelé espace projectif de dimension $n-1$, noté aussi $\mathbb{R}P^{n-1}$. Nous l'avons défini comme une sous variété de $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. On a une submersion surjective π de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}P^n$ qui, à tout vecteur non nul $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ associe la droite dirigée par ce vecteur. L'application $f : \mathbb{R}P^n \longrightarrow N$ est différentiable si et seulement si la composée $f \circ \pi$ est différentiable sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ (c'est un cas particulier d'une propriété générale des submersions surjectives).

L'espace $\mathbb{R}P^1$ est difféomorphe à S^1. Attention toutefois, l'application naïve associant à tout point de S^1 la droite vectorielle qu'il engendre n'est pas une bijection (chaque droite à deux préimages). On définit plutôt l'application qui, au point $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1$ (vu comme sous variété de $\mathbb{R}^2$), associe la (projection orthogonale sur la) droite dirigée par $\theta + (1,0)$ si $\theta \neq (-1,0)$, et par $(\theta_2, 1-\theta_1)$ si $\theta \neq (0,1)$. Comme $\theta_2(1+\theta_1, \theta_2) = (1-\theta_1)(\theta_2, 1-\theta_1)$, ces deux epxression définissent le même droite. Cette application est une bijection C^∞ de S^1 sur $\mathbb{R}P^1$. Pour montrer que sa réciproque est aussi C^∞, on calcule que le point d'intersection du cerle unité avec la droite affine passant par $(-1,0)$ et dirigée par le vecteur non-nul (v_1, v_2) est

$$\theta(v_1, v_2) = \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} \right).$$

L'espace $\mathbb{R}P^2$, qui est de dimension 2, est défini ci-dessus comme une sous variété de $\mathbb{R}^6$. Nous verrons qu'il se plonge dans $\mathbb{R}^5$, (il se plonge aussi dans $\mathbb{R}^4$, mais pas dans $\mathbb{R}^3$).

3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel.

Soit M une sous variété $C^r, r \geqslant 2$ de $\mathbb{R}^D$. L'ensemble $TM := \{(x,v) \in \mathbb{R}^{2D}, x \in M, v \in T_xM\}$ est une sous variété C^{r-1} de $\mathbb{R}^{2D}$ appelée le fibré tangent de M. Si $\psi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ est une équation locale de M, où U est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^D$, alors

$$T\psi : U \times \mathbb{R}^D \ni (x,v) \longmapsto (\psi(x), d\psi_x \cdot v) \in \mathbb{R}^{2D}$$

est un submersion. Sa différentielle s'écrit en effet

$$dT\psi_{(x,v)} \cdot (y,w) = \big(d\psi_x \cdot y, d\psi_x \cdot w + d^2\psi_x \cdot (v,y)\big)$$

et elle est surjective car $d\psi_x$ l'est. L'application $T\psi$ est donc une équation de $TM \cap (U \times \mathbb{R}^D)$. Cette variété est munie d'une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ qui est la restriction de la projection sur le premier facteur.

Exercice 3.1. *Soit M une hypersuface compacte de $\mathbb{R}^D$ (une sous variété de codimension 1). Montrer que l'application $x \longmapsto T_xM$ est surjective de M dans $G(D-1,D)$. On pourra, pour chaque $E \in G(D-1,D)$ considérer une forme linéare l sur $\mathbb{R}^D$ dont E est le noyau, et montrer que l'application $l_{|M}$ admet un point critique.*

Un champ de vecteurs de classe $C^k, k \leqslant r-1$ sur M est une application $V : M \longrightarrow \mathbb{R}^D$, de classe C^k, telle que $V(x) \in T_xM$ pour tout x. On peut aussi le définir comme une section $S : M \longrightarrow TM$, c'est à dire à une application $S : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ S = Id$. Si V est un champ de vecteurs vu comme application à valeurs dans $\mathbb{R}^D$, la section qui lui est associée est $S(x) = (x, V(x))$.

De manière générale, on appelle fibré vectoriel (de type fini, de rang k) au dessus de M la donnée d'une application différentiable $E(x)$ de M dans une Grassmannienne $G(k,n)$. L'ensemble

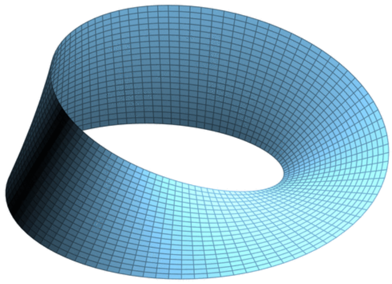

FIGURE 2 – Ruban de Moebius

$N := \{(x,v), v \in E(x)\} \subset M \times \mathbb{R}^n$ est appelé espace total du fibré vectoriel. C'est une sous variété de $M \times \mathbb{R}^n$, elle est munie d'une projection $\pi : N \longrightarrow M$ qui est une submersion.

Un fibré vectoriel de rang k est dit trivial si il existe k applications $V_1, \ldots, V_k : M \longrightarrow \mathbb{R}^D$ telles que $E(x)$ est l'espace vectoriel engendré par $V_i(x)$ pour tout x. Tout fibré vectoriel est localement trivial, c'est à dire que, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M tel que la restriction du fibré à U est triviale.

Un morphisme de fibrés vectoriel entre $\pi : N \longrightarrow M$ et $\tilde{\pi} : \tilde{N} \longrightarrow \tilde{M}$ est une application différentiable $G : N \longrightarrow \tilde{N}$ entre les espaces totaux qui envoie chaque fibre $F(x) = \pi^{-1}(x)$ linéairement sur une fibre $\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})$. Il existe donc une application différentiable $g : M \longrightarrow \tilde{M}$ telle que $\tilde{\pi} \circ G = g \circ \pi$. On dit que G est un morphisme au dessus de g.

Si les fibrés sont donnés par des applications F et $\tilde{F}$ de M et $\tilde{M}$ dans les grassmaniennes $G(k,n)$ et $G(\tilde{k},\tilde{n})$, alors un morphisme de fibré est de la forme $G(x,v) = (g(x), L(x) \cdot v)$ où $L : M \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\tilde{n}})$ est une application différentiable telle que $L(x)$ envoie $F(x)$ dans $\tilde{F}(g(x))$ pour tout $x \in M$.

Le fibré $\pi : N \longrightarrow M$ est trivial si et seulement si il est isomorphe au fibré produit $M \times \mathbb{R}^k$.

Si M et N sont des variétés difféomorphes, alors les fibrés tangents T_xM et T_xN sont isomorphes. De plus, à tout difféomorphisme $\phi : M \longrightarrow N$ est associé l'isomorphisme canonique de fibrés

$$T\phi : (x,v) \longmapsto (\phi(x), d\phi_x \cdot v).$$

On remarque la propriété fonctorialité

$$T(\phi \circ \psi) = T\phi \circ T\psi.$$

À titre d'exemple, considérons le fibré au dessus de la variété $M = G(1,n)$ donné par l'application identité de M dans $G(1,n)$. C'est un fibré en droites dont l'espace total est $E_n = \{(x,v), x \in G(1,n), v \in x\} \subset G(1,n) \times \mathbb{R}^n$. En identifiant $G(1,2)$ à S^1, on peut visualiser l'espace total E_2 comme un ruban de Moebius dans $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Soit π la projection sur le second facteur $\pi : G(1,n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Notons $\mathring{E}_n$ le complémentaire de la section nulle dans E_n, c'est à dire l'ensemble $\mathring{E}_n = \{(x,v), x \in G(1,n), v \in x - \{0\}\}$. La restriction de π à $\mathring{E}_n$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, dont le difféomorphisme inverse est $v \longmapsto (\mathbb{R}v, v)$.

Pour $n \geqslant 2$, on conclut que $\mathring{E}_n$ est connexe, et donc que E_n n'est pas trivial (dans le fibré trivial $M \times \mathbb{R}$, le complémentaire de la section nulle n'est pas connexe).

4 Espaces métriques localement compacts

On décrit quelques propriétés des espaces métriques localement compacts qui donneront le contexte topologique des variétés de dimension finie. Une suite exhaustive de compacts dans X est une suite K_i de parties compactes de X qui recouvrent X, et telles que K_i est contenu dans l'intérieur de K_{i+1}.

Proposition 4.1. *Soit X un espace métrique localement compact. Si X est connexe ou séparable, alors X admet une suite exhaustive de compacts.*

◄ Pour chaque point $x \in X$, on définit le réel $r(x)$ comme le suprémum des rayons r tels que la boule fermée $B(x,r)$ est compacte. Si il existe un point x tel que $r(x) = +\infty$, alors on pose $K_i = B(x,i)$.

Sinon, $r(x)$ prend des valeurs réelles strictement positives (car X est localement compacte). Pour tous x et y, la boule $B(y,r)$ est contenue dans la boule $B(x, r+d(x,y))$, donc $r(y) \leqslant r(x)+d(x,y)$. La fonction r est donc 1-Lipschitz, donc continue.

A tout compact K, on associe la réunion K' des boules fermées $B(x, r(x)/2)$ centrées sur K. Montrons que K' est compact. Pour ceci on considère une suite x_n de points de K'. Chaque point x_n est dans une boule $B(y_n, r(y_n)/2)$, avec $y_n \in K$. Comme K est compact, on peut supposer en prenant une sous-suite que y_n a une limite y dans K. Comme r est continue, on peut de plus supposer que $r(y_n) \leqslant 3r(y)/4$ pour tout n et donc que x_n est dans la boule compact $B(y, 3r(y)/4)$ pour n assez grand. La suite x_n admet donc une sous-suite convergente.

La réunion des boules ouvertes $\mathring{B}(x, r(x)/2), x \in K$ est un ouvert contenu dans K' et contenant K, donc K est contenu dans l'intérieur de K'.

Preuve dans le cas connexe : On construit maintenant la suite de compacts suivante : On prend n'importe quel compact K_1 non vide (par exemple un point), et on pose $K_{i+1} = (K_i)'$.

Pour montrer que c'est une suite exhaustive de compacts, il suffit de montrer que la réunion U des K_i est égale à X. Comme U est la réunion des intérieurs des K_i, c'est un ouvert. Montrons maintenant qu'elle est fermée, et donc égale à X par connexité.

Considérons une suite $x_n \in U$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X. Choisissons n assez grand pour que $r(x_n) > r(x)/2$ et $d(x_n, x) < r(x)/4$. Comme $x_n \in U$, il existe i tel que $x_n \in K_i$, et donc

$$x \in B(x_n, r(x)/4) \subset B(x_n, r(x_n)/2) \subset K_i' = K_{i+1}$$

Preuve dans le cas séparable : On considère une suite dense x_i, et on fait comme ci-dessus, mais en posant $K_{i+1} = (K_i)' \cup \{x_{i+1}\}$. Comme $\bar{B}(x_i, r(x_i)/2) \subset K_i$, on vérifie facilement que $\cup K_i = X$. ►

Corollary 4.2. *Tout espace métrique localement compact et connexe est séparable.*

Ceci découle immédiatement de l'existence d'une suite exhaustive de compacts. On rappelle qu'une application f entre espaces topologiques est dite propre si la preimage par f de tout compact est compacte.

Corollary 4.3. *Si X est un espace métrique localement compact séparable, alors il existe une fonction continue et propre $f : X \longrightarrow [0, \infty)$.*

L'existence d'une fonction positive propre implique celle d'une suite exhaustive de compacts, il suffit de prendre $K_i = \{f \leqslant i\}$.

