

Géométrie Différentielle

Patrick Bernard

17 mars 2016

Version préliminaire des notes de cours.

Table des matières

1 Étude locale des applications	2
1.1 Difféomorphismes	2
1.2 Immersions, plongements	2
1.3 Submersions	3
1.4 Subimmersions	3
2 Sous variétés	4
2.1 Caractérisations des sous variétés	4
2.2 Applications différentiables entre sous variétés	5
2.3 Complément, structure de sous-variété.	10
3 Exemples	10
3.1 Sphères	10
3.2 Tores	10
3.3 Groupes de Matrices	11
3.4 Matrices de rang fixé	12
3.5 Grassmaniennes	12
3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel.	15
4 Espaces métriques localement compacts	16
4.1 Suites exhaustives de compacts	17
4.2 Partitions de l'unité	18
5 Champs de vecteurs, fibrations	20
5.1 Champ de vecteurs sur une sous variété	22
5.2 Fibrations localement triviales, voisinages tubulaires	24
5.3 Fibration de Hopf	26
5.4 Oscillateur non résonant	27
5.5 Orbites d'un champ de vecteurs	28
5.6 Sous-variétés de dimension 1	29
6 Distances sur une sous-variété	29
6.1 La distance géométrique	29
6.2 Géodésiques minimisantes.	31
6.3 Métriques Riemanniennes	32
6.4 Feuilles et feuilletages	33
7 Variétés	34
7.1 Première définition	34
7.2 Seconde définition	35
7.3 Plongement	35
7.4 Quotients	37

8 Espace tangent et crochet de Lie	40
8.1 Espaces tangents et champs de vecteurs	40
8.2 Crochets de Lie	43
8.3 Formes de Pfaff	47
8.4 Complément : fibrés vectoriels	48
9 Formes différentielles	49
9.1 Formes multilinéaires alternées	49
9.2 Formes différentielles	52
9.3 Intégration et formule de Stokes sur le cube	53
9.4 Différentielle extérieure	54
9.5 Orientation et intégration	56
9.6 Domaines à bord et formule de Stokes	58

1 Étude locale des applications

On notera $\psi : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ pour désigner une application $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\psi(x_0) = y_0$. On utilisera la même notation même si ψ n'est définie que dans un voisinage de x_0 .

1.1 Difféomorphismes

Étant donnés deux ouverts U et V de \mathbb{R}^n , un difféomorphisme de $\psi : U \rightarrow V$ est une application inversible C^1 d'inverse C^1 . Si le difféomorphisme ψ est C^r , $r \geq 1$, alors son inverse est nécessairement C^r , comme on le montre par récurrence en utilisant la formule

$$d(\psi^{-1})(y) = (d\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}.$$

On rappelle :

Théorème 1.1 (Théorème d'inversion locale). *Soit $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 telle que $d\psi_{x_0}$ est inversible. Alors, ψ est un difféomorphisme local au voisinage de x_0 , c'est à dire qu'il existe des ouverts U et V de \mathbb{R}^n contenant x_0 et $\psi(x_0)$ tels que $\psi|_U$ est un difféomorphisme sur V .*

1.2 Immersions, plongements

Proposition 1.2 (Forme Normale des Immersions). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application C^r . Si df_{x_0} est injective, alors f est une immersion en x_0 , c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, (x_0, 0))$$

tel que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ au voisinage de x_0 .

Plus précisément, l'énoncé s'écrit : Il existe des ouverts U, V, W de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-n}, \mathbb{R}^m$ contenant $x_0, 0, y_0$, et un difféomorphisme $\varphi : (W, y_0) \rightarrow (U \times V, (x_0, 0))$ tel que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ sur U .

◀ Soit F un supplémentaire de l'image de df_{x_0} dans \mathbb{R}^m . L'application

$$\mathbb{R}^n \times F \ni (x, y) \mapsto f(x) + y \in \mathbb{R}^m$$

est un difféomorphisme local. Notons $\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times F, (x_0, 0))$ son inverse local. On voit que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$. ▶

Étant donné un ouvert U de \mathbb{R}^n , on dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une immersion si c'est une immersion en chaque point de U .

L'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image (munie de la topologie induite).

Dans le cas $m = n$, les notions de plongement et de difféomorphisme sur son image sont équivalentes.

Les notions de plongement et d'immersion sont localement identiques :

Propriété 1.3. *Si $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ est une immersion en x_0 , alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $f|_V$ est un plongement.*

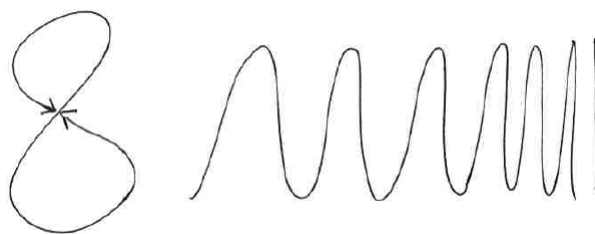


FIGURE 1 – immersions injectives

Cette propriété découle immédiatement de la définition.

La première obstruction globale à ce qu'une immersion soit un plongement est l'injectivité. Les exemples dessinés ci-dessus montrent que même une immersion injective (de $]0, 1[$ et de $]0, 1[\cup]2, 3[$, en l'occurrence) n'est pas nécessairement un plongement.

Proposition 1.4. *Une immersion injective et propre d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m est un plongement.*

On rappelle qu'une application est dite propre si la préimage de tout compact est compacte. La proposition est une conséquence tautologique du lemme classique suivant.

Lemme 1.5. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue injective entre espaces métriques. Si f est propre, c'est un homéomorphisme sur son image.*

◀ Il faut montrer que f^{-1} est continue. On considère une suite $y_n \rightarrow y$ dans $f(X)$, et les préimages x_n de y_n et x de y . Comme l'ensemble $\{y_n\} \cup \{y\}$ est compact, sa préimage Z est compacte. Comme x est la seule valeur d'adhérence possible de la suite x_n , on conclut que $x_n \rightarrow x$. ▶

1.3 Submersions

Proposition 1.6 (Forme Normale des Submersions). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application C^r , $r \geq 1$, telle que df_{x_0} est surjective. Alors f est une submersion en x_0 c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, (y_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$$

tel que $f \circ \psi(y, z) = y$ au voisinage de y_0 .

◀ Soit π une projection linéaire d'image $K := \ker df_{x_0}$ dans \mathbb{R}^n . L'application

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (f(x), \pi(x - x_0)) \in \mathbb{R}^m \times K$$

est un difféomorphisme local en x_0 . On note $\psi : (\mathbb{R}^m \times K, (y_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$ son inverse locale. On a alors $f \circ \psi(y, k) = y$. ▶

On verra plus loin une notion forte de submersion, les fibrations localement triviales, et on montrera que toute submersion propre est une fibration localement triviale.

1.4 Subimmersions

On dit en fait plutôt applications de rang constant. On ne les rencontre pas aussi souvent que les immersions et les submersions.

Proposition 1.7 (Forme Normale des Subimmersions). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application C^r , $r \geq 1$, telle que df est de rang constant (k) au voisinage de x_0 . Alors f est une subimmersion en x_0 c'est à dire qu'il existe des difféomorphismes locaux*

$$\psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0) \quad , \quad \varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, (0, 0))$$

tel que $\varphi \circ f \circ \psi(y, z) = (y, 0)$ au voisinage de 0 .

Dans le cas des immersions et submersions, le rang en x_0 est maximal, ce qui implique qu'il est localement constant. C'est la raison pour laquelle on peut se contenter d'une hypothèse ponctuelle dans ces cas.

◀ On considère une projection linéaire π_K sur $K := \ker df_{x_0}$ et une projection π_R sur l'image R de df_{x_0} . On définit ψ comme l'inverse du difféomorphisme local

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (\pi_R(f(x) - y_0), \pi_K(x - x_0)) \in R \times K.$$

On a alors $\pi_R \circ (f - y_0) \circ \psi(x_1, x_2) = x_1$, L'application $f \circ \psi$ est de la forme

$$R \times K \ni (x_1, x_2) \mapsto y_0 + x_1 + g(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m$$

où $g : (R \times K, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ vérifie $\pi_R \circ g(y_R, z) \equiv 0$. Autrement dit, si l'on identifie \mathbb{R}^m au produit $R \times \ker \pi_R$ et g (dont le premier facteur est nul) à son second facteur $(I - \pi_R) \circ g$:

$$f \circ \psi(x_1, x_2) = y_0 + (x_1, g(x_1, x_2)).$$

On a alors

$$d(f \circ \psi)_{(x_1, x_2)}(u, v) = (u, \partial_1 g(x_1, x_2)u + \partial_2 g(x_1, x_2)v).$$

Comme le rang de cette application linéaire est égal à $k = \dim R$, on conclut que $\partial_2 g \equiv 0$, et donc que g ne dépend pas de x_2 :

$$f \circ \psi(x_1, x_2) = x_1 + g(x_1).$$

On pose alors $\varphi(y) = y - g \circ \pi_R(y)$ soit en coordonnées $\varphi(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g(y_1))$. ▶

La première étape de la preuve ci-dessus donne le résultat général suivant :

Proposition 1.8 (Forme Normale des Applications). *Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$ une application $C^r, r \geq 1$. Soit R l'image de df_{x_0} et F un supplémentaire de cette image. Alors il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0),$$

et une application locale $g : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, 0) \rightarrow (F, 0)$, tels que $f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + \xi + g(\xi, z)$ au voisinage de 0. En identifiant \mathbb{R}^m au produit $R \times F$, ceci se réécrit

$$f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + (\xi, g(\xi, z)).$$

2 Sous variétés

2.1 Caractérisations des sous variétés

Soit M une partie de \mathbb{R}^D , x_0 un point de M , et T un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^D (de dimension d). On dit que M est une sous variété de classe C^r tangente à T en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

Graphe : Il existe un supplémentaire E de T dans \mathbb{R}^D et une application $g : (T, 0) \rightarrow (E, 0)$ de classe C^r telle que $dg_0 = 0$ et telle que $M - x_0$ est localement le graphe de g . Plus précisément, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans T tel que le graphe

$$\{x_0 + (x + g(x)), x \in V\},$$

est un ouvert de M .

Équation : Il existe une submersion $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$ telle que le noyau de $d\psi(x_0)$ est T et telle que, localement, $M = \psi^{-1}(0)$. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une submersion $\psi : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$ de classe C^r telle que $M \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$ et $\ker d\psi_{x_0} = T$.

Redressement : Il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans \mathbb{R}^D , un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^d et un difféomorphisme local C^r

$$\varphi : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$$

tel que $\varphi(U \cap M) = V \times \{0\}$ et $d\varphi_{x_0}(T) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$.

Paramétrisation : Il existe un ouvert V de \mathbb{R}^d et un plongement $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^D$ de classe C^r , dont l'image est un voisinage ouvert de x_0 dans M .

Graphe fort : Pour tout supplémentaire E de T et tout supplémentaire F de E , il existe une application $g : (F, 0) \rightarrow (E, 0)$ de classe C^r telle que $M - x_0$ est localement le graphe de g , et telle que T est le graphe de dg_0 .

◀ Soit π une projection linéaire sur T .

Si M est localement le graphe de $g : T \rightarrow E$, on note π_T et π_E les projections linéaires associées à la décomposition $\mathbb{R}^D = T \oplus E$, et on définit $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \rightarrow (F, 0)$ par $\psi(x) = \pi_E(x - x_0) - g \circ \pi_T(x - x_0)$. On constate que $d\psi_{x_0} = \pi_E$, donc ψ est une submersion en x_0 et $\ker d\psi_{x_0} = T$.

Si $M = \{\psi = 0\}$, on pose $\varphi(x) = (\pi_T(x), \psi(x))$, où π_T est une projection sur T .

Si $\varphi(M) = T$, on pose $\phi = \varphi|_M^{-1} : T \rightarrow M$.

Si $M = \phi(T)$, et si E et F sont donnés, on remarque que $\pi_F \circ (\phi - x_0) : (T, 0) \rightarrow (F, 0)$ est un difféomorphisme local de T et on pose $g = \pi_E \circ (\pi_F \circ (\phi - x_0))^{-1}$. ▶

On déduit même de la forme normale des immersions que, si ϕ est une paramétrisation locale de M , alors il existe une redressement $\varphi : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$ tel que $\phi = \varphi|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$ au voisinage de 0.

On dit que M est une sous-variété de dimension d en x_0 si il existe un sous espace T de dimension d tel que M est une sous variété tangente à T en x_0 . On dit alors que T est l'espace tangent à M en x_0 . L'espace tangent T (et donc la dimension d) sont bien déterminés, on le note $T_{x_0}M$.

Si M est à la fois une sous variété tangente à T est une sous variété tangente à \tilde{T} , alors $T = \tilde{T}$. En effet, si T et \tilde{T} sont deux espaces tangents à M en x_0 , il existe deux redressements $\varphi : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$ et $\tilde{\varphi} : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \mathbb{R}^{D-\tilde{d}}, (0, 0))$ de M tels que $d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T$ et $d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = \tilde{T}$. Comme $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme local qui envoie (localement) $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$, $d\tilde{\varphi}_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$ est un isomorphisme linéaire qui envoie $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$. On en conclut que $d = \tilde{d}$ et que

$$\tilde{T} = d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T.$$

On dit que $M \subset \mathbb{R}^D$ est une sous variété si c'est une sous variété en chacun de ses points. La dimension est alors localement constante. On considérera en général des variétés de dimension constante.

La propriété suivante est évidente, mais bien utile :

Propriété 2.1. Si M est une sous variété de \mathbb{R}^{D_M} et N une sous variété de \mathbb{R}^{D_N} , alors $M \times N$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{D_M + D_N}$. De plus,

$$T_{(x,y)}M \times N = T_xM \times T_yM$$

pour tout $(x, y) \in M \times N$.

2.2 Applications différentiables entre sous variétés

On notera $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ une application de M dans N telle que $f(x_0) = y_0$. On utilisera aussi cette notation lorsque f n'est définie que dans un voisinage de x_0 .

Soit M une sous variété de classe C^r , $r \geq 1$ de \mathbb{R}^D .

La fonction $f : (M, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable (resp. de classe C^k , $1 \leq k \leq r$) en x_0 si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. Il existe une paramétrisation locale $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$ telle que $f \circ \phi$ est différentiable (resp. C^k).
2. Il existe une fonction différentiable (resp. C^k) $\tilde{f} : (\mathbb{R}^D, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = \tilde{f}|_M$ au voisinage de x_0 .
3. Pour toute paramétrisation locale $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$, la composée $f \circ \phi$ est différentiable (resp. C^k).

◀ Montrons que 1. \Rightarrow 2., les autres implications sont claires. On utilise le théorème de forme normale des immersions, qui donne l'existence d'un difféomorphisme local $\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (x_0, 0))$ tel que $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0)$ (φ est donc un redressement local de M). On étend alors f par $\tilde{f} := f \circ \pi \circ \varphi^{-1}$, où π est la projection sur le premier facteur dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$. ▶

Pour comprendre directement l'équivalence entre 1. et 3. lorsque $k \leq r$, il est utile de souligner :

Propriété 2.2. Si $\tilde{\phi}$ et $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$ sont deux paramétrisations locales de M en x_0 , alors l'application

$$\phi^{-1} \circ \tilde{\phi} : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0).$$

est un difféomorphisme local de classe C^r .

◀ On redresse chacune de ces applications injectives (et donc la sous variété M) par des difféomorphismes locaux φ et $\tilde{\varphi}$ tels que $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\phi}(x)$. On a donc $(\phi^{-1}, 0) = \varphi|_M$ et $\tilde{\phi}(x) = (\tilde{\varphi}|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}})^{-1}(x, 0)$. Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}, 0)(x) = \varphi|_M \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, 0) = (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(x, 0)$$

donc $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$, qui est la première composante de $(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$, est un difféomorphisme local. ►

Une application $f : (M, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite différentiable (resp. C^k) si chacune de ses coordonnées est différentiable.

Si N est une sous-variété de \mathbb{R}^{D_N} , l'application $f : (M, x_0) \rightarrow N$ est dite différentiable (resp. C^k) si elle l'est en tant qu'application à valeurs dans \mathbb{R}^{D_N} .

L'application $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ est différentiable en x_0 si et seulement si $\phi^{-1} \circ f$ est différentiable pour toute paramétrisation locale ϕ de N .

En effet, si ϕ est une paramétrisation locale de N en y_0 , il existe un redressement φ tel que $\phi^{-1} = \varphi|_M$, et donc $\varphi \circ f = \phi^{-1} \circ f$. Comme φ est un difféomorphisme, f est différentiable si et seulement si $\varphi \circ f$ l'est, et donc si et seulement si $\phi^{-1} \circ f$ l'est.

Exercice 2.1. L'application $f : M \rightarrow N$ est différentiable si et seulement si $g \circ f$ est différentiable pour toute fonction différentiable $g : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.3. Soit $f : (M, x_0) \rightarrow N$ une application différentiable en x_0 . Il existe alors une application linéaire $L : T_{x_0}M \rightarrow \mathbb{R}^{D_N}$ qui est la restriction à $T_{x_0}M$ de $d\tilde{f}_{x_0}$ pour n'importe quel prolongement différentiable $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^{D_N}$. Cette application prend ses valeurs dans $T_{f(x_0)}N$. C'est la différentielle de f en x_0 , on la note

$$df_{x_0} \in \mathcal{L}(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}N).$$

Elle est aussi caractérisée par la propriété

$$d\tilde{f}_{x_0} \circ d\phi_0 = d(f \circ \phi)_0$$

pour toute paramétrisation locale $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$.

◀ Soit \tilde{f} un prolongement de f et ϕ une paramétrisation locale de M . On a alors $d\tilde{f}_{x_0} \circ d\phi_0 = d(\tilde{f} \circ \phi)_0 = d(f \circ \phi)_0$. Comme $d\phi_0$ est un isomorphisme linéaire entre \mathbb{R}^{d_M} et $T_{x_0}M$, on obtient

$$d\tilde{f}_{x_0}|_{T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}.$$

Cette application linéaire ne dépend donc pas du prolongement \tilde{f} . Pour montrer qu'elle prend ses valeurs dans $T_{f(x_0)}N$, on considère une équation locale $\psi : (N, f(x_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^{D_N - d_N}, 0)$. On a alors $\psi \circ f = 0$ au voisinage de x_0 , donc $\psi \circ f \circ \phi = 0$ au voisinage de 0, donc $d\psi_{f(x_0)} \circ d(f \circ \phi)_0 = 0$. L'application linéaire $d(f \circ \phi)_0$ prend donc ses valeurs dans $\ker d\psi_{f(x_0)} = T_{f(x_0)}N$, il en est donc de même de $d\tilde{f}_{x_0}|_{T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}$. ►

La définition par prolongement local implique directement la règle de composition :

Propriété 2.4. Si $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ et $g : (N, y_0) \rightarrow (N', z_0)$ sont différentiables (resp. C^k) en x_0 et y_0 , alors $g \circ f$ est différentiable (resp. C^k) en x_0 et

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{y_0} \circ df_{x_0}.$$

Si $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$ est une paramétrisation locale de M , alors son inverse locale $\phi^{-1} : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$ est différentiable (puisque $\phi^{-1} \circ \phi = Id$ est différentiable). La paramétrisation ϕ peut donc être vue comme un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^{d_M}, 0)$ dans (M, x_0) , c'est à dire une application différentiable admettant une inverse différentiable. On appellera carte de M en x_0 l'inverse d'une paramétrisation, c'est à dire un difféomorphisme local de (M, x_0) dans $(\mathbb{R}^d, 0)$.

Propriété 2.5 (Théorème d'inversion local entre variétés). L'application $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ est un difféomorphisme local si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- La différentielle df_{x_0} est un isomorphisme de $T_{x_0}M$ dans $T_{y_0}N$.
- Pour toutes paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (N, y_0)$, la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ est un difféomorphisme local.

◀ La règle de composition implique que df_{x_0} est un isomorphisme si et seulement si $d(\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M)_0$ en est un. Au vu du théorème d'inversion locale dans \mathbb{R}^d les deux propriétés sont donc équivalentes. Il est clair aussi que la seconde propriété est satisfaite si et seulement si f est un difféomorphisme local. ►

On étend naturellement les notions d'immersions et submersions (et subimmersions) aux sous variétés :

Définition 2.6 (Immersion). On dit que l'application $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ est une immersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- La différentielle df_{x_0} est injective de $T_{x_0}M$ dans $T_{y_0}N$.

- Pour toutes paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$, la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est une immersion.
- Il existe des paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$ telles que la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est localement une injection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme $x \longmapsto (x, 0)$).

Définition 2.7 (Submersion). On dit que l'application $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ est une submersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- La différentielle df_{x_0} est surjective de $T_{x_0}M$ dans $T_{y_0}N$.
- Pour toutes paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$, la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est une submersion.
- Il existe des paramétrisations locales $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ et $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (N, x_0)$ telles que la composée $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$ est localement une surjection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme $(x, y) \longmapsto x$).

La proposition suivante sur les submersions sera très utile :

Propriété 2.8. Soit $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ une submersion de classe C^r et soit $f : M \longrightarrow N$ une application. L'image de π est un ouvert de U de M , et l'application $f \circ \pi$ est C^r si et seulement si f est C^r sur U .

◀ Supposons que $f \circ \pi$ est C^r , fixons un point x_0 de M et un point y_0 tel que $\pi(y_0) = x_0$. Il existe alors une section locale de π , c'est à dire une application $s : (M, x_0) \longrightarrow (\tilde{M}, y_0)$ de classe C^r telle que $\pi \circ s = Id$. Localement, $f = (f \circ \pi) \circ s$ est donc C^r . ▶

Propriété 2.9. Soit M une sous variété de \mathbb{R}^{D_M} de dimension d_M et $\psi : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$ une submersion locale. Alors il existe une submersion locale

$$\Psi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow N \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}$$

telle que $\Psi(x) = (\psi(x), 0)$ si $x \in M$.

◀ On considère une extension locale $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$, une submersion locale $\varphi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D_M - d_M}, 0)$ donnant une équation locale de M , et on pose $\Psi = (\tilde{\psi}, \varphi)$. ▶

Définition 2.10 (Sous variétés d'une sous variété). Soit M une sous variété de \mathbb{R}^D , N une partie de M , et x_0 un point de N . on dit que N est une sous variété de M en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- N est un sous variété de \mathbb{R}^D en x_0 .
- Il existe une carte de M en x_0 qui redresse N .
- Il existe un difféomorphisme local

$$\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \mathbb{R}^{D - d_M}$$

qui envoie N sur $\mathbb{R}^{d_N} \times \{(0, 0)\}$ et M sur $\mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \{0\}$.

◀ Le premier point implique le second. Soit $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$ une paramétrisation locale de N . Alors ϕ_N , vue comme application à valeurs dans M , est aussi une immersion. Il existe donc une carte $\phi_M : (M, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$ tel que $\phi_M \circ \phi_N$ prend localement la forme $x \longrightarrow (x, 0)$, l'image d'un petit voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{d_N} est donc un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{d_M} \times \{0\}$.

Le second point implique le troisième. La carte $\phi_M : M \longrightarrow \mathbb{R}^{d_M}$ se prolonge localement en $\tilde{\phi}_M : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^{d_M}$. Si ψ est une équation locale de M , alors $(\tilde{\phi}_M, \psi)$ est le difféomorphisme local cherché. ▶

Lorsque N est une sous variété de M en x_0 on a naturellement $T_{x_0}N \subset T_{x_0}M$.

Si N est une sous variété de M , alors l'inclusion de N dans M est un plongement (sa différentielle est l'inclusion de $T_{x_0}N$ dans $T_{x_0}M$). Réciproquement :

Propriété 2.11. L'image $J(N)$ d'un plongement $J : N \longrightarrow M$ est une sous variété de M .

◀ Soit $y_0 = J(x_0)$ un point de $J(N)$. Il existe un voisinage ouvert U de \mathbb{R}^{d_N} et un plongement ϕ de U dans N dont l'image $V = \phi(U)$ est un ouvert de N contenant x_0 . L'application $J \circ \phi$ est alors un plongement de U dans $J(M)$ dont l'image $J \circ \phi(U) = J(V)$ est un ouvert de $J(N)$ (car $J : N \longrightarrow J(N)$ est un homéomorphisme) qui contient y_0 . ▶

Il est facile de vérifier que la proposition 1.4 reste vraie dans un contexte plus général :

Proposition 2.12. *Si $J : N \rightarrow M$ est une immersion injective et propre, alors c'est un plongement et son image $J(N)$ est une sous variété fermée de M .*

Tout plongement n'est pas forcément propre, mais on a :

Proposition 2.13. *L'image $J(N)$ du plongement $J : N \rightarrow M$ est fermée si et seulement si J est propre.*

◀ Si $J(N)$ est fermée, alors pour tout compact K de M , l'intersection $K \cap J(N)$ est compacte. Comme J est un homéomorphisme sur son image, $J^{-1}(K) = J^{-1}(K \cap J(N))$ est alors compacte, c'est à dire que J est propre.

Si J est propre, considérons une suite $y_n = J(x_n)$ dans M , qui converge vers une limite y . La propriété de J implique que la suite x_n admet une valeur d'adhérence x . On a alors $J(x) = y$ et donc $y \in J(N)$. ▶

Exercice 2.2. *Montrer qu'un difféomorphisme local injectif est un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image).*

Exercice 2.3. *Soit $J : M \rightarrow N$ une immersion propre. Montrer que chaque point de N a un nombre fini de préimages.*

En supposant que chaque point de $J(M)$ a le même nombre de préimages, montrer que $J(M)$ est une sous-variété de N .

Si $\psi : M \rightarrow N$ est une submersion en chaque point, alors pour tout $y_0 \in M$ la préimage $\psi^{-1}(y_0)$ est une sous variété de M , de dimension $d_M - d_N$. En fait, il suffit pour ceci que ψ soit une submersion en chaque point de $\psi^{-1}(y_0)$. On dit alors que y_0 est une valeur régulière de ψ .

Définition 2.14. *On dit que $x_0 \in M$ est un point critique de $\psi : M \rightarrow N$ si $d\psi_{x_0}$ n'est pas surjective. On dit que $y_0 \in N$ est un valeur critique de ψ si il existe un point critique $x_0 \in M$ tel que $\psi(x_0) = y_0$. Les points de N qui ne sont pas des valeurs critiques sont dits valeurs régulières.*

En particulier, les points qui n'appartiennent pas à l'image $\psi(M)$ sont des valeurs régulières.

Soit N une sous variété de dimension d_N et B la boule ouverte de rayon 1 dans \mathbb{R}^{d_N} . On dit qu'une partie $A \subset N$ d'une sous variété N est de mesure nulle si, pour tout plongement φ de B dans N , la préimage $\varphi^{-1}(A)$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^{d_N} . Cette définition est cohérente dans le cas $N = \mathbb{R}^{d_N}$.

Théorème 2.15 (Sard). *Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si f est C^∞ , alors l'ensemble des valeurs singulières de f est de mesure nulle dans N . Le résultat est vrai si f est de classe C^r avec $r \geq 1$ et $r \geq 1 + d_M - d_N$.*

◀ La preuve est assez difficile. On se limite ici au cas facile $d_M \leq d_N$. Au vu des définitions, il suffit de montrer le résultat lorsque $N = \mathbb{R}^{d_N}$. On note Σ l'ensemble des points critiques de f .

On dit que $K \subset M$ est un cube plongé si il existe une carte ϕ , définie au voisinage de $\bar{\Omega}$, telle que $\phi(K) = [0, 1]^{d_M}$. On va montrer que $f(\Sigma \cap K)$ est de mesure nulle pour tout cube plongé K . Comme les intérieurs des cubes plongés recouvrent M , le Lemme 2.18 implique que M est recouvert par une famille dénombrable de cubes plongés. On conclut que $f(\Sigma)$ est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, et donc qu'il est de mesure nulle.

Cas $d_M < d_N$. On a alors $\Sigma = M$.

Lemme 2.16. *Il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante : Tout cube X de coté $1/k$ contenu dans $[0, 1]^{d_M}$ vérifie*

$$\text{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leq Ck^{-(1+d_M)},$$

où Vol est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{d_N} .

◀ Comme df est borné sur $[0, 1]^{d_M}$, l'image du cube est contenu dans une boule de \mathbb{R}^{d_N} de rayon au plus C/k . Ceci implique que son volume est majoré par $Ck^{-d_N} \leq Ck^{-(1+d_M)}$. ▶

Comme on peut recouvrir le cube K par k^{d_M} cubes de coté $1/k$, on conclut du Lemme que

$$\text{Vol}(f(K)) = \text{Vol}(f \circ \phi^{-1}([0, 1]^{d_M})) \leq k^{d_M} Ck^{-(1+d_M)} = C/k.$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{Vol}(f(K)) = 0$, ce qui termine la preuve dans le cas $d_M < d_N$.

Cas $d_M = d_N$. On remarque que les points critiques de $f \circ \phi^{-1}$ sont les points de $\phi(\Sigma)$.

Lemme 2.17. *Il existe un module de continuité ϵ ayant la propriété suivante : Tout cube X de coté $1/k$ contenu dans $[0, 1]^{d_M}$ et contenant un point critique de $f \circ \phi^{-1}$ vérifie :*

$$\text{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leq k^{-d_M} \epsilon(1/k).$$

Ce Lemme permet de conclure dans le cas $d_M = d_N$ exactement comme ci-dessus. On recouvre $\phi(\Sigma \cap K)$ par au plus k^{d_M} cubes de côté $1/k$ intersectant $\phi(\Sigma)$. L'image par $f \circ \phi^{-1}$ de l'union de ces cubes, qui contient $f(K \cap \Sigma)$, a donc un volume majoré par $\epsilon(1/k)$. Le volume de $f(K \cap \Sigma)$ est donc majoré par $\epsilon(1/k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est donc nul.

◀ Soit $x_0 \in X$ un point critique de $f \circ \phi^{-1}$. Soit R l'image de l'application linéaire $L := d(f \circ \phi^{-1})_{x_0}$, c'est un sous espace vectoriel strict de \mathbb{R}^{d_N} . Soit ρ un module de continuité de $d(f \circ \phi^{-1})$ sur $[0, 1]^{d_M}$. Pour tout $x \in X$, on a

$$f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0) = \int_0^1 (d(f \circ \phi^{-1})_{x_0+t(x-x_0)} - L) \cdot (x - x_0) dt$$

donc

$$|f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0)| \leq |x - x_0| \rho(|x - x_0|).$$

Comme le diamètre de X est \sqrt{n}/k , on conclut que $f \circ \phi^{-1}(X)$ est contenu dans une bande de largeur $\sqrt{d_M}/k \rho(\sqrt{d_M}/k)$ autour de l'espace affine $x_0 + R$. Comme $d(f \circ \phi^{-1})$ est borné sur $[0, 1]^{d_M}$, cette image $f \circ \phi^{-1}(X)$ est aussi contenue dans une boule de rayon C/k autour de x_0 . Son volume est donc majoré par $Ck^{-d_M} \rho(\sqrt{d_M}/k)$. Ceci conclut la preuve du Lemme et du théorème 2.15. ▶

Lemme 2.18. *Soit (X, d) un espace métrique séparable. Tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable (on dit que X a la propriété de Lindelöf).*

◀ Considérons une partie dénombrable dense de $Y \subset X$, et appelons boule rationnelle toute boule ouverte de X centrée sur Y et de rayon rationnel. L'ensemble des boules rationnelles est donc dénombrable. Si \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de X , alors l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ des boules rationnelles contenues dans des ouverts de \mathcal{U} est un recouvrement ouvert dénombrable de X . A chaque boule $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, on peut associer un ouvert $U_B \in \mathcal{U}$ qui la contient. L'ensemble $\{U_B, B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}\}$ est un sous-recouvrement dénombrable de \mathcal{U} . ▶

Même le cas $d_M < d_N$ du théorème de Sard n'est pas complètement anodin. Il affirme que l'image d'une variété par une application différentiable dans une variété de dimension strictement plus grande est de mesure nulle. À l'inverse, il existe une application continue surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$ (la courbe de Péano). Une telle courbe ne peut donc pas être différentiable (ni même localement Lipschitzienne).

Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable, et soit Z une sous variété de N . Si chaque point de N est une valeur régulière de f , alors $f^{-1}(Z)$ est une sous variété de M . La restriction de f à $f^{-1}(Z)$ est de plus une submersion en chaque point.

La propriété que $f^{-1}(Z)$ est une sous variété de M reste vraie sous la condition plus générale que f est transverse à Z :

Définition 2.19. *L'application différentiable $f : M \rightarrow N$ est dite transverse à la sous variété $Z \subset N$ si, pour tout point $x \in f^{-1}(Z)$, on a l'égalité*

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}Z + df_x(T_xM).$$

Proposition 2.20. *Si $f : M \rightarrow N$ est transverse à Z , alors $f^{-1}(Z)$ est une sous variété de M .*

◀ Soit x un point de $f^{-1}(Z)$. Considérons une submersion $g : N \rightarrow \mathbb{R}^d$, définie au voisinage de $f(x)$, et telle que Z est localement défini par l'équation $g = 0$. L'application $g \circ f$ est alors une submersion en x , qui donne localement l'équation de $f^{-1}(Z)$. Vérifions que $g \circ f$ est une submersion en x , c'est à dire que $dg_{f(x)} \circ df_x$. La transversalité de f en x se réécrit $df_x(T_xM) + \ker dg_{f(x)} = T_{f(x)}N$. L'image de $dg_{f(x)} \circ df_x$ est donc la même que celle de $dg_{f(x)}$. ▶

Exercice 2.4. *Soit M et N deux sous variétés de X en x_0 . Supposons que M et N sont transverses en x_0 , au sens que $T_{x_0}M + T_{x_0}N = T_{x_0}X$. Alors $M \cap N$ est une sous variété en x_0 , tangente à $T_{x_0}M \cap T_{x_0}N$.*

Beaucoup de ce qui a été dit sur les submersions se généralise au cas du rang constant.

Exercice 2.5. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si df est de rang constant k , alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété pour tout $y \in N$, de codimension k dans M . Il suffit que le rang de df soit constant sur $f^{-1}(y)$.*

Soit Z une sous variété de N . Si la dimension de $T_{f(x)}Z + df_x(T_xM)$ est constante (égale à k) sur $f^{-1}(Z)$, alors cette préimage est une sous-variété de M , de codimension $k - \dim Z$.

Exercice 2.6. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application propre de rang constant telle que chacune des préimages $f^{-1}(y), y \in N$, est connexe. Montrer que l'image $f(M)$ est une sous-variété de N .*

Montrer la conclusion dans le cas plus général où les sous-variétés $f^{-1}(y), y \in N$ ont un nombre de composantes connexes indépendant de y (ce nombre est fini au vu de la propriété).

2.3 Complément, structure de sous-variété.

Une structure de sous-variété sur un ensemble X est une injection de X dans un espace vectoriel de dimension finie E dont l'image est une sous-variété. On dit que deux structures de sous-variétés $I : X \rightarrow E$ et $J : X \rightarrow F$ sont égales si $J \circ I^{-1}$ est un difféomorphisme de $I(X)$ dans $J(X)$, et qu'elles sont difféomorphes si les images $I(X)$ et $J(X)$ sont difféomorphes.

Exercice 2.7. Montrer que l'application $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $I(x) = x^3$ munit \mathbb{R} d'une structure de sous-variété différente de sa structure standard.

Montrer que la structure de sous-variété donnée par I est difféomorphe à la structure standard.

Exercice 2.8. Soit M une sous-variété, X un ensemble et $P : M \rightarrow X$ une application surjective. Montrer qu'il existe au plus une structure de sous-variété sur X pour laquelle P est une submersion.

Exercice 2.9. Soit $f : M \rightarrow N$ une immersion injective. Montrer qu'il existe une unique structure de sous-variété $J : f(M) \rightarrow E$ sur $f(M)$ telle que $J \circ f$ est un plongement.

Si X est un ensemble et $J : X \rightarrow E$ est une structure de sous-variété, on dit que l'application $f : X \rightarrow M$ est C^r si $f \circ J^{-1}$ l'est sur $J(X)$. L'ensemble $C^r(X, \mathbb{R})$ détermine la structure de sous-variété de X . Supposons en effet que $I : M \rightarrow F$ est une autre structure de sous-variété. Les coordonnées I_i de l'application I sont des éléments de $C_I^r(X, \mathbb{R})$, c'est à dire qu'elles sont C^r pour la structure I . Si $C_I^r(X, \mathbb{R}) = C_J^r(X, \mathbb{R})$, alors les coordonnées I_i sont aussi C^r pour la structure J , c'est à dire que les fonctions $I_i \circ J^{-1}$ sont C^r sur $J(X)$. En conséquence, l'application $I \circ J^{-1}$ est C^r sur $J(X)$. Par symétrie, l'application $J \circ I^{-1}$ est C^r sur $I(X)$, et donc la bijection $I \circ J^{-1}$ est un difféomorphisme.