◄ Soit K_i une suite exhaustive de compacts. Posons $a_i = d(K_i, K_{i+1}^c)$, c'est un réel strictement positif. On considère la fonction $f(x) := \sum_{i \geqslant 1} d(K^i, x)/a_i$. La somme est localement finie, donc la fonction f est bien définie, et elle est continue. Si x n'est pas dans K_{j+1}, alors $d(x, K_i) \geqslant d(K_{j+1}^c, K_i)$ pour tout i, donc $f(x) \geqslant j$.

Autrement dit, le fermé $\{f \leqslant j\}$ est contenu dans K_j, il est donc compact. ►

Corollary 4.4. *Si (X, d) est un espace métrique séparable localement compact, alors il est muni d'une distance complète D qui engendre la même topologie que d.*

◀ Soit f une fonction propre et positive sur X. On pose $D(x, y) = d(x, y) + |f(y) - f(x)|$, on vérifie facilement que c'est une distance. Comme $D \geqslant d$, la topologie engendrée par D est plus forte que celle de d. Réciproquement, si $x_n \longrightarrow x$ dans (X, d), alors, par continuité de f, $D(x_n, x) \longrightarrow 0$. On conclut donc que les deux distances engendrent la même topologie.

Si x_n est une suite de Cauchy pour D, alors la suite $f(x_n)$ est bornée. La suite x_n est donc contenue dans une partie compacte de X, et donc elle converge. ▶

Corollary 4.5. *Le compactifié d'Alexandroff d'un espace métrique localement compact séparable (X, d) est métrisable.*

◀ Posons $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. On considère une fonction propre positive f sur X, et on pose $g = 1 - \arctan f$, qui est une fonction propre de X dans $]0, 1]$. On pose alors

$$D(x, y) = \min\big(d(x, y) + |g(y) - g(x)|, g(x) + g(y)\big).$$

On vérifie facilement que $|g(y) - g(x)| \leqslant D(x, y)$. Vérifions maintenant l'inégalité triangulaire pour D. On considère trois points x, y, z dans X.
Dans le cas où $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$ et $D(z, y) = d(z, y) + |g(z) - g(x)|$, on a

$$D(x, y) \leqslant d(x, z) + |g(z) - g(x)| \leqslant D(x, y) + D(y, z).$$

Dans le cas où $D(x, y) = g(y) + g(x)$ et $D(y, z) = g(z) + g(x)$, l'inégalité

$$D(x, z) \leqslant g(x) + g(z) \leqslant D(x, y) + D(y, z)$$

est évidente.
Dans le cas où $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$ et $D(y, z) = g(y) + g(z)$, alors

$$D(x, z) \leqslant g(z) + g(x) \leqslant g(z) + g(y) + D(x, y) = D(y, z) + D(x, y).$$

Nous avons vérifié l'inégalité triangulaire pour D, qui est donc une distance sur X. On vérifie facilement que D et d ont les mêmes suites convergentes. On définit alors $\hat{d}$ sur $\hat{X}$ par $\hat{d} = D$ sur $X \times X$,

$$\hat{d}(x, \infty) = \hat{d}(\infty, x) = g(x) \quad \forall x \in X,$$

et bien sur $d(\infty, \infty) = 0$. Vérifions l'inégalité triangulaire. Comme D est une distance sur X, il suffit de constater que

$$\hat{d}(x, y) = D(x, y) \leqslant g(x) + g(y) = \hat{d}(x, \infty) + \hat{d}(\infty, y)$$

et

$$\hat{d}(x, \infty) = g(x) \leqslant g(y) + D(x, y) = \hat{d}(y, \infty) + \hat{d}(x, y)$$

pour tous x et y dans X. Il est facile de vérifier directement que $(\hat{X}, \hat{d})$ est compact. En effet, si x_n est une suite de X, ou bien $\liminf g(x_n) = 0$, et x_n admet une sous-suite qui converge vers ∞, ou bien $\liminf g(x_n) > 0$, et x_n est contenue dans un compact de X. ▶

Une partition de l'unité localement finie est une famille $f_\alpha : X \longrightarrow [0, 1]$ de fonctions continues qui ont la propriété que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une famille finie A d'indices tels que toutes les fonctions $f_\alpha, \alpha \notin A$ sont identiquement nulles sur V, et qui de plus vérifient $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ pour tout x, (la somme n'implique qu'un nombre fini de termes non nuls en chaque point x au vu du caractère localement fini). La partition finie (f_α) est dite subordonnée au recouvrement ouvert (U_α) si le support de f_α est contenu dans U_α pour tout α. On dit qu'un espace topologique admet des partitions de l'unité si on peut subordonner une partition localement finie à tout recouvrement ouvert.

Proposition 4.6. *Soit X un espace métrique séparable localement compact. Alors X admet des partitions de l'unité, c'est à dire que, pour tout recouvrement ouvert de X, il existe une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement.*

◀ Soit $(U_\alpha, \alpha \in A)$ un recouvrement ouvert de X, et K_i une suite exhaustive de compacts. On recouvre K_2 par un nombre fini de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts U_α et dans $\mathring{K}_3$. On appelle $\mathcal{B}_2$ cette famille de boules ouvertes. Pour tout $i \geqslant 3$, on recouvre le compact $K_{i+1} - \mathring{K}_i$ par une famille finie $\mathcal{B}_{i+1}$ de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$ et dans l'ouvert $\mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}$. A chacune des boules ouvertes B de la famille $\mathcal{B} = \cup_{i\geqslant 2}\mathcal{B}_i$, on associe une fonction continue $f_B : X \longrightarrow [0, \infty)$ qui est strictement positive sur la boule et nulle en dehors. La famille f_B est localement finie puisque les fonctions $f_B, B \in \cup_{i\geqslant j+1}\mathcal{B}_i$ sont nulles sur $\mathring{K}_j$. La somme $f = \sum_{B\in\mathcal{B}} f_B$ est donc une fonction continue à valeurs strictement positives. Les fonctions $g_B := f_B/f$ forment alors une partition de l'unité localement finie, qui est subordonnée à $\mathcal{U}$.

Les fonctions $g_B := f_B/f$ forment alors une partition de l'unité localement finie, dont chacune des fonctions est à support dans l'un des ouverts U_α. Choisissons maintenant une fonction $a(B) : \mathcal{B} \longrightarrow A$ qui, à chaque boule $B \in \mathcal{B}$, associe un indice $a(B) \in A$ tel que $\bar{B} \in U_{a(B)}$. Pour tout $\alpha \in A$, on définit la fonction $h_\alpha := \sum_{B\in a^{-1}(\alpha)} g_B$. Cette somme est localement finie et définit donc une fonction continue. La famille (h_α) est une partition de l'unité localement finie de X. Vérifions que l'ouvert U_α contient le support de f_α. Pour $x \notin U_\alpha$, il existe un voisinage V de x qui n'intersecte qu'un nombre fini des boules B. On peut de plus supposer en restreignant V que chacune de ces boules contient x dans son adhérence, et donc qu'aucune de ces boules n'est contenue dans U_α. Pour chacune de ces boules, on a donc $a(B) \neq \alpha$, ce qui implique que h_α est nulle sur V. ▶

Corollary 4.7. *Tout espace métrique localement compact et localement connexe (c'est le cas des variétés topologiques) admet des partitions de l'unité.*

◀ Soit (X_β) les composantes connexes de X (elles sont ouvertes, et elles sont connexes donc séparables), et soit (U_α) un recouvrement ouvert de X. On considère une partition de l'unité $f_{\alpha\beta}$ adaptée au recouvrement ouvert $(U_\alpha \cap X_\beta)$ et on note f_α la fonction $\sum_\beta f_{\alpha\beta}$, c'est à dire la fonction dont la restriction à X_β est égale à $f_{\alpha\beta}$ pour tout β. C'est une partition de l'unité de X. ▶

En fait, tout espace métrique admet des partitions de l'unité, mais c'est un peu plus difficile à montrer.

Un espace topologique est dit paracompact si il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un sous recouvrement localement fini. Il est (presque) évident qu'un espace qui admet des partitions de l'unité est paracompact. Réciproquement, il est classique en topologie (depuis Bourbaki) que tout espace paracompact admet des partitions de l'unité. Démontrons la variante qui nous sera utile.

Proposition 4.8. *Soit M un espace paracompact et soit $\mathcal{F}$ un sous espace vectoriel de $C(M, \mathbb{R})$ qui est stable par somme localement finie et par quotient (par un élément de $\mathcal{F}$ ne s'annulant pas), et qui a la propriété que, pour tout ouvert U de M et tout point $x \in U$, il existe $f \in \mathcal{F}$, à valeurs positives, à support dans U, et strictement positive en x. L'espace M admet alors des partitions de l'unité composées de fonctions de $\mathcal{F}$.*

On utilisera ce résultat dans le cas où M est une variété et où $\mathcal{F}$ est un l'ensemble des fonctions C^k sur M. Dans le cas général d'un espace paracompact M, il n'est pas évident que l'espace $\mathcal{F} = C^0(M, \mathbb{R})$ vérifie les hypothèse ci-dessus, mais c'est vrai (tout espace paracompact est normal).

◀ Soit (U_α) un recouvrement ouvert de M. Il existe une famille $f_\beta, \beta \in B$ de fonctions de $\mathcal{F}$ à valeurs positives, subordonnée au recouvrement U_α (c'est à dire que pour tout β il existe α tel que f_β est à support dans U_α) et telle que pour tout x il existe β tel que $f_\beta(x) > 0$. Comme M est paracompact, on peut extraire un sous recouvrement localement fini $B' \subset B$ du recouvrement ouvert

$\{f_\beta > 0\}, \beta \in B$. La somme $s(x) = \sum_{\beta \in B'} f_\beta(x)$ est localement finie, donc elle définit une fonction s continue et strictement positive. La famille $f_\beta/s, \beta \in B'$ est une partition de l'unité dont chaque fonction est à support dans un des ouverts U_α. On se ramène à une partition de l'unité subordonnée à U_α comme dans la dernière étape de la preuve de la Proposition 4.6. ►

On utilisera aussi le résultat suivant de topologie générale :

Proposition 4.9. *Soit X un espace topologique séparé, connexe, localement compact et paracompact. Alors X admet une suite exhaustive de compacts.*

◄ Considérons un recouvrement localement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts relativement compacts. On choisit un des ouverts U de ce recouvrement, et on pose $K_1 = \bar{U}$, qui est un compact. On considère l'ensemble $\mathcal{U}_1$ des ouverts du recouvrement qui intersectent K_1. Il découle du caractère localement fini du recouvrement et de la compacité de K_1 que $\mathcal{U}_1$ a un nombre fini d'éléments. La réunion $K_2 = \cup_{U \in \mathcal{U}_1} \bar{U}$ est donc compacte. On définit alors inductivement le compact K_{i+1} comme la réunion des adhérences des ouverts du recouvrement qui intersectent K_i. On a $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$, la réunion $\mathcal{K} := \cup_i K_i = \cup_i \mathring{K}_{i+1}$ est donc ouverte. Tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est soit contenu dans $\mathcal{K}$, soit disjoint de $\mathcal{K}$. Le complémentaire de $\mathcal{K}$ est donc ouvert, donc $\mathcal{K} = X$. ►