3 Exemples

3.1 Sphères

Toutes les valeurs non nulles de l'application $x \rightarrow |x|^2$ sont régulières. La sphère unité

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$$

est donc une sous variété de \mathbb{R}^{n+1} . Son espace tangent au point θ est l'orthogonal de θ dans \mathbb{R}^{n+1} , puisque la fonction $x \rightarrow |x|^2$ a pour différentielle en θ la forme $x \mapsto 2\langle \theta, x \rangle$.

L'application $(r, \theta) \mapsto r\theta$ est un difféomorphisme entre $]0, \infty[\times S^1$ et $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (c'est une version des coordonnées polaires). Son inverse est donnée explicitement par $x \mapsto (|x|, x/|x|)$.

3.2 Tores

Le produit $M \times N$ de deux sous-variétés (de \mathbb{R}^{D_M} et \mathbb{R}^{D_N}) est une sous variété de $\mathbb{R}^{D_N + D_M}$, et on a l'identification

$$T_{(x,y)}N \times M = T_x N \times T_y M.$$

Par exemple, le produit $S^1 \times S^1$ est une sous-variété de \mathbb{R}^4 , le tore de dimension 2. Plus généralement, le tore \mathbb{T}^n est défini comme le produit de n facteurs S^1 . C'est une sous-variété de \mathbb{R}^{2n} .

On peut aussi plonger le tore \mathbb{T}^2 dans \mathbb{R}^3 , en formant l'image classique de "chambre à air". On écrit pour ceci $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, on se souvient que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, et, pour un point $\theta \in S^1$, on note (θ_1, θ_2) ses coordonnées en tant qu'élément de \mathbb{R}^2 . Fixant $a \in]0, 1[$, on plonge $S^1 \times S^1$ par l'application

$$J(\theta, \varphi) = ((1 + a\varphi_1)\theta, a\varphi_2).$$

La différentielle de J , vue comme une application de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 , en un point $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est donc l'application linéaire

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y_1, y_2) \mapsto ((1 + a\varphi_1)x + a\theta y_1, a y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Son noyau est la droite de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dirigée par le vecteur $V(\theta, \varphi) = (-a\theta, 1 + a\varphi_1, 0)$. Pour vérifier que J est une immersion sur $S^1 \times S^1$, il suffit de constater que le vecteur $V(\theta, \varphi)$ n'est jamais tangent à $S^1 \times S^1$ en $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1$, puisque $-a\theta$ n'est pas orthogonal à θ (rappelons que θ , qui appartient à S^1 , est non nul).

Comme $S^1 \times S^1$ est compact, il suffit de vérifier que l'immersion J est injective pour conclure que c'est un plongement (dont l'image est donc une sous variété de \mathbb{R}^3 difféomorphe à $S^1 \times S^1$). Si $J(\theta, \varphi) = J(\theta', \varphi')$, alors $\varphi_2 = \varphi'_2$, et de plus

$$1 + a\varphi_1 = |(1 + a\varphi_1)\theta| = |(1 + a\varphi'_1)\theta'| = 1 + a\varphi'_1$$

donc $\varphi = \varphi'$. On voit alors que $\theta = \theta'$.

Il y a une autre façon de procéder. On remarque que l'application $F : (x_1, x_2) \mapsto (e^{ix_1}, e^{ix_2})$ est un difféomorphisme local surjectif de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{T}^2 . En conséquence, l'application $J : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion différentiable si et seulement si $J \circ F$ est une immersion différentiable. On écrit alors

$$J \circ F(x_1, x_2) = ((1 + a \cos x_2) \cos x_1, (1 + a \cos x_2) \sin x_1, a \sin x_2)$$

et on calcule la matrice de la différentielle de $J \circ F$

$$\begin{bmatrix} -(1 + a \cos x_2) \sin x_1 & -a \sin x_2 \cos x_1 \\ (1 + a \cos x_2) \cos x_1 & -a \sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & a \cos x_2 \end{bmatrix}.$$

Comme le coefficient $(1 + \cos x_2)$ est non nul, cette matrice est de rang 2 en tout point où $\cos x_2 \neq 0$. Si $\cos x_2 = 0$, alors $\sin x_2 = \pm 1$, et le de bloc supérieur est inversible, puisque

$$\det \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -a \sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_1 & -a \sin x_2 \sin x_1 \end{bmatrix} = \sin x_2 \neq 0.$$

On peut plonger le tore \mathbb{T}^n dans \mathbb{R}^{n+1} par le même type de formule. Plus précisément, si $F = (F_1, F_2)$ est un plongement de \mathbb{T}^{n-1} dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, alors on obtient un plongement de \mathbb{T}^n dans \mathbb{R}^{n+1} par l'expression

$$S^1 \times \mathbb{T}^{n-1} \ni (\theta, \varphi) \mapsto ((1 + aF_1(\varphi))\theta, F_2(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$$

lorsque $a > 0$ est assez petit.

L'application $\Pi : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2i\pi x_1}, \dots, e^{2i\pi x_n}) \in \mathbb{T}^n$ est surjective et engendre une bijection de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ dans \mathbb{T}^n . Il y a une unique structure de groupe sur \mathbb{T}^n qui fait de cette bijection un isomorphisme de groupe, ou, ce qui est équivalent, qui fait de la surjection Π un morphisme de groupe. La structure de (sous)-variété de \mathbb{T}^n à difféomorphisme près est aussi déterminée par le fait que Π est une submersion (en l'occurrence un difféomorphisme local), voire l'exercice 2.8. Plus précisément, si M est une sous variété et si $F : \mathbb{T}^n \rightarrow M$ est une bijection, F est un difféomorphisme si et seulement si $F \circ \Pi$ est une submersion. On dit que l'égalité $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ a lieu aussi en tant que (sous)-variété.

Les opérations de groupe de \mathbb{T}^n sont différentiables. En effet l'inverse $J : \Pi(x) \mapsto \Pi(-x)$ est une bijection de \mathbb{T}^n telle que $J \circ \Pi(x) = \Pi(-x)$ est une submersion, c'est donc un difféomorphisme. Le produit est l'application $P : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ telle que $P(\Pi(x), \Pi(y)) = \Pi(x+y)$. Comme la projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto (\Pi(x), \Pi(y)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ est une submersion surjective, La différentiabilité de l'application $(x, y) \mapsto P(\Pi(x), \Pi(y))$ implique celle de l'application P .

On dit que \mathbb{T}^n est un groupe de Lie : une (sous)-variété munie d'une structure de groupe dont les opérations sont différentiables.

3.3 Groupes de Matrices

Notons $M_n(\mathbb{R})$ (ou M_n) l'ensemble des matrices réelles carrées de taille n , que l'on identifie à \mathbb{R}^{n^2} .

Le groupe $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ donc une sous variété de dimension maximale n^2 . Les opérations de groupes $(M, N) \mapsto MN$ et $M \mapsto M^{-1}$ sont différentiables. Concernant l'inversion, on rappelle le calcul classique $(M + N)^{-1} = (M(I + M^{-1}N))^{-1} = (I + M^{-1}N)^{-1}M^{-1} = (I - M^{-1}N + o(N))M^{-1} = I - M^{-1}NM^{-1} + o(N)$ dont on déduit que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est différentiable, et que sa différentielle en M est l'application linéaire $N \mapsto -M^{-1}NM^{-1}$.

Notons $M_n^s(\mathbb{R})$ et $M_n^a(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ce sont des espaces vectoriels que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$, son espace tangent en l'identité est $M_n^a(\mathbb{R})$. Les opérations de groupe, qui sont les restrictions de celles de $Gl_n(\mathbb{R})$, sont donc différentiables. Pour montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété, il suffit de montrer que l'identité est une valeur régulière de l'application $M_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto {}^tMM \in M_n^s(\mathbb{R})$. La différentielle en M de cette application est

$$d_M : N \mapsto {}^tMN + {}^tNM = {}^tMN + {}^t({}^tMN)$$

En $M = Id$, c'est donc $d_I : N \mapsto N + {}^tN$, qui est surjective sur $M_n^s(\mathbb{R})$, et de noyau $M_n^a(\mathbb{R})$. Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est donc une sous variété au voisinage de l'identité, tangente à $M_n^a(\mathbb{R})$. En un autre point M de $O_n(\mathbb{R})$, on a $d_M = d_I \circ L$, où L est la multiplication à gauche par tM , qui est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. Ceci implique que d_M est surjective, et donc que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété en M tangente à $\ker d_M = L^{-1}(\ker d_I) = M \cdot M_n^a(\mathbb{R})$. On aurait aussi pu conclure ceci directement en constatant que la multiplication par M est un difféomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui préserve $O_n(\mathbb{R})$ et qui envoie I sur M .

Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est aussi une sous variété. En fait, c'est la composante connexe de l'identité dans $O_n(\mathbb{R})$. Remarquons pour terminer que $SO_2(\mathbb{R})$ est difféomorphe à S^1 . Le morphisme de groupe surjectif

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix}$$

de \mathbb{R} dans SO_2 est en effet un difféomorphisme local qui se factorise par $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3.4 Matrices de rang fixé

Soit $k \leq \min(n, m)$ et soit $N_k(n, m) \subset M_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de rang k . Alors $N_k(n, m)$ est une sous variété de $M_{n,m}(\mathbb{R})$, de dimension $k(n + m - k)$ (Il faut prendre garde toutefois au fait que la fermeture $\bar{N}_k(n, m)$, constituée des matrices de rang inférieur à k , n'est pas une sous variété. En particulier, le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas une sous variété, mais c'est une union finie de sous-variétés.)

Comme les permutations de lignes ou de colonnes sont des isomorphismes de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ qui préservent $N_k(n, m)$, il suffit de démontrer que $N_k(n, m)$ est une sous variété au voisinage d'une matrice qui s'écrit par blocs

$$X_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$$

où A_0 est un bloc $k \times k$ inversible. Toute matrice X proche de X_0 s'écrit alors $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ avec un bloc A inversible. En multipliant à gauche la matrice X par la matrice inversible $O = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$, on obtient

$$OX = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B. \end{bmatrix}$$

La matrice A est donc de rang k si et seulement si $D = CA^{-1}B$. L'ensemble $N_k(n, m)$ est donc localement un graphe de codimension $(n - k)(m - k)$, c'est à dire de dimension $nm - (n - k)(m - k) = k(n + m - k)$. En supposant par exemple que $m < n$, la sous variété $N_{m-1}(m, n)$ est donc de codimension $n - m + 1$.

On peut traiter de manière similaire le cas des matrices symétriques. Soit $N_k^s(n)$ le sous ensemble de $S_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques $n \times n$) constitué des matrices de rang k . Toute matrice X_0 de $N_k^s(n)$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice orthonormée O telle que $O^t X_0 O$ s'écrit par blocs

$Y_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec un bloc A_0 de taille $k \times k$ inversible. Comme l'application $X \mapsto O^t X O$ est un isomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ qui préserve $N_k^s(n)$, il suffit de montrer que N_k^s est une sous variété au voisinage de Y_0 . On montre exactement

comme ci-dessus qu'une matrice symétrique $\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & D \end{bmatrix}$ proche de Y_0 est de rang k si et seulement si $D = B^t A^{-1} B$. L'ensemble $N_k^s(n)$ est donc localement un graphe de codimension $k(k + 1)/2$.

Pour se représenter un peu plus concrètement les choses, on peut considérer l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques 2×2 . On l'identifie à \mathbb{R}^3 en écrivant ses éléments sous la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Les matrices non inversibles sont celles qui satisfont l'équation $b^2 = ac$, qui est l'équation d'un cône dans \mathbb{R}^3 . Ce cône est une sous variété sauf au point $(0, 0, 0)$, qui en est une singularité. Le complémentaire de cette singularité correspond exactement aux matrices de rang 1.

3.5 Grassmanniennes

Soit $G(k, n)$ l'ensemble des sous-espaces de \mathbb{R}^n de dimension k . Pour écrire $G(k, n)$ comme une sous-variété, on identifie chaque sous-espace à la projection orthogonale dont il est l'image. On définit donc $G(k, n)$ comme l'ensemble

des matrices symétriques de rank k qui vérifient la relation $M^2 = M$. Nous allons montrer que c'est une sous variété compacte de $M_n^s(\mathbb{R})$ (matrices symétriques $n \times n$).

On remarque dans un premier temps que c'est une partie compacte, car fermée et bornée, de $M_n^s(\mathbb{R})$. Pour montrer la fermeture, on constate que le rang d'une projection est égal à sa trace. L'ensemble des projecteurs de rank k est donc déterminé, dans $M_n^s(\mathbb{R})$, par les équations continues $M^2 = M$ et $\text{tr}(M) = k$.

L'entier k étant fixé, on considère la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, et on décompose les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ (et donc de $G(k, n)$) par blocs suivant cette décomposition. La matrice

$$I_k := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est un élément de $G(k, n)$. L'ensemble $H(k, n)$ des éléments de $G(k, n)$ qui s'écrivent $M = \begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix}$ avec un bloc A inversible constitue un voisinage ouvert de I_k dans $G(k, n)$. Comme le rang est k , on a nécessairement $C = BA^{-1}B^t$ dans la matrice ci-dessus et l'image de M est celle de la matrice $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$. Autrement dit, M est la projection orthogonale sur le graphe de $L := BA^{-1} \in M_{n-k, k}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, pour $L \in M_{n-k, k}(\mathbb{R})$, on peut chercher une expression pour la projection orthogonale sur le graphe de L de la forme $\Pi_L = \begin{bmatrix} A & AL^t \\ LA & LAL^t \end{bmatrix}$, avec une matrice symétrique inversible A . L'équation $\Pi_L \circ \Pi_L = \Pi_L$ implique que $A(I + L^tL)A = A$. Cette équation est satisfaite pour $A = (I + L^tL)^{-1}$, (la matrice $(I + L^tL)$ est définie positive donc inversible) et on vérifie effectivement que

$$\Pi_L := \begin{bmatrix} (I + L^tL)^{-1} & (I + L^tL)^{-1}L^t \\ L(I + L^tL)^{-1} & L(I + L^tL)^{-1}L^t \end{bmatrix},$$

vérifie $\Pi_L^2 = \Pi_L$, et donc est la matrice de la projection orthogonale sur le graphe de L .

L'application $\Pi : L \mapsto \Pi_L$ est une application C^∞ de $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ dans $M_n^s(\mathbb{R})$, à valeurs dans $H(k, n)$. En notant Γ l'application $\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix} \mapsto BA^{-1}$ (définie sur l'ouvert de $M_n^s(\mathbb{R})$ des matrices dont le bloc A est inversible), on constate que $\Gamma \circ \Pi(L) = L$, ce qui implique que Π est un plongement de $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ dans $M_n^s(\mathbb{R})$, dont l'image est égale à $H(k, n)$. En effet, pour tout ouvert U de $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$, on a $\Pi(U) = H(k, n) \cap \Gamma^{-1}(U)$, c'est donc un ouvert de $H(k, n)$. En conséquence, $H(k, n)$ est une sous variété, c'est à dire que $G(k, n)$ est une sous variété en chaque point de $H(k, n)$. L'espace tangent à $G(k, n)$ au point I_k est l'image de l'application linéaire

$$M_{n-k, k} \ni \ell \mapsto d\Pi_{I_k} \cdot \ell = \begin{bmatrix} 0 & \ell^t \\ \ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme tout point M_0 de $G(k, n)$ peut s'écrire sous la forme $M_0 = OI_kO^{-1}$ pour une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$, et que l'application $L \mapsto OLO^{-1}$ est un isomorphisme de $M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ qui préserve $G(k, n)$, on conclut que $G(k, n)$ est une sous variété en M_0 . On a donc montré que $G(k, n)$ est une sous-variété de $M_n^s(\mathbb{R})$.

Si M est une sous variété de classe C^r de \mathbb{R}^D , alors l'application

$$M \ni x \mapsto T_x M \in G(d, D)$$

est de classe C^{r-1} . En effet, en écrivant localement M comme le graphe d'une fonction F , on voit que $T_x M$ est le graphe de l'application linéaire dF_x , qui est une fonction C^{r-1} de x .

On peut représenter les éléments de $G(k, n)$ comme images de matrices $n \times k$ de rang k . Nous avons vu que l'ensemble $N_k(n, k)$ de ces matrices est un ouvert de $M_{n, k}(\mathbb{R})$. L'application R qui, à une matrice $M \in N_k(n, k)$, associe la projection orthogonale sur son image est une submersion surjective de $N_k(n, k)$ dans $G(k, n)$. En effet, sur l'ouvert des matrices qui s'écrivent $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ avec un bloc A inversible, cette application s'écrit

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mapsto \Pi_{BA^{-1}}$$

qui est une submersion sur l'ouvert considéré car $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mapsto BA^{-1}$ en est une. On a montré que les éléments de $H(k, n)$ sont des valeurs régulières de l'application R .

Étant donnée une matrice quelconque $M_0 \in N_k(n, k)$, on peut écrire $M_0 = O \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec un bloc A_0 inversible. Comme $R(OM) = OR(M)O^{-1}$ (en tant que projecteurs) ceci implique que F est une submersion au voisinage de M_0 .

La donnée $E(x)$ d'un élément de $G(k, n)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ est donc une application de classe C^r au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications $V_1(x), \dots, V_k(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , telles que $E(x)$ est l'espace engendré par les vecteurs $V_i(x)$ pour tout x dans un voisinage de 0.

Comme pour les tores, la sous-variété $G(k, n)$ est caractérisée à difféomorphisme près par l'existence de l'application $R = N_k(k, n) \rightarrow G(k, n)$ vérifiant les propriétés suivantes (exercice 2.8) :

— R est une submersion surjective.

— Deux points M et M' de $N_k(k, n)$ ont la même image par R si et seulement si il existe $g \in Gl_k$ tel que $M' = Mg$.

On dit que $G(k, n) = N_k(k, n)/Gl_k$.

Il y a une autre façon naturelle de représenter la Grassmannienne $G(k, n)$. On considère pour ceci l'espace $N_{n-k}(n-k, n)$ des matrices $n-k \times k$ de rang maximal, qui est un ouvert de $M_{n-k, n}(\mathbb{R})$. Le noyau d'une matrice $M \in N_{n-k}(n-k, n)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension k , que l'on identifie donc à un élément de $G(k, n)$. L'application K qui à une matrice associe son noyau est une submersion surjective de $N_{n-k}(n-k, n)$ dans $G(k, n)$. On se ramène en fait à la paramétrisation précédente en remarquant que, en tant que sous espaces, $K(M) = R(M^t)^\perp$ donc, en tant que projecteur,

$$K(M) = I - R(M^t).$$

La donnée $E(x)$ d'un élément de $G(k, n)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ est donc une application de classe C^r au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications $P_1(x), \dots, P_{n-k}(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, de classe C^r , telles que $E(x)$ est déterminé par les équations

$$E(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : P_1(x) \cdot v = P_2(x) \cdot v = \dots = P_{n-k}(x) \cdot v = 0\}$$

pour x proche de 0.

Propriété 3.1. Si E_0 et F_0 sont des éléments de $G(k, n)$ et $G(l, n)$ tels que $E_0 \cap F_0 = \{0\}$, alors l'application

$$G(k, n) \times G(l, n) \ni (E, F) \mapsto E + F \in G(k + l, n)$$

est C^∞ au voisinage de (E_0, F_0) .

Pour le montrer, on considère des applications locales $V_1(E), \dots, V_k(E) : G(k, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telles que E est engendré par les $V_i(E)$ si E est proche de E_0 , et des applications locales $W_1(F), \dots, W_l(F) : G(n-k, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que les vecteurs $W_i(F)$ engendrent F si F est proche de F_0 . L'espace $E + F$ est alors engendré par les vecteurs

$$V_1(E), \dots, V_k(E), W_1(F), \dots, W_l(F)$$

c'est donc une fonctions C^∞ de E et F . De la même façon :

Propriété 3.2. Si E_0 et F_0 sont des éléments de $G(k, n)$ et $G(l, n)$ tels que $E_0 + F_0 = \mathbb{R}^n$ (on dit que E_0 et F_0 sont transverses), alors l'application

$$G(k, n) \times G(l, n) \ni (E, F) \mapsto E \cap F \in G(k + l - n, n)$$

est C^∞ au voisinage de (E_0, F_0) .

La preuve est identique à la précédente en remplaçant les vecteurs $V_i(E)$ engendrant les espaces par des équations $P_i(E)$ déterminant les espaces.

Propriété 3.3. Soit $E_0 \in G(k, n)$ et $L_0 \in M_{k, n}(\mathbb{R})$. Supposons que $L_0|_{E_0}$ est un isomorphisme. Alors, pour E proche de E_0 et L proche de L_0 l'application $L|_E$ est un isomorphisme, et il existe une (unique) application locale

$$S(L, \pi) : M_{k, n}(\mathbb{R}) \times G(k, n) \rightarrow M_{n, k}(\mathbb{R}),$$

de classe C^∞ dont l'image est π (vu comme sous-espace) et telle que $L \cdot S(L, \pi) = Id$.

◀ Soit $G(\pi)$ une équation locale de π au voisinage de π_0 , c'est à dire une application C^∞ locale

$$G : G(k, n) \longrightarrow M_{n, n-k}(\mathbb{R})$$

telle que π est le noyau de $G(\pi)$. L'application linéaire $(L_0 \circ \pi_0, G(\pi_0))$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Il en est donc de même de $(L \circ \pi, G(\pi))$, qui envoie π sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, et l'inverse

$$R(L, \pi) := (L \circ \pi, G(\pi))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^n)$$

est une application C^∞ de π et L au voisinage de (L_0, π_0) . La restriction $S(L, \pi)$ de $R(L, \pi)$ à $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ a pour image π , et elle vérifie

$$L \circ S(L, \pi)(x) = L \circ \pi \circ R(L, \pi)(x, 0) = x. \blacktriangleright$$

L'ensemble $G(1, n)$ est appelé espace projectif de dimension $n-1$, noté aussi $\mathbb{R}P^{n-1}$. Nous l'avons défini comme une sous variété de $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. On a une submersion surjective π de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}P^n$ qui, à tout vecteur non nul (v_1, \dots, v_{n+1}) associe la droite dirigée par ce vecteur. L'application $f : \mathbb{R}P^n \longrightarrow N$ est différentiable si et seulement si la composée $f \circ \pi$ est différentiable sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ (c'est un cas particulier d'une propriété générale des submersions surjectives).

L'espace $\mathbb{R}P^1$ est difféomorphe à S^1 . Attention toutefois, l'application naïve associant à tout point de S^1 la droite vectorielle qu'il engendre n'est pas une bijection (chaque droite à deux préimages). On définit plutôt l'application qui, au point $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1$ (vu comme sous variété de \mathbb{R}^2), associe la (projection orthogonale sur la) droite dirigée par $\theta + (1, 0)$ si $\theta \neq (-1, 0)$, et par $(\theta_2, 1 - \theta_1)$ si $\theta \neq (0, 1)$. Comme $\theta_2(1 + \theta_1, \theta_2) = (1 - \theta_1)(\theta_2, 1 - \theta_1)$, ces deux expressions définissent la même droite. Cette application est une bijection C^∞ de S^1 sur $\mathbb{R}P^1$. Pour montrer que sa réciproque est aussi C^∞ , on calcule que le point d'intersection du cercle unité avec la droite affine passant par $(-1, 0)$ et dirigée par le vecteur non-nul (v_1, v_2) est

$$\theta(v_1, v_2) = \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{2v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \right).$$

L'espace $\mathbb{R}P^2$, qui est de dimension 2, est défini ci-dessus comme une sous variété de \mathbb{R}^6 . Nous verrons qu'il se plonge dans \mathbb{R}^5 , (il se plonge aussi dans \mathbb{R}^4 , mais pas dans \mathbb{R}^3).

3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel.

Soit M une sous variété C^r , $r \geq 2$ de \mathbb{R}^D . L'ensemble $TM := \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2D}, x \in M, v \in T_x M\}$ est une sous variété C^{r-1} de \mathbb{R}^{2D} appelée le fibré tangent de M . Si $\psi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ est une équation locale de M , où U est un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^D , alors

$$T\psi : U \times \mathbb{R}^D \ni (x, v) \longmapsto (\psi(x), d\psi_x \cdot v) \in \mathbb{R}^{2D}$$

est un submersion. Sa différentielle s'écrit en effet

$$dT\psi_{(x,v)} \cdot (y, w) = (d\psi_x \cdot y, d\psi_x \cdot w + d^2\psi_x \cdot (v, y))$$

et elle est surjective car $d\psi_x$ l'est. L'application $T\psi$ est donc une équation de $TM \cap (U \times \mathbb{R}^D)$. Cette variété est munie d'une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ qui est la restriction de la projection sur le premier facteur.

Exercice 3.1. Soit M une hypersurface compacte de \mathbb{R}^D (une sous variété de codimension 1). Montrer que l'application $x \longmapsto T_x M$ est surjective de M dans $G(D-1, D)$. On pourra, pour chaque $E \in G(D-1, D)$ considérer une forme linéaire l sur \mathbb{R}^D dont E est le noyau, et montrer que l'application $l|_M$ admet un point critique.

Un champ de vecteurs de classe C^k , $k \leq r-1$ sur M est une application $V : M \longrightarrow \mathbb{R}^D$, de classe C^k , telle que $V(x) \in T_x M$ pour tout x . On peut aussi le définir comme une section $S : M \longrightarrow TM$, c'est à dire à une application $S : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ S = Id$. Si V est un champ de vecteurs vu comme application à valeurs dans \mathbb{R}^D , la section qui lui est associée est $S(x) = (x, V(x))$.

De manière générale, on appelle fibré vectoriel (de type fini, de rang k) au dessus de M la donnée d'une application différentiable $E(x)$ de M dans une Grassmannienne $G(k, n)$. L'ensemble $N := \{(x, v), v \in E(x)\} \subset M \times \mathbb{R}^n$ est appelé espace total du fibré vectoriel. C'est une sous variété de $M \times \mathbb{R}^n$, elle est munie d'une projection $\pi : N \longrightarrow M$ qui est une submersion.

◀ Montrons que l'espace total est une sous-variété. On considère un point $x_0 \in M$. On étend l'application $E(x) : M \longrightarrow G(k, n)$ à un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^D , et on considère une application $x \longmapsto L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$

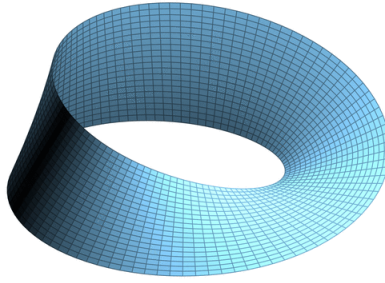


FIGURE 2 – Ruban de Moebius

telle que $E(x)$ est le noyau de $L(x)$. On considère de plus une submersion locale $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \mapsto (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$ qui donne une équation de M au voisinage de x_0 . L'application

$$\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^n \ni (x, v) \mapsto (\psi(x), L(x) \cdot v) \in \mathbb{R}^{D-d} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

est alors une submersion en (x_0, v) pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, qui donne une équation de N au voisinage de chaque point $(x_0, v), v \in E(x_0)$. La projection π est différentiable car c'est la restriction à N d'une application différentiable. Elle admet de plus une section globale, l'application $x \mapsto (x, 0)$, c'est donc une submersion. ►

Un fibré vectoriel de rang k est dit trivial si il existe k applications différentiables $V_1, \dots, V_k : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ telles que $E(x)$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $V_i(x)$ pour tout x , c'est à dire si il existe une application différentiable $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ telle que $E(x)$ est l'image de $L(x)$ pour tout x . Tout fibré vectoriel est localement trivial, c'est à dire que, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M tel que la restriction du fibré à U est triviale.

Un morphisme de fibrés vectoriel entre $\pi : N \rightarrow M$ et $\tilde{\pi} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$ est une application différentiable $G : N \rightarrow \tilde{N}$ entre les espaces totaux qui envoie chaque fibre $F(x) = \pi^{-1}(x)$ linéairement sur une fibre $\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})$. Il existe donc une application différentiable $g : M \rightarrow \tilde{M}$ telle que $\tilde{\pi} \circ G = g \circ \pi$. On dit que G est un morphisme au dessus de g .

Si les fibrés sont donnés par des applications F et \tilde{F} de M et \tilde{M} dans les grassmanniennes $G(k, n)$ et $G(\tilde{k}, \tilde{n})$, alors un morphisme de fibré est de la forme $G(x, v) = (g(x), L(x) \cdot v)$ où $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\tilde{n}})$ est une application différentiable telle que $L(x)$ envoie $F(x)$ dans $\tilde{F}(g(x))$ pour tout $x \in M$.

Le fibré $\pi : N \rightarrow M$ est trivial si et seulement si il est isomorphe au fibré produit $M \times \mathbb{R}^k$.

Exercice 3.2. Le fibré $\pi : N \rightarrow M$ est trivial si et seulement si il existe une application différentiable $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ telle que la restriction de $L(x)$ à $E(x)$ est un isomorphisme pour tout x .

Si M et N sont des variétés difféomorphes, alors les fibrés tangents $T_x M$ et $T_x N$ sont isomorphes. De plus, à tout difféomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ est associé l'isomorphisme canonique de fibrés

$$T\phi : (x, v) \mapsto (\phi(x), d\phi_x \cdot v).$$

On remarque la propriété functorialité

$$T(\phi \circ \psi) = T\phi \circ T\psi.$$

À titre d'exemple, considérons le fibré au dessus de la variété $M = G(1, n)$ donné par l'application identité de M dans $G(1, n)$. C'est un fibré en droites dont l'espace total est $E_n = \{(x, v), x \in G(1, n), v \in x\} \subset G(1, n) \times \mathbb{R}^n$. En identifiant $G(1, 2)$ à S^1 , on peut visualiser l'espace total E_2 comme un ruban de Moebius dans $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Soit π la projection sur le second facteur $\pi : G(1, n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Notons \mathring{E}_n le complémentaire de la section nulle dans E_n , c'est à dire l'ensemble $\mathring{E}_n = \{(x, v), x \in G(1, n), v \in x - \{0\}\}$. La restriction de π à \mathring{E}_n est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, dont le difféomorphisme inverse est $v \mapsto (\mathbb{R}v, v)$.

Pour $n \geq 2$, on conclut que \mathring{E}_n est connexe, et donc que E_n n'est pas trivial (dans le fibré trivial $M \times \mathbb{R}$, le complémentaire de la section nulle n'est pas connexe).

4 Espaces métriques localement compacts

On décrit quelques propriétés des espaces métriques localement compacts qui donneront le contexte topologique des variétés de dimension finie.

4.1 Suites exhaustives de compacts

Une suite exhaustive de compacts dans X est une suite K_i de parties compactes de X qui recouvrent X , et telles que K_i est contenu dans l'intérieur de K_{i+1} .

Proposition 4.1. *Soit X un espace métrique localement compact. Si X est connexe ou séparable, alors X admet une suite exhaustive de compacts.*

◀ Pour chaque point $x \in X$, on définit le réel $r(x)$ comme le suprémum des rayons r tels que la boule fermée $B(x, r)$ est compacte. Si il existe un point x tel que $r(x) = +\infty$, alors on pose $K_i = B(x, i)$.

Sinon, $r(x)$ prend des valeurs réelles strictement positives (car X est localement compacte). Pour tous x et y , la boule $B(y, r)$ est contenue dans la boule $B(x, r + d(x, y))$, donc $r(y) \leq r(x) + d(x, y)$. La fonction r est donc 1-Lipschitz, donc continue.

A tout compact K , on associe la réunion K' des boules fermées $B(x, r(x)/2)$ centrées sur K . Montrons que K' est compact. Pour ceci on considère une suite x_n de points de K' . Chaque point x_n est dans une boule $B(y_n, r(y_n)/2)$, avec $y_n \in K$. Comme K est compact, on peut supposer en prenant une sous-suite que y_n a une limite y dans K . Comme r est continue, on peut de plus supposer que $r(y_n) \leq 2r(y)/3$ pour tout n et donc que x_n est dans la boule compacte $B(y, 3r(y)/4)$ pour n assez grand. La suite x_n admet donc une sous-suite convergente.

La réunion des boules ouvertes $\overset{\circ}{B}(x, r(x)/2)$, $x \in K$ est un ouvert contenu dans K' et contenant K , donc K est contenu dans l'intérieur de K' .

PREUVE DANS LE CAS CONNEXE : On construit maintenant la suite de compacts suivante : On prend n'importe quel compact K_1 non vide (par exemple un point), et on pose $K_{i+1} = (K_i)'$.

Pour montrer que c'est une suite exhaustive de compacts, il suffit de montrer que la réunion U des K_i est égale à X . Comme U est la réunion des intérieurs des K_i , c'est un ouvert. Montrons maintenant qu'elle est fermée, et donc égale à X par connexité.

Considérons une suite $x_n \in U$ telle que $x_n \rightarrow x$ dans X . Choisissons n assez grand pour que $r(x_n) > r(x)/2$ et $d(x_n, x) < r(x)/4$. Comme $x_n \in U$, il existe i tel que $x_n \in K_i$, et donc

$$x \in B(x_n, r(x)/4) \subset B(x_n, r(x_n)/2) \subset K_i' = K_{i+1}$$

PREUVE DANS LE CAS SÉPARABLE : On considère une suite dense x_i , et on fait comme ci-dessus, mais en posant $K_{i+1} = (K_i)' \cup \{x_{i+1}\}$. Comme $\overset{\circ}{B}(x_i, r(x_i)/2) \subset K_i$, on vérifie facilement que $\cup K_i = X$. ▶

Corollaire 4.2. *Tout espace métrique localement compact et connexe est séparable.*

Ceci découle immédiatement de l'existence d'une suite exhaustive de compacts.

Corollaire 4.3. *Si (X, d) est un espace métrique séparable localement compact, alors il est muni d'une distance complète D qui engendre la même topologie que d .*

◀ Soit f une fonction propre et positive sur X . On pose $D(x, y) = d(x, y) + |f(y) - f(x)|$, on vérifie facilement que c'est une distance. Comme $D \geq d$, la topologie engendrée par D est plus forte que celle de d . Réciproquement, si $x_n \rightarrow x$ dans (X, d) , alors, par continuité de f , $D(x_n, x) \rightarrow 0$. On conclut donc que les deux distances engendrent la même topologie.

Si x_n est une suite de Cauchy pour D , alors la suite $f(x_n)$ est bornée. La suite x_n est donc contenue dans une partie compacte de X , et donc elle converge. ▶

Corollaire 4.4. *Le compactifié d'Alexandrov d'un espace métrique localement compact séparable (X, d) est métrisable.*

◀ Posons $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. On considère une fonction propre positive f sur X , et on pose $g = 1 - \arctan f$, qui est une fonction propre de X dans $]0, 1[$. On pose alors

$$D(x, y) = \min(d(x, y) + |g(y) - g(x)|, g(x) + g(y)).$$

On vérifie facilement que $|g(y) - g(x)| \leq D(x, y)$. Vérifions maintenant l'inégalité triangulaire pour D . On considère trois points x, y, z dans X .

Dans le cas où $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$ et $D(z, y) = d(z, y) + |g(z) - g(y)|$, on a

$$D(x, y) \leq d(x, z) + |g(z) - g(x)| \leq D(x, y) + D(y, z).$$

Dans le cas où $D(x, y) = g(y) + g(x)$ et $D(y, z) = g(z) + g(y)$, l'inégalité

$$D(x, z) \leq g(x) + g(z) \leq D(x, y) + D(y, z)$$

est évidente.