Voici un exemple d'utilisation des partitions de l'unité :

Lemme 4.10. *Soit M une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^D$ et soir $f : M \longrightarrow [0,1]$ une fonction C^∞. Alors il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^D \longrightarrow [0,1]$, de classe C^∞, qui prolonge f.*

◄ Pour chaque point x_0 de M, il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^D$ et une fonction $f_U : U \longrightarrow [0,1]$, de classe C^∞, telle que $f_{U|(U\cap M)} = f_{|U\cap M}$. Ces ouverts U recouvrent M, et en ajoutant l'ouvert $V = \mathbb{R}^D - M$, on obtient un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^D$. Il existe une partition de l'unité C^∞ subordonnée à ce recouvrement, et donc une famille localement finie de fonctions $g_U : U \longrightarrow [0,1]$ telles que $\sum_U g_U = 1$ sur M et $\sum_U g_U \leqslant 1$. Alors, la fonction $\sum_U g_U f_U$ est l'extension souhaitée. ►

5 Champs de vecteurs, fibrations

Un champ de vecteurs (autonome) sur $\mathbb{R}^d$ est une application $X : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^r. Un champ de vecteurs dépendant du temps (ou non autonome) est une application $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^r. On s'intéresse à l'équation différentielle $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$. Pour un certain nombre de questions, l'étude des champs de vecteurs non-autonomes se réduit à celle des champs autonomes en considérant le champ $Y(t,x) = (1, X(t,x))$, qui est un champ de vecteurs autonome sur $\mathbb{R}^{d+1}$. En effet la courbe $x(t)$ résout l'équation $\dot{x}(t) = X(t,x(t))$ si et seulement si la courbe $y(t) := (t, x(t))$ résout l'équation autonome $\dot{y}(t) = Y(y(t))$.

Nous admettons l'énoncé global suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 5.1. *Soit $X(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs C^r non nécessairement autonome. Supposons qu'il existe une constante C telle que $\|X(t,x)\| \leqslant C(1 + \|x\|)$.*

Il existe une (unique) application $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^r, ayant les propriétés suivantes :

- *$\varphi(s,s,x) = x$ pour tous $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.*
- *Pour tout $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la courbe $t \longmapsto \varphi(s,t,x)$ est une solution de l'équation différentielle. Autrement dit, pour tout (s,t,x), on a*

$$\partial_t \varphi(s,t,x) = X(t, \varphi(s,t,x)).$$

- *Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J vérifie $x(t) = \varphi(s,t,x(s))$ pour tous s et t dans J.*

On note souvent φ_s^t l'application $x \longmapsto \varphi(s,t,x)$. La relation

$$\varphi_s^t \circ \varphi_\theta^s = \varphi_\theta^t$$

est satisfaite pour tous θ, s et t. En effet, la courbe $x(t) := \varphi_\theta^t(x)$ est une solution de l'équation différentielle, elle satisfait donc $x(t) = \varphi_s^t(x(s)) = \varphi_s^t(\varphi_\theta^s(x))$. En particulier, φ_t^s est l'inverse de φ_s^t. Chacune des applications φ_s^t est donc un difféomorphisme. On appelle l'application φ (ou parfois les applications φ_s^t le flot de X. Dans le cas où le champ de vecteurs est autonome on note en général φ^t au lieu de φ_0^t. On remarque que $\varphi_s^{s+t} = \varphi^t$ pour tous s et t. En effet, la courbe $x(t) := \varphi_s^{s+t}(x)$ vérifie l'équation $\dot{x}(t) = X(x(t))$, elle vérifie donc $x(t) = \varphi_0^t(x(0)) = \varphi^t(x)$. On a alors la relation

$$\varphi^{t+s} = \varphi^s \circ \varphi^t.$$

Intéressons nous maintenant au cas d'un champ de vecteur C^r quelconque ne satisfaisant pas nécessairement la borne $\|X(t,x)\| \leqslant C(1+\|x\|)$.

Théorème 5.2. *Soit $X(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs C^r non nécessairement autonome. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, et une application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^r, ayant les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a $(s,s,x) \in U$ et $\varphi(s,s,x) = x$.*
- *Pour tout $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $(s,t,x) \in U$ est un intervalle ouvert $]T^-(s,x), T^+(s,x)[$ contenant s et la courbe $t \longmapsto \varphi(s,t,x)$ est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle. En particulier, pour tout $(s,t,x) \in U$, on a*

$$\partial_t \varphi(s,t,x) = X(t, \varphi(s,t,x)).$$

- *Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J contenant s vérifie $x(t) = \varphi(s,t,x(s))$ sur J (en particulier, $J \subset]T^-(s,x(s)), T^+(s,x(s))[$).*

Explicitons aussi le résultat dans le cas des champs autonomes.

Théorème 5.3. *Soit $X(x) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs C^r autonome. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, et une application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^r, ayant les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a $(0,x) \in U$ et $\varphi(0,x) = x$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $(t,x) \in U$ est un intervalle ouvert $]T^-(x), T^+(x)[$ contenant 0 et la courbe $t \longmapsto \varphi(t,x)$ est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle. En particulier, $\partial_t \varphi = X \circ \varphi$.*
- *Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J contenant s vérifie $x(t) = \varphi(t-s, x(s))$ sur J (en particulier, $J \subset]s + T^-(x(s)), s + T^+(x(s))[$).*

Le lecteur est invité à vérifier que les deux résultats ci-dessus sont équivalents l'un à l'autre. Nous allons démontrer la variante autonome.

◄ Il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow]0,1[$, de classe C^∞, telle que le champ $Y(x) := f(x)X(x)$ est borné. Notons $\psi(t,x)$ le flot du champ Y, qui existe au vu du théorème 5.1. Supposons que le flot $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de l'énoncé existe. On va montrer que les flots φ et ψ se déduisent l'un de l'autre par reparamétrisation, et plus précisément que l'on peut écrire $\psi(t,x) = \varphi(\tau(t,x), x)$ pour une fonction $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. En dérivant cette égalité par rapport à t, on trouve

$$Y(\psi(t,x)) = \partial_t \tau(t,x) X(\psi(t,x))$$

qui est satisfaite si

$$\partial_t \tau(t,x) = f(\psi(t,x))$$

pour tous t et x. Au vu de ces considérations informelles, on pose

$$\tau(t,x) := \int_0^t f(\psi(s,x))ds,$$

on a $\partial_t \tau(t,x) = f(\psi(t,x)) > 0$. L'application $(t,x) \longmapsto (\tau(t,x),x)$ est donc un difféomorphisme sur son image, qui est un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Cette image contient $\{0\} \times \mathbb{R}^d$, et son intersection avec $\mathbb{R} \times \{x\}$ est un intervalle pour tout x. L'inverse du difféomorphisme ci-dessus est de la forme $(t,x) \longmapsto (\theta(t,x),x)$, où $\theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^r telle que

$$\partial_t \theta(t,x) = 1/f(\psi(\theta(t,x),x)).$$

On pose alors

$$\varphi(t,x) := \psi(\theta(t,x),x),$$

et on constate que cette application (définie sur U) vérifie toutes les propriétés de l'énoncé. ►

Le fait qu'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ est la même chose qu'une application de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même est propre au cas de $\mathbb{R}^d$. Ces objets deviennent différents sur une variété. La première manifestation de cette différence tient à la manière dont les champs de vecteurs sont transformés par changement de coordonnées. Si X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ et $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un difféomrophisme, on note alors $\psi_* X$ le champ de vecteurs suivant :

$$\psi_* X(y) = d\psi_{\psi^{-1}(y)} \cdot X(\psi^{-1}(y)).$$

Le champ $\psi_* X$ est la bonne expression de X dans les nouvelles coordonnées au vu de la propriété suivante :

Propriété 5.4. *Si $Y = \psi_* X$ et si $x(t)$ résout l'équation $\dot{x} = X(x)$, alors $y(t) := \psi(x(t))$ résout l'équation $\dot{y} = Y(y)$.*

Le champ image $\psi_* X$ n'est pas défini en général si ψ n'est pas un difféomorphisme. On utilisera toutefois la notation $\psi_* X$ chaque fois qu'elle a un sens. La relation $Y = \psi_* X$ signifie donc que

$$Y(\psi(x)) = d\psi_x \cdot X(x)$$

pour tout $x \in M$. La relation

$$(\varphi\psi)_* X = \varphi_*(\psi_* X)$$

est satisfaite lorsque ses termes sont bien définis. On étendra aussi la notation au cas des champs non autonomes, $Y = \psi_* X$ si et seulement si $Y(t,\psi(x)) = d\psi_x \cdot X(t,x)$. C'est aussi équivalent à l'égalité $Y_t = \psi_* X_t$ pour tout t, en posant $Y_t(x) = Y(t,x)$. La propriété ci-dessus reste satisfaite dans ce contexte.

5.1 Champ de vecteurs sur une sous variété

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^D$. Un champ de vecteurs C^r sur M, est la donnée, pour tout $x \in M$, d'un vecteur $X(x) \in T_x M$ qui est de classe C^r en tant qu'application de M dans $\mathbb{R}^D$. De manière équivalente, le champ image $\psi_* X$ est C^r pour tout difféomorphisme d'un ouvert de M dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considèrera aussi des champs de vecteurs non autonomes $X(t,x)$ qui sont des applications C^r de $\mathbb{R} \times M$ dans $\mathbb{R}^D$ telles que $X(t,x) \in T_x M$ pour tout (t,x). On associe souvent à un tel champ non-autonome le champ autonome $(1, X(t,x))$ sur $\mathbb{R} \times M$, ceci permet de déduire un certain nombre de propriétés des champs non-autonomes à partir de l'étude des champs autonomes.

Si $x(t)$ est une courbe C^1 à valeurs dans la sous variété M de $\mathbb{R}^D$, alors pour chaque t, la dérivée $\dot{x}(t)$, vue comme un élément de $\mathbb{R}^D$, appartient à $T_{x(t)}M$. C'est le vecteur $\dot{x}(t) = dx_t \cdot 1$.

Étant donné un champ de vecteurs (non autonome) $X(t,x)$ sur M, on dit que la courbe x satisfait l'équation $\dot{x} = X(t,x)$ si $\dot{x}(t) = X(t,x(t))$ dans $T_{x(t)}M$ pour tout t. Si la courbe $x(t)$ sur M résout l'équation $\dot{x}(t) = X(t,x(t))$, alors la courbe $(t,x(t))$ sur $\mathbb{R}\times M$ résout l'équation autonome $\dot{y} = (1, X(y))$.

Soit $X(t,x)$ un champ de vecteurs non autonome sur $\mathbb{R}^D$ et M une sous variété de $\mathbb{R}^D$. On dit que X est tangent à M si $X(t,x) \in T_xM$ pour tous (t,x). La restriction de X à M est alors un champ de vecteurs sur M. Réciproquement :

Lemme 5.5. *Si M est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^D$, tout champ de vecteurs sur M est la restriction à M d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^D$.*

◄ Pour tout point $x_0 \in M$, on considère un redressement $\phi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, 0)$ de M en x_0. La restriction ψ de ϕ à M est un difféomorphisme local dans $\mathbb{R}^d$. L'image $\psi_* X$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, défini au voisinage de 0. On peut étendre ce champ de vecteurs en un champ de vecteurs Y sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$ au voisinage de 0 par la formule $Y(t,x,y) = (\psi_* X(t,x), 0)$. Le champ $\phi_*^{-1}\tilde{X}$ est alors défini sur un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^D$, et il prolonge localement X. On a montré que tout point $x_0 \in M$ admet un voisinage U sur lequel il existe un champ de vecteurs X_U ayant la propriété que $X_U = X$ sur $\mathbb{R} \times (U \cap M)$.