Dans le cas où $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$ et $D(y, z) = g(y) + g(z)$, alors

$$D(x, z) \leq g(z) + g(x) \leq g(z) + g(y) + D(x, y) = D(y, z) + D(x, y).$$

Nous avons vérifié l'inégalité triangulaire pour D , qui est donc une distance sur X . On vérifie facilement que D et d ont les mêmes suites convergentes. On définit alors \hat{d} sur \hat{X} par $\hat{d} = D$ sur $X \times X$,

$$\hat{d}(x, \infty) = \hat{d}(\infty, x) = g(x) \quad \forall x \in X,$$

et bien sûr $\hat{d}(\infty, \infty) = 0$. Vérifions l'inégalité triangulaire. Comme D est une distance sur X , il suffit de constater que

$$\hat{d}(x, y) = D(x, y) \leq g(x) + g(y) = \hat{d}(x, \infty) + \hat{d}(\infty, y)$$

et

$$\hat{d}(x, \infty) = g(x) \leq g(y) + D(x, y) = \hat{d}(y, \infty) + \hat{d}(x, y)$$

pour tous x et y dans X . Il est facile de vérifier directement que (\hat{X}, \hat{d}) est compact. En effet, si x_n est une suite de X , ou bien $\liminf g(x_n) = 0$, et x_n admet une sous-suite qui converge vers ∞ , ou bien $\liminf g(x_n) > 0$, et x_n est contenue dans un compact de X . ►

4.2 Partitions de l'unité

Une partition de l'unité localement finie est une famille $f_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ de fonctions continues qui ont la propriété que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une famille finie A_V d'indices tels que toutes les fonctions $f_\alpha, \alpha \notin A_V$ sont identiquement nulles sur V , et qui de plus vérifient $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ pour tout x , (la somme n'implique qu'un nombre fini de termes non nuls en chaque point x au vu du caractère localement fini). L'ensemble A des indices α est a priori quelconque. Toutefois, dans le cas d'un espace ayant la propriété de Lindelöf (tout recouvrement admet un sous-recouvrement dénombrable), une partition de l'unité localement finie est forcément dénombrable. C'est en particulier le cas dans les espaces métriques séparables.

◀ Démontrons qu'une partition de l'unité localement finie sur un espace Lindelöf est dénombrable (ou plus précisément que l'ensemble des fonctions non identiquement nulles est dénombrable). Chaque point $z \in X$ admet un voisinage U_z qui a la propriété que l'ensemble des indices A_z des fonctions f_α qui ne sont pas identiquement nulles sur U_z est fini. Au vu de la propriété de Lindelöf il existe une suite z_i telle que les ouverts U_{z_i} recouvrent X . La réunion $\bar{A} = \cup_i A_{z_i}$ est dénombrable. Toute fonction f_α avec $\alpha \notin \bar{A}$ est identiquement nulle sur chacun des ouverts U_{z_i} , donc sur X . ►

La partition de l'unité localement finie (f_α) est dite subordonnée au recouvrement ouvert (U_α) si le support de f_α est contenu dans U_α pour tout α . On dit qu'un espace topologique admet des partitions de l'unité si on peut subordonner une partition localement finie à tout recouvrement ouvert. On commence par un Lemme sur les indices.

Lemme 4.5. *Pour qu'il existe une partition de l'unité f_α subordonnée au recouvrement U_α , il suffit qu'il existe une partition de l'unité localement finie g_β dont chacune des fonctions g_β est à support dans l'un des U_α .*

◀ Soit A l'ensemble des indices α et B l'ensemble des indices β . On choisit d'abord une fonction $a : B \rightarrow A$ qui a la propriété que g_β est à support dans $U_{a(\beta)}$. Pour tout $\alpha \in A$, on note $b(\alpha) \subset B$ l'ensemble des indices $b(\alpha) := a^{-1}(\alpha)$. Les ensembles $b(\alpha), \alpha \in A$ constituent donc une partition de B , et ont la propriété que g_β est à support dans U_α pour $\beta \in b(\alpha)$. On définit la fonction $f_\alpha := \sum_{\beta \in b(\alpha)} g_\beta$, c'est une somme localement finie et la fonction f_α est donc continue. La famille f_α est localement finie. Comme $b(\alpha), \alpha \in A$ est une partition de B , on a $\sum_\alpha f_\alpha = \sum_\beta g_\beta = 1$. La famille f_α est donc une partition de l'unité localement finie. Montrons que chaque fonction f_α est supportée dans U_α . Soit x un point du support de f_α . Soit U un voisinage de x assez petit pour que toutes les fonctions g_β sauf un nombre fini soient identiquement nulles sur U . Il existe donc une partie finie $b_U(\alpha) \subset b(\alpha)$ telle que $f_\alpha = \sum_{\beta \in b_U(\alpha)} g_\beta$ sur U . Pour que le point x soit dans le support de f_α , il faut donc qu'il soit dans le support d'un des fonctions g_β , donc dans U_α .

L'existence de la fonction a ci-dessus découle de l'axiome du choix. Si l'espace est Lindelöf, alors B est dénombrable, et on peut se contenter de l'axiome du choix dénombrable, qui est beaucoup moins problématique. ►

Proposition 4.6. *Soit X un espace métrique séparable localement compact. Alors X admet des partitions de l'unité, c'est à dire que, pour tout recouvrement ouvert de X , il existe une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement.*

◀ Soit $(U_\alpha, \alpha \in A)$ un recouvrement ouvert de X , et K_i une suite exhaustive de compacts. On recouvre K_2 par un nombre fini de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts U_α et dans \mathring{K}_3 . On appelle \mathcal{B}_2 cette famille de boules ouvertes. Pour tout $i \geq 3$, on recouvre le compact $K_{i+1} - \mathring{K}_i$ par une famille finie \mathcal{B}_{i+1} de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts de \mathcal{U} et dans l'ouvert $\mathring{K}_{i+2} - K_{i-1}$. A chacune des boules ouvertes B de la famille $\mathcal{B} = \cup_{i \geq 2} \mathcal{B}_i$, on associe une fonction continue $f_B : X \rightarrow [0, \infty)$ qui est strictement positive sur la boule et nulle en dehors. La famille f_B est localement finie puisque les fonctions $f_B, B \in \cup_{i \geq j+1} \mathcal{B}_i$ sont nulles sur \mathring{K}_j . La somme $f = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B$ est donc une fonction continue à valeurs strictement positives. Les fonctions $g_B := f_B/f$ forment alors une partition de l'unité localement finie, dont chacune des fonctions est à support dans l'un des ouverts U_α . On conclut par le lemme précédent. ▶

En fait, tout espace métrique admet des partitions de l'unité. Ce résultat général, qui dépend de l'axiome du choix, a des preuves assez simples. L'axiome du choix n'est pas nécessaire dans le cas séparable. L'avantage de se restreindre au cas localement compact est que l'on obtient, par la même preuve, le résultat supplémentaire suivant (que l'on souhaite appliquer sur une sous-variété avec $\mathcal{F} = C^k(X, \mathbb{R})$) :

Addendum 4.7. Soit X un espace métrique séparable localement compact et soit \mathcal{F} un sous espace vectoriel de $C(X, \mathbb{R})$ qui est stable par somme localement finie et par quotient (par un élément de \mathcal{F} ne s'annulant pas), et qui a la propriété que, pour tout ouvert U de X et tout point $x \in U$, il existe $f \in \mathcal{F}$, à valeurs positives, à support dans U , et strictement positive en x . L'espace X admet alors des partitions de l'unité composées de fonctions de \mathcal{F} .

Corollaire 4.8. Soit (U_α) un recouvrement ouvert d'une sous-variété. Il existe alors une partition de l'unité différentiable subordonnée à U_α .

◀ Il faut vérifier que l'espace \mathcal{F} des fonctions C^∞ vérifie les hypothèses de l'addendum ci-dessus. Pour ceci, il suffit de vérifier qu'il existe une fonctions C^∞ à support compact sur \mathbb{R}^n à valeurs positives. C'est un grand classique, voir l'exercice ci-dessous. ▶

Exercice 4.1. — Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-1/t^2}$ (étendue par 0 en 0) est C^∞ .

— Montrer que la fonction qui vaut $f(t) = e^{(2-t)^{-1}(1-t)^{-1}}$ sur $]1, 2[$ et 0 en dehors est C^∞ .

— En posant $g(t)$ la primitive de f qui vaut 0 en $t = 2$, montrer que la fonction $x \mapsto g(|x|/2)$ est C^∞ sur \mathbb{R}^d , positive sur la boule unité, et nulle en dehors.

Exercice 4.2. Montrer que tout espace métrique localement compact et localement connexe (c'est le cas des variétés topologiques) admet des partitions de l'unité. On pourra considérer les composantes connexes de X .

Les partitions de l'unité permettent de montrer :

Propriété 4.9. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (sans aucune régularité) localement majorée sur l'espace métrique localement compact séparable X . Alors il existe une fonction g de classe C^∞ telle que $g \geq f$. Si X est une sous-variété C^k , alors g peut être prise C^k .

◀ Tout point $z \in M$ admet un voisinage ouvert U_z sur lequel f est majorée par le réel $a_z > 0$. On considère une partition de l'unité localement finie (h_z) (différentiable) adaptée au recouvrement (U_z) . On pose alors $g = \sum_z a_z h_z$. Cette fonction est continue (différentiable) comme somme localement finie de fonctions continues (différentiables). De plus, pour tout x , $g(x) = \sum_{x \in U_z} a_z h_z(x) \geq f(x) \sum_{x \in U_z} h_z = f(x)$. ▶

Le corollaire suivant est important :

Corollaire 4.10. Tout espace métrique localement compact séparable X (toute sous-variété) admet une fonction propre continue (différentiable) $f : X \rightarrow [1, \infty)$.

La séparabilité de M est ici une condition nécessaire.

◀ On considère une suite exhaustive de compacts K_i et la fonction f qui vaut i sur $K_i - K_{i-1}$. On applique alors le résultat précédent pour trouver une fonction régulière g telle que $g \geq i + 1$ en dehors de K_i . ▶

Corollaire 4.11. Pour toute sous variété M , il existe un plongement propre $J : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ (son image est donc fermée).

◀ M est une sous-variété de \mathbb{R}^{D_M} . Si elle est fermée, il n'y a rien à montrer. Sinon, on considère une fonction propre f sur M . L'application $x \mapsto (x, f(x))$ est alors un plongement propre de M dans \mathbb{R}^{D_M+1} . ▶

Voici un autre exemple d'utilisation des partitions de l'unité :

Propriété 4.12. Soit $M \subset N$ une sous-variété fermée, et soit $f : M \rightarrow [0, 1]$ une fonction différentiable. Alors il existe une fonction différentiable $\tilde{f} : N \rightarrow [0, 1]$, qui prolonge f .

◀ Pour chaque point z de M , il existe un voisinage U_z de z dans N et une fonction $f_z : U_z \rightarrow [0, 1]$, différentiable, telle que $f_z|_{(U_z \cap M)} = f|_{U_z \cap M}$. Ces ouverts U_z recouvrent M , et en ajoutant l'ouvert $V = N - M$, on obtient un recouvrement ouvert de N . Il existe une partition de l'unité différentiable subordonnée à ce recouvrement, et donc une famille localement finie de fonctions $g_z : U_z \rightarrow [0, 1]$ telles que $\sum_z g_z = 1$ sur M et $\sum_z g_z \leq 1$. Alors, la fonction $\sum_z g_z f_z$ est l'extension souhaitée. ▶

Un espace topologique est dit paracompact si il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un sous recouvrement localement fini. Il est (presque) évident qu'un espace qui admet des partitions de l'unité est paracompact. Réciproquement, il est classique en topologie (depuis Bourbaki) que tout espace paracompact admet des partitions de l'unité. Nous nous contenterons ici de remarquer qu'on peut étendre ce qui précède au cas des espaces paracompacts localement compacts (c'est à dire remplacer la métrisabilité par la paracompacité).

Proposition 4.13. *Soit X un espace topologique séparé, connexe, localement compact et paracompact. Alors X admet une suite exhaustive de compacts.*

◀ On fait la preuve dans le cas connexe, l'adaptation au cas séparable est similaire à celle de la proposition 4.1. On considère un recouvrement localement fini \mathcal{U} de X par des ouverts relativement compacts. On choisit un des ouverts U de ce recouvrement, et on pose $K_1 = \bar{U}$, qui est un compact. On considère l'ensemble \mathcal{U}_1 des ouverts du recouvrement qui intersectent K_1 . Il découle du caractère localement fini du recouvrement et de la compacité de K_1 que \mathcal{U}_1 a un nombre fini d'éléments. La réunion $K_2 = \cup_{U \in \mathcal{U}_1} \bar{U}$ est donc compacte. On définit alors inductivement le compact K_{i+1} comme la réunion des adhérences des ouverts du recouvrement qui intersectent K_i . On a $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$, la réunion $\mathcal{K} := \cup_i K_i = \cup_i \overset{\circ}{K}_{i+1}$ est donc ouverte. Tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est soit contenu dans \mathcal{K} , soit disjoint de \mathcal{K} . Le complémentaire de \mathcal{K} est donc ouvert, donc $\mathcal{K} = X$. ▶

À la différence du cas métrisable, ceci n'implique pas en général la séparabilité de X . On peut étendre (par la même preuve) la proposition 4.6 et son addendum (ainsi que tous les corollaires) :

Proposition 4.14. *Soit X un espace paracompact localement connexe et localement compact, et soit \mathcal{F} un sous espace vectoriel de $C(X, \mathbb{R})$ qui est stable par somme localement finie et par quotient (par un élément de \mathcal{F} ne s'annulant pas), et qui a la propriété que, pour tout ouvert U de M et tout point $x \in U$, il existe $f \in \mathcal{F}$, à valeurs positives, à support dans U , et strictement positive en x . L'espace X admet alors des partitions de l'unité composées de fonctions de \mathcal{F} . Soit f_α la fonction dont la restriction à*

◀ Soient (X_β) les composantes connexes de X . Elles sont ouvertes (et fermées) dans X car X est localement connexe.

Chacune de ces composantes connexes est paracompacte et connexe, elle admet donc une suite exhaustive de compacts, et des partitions de l'unité subordonnées à tout recouvrement constituées de fonctions de \mathcal{F} .

Soit (U_α) un recouvrement ouvert de X , et $U_{\alpha\beta} := X_\beta \cap U_\alpha$. Pour tout β , il existe une partition de l'unité $f_{\alpha\beta}$ de X_β , subordonnée au recouvrement $U_{\alpha\beta}$ et composée de fonctions de \mathcal{F} (ou plus exactement de fonctions qui sont les restrictions à X_β de fonctions de \mathcal{F}).

On considère la fonction $f_\alpha = \sum_\beta f_{\alpha\beta}$, c'est une somme localement finie (au plus un des termes est non nul au voisinage de chaque point). C'est aussi la fonction sur X dont la restriction à chaque composante X_β est égale à $f_{\alpha\beta}$. Les fonctions f_α constituent une partition de l'unité localement finie de X subordonnée au recouvrement (U_α) .

▶

5 Champs de vecteurs, fibrations

Un champ de vecteurs (autonome) sur \mathbb{R}^d est une application $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^r . Un champ de vecteurs dépendant du temps (ou non autonome) est une application $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^r . On s'intéresse à l'équation différentielle $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$. Pour un certain nombre de questions, l'étude des champs de vecteurs non-autonomes se réduit à celle des champs autonomes en considérant le champ $Y(t, x) = (1, X(t, x))$, qui est un champ de vecteurs autonome sur \mathbb{R}^{d+1} . En effet la courbe $x(t)$ résout l'équation $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ si et seulement si la courbe $y(t) := (t, x(t))$ résout l'équation autonome $\dot{y}(t) = Y(y(t))$.

Nous admettons l'énoncé global suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 5.1. *Soit $X(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs C^r non nécessairement autonome. Supposons qu'il existe une constante C telle que $\|X(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|)$.*

Il existe une (unique) application $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^r , ayant les propriétés suivantes :

— $\varphi(s, s, x) = x$ pour tous $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

— Pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la courbe $t \mapsto \varphi(s, t, x)$ est une solution de l'équation différentielle. Autrement dit, pour tout (s, t, x) , on a

$$\partial_t \varphi(s, t, x) = X(t, \varphi(s, t, x)).$$

— Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J vérifie $x(t) = \varphi(s, t, x(s))$ pour tous s et t dans J .

On note souvent φ_s^t l'application $x \mapsto \varphi(s, t, x)$. La relation

$$\varphi_s^t \circ \varphi_\theta^s = \varphi_\theta^t$$

est satisfaite pour tous θ, s et t . En effet, la courbe $x(t) := \varphi_\theta^t(x)$ est une solution de l'équation différentielle, elle satisfait donc $x(t) = \varphi_s^t(x(s)) = \varphi_s^t(\varphi_\theta^s(x))$. En particulier, φ_s^s est l'inverse de φ_s^t . Chacune des applications φ_s^t est donc un difféomorphisme. On appelle l'application φ (ou parfois la famille des applications φ_s^t) le flot de X . Dans le cas où le champ de vecteurs est autonome on note en général φ^t au lieu de φ_0^t . On remarque que $\varphi_s^{s+t} = \varphi^t$ pour tous s et t . En effet, la courbe $x(t) := \varphi_s^{s+t}(x)$ vérifie l'équation $\dot{x}(t) = X(x(t))$, elle vérifie donc $x(t) = \varphi_0^t(x(0)) = \varphi^t(x)$. On a alors la relation

$$\varphi^{t+s} = \varphi^s \circ \varphi^t.$$

Intéressons nous maintenant au cas d'un champ de vecteur C^r quelconque ne satisfaisant pas nécessairement la borne $\|X(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|)$.

Théorème 5.2. Soit $X(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs C^r non nécessairement autonome. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, et une application $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^r , ayant les propriétés suivantes :

- Pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a $(s, s, x) \in U$ et $\varphi(s, s, x) = x$.
- Pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $(s, t, x) \in U$ est un intervalle ouvert $]T^-(s, x), T^+(s, x)[$ contenant s et la courbe $t \mapsto \varphi(s, t, x)$ est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle. En particulier, pour tout $(s, t, x) \in U$, on a

$$\partial_t \varphi(s, t, x) = X(t, \varphi(s, t, x)).$$

- Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J contenant s vérifie $x(t) = \varphi(s, t, x(s))$ sur J (en particulier, $J \subset]T^-(s, x(s)), T^+(s, x(s))]$).

Explicitons aussi le résultat dans le cas des champs autonomes.

Théorème 5.3. Soit $X(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs C^r autonome. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, et une application $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^r , ayant les propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a $(0, x) \in U$ et $\varphi(0, x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $(t, x) \in U$ est un intervalle ouvert $]T^-(x), T^+(x)[$ contenant 0 et la courbe $t \mapsto \varphi(t, x)$ est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle. En particulier, $\partial_t \varphi = X \circ \varphi$.
- Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J contenant s vérifie $x(t) = \varphi(t - s, x(s))$ sur J (en particulier, $J \subset]s + T^-(x(s)), s + T^+(x(s))]$).

Le lecteur est invité à vérifier que les deux résultats ci-dessus sont équivalents l'un à l'autre. Nous allons démontrer la variante autonome.

◀ Il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow]0, 1[$, de classe C^∞ , telle que le champ $Y(x) := f(x)X(x)$ est borné. Notons $\psi(t, x)$ le flot du champ Y , qui existe au vu du théorème 5.1. Supposons que le flot $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de l'énoncé existe. On va montrer que les flots φ et ψ se déduisent l'un de l'autre par reparamétrisation, et plus précisément que l'on peut écrire $\psi(t, x) = \varphi(\tau(t, x), x)$ pour une fonction $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. En dérivant cette égalité par rapport à t , on trouve

$$Y(\psi(t, x)) = \partial_t \tau(t, x) X(\psi(t, x))$$

qui est satisfaite si

$$\partial_t \tau(t, x) = f(\psi(t, x))$$

pour tous t et x . Au vu de ces considérations informelles, on pose

$$\tau(t, x) := \int_0^t f(\psi(s, x)) ds,$$

on a $\partial_t \tau(t, x) = f(\psi(t, x)) > 0$. L'application $(t, x) \mapsto (\tau(t, x), x)$ est donc un difféomorphisme sur son image, qui est un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Cette image contient $\{0\} \times \mathbb{R}^d$, et son intersection avec $\mathbb{R} \times \{x\}$ est un intervalle pour tout x . L'inverse du difféomorphisme ci-dessus est de la forme $(t, x) \mapsto (\theta(t, x), x)$, où $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^r telle que

$$\partial_t \theta(t, x) = 1/f(\psi(\theta(t, x), x)).$$

On pose alors

$$\varphi(t, x) := \psi(\theta(t, x), x),$$

et on constate que cette application (définie sur U) vérifie toutes les propriétés de l'énoncé. ►

Le fait qu'un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^d est la même chose qu'une application de \mathbb{R}^d dans lui-même est propre au cas de \mathbb{R}^d . Ces objets deviennent différents sur une variété. La première manifestation de cette différence tient à la manière dont les champs de vecteurs sont transformés par changement de coordonnées. Si X un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^d et $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme, on note alors $\psi_* X$ le champ de vecteurs suivant :

$$\psi_* X(y) = d\psi_{\psi^{-1}(y)} \cdot X(\psi^{-1}(y)).$$

Le champ $\psi_* X$ est la bonne expression de X dans les nouvelles coordonnées au vu de la propriété suivante :

Propriété 5.4. Si $Y = \psi_* X$ et si $x(t)$ résout l'équation $\dot{x} = X(x)$, alors $y(t) := \psi(x(t))$ résout l'équation $\dot{y} = Y(y)$.

Le champ image $\psi_* X$ n'est pas défini en général si ψ n'est pas un difféomorphisme. On utilisera toutefois la notation $\psi_* X$ chaque fois qu'elle a un sens. La relation $Y = \psi_* X$ signifie donc que

$$Y(\psi(x)) = d\psi_x \cdot X(x)$$

pour tout $x \in M$. La relation

$$(\varphi\psi)_* X = \varphi_*(\psi_* X)$$

est satisfaite lorsque ses termes sont bien définis. On étendra aussi la notation au cas des champs non autonomes, $Y = \psi_* X$ si et seulement si $Y(t, \psi(x)) = d\psi_x \cdot X(t, x)$. C'est aussi équivalent à l'égalité $Y_t = \psi_* X_t$ pour tout t , en posant $Y_t(x) = Y(t, x)$. La propriété ci-dessus reste satisfaite dans ce contexte.

5.1 Champ de vecteurs sur une sous variété

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^D . Un champ de vecteurs C^r sur M , est la donnée, pour tout $x \in M$, d'un vecteur $X(x) \in T_x M$ qui est de classe C^r en tant qu'application de M dans \mathbb{R}^D . De manière équivalente, le champ image $\psi_* X$ est C^r pour tout difféomorphisme d'un ouvert de M dans un ouvert de \mathbb{R}^d . On considèrera aussi des champs de vecteurs non autonomes $X(t, x)$ qui sont des applications C^r de $\mathbb{R} \times M$ dans \mathbb{R}^D telles que $X(t, x) \in T_x M$ pour tout (t, x) . On associe souvent à un tel champ non-autonome le champ autonome $(1, X(t, x))$ sur $\mathbb{R} \times M$, ceci permet de déduire un certain nombre de propriétés des champs non-autonomes à partir de l'étude des champs autonomes.

Si $x(t)$ est une courbe C^1 à valeurs dans la sous variété M de \mathbb{R}^D , alors pour chaque t , la dérivée $\dot{x}(t)$, vue comme un élément de \mathbb{R}^D , appartient à $T_{x(t)} M$. C'est le vecteur $\dot{x}(t) = dx_t \cdot 1$.

Étant donné un champ de vecteurs (non autonome) $X(t, x)$ sur M , on dit que la courbe x satisfait l'équation $\dot{x} = X(t, x)$ si $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ dans $T_{x(t)} M$ pour tout t . Si la courbe $x(t)$ sur M résout l'équation $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$, alors la courbe $(t, x(t))$ sur $\mathbb{R} \times M$ résout l'équation autonome $\dot{y} = (1, X(y))$.

Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs non autonome sur \mathbb{R}^D et M une sous variété de \mathbb{R}^D . On dit que X est tangent à M si $X(t, x) \in T_x M$ pour tous (t, x) . La restriction de X à M est alors un champ de vecteurs sur M . Réciproquement :

Lemme 5.5. Si M est une sous-variété fermée de \mathbb{R}^D , tout champ de vecteurs sur M est la restriction à M d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^D .

◀ On considère ici le champ de vecteurs comme une application de M dans \mathbb{R}^D . Il suffit d'étendre chacune des composantes de cette application, en utilisant la propriété 4.12. ►

Lemme 5.6. Soit M une sous variété de \mathbb{R}^D et $X(t, x)$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^D . Les énoncés suivants sont équivalents :

— Le champ X est tangent à M .

— Pour toute solution $x(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^D$ de l'équation $\dot{x}(t) = X(t, x)$, l'ensemble J_M des temps t tels que $x(t) \in M$ est ouvert dans J .

Si de plus M est fermée, alors toute solution passant par M est contenue dans M sur son intervalle de définition.

◀ Il est clair que le second point implique le premier.

Réciproquement, soit $x(t)$ une solution telle que $x(s) \in M$. On considère un redressement $\phi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$ de M en $x(s)$. La courbe $\phi \circ x = (y, z)$ satisfait localement (au voisinage de $t = s$) les équations $\dot{y} = Y(t, y, z)$, $\dot{z} = Z(t, y, z)$, où (Y, Z) est le champ $\phi_* X$. On a $Z(t, y, 0) = 0$ pour tous (t, y) puisque X est tangent à M . La courbe z est donc solution de l'équation $\dot{z} = \tilde{Z}(t, z)$, où $\tilde{Z}(t, z) = Z(t, y(t), z)$. Comme $\tilde{Z}(t, 0) = 0$, on en déduit que $z(t)$ est nulle au voisinage de s , c'est à dire que $x(t) \in M$.

Finalement, si M est fermée, alors J_M est fermé. Comme c'est aussi un ouvert du connexe J , on a $J_M = J$. ▶

Théorème 5.7. Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs C^r non nécessairement autonome sur M . Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, et une application $\varphi : U \rightarrow M$, de classe C^r , ayant les propriétés suivantes :

- Pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times M$, on a $(s, s, x) \in U$ et $\varphi(s, s, x) = x$.
- Pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times M$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $(s, t, x) \in U$ est un intervalle ouvert $]T^-(s, x), T^+(s, x)[$ contenant s et la courbe $t \mapsto \varphi(s, t, x)$ est une solution de l'équation différentielle sur cet intervalle.
- Toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert J contenant s vérifie $x(t) = \varphi(s, t, x(s))$ sur J (en particulier, $J \subset]T^-(s, x(s)), T^+(s, x(s))]$).

◀ Supposons dans un premier temps que M est fermée. On étend alors X en un champ $\tilde{X}(t, x)$ sur \mathbb{R}^D . On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz dans \mathbb{R}^D , qui nous donne l'existence d'un flot $\tilde{\varphi}(s, t, x)$ défini sur un ouvert \tilde{U} de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D$. Le lemme ci-dessus implique que la solution $t \mapsto \varphi(s, t, x)$ est contenue dans M sur tout son intervalle de définition $]T^-(s, x), T^+(s, x)[$ si $x \in M$. En posant $U = \tilde{U} \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M)$ et $\varphi = \tilde{\varphi}|_U$, on voit que toutes les conclusions de l'énoncé sont satisfaites.

Dans le cas où M n'est pas fermée, on considère une fonction C^∞ propre $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Le graphe Γ de f est une sous-variété fermée de $M \times \mathbb{R}$, donc de $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$. On associe au champ $X(t, x)$ sur M le champ $Y(t, x) = (X(t, x), df_x \cdot X(t, x))$ sur Γ ; on a $\pi_* Y = X$ où π est la restriction à Γ de la projection sur le premier facteur de $M \times \mathbb{R}$. On peut appliquer la première partie au champ Y sur Γ , on obtient un flot φ_Y défini sur un ouvert U_Y de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Gamma$, puis le résultat voulu en posant $\varphi(s, t, x) = \pi \circ \varphi_Y(s, t, x, f(x))$, sur le domaine $U = (id \times id \times \pi)(U_Y)$.

▶

On dit que le champ est complet si on a $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$. Les temps d'existence vérifient

$$T^\pm(s, x) = T^\pm(s, \varphi(s, t, x))$$

pour tout $t \in]T^-(s, x), T^+(s, x)[$. Ils sont semi-continus. Plus précisément, $\pm T^\pm$ est semi-continu inférieurement (c'est une reformulation du fait que U est ouvert).

Proposition 5.8. Si le temps d'existence $T^+(s, x)$ de la solution maximale $x(t)$ d'un problème de Cauchy vérifie $T^+(s, x) < \infty$ (resp. $T^-(s, x) > -\infty$), alors la solution $x(t)$ n'a pas de valeur d'adhérence en $T^+(s, x)$ (resp. en $T^-(s, x)$).

◀ Notons (s, x_s) le problème de Cauchy considéré, et $T^+ = T^+(s, x_s)$. On note comme dans l'énoncé $x(t)$ la solution $\varphi(s, t, x_s)$. Supposons que $T^+ < \infty$ et que la courbe $x(t)$ a une valeur d'adhérence $x^+ \in M$ lorsque $t \rightarrow T^+$. On a $T^+(T^+, x^+) > T^+$, donc $T^+(t, x) > T^+$ sur un voisinage V de (T^+, x^+) . En prenant τ tel que $(\tau, x(\tau)) \in V$, on obtient

$$T^+ = T^+(s, x_s) = T^+(\tau, x(\tau)) > T^+,$$

ce qui est une contradiction. ▶

On s'intéressera le plus souvent dans la suite à des champs de vecteurs autonomes et complets. Voici quelques critères de complétude :

Proposition 5.9. Si il existe une fonction propre f sur M et une constante $C > 0$ telle que $|df \cdot X| \leq Cf$, alors X est complet. C'est le cas lorsque X est à support compact.

Sur \mathbb{R}^d , on peut prendre $f = 1 + |x|^2$, et on retrouve que X est complet si $|X| \leq C(1 + |x|)$.

◀ Soit $x(t) :]T^-, T^+[$ une solution maximale de l'équation différentielle. On montre le résultat par l'absurde en supposant, par exemple, que T^+ est fini. On a $|\partial_t(f \circ x)| \leq Cf \circ x$ donc, par le Lemme de Gronwall, $f \circ x$ est bornée sur $[s, T^+[$ pour tout $s \in]T^-, T^+[$. Comme f est propre, ceci implique que la courbe x est contenue dans un compact, ce qui est une contradiction. Dans le cas où X est à support compact, on peut prendre n'importe quelle fonction propre $f \geq 1$. ▶

Comme dans \mathbb{R}^n , tout champ peut être rendu complet par reparamétrisation :

Propriété 5.10. Si V est un champ autonome sur M , il existe une fonction différentiable g à valeurs strictement positives, telle que le champ gV est complet.

◀ On considère une fonction $f : M \rightarrow [1, \infty)$ propre. On a $df \cdot gV = gdf \cdot V$ et il suffit que $g|df \cdot V| \leq (1+f)$ pour que gV soit complet, au vu du critère ci-dessus. La conclusion est donc satisfaite pour toute fonction différentiable $g \leq (1+f)/(1+|df \cdot V|)$. L'existence d'une telle fonction découle du lemme 4.9. ▶

Le lemme de redressement ci-dessous est bien utile :

Proposition 5.11. Soit X un champ de vecteurs C^r , et x_0 un point régulier, c'est à dire que $X(x_0) \neq 0$. Il existe alors une carte locale $\phi : (M, x_0) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ telle que ϕ_*X est le champ constant $(1, 0)$.

◀ Soit $\psi : (\mathbb{R}^{d-1}, 0) \rightarrow (M, x_0)$ une immersion locale telle que $X(x_0) \notin d\psi_0(\mathbb{R}^{d-1})$. Soit φ^t le flot de X . Alors l'application $F : (t, y) \mapsto \varphi^t \circ \psi(y)$ est une paramétrisation locale de M telle que $\partial_t F = X \circ F$, c'est à dire $F_*(1, 0) = X$. ▶

Exercice 5.1. Soit M une sous variété de \mathbb{R}^d et X un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^d tangent à M . Pour tout point régulier x_0 de X dans M , montrer qu'il existe un difféomorphisme local ϕ de \mathbb{R}^d en x_0 qui redresse à la fois M et X .

Finissons par une remarque sur les sous-groupes de Lie. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui en est aussi une sous-variété. On note \mathfrak{g} son espace tangent au point identité, qui est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.12. La restriction à \mathfrak{g} de l'application exponentielle prend ses valeurs dans G .

◀ Pour tout $A \in G$, l'application $B \mapsto BA$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui préserve G . En conséquence, l'espace tangent à G au point A est l'espace $\mathfrak{g}A$ constitué des matrices $hA, h \in \mathfrak{g}$. Pour tout $h \in \mathfrak{g}$, l'application $A \mapsto hA$ est un champ de vecteurs sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est tangent à G , et qui engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs sur G (on parle de champ de vecteurs invariant à droite). L'équation différentielle associée $A'(t) = hA(t)$ a une unique solution telle que $A(0) = I$, c'est $A(t) = \exp(th)$, qui est donc dans G . ▶

5.2 Fibrations localement triviales, voisinages tubulaires

Théorème 5.13 (Ehresmann). Soit $f : M \rightarrow N$ une submersion de classe C^{r+1} , $r \geq 1$. Si M est compacte (ou, plus généralement, si f est propre), alors f est une fibration localement triviale, c'est à dire que, pour tout $x_0 \in N$, il existe un voisinage U de x_0 dans N et un plongement $\varphi : F \times U \rightarrow M$, de classe C^r , où F est la sous variété $f^{-1}(x_0)$, vérifiant

$$f \circ \varphi(y, x) = x$$

pour tout $y \in F$ et $x \in U$.

Ceci implique en particulier, si M est connexe, que toutes les fibres $f^{-1}(x)$ sont difféomorphes. Le terme *localement triviale* impose une mise en garde. Toute submersion est localement triviale au sens où elle s'écrit $(x, y) \mapsto x$ dans un voisinage d'un point de sa source M . Ici, on obtient un résultat local au voisinage d'une fibre entière, autrement dit un résultat local du coté de l'image, ce qui est plus fort.

Remarquons qu'un fibré vectoriel est aussi une fibration localement triviale.

◀ On considère un plongement ψ de $] -2, 2[^{d_N}$ dans N qui envoie l'origine sur x_0 . Posons $Z = f^{-1}(\psi(] -2, 2[^{d_N}))$ et

$$g = \psi^{-1} \circ f : Z \rightarrow] -2, 2[^{d_N}.$$

Soient e_i les vecteurs coordonnées de \mathbb{R}^{d_N} , et soient $v_i(x)$ les champs de vecteurs

$$v_i(x) = g(x_1)g(x_2) \cdots g(x_{d_N})e_i,$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction régulière qui vaut 1 sur $[-1, 1]$ et dont le support est contenu dans $] -2, 2[$.

On construit des champs de vecteurs V_i sur la variété X tels que $g_*V_i = v_i$. Pour ceci, on considère l'orthogonal $H'(z)$ du sous-espace $K(z) := \ker dg_z$ dans \mathbb{R}^{D_M} , et son intersection $H(z)$ avec $T_z Z (= T_z M)$. Ce sous-espace est un supplémentaire de $K(z) = \ker dg_z$ dans $T_z M$. Comme dg_z est surjective, sa restriction à l'espace horizontal $H(z)$ est un isomorphisme, et on pose

$$V_i(z) = (dg_z)_{|H(z)}^{-1}(v_i(g(z))).$$

Comme f est propre, le support de V_i est compact.

Montrons que les champs $V_i(z)$ sont C^r . On fixe un point $z_0 \in Z$ et on étudie ces champs au voisinage de z_0 . On étend localement la submersion g en une submersion

$$G : (\mathbb{R}^{D_M}, z_0) \longrightarrow]-2, 2[^{d_N} \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}, (g(z_0), 0))$$

telle que $G(z) = (g(z), 0)$ pour $z \in M$. L'espace $K(z)$, vu comme sous espace de \mathbb{R}^{D_M} est le noyau de dG_z . L'application $z \longmapsto G(z)$ à valeurs dans la Grassmannienne $G(d_F, D_M)$ est donc C^r . On en déduit en se référant à l'étude des Grassmanniennes plus haut que l'application

$$z \longmapsto H(z) = (K(z)^\perp \cap T_z M) \in G(d_N, D_M)$$

est C^r . Comme l'application $dG_{z|H(z)}$ est un isomorphisme. Son inverse $S(z)$, vu comme application linéaire à valeurs dans \mathbb{R}^D dont l'image est $H(z)$, est une fonction C^r de z au vu de la propriété 3.3. Les champs $V_i(z) = S(z) \cdot v_i(g(z))$ sont donc C^r .