On peut donc recouvrir M par des ouverts U de $\mathbb{R}^D$ sur chacun desquels le champ X peut être étendu. En ajoutant l'ouvert $\mathbb{R}^D - M$, on obtient un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^D$. Il existe une partition de l'unité C^∞ subordonnée à ce recouvrement, c'est à dire une famille localement finie $g_i : \mathbb{R}^D \longrightarrow [0,1]$ de fonctions C^∞ telles que le champ X peut être étendu (par X_i) sur l'ouvert $\{g_i > 0\}$, et telles que $\sum_i g_i = 1$ sur M. Le champ $g_i X_i$ peut être prolongé par zéto en un champ C^r sur $\mathbb{R}^d$, le champ $\sum_i g_i X_i$ est alors C^r (car la somme est localement finie) et il est égal à X sur M (car $\sum_i g_i = 1$ sur M). ►

Lemme 5.6. *Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^D$ et $X(t,x)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^D$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

— *Le champ X est tangent à M.*

— *Pour toute solution $x(t) : J \longrightarrow \mathbb{R}^D$ de l'équation $\dot{x}(t) = X(t,x)$, l'ensemble J_M des temps t tels que $x(t) \in M$ est ouvert dans J.*

Si de plus M est fermée, alors toute solution passant pas M est contenue dans M sur son intervalle de définition.

◄ Il est clair que le second point implique le premier.

Réciproquement, soit $x(t)$ une solution telle que $x(s) \in M$. On considère un redressement $\phi : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$ de M en $x(s)$. La courbe $\phi \circ x = (y,z)$ satisfait localement (au voisinage de $t = s$) les équations $\dot{y} = Y(t,y,z), \dot{z} = Z(t,y,z)$, où (Y,Z) est le champ $\phi_* X$. On a $Z(t,y,0) = 0$ pour tous (t,y) puisque X est tangent à M. La courbe z est donc solution de l'équation $\dot{z} = \tilde{Z}(t,z)$, où $\tilde{Z}(t,z) = Z(t,y(t),z)$. Comme $\tilde{Z}(t,0) = 0$, on en déduit que $z(t)$ est nulle au voisinage de s, c'est à dire que $x(t) \in M$.

Finalement, si M est fermée, alors J_M est fermé. Comme c'est aussi un ouvert du connexe J, on a $J_M = J$. ►

Théorème 5.7. *Soit $X(t,x)$ un champ de vecteurs C^r non nécessairement autonome sur M. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, et une application $\varphi : U \longrightarrow M$, de classe C^r, ayant les propriétés suivantes :*

— *Pour tout $(s,x) \in \mathbb{R} \times M$, on a $(s,s,x) \in U$ et $\varphi(s,s,x) = x$.*

— *Pour tout* $(s,x) \in \mathbb{R} \times M$*, l'ensemble des* $t \in \mathbb{R}$ *tels que* $(s,t,x) \in U$ *est un intervalle ouvert* $]T^-(s,x), T^+(s,x)[$ *contenant* s *et la courbe* $t \longmapsto \varphi(s,t,x)$ *est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle.*

— *Toute solution* $x(t)$ *de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert* J *contenant* s *vérifie* $x(t) = \varphi(s,t,x(s))$ *sur* J *(en particulier,* $J \subset]T^-(s,x(s)), T^+(s,x(s))[$*).*

◄ Supposons dans un premier temps que M est fermée. On étend alors X en un champ $\tilde{X}(t,x)$ sur $\mathbb{R}^D$. On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz dans $\mathbb{R}^D$, qui nous donne l'existence d'un flot $\tilde{\varphi}(s,t,x)$ défini sur un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D$. Le lemme ci-dessus implique que la solution $t \longmapsto \varphi(s,t,x)$ est contenue dans M sur tout son intervalle de définition $]T^-(s,x), T^+(s,x)[$ si $x \in M$. En posant $U = \tilde{U} \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M)$ et $\varphi = \tilde{\varphi}_{|U}$, on voit que toutes les conclusions de l'énoncé sont satisfaites.

Dans le cas où M n'est pas fermée, on considère une fonction C^∞ propre $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Le graphe Γ de f est une sous-variété de $M \times \mathbb{R}$, donc de $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$. Elle est fermée dans $\mathbb{R}^{D+1}$. En effet si $y_n = (x_n, f(x_n))$ est une suite de points de Γ qui converge vers (x,z), alors la suite $f(x_n)$ est bornée, donc la suite x_n est contenu dans un compact de M (par propreté de f), donc sa limite est un élément de M. On associe au champ $X(t,x)$ sur M le champ $Y(t,x) = (X(t,x), df_x \cdot X(t,x))$ sur Γ ; on a $\pi_* Y = X$ où π est la restriction à Γ de la projection sur le premier facteur de $M \times \mathbb{R}$. On peut appliquer la première partie au champ Y sur Γ, on obtient un flot φ_Y défini sur un ouvert U_Y de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Gamma$. puis le résultat voulu en posant $\varphi(s,t,x) = \pi \circ \varphi_Y(s,t,x,f(x))$, sur le domaine $U = (id \times id \times \pi)(U_Y)$. ►

On dit que le champ est complet si on a $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$.

Proposition 5.8. *Si le temps d'existence* $T^+(s,x)$ *de le solution maximale* $x(t)$ *d'un problème de Cauchy vérifie* $T^+(s,x) < \infty$ *(resp.* $T^-(s,x) > -\infty$*), alors l'orbite* $x([0, T^+(s,x)[)$ *(resp.* $x([0, T^-(s,x)[)$*) n'est contenue dans aucun compact de* M*.*

◄ Supposons que $T^+(s,x) < \infty$ et que l'orbite $\varphi_x([0, T^+(s,x)[)$ est contenue dans un compact K de M. Le champ de vecteurs X est borné sur le compacte $[0, T^+(s,x)] \times K$ (en tant que champ à valeurs dans $\mathbb{R}^D$) donc la courbe $x(t)$ est Lipschitz. Elle admet donc une limite x^+ en $T^+(s,x)$. Le flot $\varphi(T^+(s,x), t, x^+)$ est défini dans un voisinage de $T^+(s,x)$.

Soit $\varphi(t,x) :]T_x^+ - \epsilon, T_x^+ + \epsilon[\times U \longrightarrow M$ un flot local en (T_x^+, x^+). La courbe $\gamma(t) :]T_x^-, T_x^+ + \epsilon[$ definie par $\gamma = x$ sur $]T_x^-, T_x^+[$ et $\gamma(t) = \varphi(t, x^+)$ sur $[T_x^+, T_x^+ + \epsilon[$ est en effet une solution du problème de Cauchy, ce qui contredit la définition de T_x^+. Pour vérifier la différentiabilité de γ en T_x^+, on remarque que $\psi : (t,x) \longmapsto (t, \varphi(t,x))$ est un difféomorphisme local, tel que $\psi_*(1,0) = (1, X)$. En conséquence, la courbe $\psi^{-1}(t, x(t))$ est la courbe (t, x^+), c'est à dire que $x(t) = \varphi(t, x^+)$ pour $t \in]T^+ - \epsilon, T^+[$. ►

On s'intéressera le plus souvent dans la suite à des champs de vecteurs autonomes et complets. Voici quelques critères de complétude :

Proposition 5.9. *Si il existe une fonction propre* f *sur* M *et une constante* $C > 0$ *telle que* $|df \cdot X| \leqslant Cf$*, alors* X *est complet. C'est le cas lorsque* X *est à support compact.*

Sur $\mathbb{R}^d$, on peut prendre $f = 1 + |x|^2$, et on retrouve que X est complet si $|X| \leqslant C(1 + |x|)$.

◄ Soit $x(t) :]T^-, T^+[$ une solution maximale de l'équation différentielle. On montre le résultat par l'absurde en supposant, par exemple, que T^+ est fini. On a $|\partial_t (f \circ x)| \leqslant Cf \circ x$ donc, par le Lemme de Gronwall, $f \circ x$ est bornée sur $[s, T^+[$ pour tout $s \in]T^-, T^+[$. Comme f est propre, ceci implique que la courbe x est contenue dans une compact, ce qui est une contradiction. Dans le cas où X est à support compact, on peut prendre n'importe quelle fonction propre $f \geqslant 1$. ►

Le lemme de redressement ci-dessous est bien utile :

Proposition 5.10. *Soit X un champ de vecteurs C^r, et x_0 un point régulier, c'est à dire que $X(x_0) \neq 0$. Il existe alors une carte locale $\phi : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ telle que $\phi_* X$ est le champ constant $(1,0)$.*

◄ Soit $\psi : (\mathbb{R}^{d-1}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ une immersion locale telle que $X(x_0) \notin d\psi_0(\mathbb{R}^{d-1})$. Soit φ^t le flot de X. Alors l'application $F : (t,y) \longmapsto \varphi^t \circ \psi(y)$ est une paramétrisation locale de M telle que $\partial_t F = X \circ F$, c'est à dire $F_*(1,0) = X$. ►

Exercice 5.1. *Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^d$ et X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ tangent à M. Pour tout point régulier x_0 de X dans M, montrer qu'il existe une difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^d$ en x_0 qui redresse à la fois M et X.*

Finissons par une remarque sur les sous-groupes de Lie. Soit G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$ qui en est aussi une sous-variété. On note $\mathfrak{g}$ son espace tangent au point identité, qui est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.11. *La restriction à $\mathfrak{g}$ de l'application exponentielle prend ses valeurs dans G.*

◄ Pour tout $A \in G$, l'application $B \longmapsto BA$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui préserve G. En conséquence, l'espace tangent à G au point A est l'espace $\mathfrak{g}A$ constitué des matrices $hA, h \in \mathfrak{g}$. Pour tout $h \in \mathfrak{g}$, l'application $A \longmapsto hA$ est un champ de vecteurs sur $Gl_n(\mathbb{R})$ qui est tangent à G, et qui engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs sur G (on parle de champ de vecteurs invariant à droite). L'équation différentielle associée $A'(t) = hA(t)$ a une unique solution telle que $A(0) = I$, c'est $A(t) = \exp(th)$, qui est donc dans G. ►

5.2 Fibrations localement triviales

Théorème 5.12 (Ehresmann)**.** *Soit $f : M \longrightarrow N$ une submersion de classe C^{r+1}, $r \geqslant 1$. Si M est compacte (ou, plus généralement, si f est propre), alors f est une fibration localement triviale, c'est à dire que, pour tout $x_0 \in N$, il existe un voisinage U de x_0 dans N et un plongement $\varphi : F \times U \longrightarrow M$, de classe C^r, où F est la sous variété $f^{-1}(x_0)$, vérifiant*

$$f \circ \varphi(y, x) = x$$

pour tout $y \in F$ et $x \in U$.

Ceci implique en particulier, si M est connexe, que toutes les fibres $f^{-1}(x)$ sont difféomorphes. Le terme *localement trivial* impose une mise en garde. Toute submersion est localement triviale au sens où elle s'ecrit $(x,y) \longmapsto x$ dans un voisinage d'un point de sa source M. Ici, on obtient un résultat local au voisinage d'une fibre entière, autrement dit un résultat local du coté de l'image, ce qui est plus fort.