Soit ϕ_i^t le flot de V_i . Comme $g_* V_i = v_i$, on a

$$g \circ \phi_i^t(x) = x + t e_i$$

tant que x et $x + t e_i$ sont dans $[-1, 1]^{d_N}$. En notant F la sous variété $g^{-1}(0)$, on définit l'application $\tilde{\varphi} : F \times]-1, 1[^{d_N} \longrightarrow X$ par

$$\tilde{\varphi}(y, x) = \varphi(y, x_1, \dots, x_{d_N}) = \phi_{d_N}^{x_{d_N}} \circ \dots \circ \phi_1^{x_1}(y).$$

On remarque que $g \circ \varphi(y, x) = x$. La différentielle

$$d\tilde{\varphi}_{(y,0,\dots,0)} \cdot (\zeta, t_1, \dots, t_{d_N}) = \zeta + t_1 V_1(y) + \dots + t_{d_N} V_{d_N}(y)$$

est inversible, donc φ est un difféomorphisme local en $(y, 0)$ pour tout $y \in F$. Au vu du Lemme ci-dessous, il existe $\delta > 0$ tel que $\tilde{\varphi}$ engendre un plongement de $F \times]-\delta, \delta[^{d_N}$ dans X . On revient à l'énoncé en posant $U = \psi[]-\delta, \delta[^{d_N}$ et $\varphi(y, x) = \tilde{\varphi}(y, \psi(x))$. ►

Lemme 5.14. Soient M et N des sous variétés, soit F une sous variété de M , et soit $J : M \longrightarrow N$ une application différentiable dont la restriction à F est un plongement et qui est un difféomorphisme local en chaque point de F . Alors il existe un voisinage U de F dans M tel que la restriction de J à U est un plongement.

◀ On munit toutes les sous-variétés des distances induites par l'espace ambiant. Pour chaque $y \in F$, on considère trois rayons $\epsilon_y, r_y, \delta_y$ ayant les propriétés suivantes :

- L'application J est un difféomorphisme de $B(y, 2r_y)$ sur son image, et cette image contient $B(J(y), 2\delta_y)$.
- $J^{-1}(B(J(y), 2\delta_y) \cap F) \subset B(y, r_y)$ (on peut obtenir cette condition en résuisant δ_y car J est un plongement).
- $J(B(y, \epsilon_y)) \subset B(J(y), \delta_y)$ et $\epsilon_y < r_y$.

Montrons que J est injective sur l'ouvert $U = \cup_y B(y, \epsilon_y)$. On considère pour ceci deux points z_1 et z_2 dans U tels que $J(z_1) = J(z_2)$. Il existe $y_1 \in F$ tel que $z_1 \in B(y_1, \epsilon_1)$ et $y_2 \in F$ tel que $z_2 \in B(y_2, \epsilon_2)$, en notant $r_i, \epsilon_i, \delta_i$ les quantités associées à y_1 et y_2 . Supposons que $\delta_1 \leq \delta_2$ pour fixer les idées. On a alors

$$d(J(y_1), J(y_2)) \leq d(J(y_1), J(z_1)) + d(J(z_2), J(y_2)) < \delta_1 + \delta_2 \leq \delta_1$$

donc $d(y_1, y_2) < r_1$.

Si $r_1 \leq r_2$, alors

$$d(z_1, y_2) \leq d(z_1, y_1) + d(y_1, y_2) < \epsilon_1 + r_1 < 2r_1 \leq 2r_2$$

donc $z_1 = z_2$ par injectivité de J sur $B(y_2, 2r_2)$.

Si $r_2 \leq r_1$, alors $d(y_1, z_2) < r_1 + \epsilon_2 \leq 2r_1$ donc $z_1 = z_2$ par injectivité de J sur $B(y_1, r_1)$.

L'application $J|_U$ est donc un difféomorphisme local injectif, donc un difféomorphisme sur son image. ►

Ce lemme est aussi l'outil essentiel pour démontrer l'existence des voisinages tubulaires.

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^D . On appelle fibré normal de M , noté $T^\perp M$, le fibré vectoriel au dessus de M dont la fibre en x est le sous-espace vectoriel $E(x) = (T_x M)^\perp$. L'application $G(d, D) \ni E \longmapsto E^\perp \in G(D - d, D)$ étant C^∞ , c'est un fibré C^{k-1} , comme TM .

Théorème 5.15. Il existe un voisinage U de la section nulle dans le fibré normal sur lequel l'application $J : T^\perp M \ni (x, v) \longmapsto x + v \in \mathbb{R}^D$ est un plongement (un difféomorphisme sur son image). L'image V de U est un voisinage ouvert de M dans \mathbb{R}^D . Il existe une submersion $\pi : V \longrightarrow M$ dont la restriction à M est l'identité.

On dit que V est un voisinage tubulaire de M , et que π est une rétraction de V sur M .

◀ On vérifie que l'application $J : (x, v) \mapsto x + v$ vérifie les hypothèses du lemme ci-dessus. La submersion π est l'application $J \circ P \circ J^{-1}$, où P est la projection canonique $(x, v) \mapsto x$ du fibré normal. ▶

Exercice 5.2. *Montrer que si il existe une équation globale de M , c'est à dire une application $\psi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^{D-d}$ dont 0 est une valeur régulière et telle que $M = \psi^{-1}(0)$, alors le fibré normal de M est trivial.*

On peut étendre ce qui précède au cas où M est une sous-variété d'une sous variété $N \subset \mathbb{R}^D$. Le fibré normal de M (relativement à N), noté $T^{\perp N}M$, est le fibré vectoriel au dessus de M dont la fibre en x est le sous-espace vectoriel $E(x) = (T_x M)^{\perp} \cap T_x N$. Soit W un voisinage tubulaire de N dans \mathbb{R}^D et $\pi_W : W \rightarrow N$ une rétraction (c'est à dire une submersion dont la restriction à N est l'identité).

Théorème 5.16. *Il existe un voisinage U de la section nulle dans le fibré $T^{\perp N}M$ sur lequel l'application $J : T^{\perp N}M \ni (x, v) \mapsto \pi_W(x + v) \in N$ est un plongement (un difféomorphisme sur son image). L'image V de U est un voisinage ouvert de M dans N . Il existe une submersion $\pi : V \rightarrow M$ dont la restriction à M est l'identité.*

◀ Il suffit de constater que l'application J vérifie les hypothèses du lemme. ▶

5.3 Fibration de Hopf

On considère le champ de vecteurs linéaire $V(x, p)$ sur \mathbb{R}^4

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -x_2.$$

Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont x_1 et x_2 sont les positions, et p_1 et p_2 les vitesses. En notation complexe $z_i = x_i + ip_i$, les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{it},$$

elles sont toutes périodiques de période 2π (sauf la solution identiquement nulle). On obtient ainsi une partition de \mathbb{R}^4 en un point et des cercles plongés. Au voisinage de n'importe quel point non nul de \mathbb{R}^4 , cette partition peut être redressée par un difféomorphisme local en une collection de droites parallèles.

L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|p|^2.$$

On calcule facilement que $dE \cdot V = 0$. On conclut que l'énergie est constante le long des trajectoire, c'est à dire que $E(x(t), p(t)) = E(x(0), p(0)) \forall t$ si $(x(t), p(t))$ est une trajectoire de l'équation différentielle. Ceci est aussi évident directement sur l'expression des solutions.

Le champ de vecteur V engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs (toujours noté V) sur la sous-variété $\{E = 1/2\}$, qui n'est autre que S^3 . Les trajectoires du système différentiel $\dot{x} = V$, qui sont toutes des images plongées de S^1 , forment donc une partition de la sphère S^3 . Localement, cette partition se redresse en une collection de droites parallèles.

La formule suivante va nous permettre de faire mieux. On pose

$$h(z_1, z_2) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$

Le calcul suivant

$$|h(z_1, z_2)|^2 = 4z_1\bar{z}_2\bar{z}_1z_2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

montre que $h(S^3) \subset S^2$, et même que $h^{-1}(S^2) = S^3$. On constate encore une fois que h est constante le long des orbites, et même que les ensembles $h = cte$ sont exactement les orbites. En effet, si $h(z_1, z_2) = h(z'_1, z'_2)$, alors

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |h(z_1, z_2)| = |h(z'_1, z'_2)| = |z'_1|^2 + |z'_2|^2$$

donc $|z_j|^2 = |z'_j|^2$. On écrit alors $z'_j = z_j e^{it_j}$ pour des réels t_1 et t_2 . Comme $z_1\bar{z}_2 = z'_1\bar{z}'_2$, on conclut que $e^{i(t_1-t_2)} = 1$, et donc que les points (z_1, z_2) et (z'_1, z'_2) sont sur la même orbite.

L'application $h : S^3 \rightarrow S^2$ est une submersion (nous le vérifierons ci-dessous), donc une fibration localement triviale. Toutes les fibres de cette fibration sont difféomorphes à S^1 , en particulier, h est surjective. Les fibres de h sont exactement les orbites du système différentiel $\dot{x} = V$ sur S^3 .

On montrera plus tard que S^3 n'est pas difféomorphe à $S^2 \times S^1$, la fibration de Hopf n'est donc pas globalement triviale.

Montrons maintenant que h est une submersion en tout point différent de $(0, 0)$. En un point où z_1 et z_2 sont non-nuls, on écrit l'application h en coordonnées polaires

$$(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \mapsto (2r_1r_2, \theta_1 - \theta_2, r_1^2 - r_2^2).$$

On vérifie par un calcul direct que l'application $(r_1, r_2) \mapsto (2r_1r_2, r_1^2 - r_2^2)$ est un difféomorphisme de $]0, \infty)^2$ dans $]0, \infty) \times \mathbb{R}$. L'autre facteur $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_2 - \theta_1$ est une submersion de T^2 dans S^1 , donc h est une submersion sur l'ouvert $\{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$.

En écrivant en coordonnées cartésiennes la matrice

$$dh_{(x_1, p_1, x_2, p_2)} = 2 \begin{pmatrix} x_2 & p_2 & x_1 & p_1 \\ -p_2 & x_2 & p_1 & -x_1 \\ x_1 & p_1 & -x_2 & -p_2 \end{pmatrix}$$

on voit que cette différentielle est surjective aux points tels que $z_1 = 0, z_2 \neq 0$ ou $z_2 = 0, z_1 \neq 0$.

5.4 Oscillateur non résonant

On considère le champ de vecteurs linéaire $V(x, p)$ sur \mathbb{R}^4

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = ap_2, \quad \dot{p}_2 = -ax_2,$$

avec un paramètre a irrationnel. Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont les fréquences d'oscillations sont différentes et incommensurables. L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}(x_1^2 + p_1^2 + ax_2^2 + ap_2^2) = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + a|z_2|^2).$$

La sous variété $\mathcal{E} := \{E = 1/2\}$ est difféomorphe à S^3 . Les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{iat}.$$

Contrairement au cas $a = 1$, la plupart des trajectoires sont injectives (toutes celles de l'ouvert $\Omega := \{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$). Les trajectoires $(z_1(t) \equiv 0, z_2(t) = z_2(0)e^{iat})$, et $(z_1(t) = z_1(0)e^{it}, z_2(t) \equiv 0)$ sont périodiques, et la trajectoire $z(t) \equiv 0$ est fixe.

On vérifie facilement que les quantités $|z_1|, |z_2|$ (et donc E) sont constantes le long des trajectoires. Pour chaque $r_1 > 0, r_2 > 0$, la sous variété $T(r_1, r_2)$ d'équation $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2$ est invariante. Chacune de ces sous variétés est difféomorphe au tore T^2 (presque tautologiquement).

L'application $R : (z_1, z_2) \rightarrow (|z_1|^2, |z_2|^2)$ est une submersion et un fibration localement triviale (dont les fibres sont difféomorphes à T^2) de Ω sur $]0, \infty)^2$. On peut aussi la restreindre à une fibration localement triviale de l'ouvert $\Omega \cap \mathcal{E}$ de la surface d'énergie, sur l'intervalle $](1, 0), (0, 1)[$ de \mathbb{R}^2 . Toutefois, elle ne s'étend pas en une fibration localement triviale de toute la surface d'énergie, les fibres $R^{-1}(0, 1)$ et $R^{-1}(1, 0)$ sont des cercles, et non des tores. Ce sont des fibres singulières, sur lesquelles R n'est pas une submersion.

Le champ de vecteurs V engendre un champ de vecteurs sur chacun des tores $T(r_1, r_2)$. Les champs de vecteurs sur $T(r_1, r_2)$ et $T(r'_1, r'_2)$ sont conjugués par le difféomorphisme

$$(z_1, z_2) \mapsto (r'_1 z_1 / r_1, r'_2 z_2 / r_2)$$

(donc en un sens, leurs dynamiques sont identiques). Pour décrire les orbites, on considère la paramétrisation de $T(r_1, r_2)$ par le difféomorphisme local non injectif

$$\pi : \mathbb{R}^2 \ni (\theta_1, \theta_2) \rightarrow (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in T(r_1, r_2).$$

La préimage du champ de vecteurs V est le champ de vecteur constant $(1, a)$, c'est à dire que $\pi_*(1, a) = V$. L'orbite du point $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$ se représente donc dans ces coordonnées par la droite d'équation $(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0)$. Toutefois, en raison de la non injectivité de π , la préimage de l'orbite contient toutes les droites translatées d'équation $(\theta_2 - \theta_2^0 - n) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - m)$, $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Notons que l'ensemble Z des réels de la forme $m - n/a$, $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ est une partie dense de \mathbb{R} . La préimage de l'orbite est l'ensemble des droites d'équation

$$(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - z), \quad z \in Z.$$

C'est donc une famille "transversalement dense" de droites parallèles. Comme cette famille est dense dans \mathbb{R}^2 , son image par π , qui est l'orbite de $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$, est dense dans $T(r_1, r_2)$. Localement, au voisinage de chacun de ses points, cette orbite se redresse en le produit d'un intervalle par un ensemble dénombrable dense.

5.5 Orbites d'un champ de vecteurs

Soit $V(x)$ un champ de vecteurs sur la sous-variété M , et soit $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$ une solution de l'équation $\dot{x}(t) = V(x(t))$ (ou plus généralement $x(t) : I \rightarrow M$ une orbite maximale).

Proposition 5.17. *Il y a trois possibilités pour la solution $x(t)$:*

- La solutions $x(t)$ est constante, $x(t) \equiv x_0$, où x_0 est une singularité de V , c'est à dire que $V(x_0) = 0$.
- La solution $x(t)$ est périodique, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ tel que $x(t+T) = x(t)$ pour tout t . Dans ce cas, l'image de la courbe x est une sous-variété de M difféomorphe à S^1 .
- La courbe $t \mapsto x(t)$ est une immersion injective.

◀ Si x_0 est une singularité de V , alors la courbe constant $x \equiv x_0$ est une solution de l'équation différentielle. La partie unicité du théorème de Cauchy Lipschitz implique donc qu'aucune autre solution ne passe par x_0 . En effet, si une solution $\gamma(t)$ vérifie que $\gamma(s) = x_0$ pour un certain réel s , alors la courbe constante x_0 et la courbe $\gamma(t)$ sont deux solution du problème de Cauchy avec la condition initial $x(s) = x_0$, et elles sont donc égales.

Supposons maintenant que la solution $x(t)$ n'est pas constante, et donc que $V(x(t)) \neq 0$ pour tout t , c'est à dire que l'application $t \mapsto x(t)$ est une immersion.

Supposons que cette immersion n'est pas injective. Alors il existe des temps s et $S > 0$ tels que $x(s) = x(s+S)$. On remarque que les courbes $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto x(t+S)$ sont solutions du même problème de Cauchy, et donc égales. Autrement dit, l'égalité $x(t) = x(t+S)$ a lieu pour tout t . Considérons maintenant l'ensemble P des périodes de x , c'est à dire l'ensemble des réels S tels que $x(t+S) = x(t)$ pour tout t . On voit que P est un sous-groupe fermé de \mathbb{R} . Il existe donc un réel $T > 0$ (que l'on appelle la période de x) tel que $P = T\mathbb{Z}$.

Considérons l'application $\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ donnée par $\theta(t) = e^{it2\pi/T}$. Cette application est un difféomorphisme local surjectif. On constate de plus que $x(t) = x(s)$ si et seulement si $\theta(t) = \theta(s)$. La courbe x se factorise donc en $x = g \circ \theta$, en posant $g(\theta) = x(t)$ où t vérifie $\theta(t) = \theta$. L'application $g : S^1 \rightarrow M$ est injective et différentiable car θ est un difféomorphisme local. De plus, le rang de $dg_{\theta(t)}$ est non nul comme le rang de dx_t , donc g est une immersion injective. Comme S^1 est compact, g est un plongement. ▶

Soit V un champ de vecteurs complet sur M , sous variété de dimension d . Considérons une orbite X , c'est à dire l'image $x(\mathbb{R})$ d'une solution de l'équation $\dot{x} = V$. Nous avons vu que X est soit un point, soit une sous-variété compacte plongée difféomorphe à S^1 , soit l'image d'une immersion injective.

Propriété 5.18. *Pour tout $x \in X$, Il existe une carte $\phi : I \times B \rightarrow M$, où I est un intervalle contenant 0 et où B est une petite boule ouverte de \mathbb{R}^{d-1} centrée en 0, ayant les propriétés suivantes :*

- $\phi(0, 0) = x$,
- $\phi^{-1}(X) = I \times Z$

où Z est une partie dénombrable de B^1 .

Cette propriété est satisfaite par les orbites maximales non périodiques des champs de vecteurs, pas, en général, par les images d'immersions injectives (penser au huit)!

Si X était une sous variété plongée de M , on pourrait prendre $Z = \{0\}$ dans le résultat ci-dessus. Mais en général, la "structure transverse" Z est plus complexe, comme nous l'avons illustré avec les oscillateurs non résonnants dans 5.4.