Remarquons qu'un fibré vectoriel est aussi une fibration localement triviale.

◄ On considère un plongement ψ de $]-2,2[^{d_N}$ dans N qui envoie l'origine sur x_0. Posons $Z = f^{-1}(\psi(]-2,2[^{d_N}))$ et

$$g = \psi^{-1} \circ f : X \longrightarrow]-2,2[^{d_N}.$$

Soient e_i les vecteurs coordonnées de $\mathbb{R}^{d_N}$, et soient $v_i(x)$ les champs de vecteurs

$$v_i(x) = g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_{d_N})e_i,$$

où $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ est une fonction régulière qui vaut 1 sur $[-1,1]$ et dont le support est contenu dans $]-2,2[$.

On construit des champs de vecteurs V_i sur la variété X tels que $g_*V_i = v_i$. Pour ceci, on considère l'orthogonal $H'(z)$ du sous-espace $K(z) := \ker dg_z$ dans $\mathbb{R}^{D_M}$, et son intersection $H(z)$ avec $T_zZ(= T_zM)$. Ce sous-espace est un supplémentaire de $K(z) = \ker dg_z$ dans T_zM. Comme dg_z est surjective, sa restriction à l'espace horizontal $H(z)$ est un isomorphisme, et on pose

$$V_i(z) = (dg_z)^{-1}_{|H(z)}(v_i(g(z))).$$

Comme f est propre, le support de V_i est compact.

Montrons que les champs $V_i(z)$ sont C^r. On fixe un point $z_0 \in Z$ et on étudie ces champs au voisinage de z_0. On étend localement la submersion g en une submersion

$$G : (\mathbb{R}^{D_M}, z_0) \longrightarrow (]-2,2[^{d_N} \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}, (g(z_0), 0))$$

telle que $G(z) = (g(z), 0)$ pour $z \in M$. L'espace $K(z)$, vu comme sous espace de $\mathbb{R}^{D_M}$ est le noyau de dG_z. L'application $z \longmapsto G(z)$ à valeurs dans la Grassmanienne $G(d_F, D_M)$ est donc C^r. On en déduit en se référant à l'étude des Grassmaniennes plus haut que l'application

$$z \longmapsto H(z) = (K(z)^{\perp} \cap T_zM) \in G(d_N, D_M)$$

est C^r. Comme l'application $dG_{z|H(z)}$ est un isomorphisme. Son inverse $S(z)$, vu comme application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}^D$ dont l'image est $H(z)$, est une fonction C^r de z au vu de la propriété 3.3. Les champs $V_i(z) = S(z) \cdot v_i(g(z))$ sont donc C^r.

Soit ϕ_i^t le flot de V_i. Comme $g_*V_i = v_i$, on a

$$g \circ \phi_i^t(x) = x + te_i$$

tant que x et $x + te_i$ sont dans $[-1,1]^{d_n}$. En notant F la sous variété $g^{-1}(0)$, on définit l'application $\tilde{\varphi} : F \times]-1,1[^{d_N} \longrightarrow X$ par

$$\tilde{\varphi}(y, x) = \varphi(y, x_1, \ldots, x_{d_N}) = \phi_{d_N}^{x_{d_N}} \circ \cdots \circ \phi_1^{x_1}(y).$$

On remarque que $g \circ \varphi(y, x) = x$. La différentielle

$$d\tilde{\varphi}_{(y,0,\ldots,0)} \cdot (\zeta, t_1, \cdots t_{d_N}) = \zeta + t_1 V_1(y) + \cdots + t_{d_N} V_{d_N}(x)$$

est inversible, donc φ est un difféomorphisme local en $(y, 0)$ pour tout $y \in F$. Au vu du Lemme ci-dessous, il existe $\delta > 0$ tel que $\tilde{\varphi}$ engendre un plongement de $F \times]-\delta, \delta[^{d_N}$ dans X. On revient à l'énoncé en posant $U = \psi(]-\delta, \delta[^{d_N})$ et $\varphi(y, x) = \tilde{\varphi}(y, \psi(x))$. ►

Lemme 5.13. *Soient M et N des sous variétés, soit F une sous variété compacte de M, et soit $J : M \longrightarrow N$ une application différentiable dont la restriction à F est un plongement et qui est un difféomorphisme local en chaque point de F. Alors il existe un voisinage U de F dans M tel que la restriction de J à U est un plongement.*

La compacité de F n'est en fait pas nécessaire.

◄ Comme M est localement compacte, le compact F admet un voisinage compact W. On recouvre F par un nombre fini d'ouverts U_i contenus dans W sur chacun desquels J est un difféomorphisme sur son image. L'ensemble X des couples (x, x') de $W \times W$ tels que $J(x) = J(x')$ est compact. Il contient la diagonale Δ_W de $W \times W$. De plus la réunion $\mathcal{U} := \cup_i U_i \times U_i$ est un ouvert de $W \times W$ tel que $X \cap \mathcal{U} \subset \Delta_W$. le compact $X - \mathcal{U}$ est disjoint de Δ_F, donc de $F \times F$ (puisque $X \cap (F \times F) = \Delta_F$). Il existe donc un voisinage V de F dans W tel que $(V \times V) \cap X \subset \Delta_V$ et donc tel que J est injective sur V. Quitte à restreindre V, on peut supposer que les ouverts U_i recouvrent V. La restriction de J à V est alors un difféomorphisme sur son image, c'est à dire un plongement. En effet, pour tout $x \in V$, il existe i tel que $x \in U_i$ et l'inverse de J au voisinage de $J(x)$ est égale au difféomorphisme $J^{-1}_{|U_i}$. ►

5.3 Fibration de Hopf

On considère le champ de vecteurs linéaire $V(x,p)$ sur $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -x_2.$$

Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont x_1 et x_2 sont les positions, et p_1 et p_2 les vitesses. En notation complexe $z_i = x_i + ip_i$, les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{it},$$

elles sont toutes périodiques de période 2π (sauf la solution identiquement nulle). On obtient ainsi une partition de $\mathbb{R}^4$ en un point et des cercles plongés. Au voisinage de n'importe quel point non nul de $\mathbb{R}^4$, cette partition peut être redressée par un difféomorphisme local en une collection de droites parallèles.

L'énergie de ce système physique est

$$E(x,p) = \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|p|^2.$$

On calcule facilement que $dE \cdot V = 0$. On conclut que l'énergie est constante le long des trajectoire, c'est à dire que $E(x(t), p(t)) = E(x(0), p(0))$ $\forall t$ si $(x(t), p(t)$ est une trajectoire de l'équation différentielle. Ceci est aussi évident directement sur l'expression des solutions.

Le champ de vecteur V engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs (toujours noté V) sur la sous-variété $\{E = 1/2\}$, qui n'est autre que S^3. Les trajectoires du système différentiel $\dot{x} = V$, qui sont toutes des images plongées de S^1, forment dont une partition de la sphère S^3. Localement, cette partition se redresse en une collection de droites parallèles.

La formule suivante va nous permettre de faire mieux. On pose

$$h(z_1, z_2) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$

Le calcul suivant

$$|h(z_1, z_2)|^2 = 4z_1\bar{z}_2\bar{z}_1z_2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

montre que $h(S^3) \subset S^2$, et même que $h^{-1}(S^2) = S^3$. On constate encore une fois que h est constante le long des orbites, et même que les ensembles $h = cte$ sont exactement les orbites. En effet, si $h(z_1, z_2) = h(z'_1, z'_2)$, alors

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |h(z_1, z_2)| = |h(z'_1, z'_2)| = |z'_1|^2 + |z'_2|^2$$

donc $|z_j|^2 = |z'_j|^2$. On écrit alors $z'_j = z_ie^{it_j}$ pour des réels t_1 et t_2. Comme $z_1\bar{z}_2 = z'_1\bar{z}'_2$, on conclut que $e^{i(t_1-t_2)} = 1$, et donc que les points (z_1, z_2) et (z'_1, z'_2) sont sur la même orbite.

L'application $h : S^3 \longrightarrow S^2$ est une submersion (nous le vérifierons ci-dessous), donc une fibration localement triviale. Toutes les fibres de cette fibration sont difféomorphes à S^1, en particulier, h est surjective. Les fibres de h sont exactement les orbites du système différentiel $\dot{x} = V$ sur S^3.

On montrera plus tard que S^3 n'est pas difféomorphe à $S^2 \times S^1$, la fibration de Hopf n'est donc pas globalement triviale.

Montrons maintenant que h est une submersion en tout point différent de $(0,0)$. En un point où z_1 et z_2 sont non-nuls, on écrit l'application h en coordonnées polaires

$$(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \longmapsto (2r_1r_2, \theta_1 - \theta_2, r_1^2 - r_2^2).$$

On vérifie par un calcul direct que l'application $(r_1, r_2) \longmapsto (2r_1r_2, r_1^2 - r_2^2)$ est un difféomorphisme de $]0, \infty)^2$ dans $]0, \infty) \times \mathbb{R}$. L'autre facteur $(\theta_1, \theta_2) \longmapsto \theta_2 - \theta_1$ est une submersion de T^2 dans S^1, donc h est une submersion sur l'ouvert $\{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$.

En écrivant en coordonnées cartésiennes la matrice

$$dh_{(x_1,p_1,x_2,p_2)} = 2 \begin{pmatrix} x_2 & p_2 & x_1 & p_1 \\ -p_2 & x_2 & p_1 & -x_1 \\ x_1 & p_1 & -x_2 & -p_2 \end{pmatrix}$$

on voit que cette différentielle est surjective aux points tels que $z_1 = 0, z_2 \neq 0$ ou $z_2 = 0, z_1 \neq 0$.

5.4 Oscillateur non résonant

On considère le champ de vecteurs linéaire $V(x, p)$ sur $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = ap_2, \quad \dot{p}_2 = -ax_2,$$

avec un paramètre a irrationnel. Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont les fréquences d'oscillations sont différentes et incommensurables. L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}\big(x_1^2 + p_1^2 + ax_2^2 + ap_2^2\big) = \frac{1}{2}\big(|z_1|^2 + a|z_2|^2\big).$$

La sous variété $\mathcal{E} := \{E = 1/2\}$ est difféomorphe à S^3. Les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{iat}.$$

Contrairement au cas $a = 1$, la plupart des trajectoires sont injectives (toutes celles de l'ouvert $\Omega := \{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$). Les trajectoires $(z_1(t) \equiv 0, z_2(t) = z_2(0)e^{iat})$, et $(z_1(t) = z_1(0)e^{it}, z_2(t) \equiv 0)$ sont periodiques, et la trajectoire $z(t) \equiv 0$ est fixe.

On vérifie facilement que les quantités $|z_1|, |z_2|$ (et donc E) sont constantes le long des trajectoires. Pour chaque $r_1 > 0, r_2 > 0$, la sous variété $T(r_1, r_2)$ d'équation $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2$ est invariante. Chacune de ces sous variétés est difféomorphe au tore T^2 (presque tautologiquement).

L'application $R : (z_1, z_2) \longrightarrow (|z_1|^2, |z_2|^2)$ est une submersion et un fibration localement triviale (dont les fibres sont difféomorphes à T^2) de Ω sur $]0, \infty)^2$. On peut aussi la restreindre à une fibration localement triviale de l'ouvert $\Omega \cap \mathcal{E}$ de la surface d'énergie, sur l'intervalle $](1, 0), (0, 1)[$ de $\mathbb{R}^2$. Toutefois, elle ne s'étend pas en une fibration localement triviale de toute la surface d'énergie, les fibres $R^{-1}(0, 1)$ et $R^{-1}(1, 0)$ sont des cercles, et non des tores. Ce sont des fibres singulières, sur lesquelles R n'est pas une submersion.

Le champ de vecteurs V engendre un champ de vecteurs sur chacun des tores $T(r_1, r_2)$. Les champs de vecteurs sur $T(r_1, r_2)$ et $T(r_1', r_2')$ sont conjugués par le difféomorphisme

$$(z_1, z_2) \longmapsto (r_1' z_1/r_1, r_2' z_2/r_2)$$

(donc en un sens, leurs dynamiques sont identiques). Pour décrire les orbites, on condidère la paramétrisation de $T(r_1, r_2)$ par le difféomorphisme local non injecif

$$\pi : \mathbb{R}^2 \ni (\theta_1, \theta_2) \longrightarrow (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in T(r_1, r_2).$$

La préimage du champ de vecteurs V est le champ de vecteur constant $(1, a)$, c'est à dire que $\pi_*(1, a) = V$. L'orbite du point $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$ se représente donc dans ces coordonnées par la droite d'équation $(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0)$. Toutefois, en raison la non injectivité de π, la préimage de l'orbite contient toutes les droites translatées d'équation $(\theta_2 - \theta_2^0 - n) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - m),\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Notons que l'ensemble Z des réels de la forme $m - n/a, (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ est une partie dense de $\mathbb{R}$. La préimage de l'orbite est l'ensemble des droites d'équation

$$(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - z),\ z \in Z.$$

C'est donc une famille "transversalement dense" de droites parallèles. Comme cette famille est dense dans $\mathbb{R}^2$, son image par π qui est l'orbite de $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$ est dense dans $T(r_1, r_2)$. Localement, au voisinage de chacun de ses points, cette orbite se redresse en le produit d'un intervalle par un ensemble dénombrable dense.

5.5 Orbites d'un champ de vecteurs

Soit $V(x)$ un champ de vecteurs sur la sous-variété M, et soit $x(t) : \mathbb{R} \longrightarrow M$ une solution de l'équation $\dot{x}(t) = V(x(t))$ (ou plus généralement $x(t) : I \longrightarrow M$ une orbite maximale).

Proposition 5.14. *Il y a trois possibilités pour la solution $x(t)$:*
- *La solutions $x(t)$ est constante, $x(t) \equiv x_0$, où x_0 est une singularité de V, c'est à dire que $V(x_0) = 0$.*
- *La solution $x(t)$ est périodique, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ tel que $x(t + T) = x(t)$ pour tout t. Dans ce cas, l'image de la courbe x est une sous-variété de M difféomorphe à S^1.*
- *La courbe $t \longmapsto x(t)$ est une immersion injective.*

◀ Si x_0 est une singularité de V, alors la courbe constant $x \equiv x_0$ est une solution de l'équation différentielle. La partie unicité du théorème de Cauchy Lipschitz implique donc qu'aucune autre solution ne passe par x_0. En effet, si une solution $\gamma(t)$ vérifie que $\gamma(s) = x_0$ pour un certain réel s, alors la courbe constante x_0 et la courbe $\gamma(t)$ sont deux solution du problème de Cauchy avec la condition initial $x(s) = x_0$, et elles sont donc égales.

Supposons maintenant que la solution $x(t)$ n'est pas constante, et donc que $V(x(t)) \neq 0$ pour tout t, c'est à dire que l'application $t \longmapsto x(t)$ est une immersion.

Supposons que cette immersion n'est pas injective. Alors il existe des temps s et $S > 0$ tels que $x(s) = x(s + S)$. On remarque que les courbes $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto x(t + S)$ sont solutions du même problème de Cauchy, et donc égales. Autrement dit, l'égalité $x(t) = x(t + S)$ a lieu pour tout t. Considérons maintenant l'ensemble P des périodes de x, c'est à dire l'ensemble des réels S tels que $x(t + S) = x(t)$ pour tout t. On voit que P est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel $T > 0$ (que l'on appelle la période de x) tel que $P = T\mathbb{Z}$.

Considérons l'application $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ donnée par $\theta(t) = e^{it2\pi/T}$. Cette application est un difféomorphisme local surjectif. On constate de plus que si $x(t) = x(s)$, alors $\theta(t) = \theta(s)$. La courbe x se factorise donc en $x = g \circ \theta$, en posant $g(\theta) = x(t)$ où t vérifie $\theta(t) = \theta$. On vérifie immédiatement que l'application g est bijective. Nous allons montrer que c'est une immersion, et donc, puisque S^1 est compacte, un plongement (et donc un difféomorphisme sur son image).

Fixons $\theta_0 \in S^1$, et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(t_0) = \theta_0$. On choisit un petit intervalle ouvert I centré en t_0, de sorte que $\theta_{|I}$ est un difféomorphisme sur son image. Cette image $\theta(I)$ est un voisinage de θ_0 dans S^1. Sur $\theta(I)$, on a

$$g = x \circ (\theta_{|I})^{-1}.$$

C'est donc une immersion comme composée d'une immersion et d'un difféomorphisme. ▶

Soit V un champ de vecteurs complet sur M, sous variété de dimension d. Considérons une orbite X, c'est à dire l'image $x(\mathbb{R})$ d'une solution de l'équation $\dot{x} = V$. Nous avons vu que X est soit un point, soit une sous-variété compacte plongée difféomorphe à S^1, soit l'image d'une immersion injective.

Propriété 5.15. *Pour tout $x \in X$, Il existe une carte $\phi : I \times B \longrightarrow M$, où I est un intervalle contenant 0 et où B est une petite boule ouverte de $\mathbb{R}^{d-1}$ centrée en 0, ayant les propriétés suivantes :*

— $\phi(0,0) = x$,

— $\phi^{-1}(X) = I \times Z$

où Z est une partie dénombrable de B^l.

Cette propriété est satisfaite par les orbites maximales non périodiques des champs de vecteurs, pas, en général, par les images d'immersions injectives (penser au huit) !

Si X était une sous variété plongée de M, on pourrait prendre $Z = \{0\}$ dans le résultat ci-dessus. Mais en général, la "structure transverse" Z est plus complexe, comme nous l'avons illustré avec les oscillateurs non résonnants dans 5.4.

◄ Comme $V(x) \neq 0$, on peut redresser le champ V au voisinage de x, c'est à dire qu'il existe un plongement $\phi : I \times B \longrightarrow M$ tel que $\phi_*(1,0) = V$, où $(1,0)$ est vu comme un champ de vecteurs constant sur $I \times B$. L'ensemble $\phi^{-1}(X)$ est alors une réunion de segments verticaux de la forme $I \times \{z\}$. Notons Z la projection de $\phi^{-1}(X)$ sur B, de sorte que $X \cap \phi(I \times B) = \phi(I \times Z)$. Notons alors τ l'ensemble des temps $t \in \mathbb{R}$ tels que $\phi^{-1} \circ x(t) \in \{0\} \times Z$. L'application $P = \pi \circ \phi^{-1} \circ x$, où π est la projection sur le second facteur, induit une bijection entre τ et Z (rappelons que la courbe x est injective). Pour chaque $T \in \tau$, l'application $\phi^{-1} \circ x$ envoie l'intervalle $T + I$ sur le segment vertical $I \times \{P(T)\}$. Ces segments verticaux sont disjoints, donc leur préimages le sont aussi. Les intervalle $T + I, T \in \tau$ sont donc disjoints, ce qui implique que τ est dénombrable, donc Z aussi. ►

L'espace Z est alors totalement discontinu (c'est à dire que ses composantes connexes sont des points) au vu du lemme ci-dessous. Les composantes connexes de l'ensemble $X \cap U$ sont donc les couches $\phi^{-1}(I \times \{z\})$. L'ensemble X n'est pas localement connexe si ce n'est pas une sous variété.

Lemme 5.16. *Tout espace métrique dénombrable est totalement discontinu.*

◄ Fixons en effet un point x_0 et considérons la fonction $x \longmapsto d(x_0, x)$. L'image de la composante connexe de x_0 est un intervalle dénombrable, et donc un point. ►

6 Distances sur une sous-variété

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^D$. On peut munir M de la distance induite par celle de $\mathbb{R}^D$, mais on va construire une autre distance plus géométrique.

6.1 La distance géométrique

Propriété 6.1. *Une sous variété connexe M est connexe par arcs C^1 (et même C^∞).*

◄ On considère la relation *il existe une courbe C^1 de M connectant x à y.*

Tout point $x \in M$ admet un voisinage V tel que tout point $y \in V$ est relié à x. On peut prendre comme voisinage V l'image d'une boule ouverte B par un plongement $\varphi : B \longrightarrow M$ qui envoie 0 (le centre de B) sur x. La courbe $[0,1] \ni t \longmapsto \varphi(t\varphi^{-1}(y))$ relie alors x à y.

La relation est une relation d'équivalence. Prouvons la transitivité. Soit $\gamma_1 : [0, T_1] \longrightarrow M$ une courbe reliant x à y et $\gamma_2 : [0, T_2] \longrightarrow M$ une courbe reliant y à z. On peut concaténer γ_1 et γ_2 pour former une courbe reliant x à z, mais cette courbe n'est pas forcément C^1. On résout cette difficulté en considérant une fonctions C^1 $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que $\theta'(0) = 0 = \theta'(1)$ et $\theta' > 0$ sur $]0,1[$. Les courbes $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i(T_i\theta(t)) : [0,1] \longrightarrow M$ relient x à y et y à z, et elles vérifient de plus que $\dot{\gamma}_i = 0$ aux extrémités. La concaténation est alors une courbe C^1 reliant x à z.

Les classes d'équivalence de la relation forment une partition de M en ouverts. Comme M est connexe, il n'y a qu'une classe. ►

On définit la longueur de la courbe C^1 $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ par

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

où $|v|$ est la norme Euclidienne du vecteur $v \in \mathbb{R}^D$. La longueur est invariante par reparamétrisation :

Propriété 6.2. *Soit $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ une courbe C^1 et $g : [S, S'] \longrightarrow [0, T]$ une fonction C^1 croissante et surjective. Alors $\mathcal{L}(\gamma \circ g) = \mathcal{L}(\gamma)$.*

La preuve est un calcul immédiat de changement de variable, utilisant que $|g'| = g'$.

On définit la distance géométrique

$$\delta(x, y)$$

sur M comme l'infimum des longueurs des courbes C^1 joignant x à y dans M. Vérifions l'inégalité triangulaire : Soient x,y, et z trois points de M et soit $\epsilon > 0$. Il existe des courbes γ_1 et $\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow M$ qui joignent x à y et y à z et telles que $\mathcal{L}(\gamma_1) \leqslant \delta(x, y) + \epsilon$ et $\mathcal{L}(\gamma_2) \leqslant \delta(y, z) + \epsilon$. Comme dans la preuve de la propriété 6.1, on peut supposer, en reparamétrant les courbes γ_1 et γ_2 que $\dot{\gamma}_1(1) = 0 = \dot{\gamma}_1(0)$. La concaténation γ_3 de γ_1 et γ_2 est alors une courbe C^1 qui joint x à z. On a alors

$$\delta(x, z) \leqslant \mathcal{L}(\gamma_3) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2) \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z) + 2\epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, donc $\delta(x, z) \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

On note immédiatement que

$$\delta(x, y) \geqslant |y - x|.$$

Contrairement à la plupart des constructions que nous avons faites jusqu'à présent, la distance géométrique δ dépend de la manière dont M est plongée dans $\mathbb{R}^D$, et pas seulement sa structure intrinsèque de variété.

Proposition 6.3. *Au voisinage d'un point $x_0 \in M$, on a*

$$\delta(x, x') \leqslant |x' - x|(1 + \epsilon(|x' - x_0| + |x - x_0|))$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

◀ On peut supposer que $x_0 = 0$ et T_0M est l'espace horizontal $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Localement au voisinage de x_0, la variété M s'écrit donc comme le graphe d'une application $g : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$. Notons $\rho(r)$ un module de continuité de dg en x_0, c'est à dire que $|dg_x| \leqslant \rho(|x|)$. Étant donnés deux points $x = (y, g(y))$ et $x' = (y', g(y'))$ avec $x, x' \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$, on a

$$|x' - x|^2 \geqslant (1 - \rho(r)^2)|y' - y|^2$$

et, en estimant la longueur de l'arc de M au dessus du segment $[x, x']$

$$\delta(x, x') \leqslant \sqrt{1 + \rho(r)^2}|y' - y| \leqslant \sqrt{(1 + \rho(r)^2)/(1 - \rho(r)^2)}|x' - x|.$$

▶

Corollary 6.4. *La distance δ engendre sur M la même topologie que la distance Euclidienne.*

Corollary 6.5. *Si la variété M est fermée dans $\mathbb{R}^D$ alors elle est complète pour la distance δ.*

La distance géométrique sur M possède la propriété suivante :

Propriété 6.6. *Soient x_0 et x_1 deux points de M. Si r_0 et r_1 sont des réels positifs tels que $r_0 + r_1 > \delta(x_0, x_1)$, alors $B_\delta(x_0, r_0) \cap B_\delta(x_1, r_1)$ est non vide.*

On remarquera que cette propriété n'est pas satisfaite par la distance $\arctan(|y - x|)$ sur $\mathbb{R}^d$.

◄ Si $r_0 = 0$ ou $r_1 = 0$, le résultat est clair, on suppose donc $r_0 > 0$, $r_1 > 0$ et on choisit $r'_0 \in]\delta(x_0, x_1) - r_1, \delta(x_0, x_1)]$. Il existe alors une courbe $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ joignant x_0 à x_1 et telle que $\mathcal{L}(\gamma) < r'_0 + r_1$. La courbe γ est continue, donc continue pour la distance δ. La fonction continue $t \longmapsto d(x_0, \gamma(t))$ prend toutes les valeurs entre 0 et $\delta(x_0, x_1)$, donc en particulier la valeur r'_0. En notant t_0 un temps tel que $\delta(x_0, \gamma(t_0)) = r'_0$, on a

$$\delta(x_0, \gamma(t_0)) \leqslant \mathcal{L}(\gamma_{[0,t_0]}) = r'_0 < r_0$$
$$\delta(\gamma(t_0), x_1) \leqslant \mathcal{L}(\gamma_{[t_0,t_1]}) = \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_{[0,t_0]}) < r'_0 + r_1 - r_0 = r_1 \text{ ►}$$

Théorème 6.7. *Soit M une sous-variété munie de sa distance géométrique δ. Si M est complète pour δ, alors toutes les boules fermées de M sont compactes.*

Dans un espace métrique localement compact général, les boules fermées ne sont pas forcément toutes compactes.

Comme on le voit dans la preuve, la conclusion tient dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact (M, δ) qui est complet et vérifie la propriété 6.6.

◄ Fixons $x \in M$ et montrons que les boules fermées de centre x sont compactes. Pour ceci on considère le supremum R des rayons $r > 0$ tels que la boule $\bar{B}(x, r)$ est compacte. On veut montrer que $R = +\infty$, on suppose que c'est un nombre fini.

La boule $\bar{B}(x, R)$ est compacte. Cette boule est fermée dans M complet, donc elle est complète. Pour montrer qu'elle est précompacte, on fixe $\epsilon > 0$ et on considère une partie $x_1, \ldots, x_n$ qui est $\epsilon/3$-dense dans la boule compacte $\bar{B}(x, R - \epsilon/3)$. Cette partie est alors ϵ-dense dans $\bar{B}(x, R)$. En effet pour tout $y \in \bar{B}(x, R)$, il existe un point $z \in B(x, R - \epsilon/3)$ tel que $\delta(y, z) < \epsilon/2$ (par le lemme 6.6). En choisissant i tel que $d(x_i, z) < \epsilon/3$, on voit que $\delta(x_i, y) < \epsilon$.

Il existe $\eta > 0$ tel que la boule $\bar{B}(x, R + \eta)$ est compacte. Comme M est localement compacte, chaque point y de M est le centre d'une boule compacte $\bar{B}_y$, la boule ouverte associée étant notée B_x. Les boules $B_y, y \in \bar{B}(x, R)$ recouvrent le compact $\bar{B}(x, R)$, et on extrait un sous-recouvrement fini. La réunion des boules fermées correspondantes et alors un compact K qui contient $\bar{B}(x, R)$ dans son intérieur. La distance entre $\bar{B}(x, R)$ et le complémentaire de $\mathring{K}$ est strictement positive, c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout point y qui appartient à une boule de rayon 2η et dont le centre est dans $\bar{B}(x, R)$, on a $y \in K$. Au vu de la propriété 6.6, on conclut que $B(x, R + \delta) \subset K$ et donc que la boule $\bar{B}(x, R + \delta)$ est compacte. Ceci est en contradiction avec la définition de R, on conclut que R est infini, ce qui termine la preuve. ►

Sous les hypothèses du Théorème, les boules fermées $\bar{B}(x_0, r_0)$ et $\bar{B}(x_1, r_1)$, qui sont compactes, ont une intersection non-vide dès que $r_0 + r_1 \geqslant \delta(x_0, x_1)$.

6.2 Géodésiques minimisantes.

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^D$ et δ sa distance géométrique. On définit La longueur d'une courbe quelconque $\gamma : [S, T] \longrightarrow M$ comme le supremum

$$\mathcal{L}_\delta(\gamma) = \sup_{S = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T} \big(\delta(\gamma(0), \gamma(t_1)) + \cdots + \delta(\gamma(t_{k-1}), \delta(t_k))\big)$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des suites finies croissantes de temps intermédiaires $S = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{k-1} \leqslant t_k = T$. On notera $\mathcal{L}(\gamma_{[S,T]})$ lorsqu'on veut préciser le domaine de la courbe. On note que cette formule fait sens dans tout espace métrique (M, δ). On peut notamment considérer la longueur $\mathcal{L}_d$ associée à la distance $d(x, x') = |x' - x|$ sur M.

Les quelques propriétés ci dessous de la longueur découlent directement de la définition :

$$\mathcal{L}_\delta(\gamma_{[s,t]}) \geqslant \delta(\gamma(s),\gamma(t)), \quad \forall s \leqslant t$$
$$\mathcal{L}(\gamma_{[S,T]}) = \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S,t]}) + \mathcal{L}(\gamma_{[t,T]}) \quad \forall t \in [S,T].$$

Propriété 6.8. *Si M est une sous variété de $\mathbb{R}^D$ et si $\gamma : [S,T]$ est une courbe C^1 sur*

◄ Notons $\mathcal{I}(\gamma)$ le temps de cette preuve le terme de droite de l'égalité. Par définition de δ, on a

$$\delta(\gamma(s),\gamma(t)) \leqslant \mathcal{I}(\gamma_{[s,t]})$$

pour tous s et t, et $\mathcal{I}$ vérifie la relation de Chasles. On en conclut que $\mathcal{I}(\gamma) \geqslant \mathcal{L}(\gamma)$. Réciproquement, considérons un module de continuité ω de $\dot\gamma : [s,t] \longrightarrow \mathbb{R}^D$. Pour tout $[s,t] \subset [S,T]$, on a

$$\big||\gamma(t)-\gamma(s)| - (t-s)|\dot\gamma(s)|\big| \leqslant \left|\int_s^t \dot\gamma(\sigma) - \dot\gamma(s) d\sigma\right| \leqslant (t-s)\omega(t-s)$$

et

$$\left|\int_s^t |\dot\gamma(\sigma)|d\sigma - (t-s)|\dot\gamma(s)|\right| \leqslant (t-s)\omega(t-s)$$

donc

$$\left|\int_s^t |\dot\gamma(\sigma)|d\sigma - |\gamma(s)-\gamma(t)|\right| \leqslant 2(t-s)\omega(t-s).$$

En prenant une décomposition $T = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ telle que $t_{i+1} - t_i < \epsilon$, on a donc

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqslant |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| + \cdots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| \geqslant \mathcal{I}(\gamma) - 2(T-S)\omega(\epsilon).$$

Comme on peut choisir $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, on a $\mathcal{L}(\gamma) \geqslant \mathcal{I}(\gamma)$ et donc $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{I}(\gamma)$. ►

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une géodésique minimisante Lipschitzienne :

Théorème 6.9. *Soit M une sous-variété fermée, munie de sa distance géométrique δ. Étant donnés deux points x_0 et x_1, il existe une courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ qui est Lipschitz de constante $\delta(x_0,x_1)$, et telle que $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Cette courbe est donc de longueur $\delta(x_0,x_1)$.*

La preuve qui suit montre en fait le résultat dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact et complet (M,δ) vérifiant la propriété 6.6.

◄ Posons $L = \delta(x_0,x_1)$. En utilisant la Propriété 6.6 et le Théorème 6.7, on voit que l'intersection $\bar B(x_0,L/2) \cap \bar B(x_1,L/2)$ est non vide, et on choisit un point $\gamma(1/2)$ dans cette intersection. On a alors $\delta(x_0,\gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2),x_1) = L/2$.

On construit ainsi des points $\gamma(1/4)$ et $\gamma(3/4)$ tels que

$$\delta(x_0,\gamma(1/4)) = \delta(\gamma(1/4),\gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2),\gamma(3/4)) = \delta(\gamma(3/4),x_1) = L/4.$$

Par récurrence, on construit ainsi une application γ définie sur l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1]$, à valeur dans M, et L-Lipschitz. On l'étend alors par continuité en une courbe L-Lipschitz de $[0,1]$ dans M telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Comme la courbe γ est L-Lipchitz, il est immédiat que sa longueur est inférieure ou égale à L. Comme $\delta(x_0,x_1) = L$, et que γ relie x_0 à x_1, on conclut que $\mathcal{L}(\gamma) = L$. ►

6.3 Métriques Riemanniennes

Dans les sections précédentes, nous avons utilisé la distance ambiante de $\mathbb{R}^D$ pour définir une distance géométrique sur la sous variété M. En fait, ce qui était utile pour mesurer la longueur d'une courbe est la donnée, pour chaque point x de M, d'un norme sur T_xM, nous avons pris comme norme la restriction de la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^D$ à T_xM.

On aurait aussi pu se donner une métrique Riemannienne quelconque :

Définition 6.10. *Une métrique Riemannienne sur une sous variété M est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'un produit scalaire $g_x(v,w)$ sur l'espace vectoriel T_xM. On demande de plus que ce produit scalaire dépende différentiablement du point x, c'est à dire que la fonction $x \longmapsto g_x(V(x), W(x))$ est différentiable pour tous champs de vecteurs différentiables V et W.*

Exercice 6.1. *Si M est une sous variété de $\mathbb{R}^D$, et si g_x est une métrique Riemanienne sur M, alors il existe une application différentiable $G : M \longrightarrow S^+(D)$ (l'ensemble des matrices symétriques définies positives $D \times D$) telle que $g_x(v,w) = \langle G(x)v, w\rangle$, où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^D$.*

Étant donnée une métrique Riemanienne g_x sur M, on définit comme ci-dessus la longeur d'une courbe de M par

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)}dt,$$

puis la distance δ_g donnée comme l'infimum des longueurs des courbes. Cette distance vérifie la propriété 6.6, et donc les Théorèmes 6.7 et 6.9.

On dit que la métrique g est complète si M est complète pour la distance géodésique associée. La métrique Riemanienne naturelle sur une sous-variété fermée est complète. Nous montrerons plus tard que toute (sous) variété admet un plongement dans un espace $\mathbb{R}^D$ dont l'image est fermée, et donc une métrique Riemannienne complète. Cependant, il existe aussi des métriques non complètes (sauf sur une variété compacte).

6.4 Feuilles et feuilletages

Soit M une sous variété. Un champ de sous-espaces est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'un sous-espace vectoriel $E(x)$ de T_xM de dimension k fixée qui dépend régulièrement du point x, c'est à dire que l'application $x \longmapsto E(x)$ est régulière à valeurs dans $G(k, D_M)$. Il est équivalent de dire que le champ de sous-espaces est localement engendré par k champs de vecteurs réguliers (cette seconde définition ayant l'avantage de ne pas faire explicitement référence à l'espace ambiant).

On dit que le champ de sous espaces $E(x)$ est intégrable si il satisfait la propriété de redressement suivante :

Pour tout $x \in M$, il existe une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, 0) \longrightarrow (M, x)$, où B^k et B^l sont des boules ouvertes centrées en 0 dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$, telle que

$$E(\phi(y)) = d\phi_y(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

pour tout $y \in B^k \times B^l$. Une telle paramétrisation est dite adaptée.

On dit alors que le champ $E(x)$ engendre un feuilletage. Le théorème de redressement des champs de vecteurs affirme que les champs de droites (champs de sous espaces de dimension 1) engendrent tous des feuilletages, on verra que ce n'est pas le cas en dimension supérieure.

Étant donné un point $x \in M$, on appelle orbite de x l'ensemble X des points qui peuvent être reliés à x par une courbe tangente au champ de sous espace. Dans le cas où le sous-espace est de dimension un, et ou il est engendré par un champ de vecteurs $V(x)$ ne s'annulant pas, l'orbite X est l'image de la solution maximale de l'équation différentielle associée à $\dot x = V \circ x$ issue du point x.

Le résultat suivant généralise la propriété 5.15 à ce cadre.

Propriété 6.11. *Supposons que le champ $E(x)$ est intégrable. Pour tout $x_0 \in M$ et toute paramétrisation adaptée ϕ de M en x_0, il existe une partie dénombrable $Z \subset B^l$ telle que*

$$\phi^{-1}(X(x_0)) = B^k \times Z.$$

◄ La préimage $\phi^{-1}(X)$ d'une orbite X est de la forme $B^k \times Z$, il faut montrer que Z est dénombrable. On munit l'orbite X de la distance géométrique $\delta(x, y)$ définie comme l'infimum des longueurs des courbes tangentes au champ de sous-espaces joignant x à y. On démontre que c'est une distance exactement comme pour la distance géométrique sur une sous variété plongée.

Lemme 6.12. *Pour tout $z \in Z$, l'application*

$$\phi_z : B^k \ni y \longmapsto \phi(y, z) \in (X, \delta),$$

est un homéomorphisme sur son image $\phi(B^k \times \{z\})$, qui est un ouvert de (X, δ).

On déduit de ce lemme que (X, δ) est localement compact. Comme deux points de X sont reliés par une courbe tangent à la distribution, et qu'une telle courbe est continue pour la distance δ, l'espace métrique (X, δ) est connexe. L'espace métrique (X, δ) étant connexe et localement compact, il est séparable (voir la section 4). Finalement, les ouverts $\phi(B^k \times \{z\}), z \in Z$ de (X, δ) étant disjoints, Z est dénombrable. ►

◄ Démonstration du Lemme 6.12. On fixe $z \in Z$ et on pose $U = \phi(B^k \times \{z\})$, c'est un disque plongé dans $\mathbb{R}^{D_M}$. Soit δ_U la distance géométrique sur U, on a

$$\delta_U \geqslant \delta \geqslant d$$

où d est la distance Euclidienne de $\mathbb{R}^D$. L'inégalité $\delta_U \geqslant \delta$ découle de l'observation que toute courbe C^1 sur U est tangente à la distribution. La proposition 6.3 implique que δ_U et d (et donc aussi δ) engendrent la même topologie sur U. Comme l'application ϕ_z est un homéomorphisme à valeurs dans (U, d), c'est un homéomorphisme à valeurs dans (U, δ).

Il reste à démontrer que U est un ouvert de (X, δ). Pour tout $x_1 = \phi(y_1, z) \in U$, il existe $R > 0$ tel que $\bar{B}^k(y_1, R) \subset B^k$. Soit S l'image par ϕ_z de la sphère $\partial \bar{B}^k(y_1, R)$, c'est un compact de U disjoint de x_1. Posons $r = d(x_1, S)$. Toute courbe qui sort de $\phi_z(\bar{B}^k(y_1, R))$ coupe S, et donc a une longueur supérieure à r. En conséquence

$$B_\delta(x_0, r) \subset \partial \bar{B}^k(y_0, R) \subset U. \blacktriangleright$$

Définition 6.13. *Soit M une sous variété et X une partie de M. On dit que X est une feuille (de dimension k) si, pour tout $x_0 \in X$, il existe une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ de M en x_0 telle que $\phi^{-1}(X) = B^k \times Z$ avec Z dénombrable.*

Toute orbite d'un feuilletage est donc une feuille.

Les orbites peuvent aussi être décrites de la façon suivante :

On dit qu'une immersion $J : N \longrightarrow M$ d'une sous-variété connexe N (d'un certain espace $\mathbb{R}^{D_N}$) à valeur dans M est tangente au feuilletage si $dJ_x(T_xN) = E(J(x))$ pour tout $x \in N$. Une orbite du feuilletage est une partie de M qui a la propriété d'être l'image d'une immersion injective tangente à la distribution et qui est maximale pour cette propriété (relativement à l'inclusion, sous la contrainte de connexité). Ceci découle de :

Propriété 6.14. *Si X est une feuille connexe de M, il existe une sous-variété connexe N et une immersion injective $J : N \longrightarrow M$ dont X est l'image. L'application J a la propriété suivante : Une application $h : Y \longrightarrow X$ est différentiable (Y étant une sous variété) si et seulement si $J^{-1} \circ h$ est différentiable. De plus, N est unique à difféomorphisme près, c'est à dire que si $\tilde{J} : \tilde{N} \longrightarrow X$ est une autre immersion injective d'image X, alors $J^{-1} \circ \tilde{J}$ est un difféomorphisme.*

◀ On considère la distance géométrique δ sur la feuille X. On rappelle que la topologie associée à δ est plus fine que la topologie associée à la distance d de M. Fixons un point $x_0 \in X$. En utilisant un argument de partition de l'unité, on montre comme dans le cas habituel d'une sous-variété qu'il existe une fonction différentiable $f : X \longrightarrow [1, \infty)$ qui est propre (pour la distance δ). Dire que f est différentiable signifie ici que, pour tout $x_1 \in X$, il existe une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, (0,0)) \longrightarrow (M, x_1)$ de M en x_1 telle que $\phi^{-1}(X)$ est de la forme $B^k \times Z$ et telle que la restriction de $f \circ \phi$ à $B^k \times \{0\}$ est différentiable (attention, en général, la fonction $f \circ \phi$ n'est pas continue sur $B^k \times Z$).

Le graphe N de f dans $M \times \mathbb{R}$ en est une sous variété de dimension k, et la restriction J à N de la projection sur le premier facteur est une immersion injective dont X est l'image.

Pour le démontrer on considère un point $y_1 = (x_1, f(x_1)) \in N$, et une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, (0,0)) \longrightarrow (M, x_1)$ de M en x_1 telle que $\phi^{-1}(X)$ est de la forme $B^k \times Z$. On définit l'application $\varphi : B^k \times B^l \times]-1,1[\longrightarrow M \times \mathbb{R}$ par $\varphi(\theta, z, s) = (\phi(\theta, z), s + f(x_1))$. C'est un difféomorphisme sur son image. Montrons que, si V est un assez petit voisinage de $(x_1, f(x_1))$, alors $\varphi^{-1}(V \cap N) \subset B^k \times \{0\}$, c'est à dire que $\varphi^{-1}_{|V}$ est une carte de N en $(x_1, f(x_1))$. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $X \ni x_n = \phi(\theta_n, z_n)$ telle que $(\theta_n, z_n) \longrightarrow (0,0)$, $z_n \neq 0$, et $f(x_n) \longrightarrow f(x_1)$. Comme f est propre sur (X, δ), on peut, quitte à prendre une sous-suite, supposer que x_n converge dans (X, δ). Ceci impose que z_n est constant à partir d'un certain rang. Comme $z_n \longrightarrow 0$, cette constante ne peut être que 0, une contradiction.

Vérifions maintenant l'unicité. Soit $J : N \longrightarrow M$ une immersion injective d'image X, Y une sous-variété, et $h : Y \longrightarrow M$ est une application différentiable à valeurs dans X. Montrons que $J^{-1} \circ h$ est différentiable. On considère un point $y_1 \in Y$, son image $x_1 = f(y_1) \in X$, et une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, (0,0)) \longrightarrow (M, x_1)$ de M en x_1 telle que $\phi^{-1}(X)$ est de la forme $B^k \times Z$. Comme h est à valeurs dans X, l'application $\phi^{-1} \circ h$ (définie au voisinage de y_1) est à valeurs dans $B^k \times Z$. Comme les composantes connexes de Z sont ses points, la seconde composante de $\phi^{-1} \circ f$ est nulle au voisinage de y_1, c'est à dire que $\phi^{-1} \circ f$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. La même remarque s'applique à l'application $J : N \longrightarrow M$, et l'application $\phi^{-1} \circ J : (N, J^{-1}(x_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^k \times \{0\}, 0)$ est une immersion donc un difféomorphisme local. L'application $J^{-1} \circ h = (\phi^{-1} \circ J)^{-1}_{|\mathbb{R}^k \times \{0\}} \circ \phi^{-1} \circ h$ est donc différentiable.

Si il existe deux immersions injectives $J : N \longrightarrow M$ et $\tilde{J} : \tilde{N} \longrightarrow M$ d'image X, alors ce qui précède implique que $J^{-1} \circ \tilde{J}$ est différentiable, ainsi que son inverse $\tilde{J}^{-1} \circ J$. ►