◀ Comme $V(x) \neq 0$, on peut redresser le champ V au voisinage de x , c'est à dire qu'il existe un plongement $\phi : I \times B \rightarrow M$ tel que $\phi_*(1, 0) = V$, où $(1, 0)$ est vu comme un champ de vecteurs constant sur $I \times B$. L'ensemble $\phi^{-1}(X)$ est alors une réunion de segments verticaux de la forme $I \times \{z\}$. Notons Z la projection de $\phi^{-1}(X)$ sur B , de sorte que $X \cap \phi(I \times B) = \phi(I \times Z)$. Notons alors τ l'ensemble des temps $t \in \mathbb{R}$ tels que $\phi^{-1} \circ x(t) \in \{0\} \times Z$. L'application $P = \pi \circ \phi^{-1} \circ x$, où π est la projection sur le second facteur, induit une bijection entre τ et Z (rappelons que la courbe x est injective). Pour chaque $T \in \tau$, l'application $\phi^{-1} \circ x$ envoie l'intervalle $T+I$ sur le segment vertical $I \times \{P(T)\}$. Ces segments verticaux sont disjoints, donc leur préimages le sont aussi. Les intervalle $T+I, T \in \tau$ sont donc disjoints, ce qui implique que τ est dénombrable, donc Z aussi. ▶

L'espace Z est alors totalement discontinu (c'est à dire que ses composantes connexes sont des points) au vu du lemme ci-dessous. Les composantes connexes de l'ensemble $X \cap U$ sont donc les couches $\phi^{-1}(I \times \{z\})$. L'ensemble X n'est pas localement connexe si ce n'est pas une sous variété.

Lemme 5.19. *Tout espace métrique dénombrable est totalement discontinu.*

◀ Fixons en effet un point x_0 et considérons la fonction $x \mapsto d(x_0, x)$. L'image de la composante connexe de x_0 est un intervalle dénombrable, et donc un point. ▶

5.6 Sous-variétés de dimension 1

Soit M une sous variété connexe de dimension 1 de \mathbb{R}^D . On se propose de démontrer que M est difféomorphe, soit à \mathbb{R} , soit à S^1 . On considère pour ceci la sous variété N de $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$ définie comme $N = \{(x, v) \in \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D : \|v\|_{\mathbb{R}^D} = 1\}$, et l'application $\sigma : N \rightarrow N$ donnée par $(x, v) \mapsto (x, -v)$.

Exercice 5.3. Vérifier que N est une sous variété, que σ est un difféomorphisme, et que $\pi : N \rightarrow M$ est un difféomorphisme local (π est la projection $(x, v) \mapsto x$).

On définit le champ de vecteurs V sur N par $V(x, v) := (d\pi_{(x,v)})^{-1} \cdot v$. C'est un champ différentiable sur N qui ne s'annule pas, et $\sigma_* V = -V$. Ce champ n'est peut-être pas complet, on va y remédier. On considère une fonction propre $\tilde{f} : M \rightarrow [1, \infty)$ sur M , la composée $f := \tilde{f} \circ \pi$ est alors une fonction propre sur N . Il existe une fonction différentiable $\tilde{g} > 0$ telle que $\tilde{g}|df \cdot V| \leq f$. La fonction $g := (\tilde{g} + \tilde{g} \circ \sigma)/2$ vérifie alors la même inégalité, donc le champ $W := gV$ est complet, et il vérifie encore $\sigma_* W = -W$.

On considère le flot φ^t de W sur N . Pour chaque point $y \in N$, l'application $t \mapsto \pi \circ \varphi^t(y)$ est un difféomorphisme local dont l'image est un ouvert de M . La connexité de M implique que ce difféomorphisme local est surjectif. Si il est aussi injectif, alors c'est un difféomorphisme donc M est difféomorphe à \mathbb{R} .

Pour étudier la possible non-injectivité, on commence par remarquer que $\varphi^t(y) \neq \sigma(y)$ pour tout t . En effet, la relation $\sigma_* W = -W$ implique que $\sigma \circ \varphi^{-t} = \varphi^t \circ \sigma$. Si $\varphi^t(y) = \sigma(y)$ alors

$$\varphi^{t/2}(y) = \varphi^{-t/2} \circ \varphi^t(y) = \varphi^{-t/2} \circ \sigma(y) = \sigma \circ \varphi^{t/2}(y),$$

ce qui est une contradiction car σ n'a pas de point fixe.

On a donc équivalence entre $\pi \circ \varphi^t(y) = \pi(y)$ et $\varphi^t(y) = y$. L'ensemble des temps t qui satisfont cette égalité est un sous-groupe fermé de \mathbb{R} . Si il n'est pas réduit à $\{0\}$, il est de la forme $T\mathbb{Z}$. L'application $s \mapsto \pi \circ \varphi^{sT}(x)$ se factorise alors par un difféomorphisme entre S^1 et M .

6 Distances sur une sous-variété

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^D . On peut munir M de la distance induite par celle de \mathbb{R}^D , mais on va construire une autre distance plus géométrique.

6.1 La distance géométrique

Propriété 6.1. Une sous variété connexe M est connexe par arcs C^1 (et même C^∞).

◀ On considère la relation *il existe une courbe C^1 de M connectant x à y* .

Tout point $x \in M$ admet un voisinage V tel que tout point $y \in V$ est relié à x . On peut prendre comme voisinage V l'image d'une boule ouverte B par un plongement $\varphi : B \rightarrow M$ qui envoie 0 (le centre de B) sur x . La courbe $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(t\varphi^{-1}(y))$ relie alors x à y .

La relation est une relation d'équivalence. Prouvons la transitivité. Soit $\gamma_1 : [0, T_1] \rightarrow M$ une courbe reliant x à y et $\gamma_2 : [0, T_2] \rightarrow M$ une courbe reliant y à z . On peut concaténer γ_1 et γ_2 pour former une courbe reliant x à z , mais cette courbe n'est pas forcément C^1 . On résout cette difficulté en considérant une fonction C^1 $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $\theta'(0) = 0 = \theta'(1)$ et $\theta' > 0$ sur $]0, 1[$. Les courbes $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i(T_i\theta(t)) : [0, 1] \rightarrow M$ relient x à y et y à z , et elles vérifient de plus que $\dot{\gamma}_i = 0$ aux extrémités. La concaténation est alors une courbe C^1 reliant x à z .

Les classes d'équivalence de la relation forment une partition de M en ouverts. Comme M est connexe, il n'y a qu'une classe. ▶

On définit la longueur de la courbe C^1 $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ par

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

où $|v|$ est la norme Euclidienne du vecteur $v \in \mathbb{R}^D$. La longueur est invariante par reparamétrisation :

Propriété 6.2. Soit $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ une courbe C^1 et $g : [S, S'] \rightarrow [0, T]$ une fonction C^1 croissante et surjective. Alors $\mathcal{L}(\gamma \circ g) = \mathcal{L}(\gamma)$.

La preuve est un calcul immédiat de changement de variable, utilisant que $|g'| = g'$.

On définit la distance géométrique

$$\delta(x, y)$$

sur M comme l'infimum des longueurs des courbes C^1 joignant x à y dans M . Vérifions l'inégalité triangulaire : Soient x, y , et z trois points de M et soit $\epsilon > 0$. Il existe des courbes γ_1 et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ qui joignent x à y et y à z et telles que $\mathcal{L}(\gamma_1) \leq \delta(x, y) + \epsilon$ et $\mathcal{L}(\gamma_2) \leq \delta(y, z) + \epsilon$. Comme dans la preuve de la propriété 6.1, on peut supposer, en reparamétrisant les courbes γ_1 et γ_2 que $\dot{\gamma}_1(1) = 0 = \dot{\gamma}_2(0)$. La concaténation γ_3 de γ_1 et γ_2 est alors une courbe C^1 qui joint x à z . On a alors

$$\delta(x, z) \leq \mathcal{L}(\gamma_3) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z) + 2\epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, donc $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

On note immédiatement que

$$\delta(x, y) \geq |y - x|.$$

Contrairement à la plupart des constructions que nous avons faites jusqu'à présent, la distance géométrique δ dépend de la manière dont M est plongée dans \mathbb{R}^D , et pas seulement sa structure intrinsèque de variété.

Proposition 6.3. *Au voisinage d'un point $x_0 \in M$, on a*

$$\delta(x, x') \leq |x' - x|(1 + \epsilon(|x' - x_0| + |x - x_0|))$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

◀ On peut supposer que $x_0 = 0$ et T_0M est l'espace horizontal $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Localement au voisinage de x_0 , la variété M s'écrit donc comme le graphe d'une application $g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$. Notons $\rho(r)$ un module de continuité de dg en 0, c'est à dire que $|dg_x| \leq \rho(|x|)$. Étant donnés deux points $x = (y, g(y))$ et $x' = (y', g(y'))$ avec $x, x' \in B_{\mathbb{R}^D}(0, r)$, on a $y, y' \in B_{\mathbb{R}^d}(0, r)$ et, en estimant la longueur de l'arc de M au dessus du segment $[x, x']$,

$$\delta(x, x') \leq \sqrt{1 + \rho(r)^2}|y' - y| \leq \sqrt{1 + \rho(r)^2}|x' - x|. \blacktriangleright$$

Corollaire 6.4. *La distance δ engendre sur M la même topologie que la distance Euclidienne.*

Corollaire 6.5. *Si la variété M est fermée dans \mathbb{R}^D alors elle est complète pour la distance δ .*

Corollaire 6.6. *Pour toute partie compacte K de M , il existe une fonction $\epsilon(r)$ qui tend vers 0 en 0 et telle que*

$$\delta(x, x') \leq |x' - x|(1 + \epsilon(|x' - x|))$$

pour tous x et x' dans K .

◀ La fonction $q(x, x') := \delta(x, x')/|x' - x|$ est continue sur $M \times M$, égale à 1 sur la diagonale. L'énoncé découle alors d'arguments de compacité classiques. ▶

La distance géométrique sur M possède la propriété suivante :

Propriété 6.7. *Soient x_0 et x_1 deux points de M . Si r_0 et r_1 sont des réels positifs tels que $r_0 + r_1 > \delta(x_0, x_1)$, alors $B_\delta(x_0, r_0) \cap B_\delta(x_1, r_1)$ est non vide.*

On remarquera que cette propriété n'est pas satisfaite par la distance $\arctan(|y - x|)$ sur \mathbb{R}^d .

◀ Si $r_0 = 0$ ou $r_1 = 0$, le résultat est clair, on suppose donc $r_0 > 0$, $r_1 > 0$ et on choisit $r'_0 \in]\delta(x_0, x_1) - r_1, \delta(x_0, x_1)[$. Il existe alors une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ joignant x_0 à x_1 et telle que $\mathcal{L}(\gamma) < r'_0 + r_1$. La courbe γ est continue, donc continue pour la distance δ . La fonction continue $t \mapsto \mathcal{L}(\gamma_{[0, t]})$ prend toutes les valeurs entre 0 et $\mathcal{L}(\gamma)$, donc en particulier la valeur r'_0 . En notant t_0 un temps tel que $\delta(x_0, \gamma(t_0)) = r'_0$, on a

$$\begin{aligned} \delta(x_0, \gamma(t_0)) &\leq \mathcal{L}(\gamma_{[0, t_0]}) = r'_0 < r_0 \\ \delta(\gamma(t_0), x_1) &\leq \mathcal{L}(\gamma_{[t_0, 1]}) = \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_{[0, t_0]}) < r'_0 + r_1 - r_0 = r_1 \blacktriangleright \end{aligned}$$

Théorème 6.8. *Soit M une sous-variété munie de sa distance géométrique δ . Si M est complète pour δ , alors toutes les boules fermées de M sont compactes.*

Dans un espace métrique localement compact général, les boules fermées ne sont pas forcément toutes compactes. Comme on le voit dans la preuve, la conclusion tient dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact (M, δ) qui est complet et vérifie la propriété 6.7.

◀ Fixons $x \in M$ et montrons que les boules fermées de centre x sont compactes. Pour ceci on considère le supremum R des rayons $r > 0$ tels que la boule $\bar{B}(x, r)$ est compacte. On veut montrer que $R = +\infty$, on suppose que c'est un nombre fini.

La boule $\bar{B}(x, R)$ est compacte. Cette boule est fermée dans M complet, donc elle est complète. Pour montrer qu'elle est précompacte, on fixe $\epsilon > 0$ et on considère une partie x_1, \dots, x_n qui est $\epsilon/3$ -dense dans la boule compacte $\bar{B}(x, R - \epsilon/3)$. Cette partie est alors ϵ -dense dans $\bar{B}(x, R)$. En effet pour tout $y \in \bar{B}(x, R)$, il existe un point $z \in B(x, R - \epsilon/3)$ tel que $\delta(y, z) < \epsilon/2$ (par le lemme 6.7). En choisissant i tel que $d(x_i, z) < \epsilon/3$, on voit que $\delta(x_i, y) < \epsilon$.

Il existe $\eta > 0$ tel que la boule $\bar{B}(x, R + \eta)$ est compacte. Comme M est localement compacte, chaque point y de M est le centre d'une boule compacte \bar{B}_y , la boule ouverte associée étant notée B_y . Les boules $B_y, y \in \bar{B}(x, R)$ recouvrent le compact $\bar{B}(x, R)$, et on extrait un sous-recouvrement fini. La réunion des boules fermées correspondantes est alors un compact K qui contient $\bar{B}(x, R)$ dans son intérieur. La distance entre $\bar{B}(x, R)$ et le complémentaire de K est strictement positive, c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout point y qui appartient à une boule de rayon 2η et dont le centre est dans $\bar{B}(x, R)$, on a $y \in K$. Au vu de la propriété 6.7, on conclut que $B(x, R + \eta) \subset K$ et donc que la boule $\bar{B}(x, R + \eta)$ est compacte. Ceci est en contradiction avec la définition de R , on conclut que R est infini, ce qui termine la preuve. ▶

Sous les hypothèses du Théorème, les boules fermées $\bar{B}(x_0, r_0)$ et $\bar{B}(x_1, r_1)$, qui sont compactes, ont une intersection non-vidée dès que $r_0 + r_1 \geq \delta(x_0, x_1)$.

6.2 Géodésiques minimisantes.

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^D et δ sa distance géométrique. On définit La longueur d'une courbe quelconque $\gamma : [S, T] \rightarrow M$ comme le supremum

$$\mathcal{L}_\delta(\gamma) = \sup_{S=t_0 < t_1 < \dots < t_k = T} (\delta(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \delta(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)))$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des suites finies croissantes de temps intermédiaires $S = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = T$. On notera $\mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S, T]})$ lorsqu'on veut préciser le domaine de la courbe. La formule définissant la longueur des courbes a un sens dans tout espace métrique (M, δ) . On peut notamment considérer la longueur \mathcal{L}_d associée à la distance euclidienne $d(x, x') = |x' - x|$ sur M .

Les quelques propriétés ci dessous de la longueur découlent directement de la définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[s, t]}) &\geq \delta(\gamma(s), \gamma(t)), \quad \forall s \leq t \\ \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S, T]}) &= \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S, t]}) + \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[t, T]}) \quad \forall t \in [S, T]. \end{aligned}$$

Propriété 6.9. Si M est une sous variété de \mathbb{R}^D et si $\gamma : [S, T] \rightarrow M$ est une courbe C^1 , alors

$$\mathcal{L}_d(\gamma) = \mathcal{L}_\delta(\gamma) = \int_S^T |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

◀ Notons $\mathcal{I}(\gamma)$ le temps de cette preuve le terme de droite de l'égalité. Par définition de δ , on a

$$\delta(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \mathcal{I}(\gamma_{[s, t]})$$

pour tous s et t , et \mathcal{I} vérifie la relation de Chasles. On en conclut que $\mathcal{I}(\gamma) \geq \mathcal{L}_\delta(\gamma)$, et, comme $\delta \geq d$, $\mathcal{L}_\delta(\gamma) \geq \mathcal{L}_d(\gamma)$. Réciproquement, considérons un module de continuité ω de $\dot{\gamma} : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^D$. Pour tout $[s, t] \subset [S, T]$, on a

$$\left| |\gamma(t) - \gamma(s)| - (t-s)|\dot{\gamma}(s)| \right| \leq \left| \int_s^t \dot{\gamma}(\sigma) - \dot{\gamma}(s) d\sigma \right| \leq (t-s)\omega(t-s)$$

et

$$\left| \int_s^t |\dot{\gamma}(\sigma)| d\sigma - (t-s)|\dot{\gamma}(s)| \right| \leq (t-s)\omega(t-s)$$

donc

$$\left| \int_s^t |\dot{\gamma}(\sigma)| d\sigma - |\gamma(s) - \gamma(t)| \right| \leq 2(t-s)\omega(t-s).$$

En prenant une décomposition $T = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ telle que $t_{i+1} - t_i < \epsilon$, on a donc

$$\mathcal{L}_d(\gamma) \geq |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| + \dots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| \geq \mathcal{I}(\gamma) - 2(T - S)\omega(\epsilon).$$

Comme on peut choisir $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, on a $\mathcal{L}_d(\gamma) \geq \mathcal{I}(\gamma)$. ►

Exercice 6.1. En utilisant le corollaire 6.6, montrer que l'égalité $\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_\delta$ est vraie pour toute courbe continue.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une géodésique minimisante Lipschitzienne :

Théorème 6.10. Soit M une sous-variété fermée, munie de sa distance géométrique δ . Étant donnés deux points x_0 et x_1 , il existe une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ qui est Lipschitz de constante $\delta(x_0, x_1)$, et telle que $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Cette courbe est donc de longueur $\delta(x_0, x_1)$.

La preuve qui suit montre en fait le résultat dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact et complet (M, δ) vérifiant la propriété 6.7.

► Posons $L = \delta(x_0, x_1)$. En utilisant la Propriété 6.7 et le Théorème 6.8, on voit que l'intersection $\bar{B}(x_0, L/2) \cap \bar{B}(x_1, L/2)$ est non vide, et on choisit un point $\gamma(1/2)$ dans cette intersection. On a alors $\delta(x_0, \gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2), x_1) = L/2$.

On construit ainsi des points $\gamma(1/4)$ et $\gamma(3/4)$ tels que

$$\delta(x_0, \gamma(1/4)) = \delta(\gamma(1/4), \gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2), \gamma(3/4)) = \delta(\gamma(3/4), x_1) = L/4.$$

Par récurrence, on construit ainsi une application γ définie sur l'ensemble des nombres dyadiques de $[0, 1]$, à valeur dans M , et L -Lipschitz. On l'étend alors par continuité en une courbe L -Lipschitz de $[0, 1]$ dans M telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Comme la courbe γ est L -Lipschitz, il est immédiat que sa longueur est inférieure ou égale à L . Comme $\delta(x_0, x_1) = L$, et que γ relie x_0 à x_1 , on conclut que $\mathcal{L}(\gamma) = L$. ►

La géodésique minimisante est en fait différentiable, mais c'est une autre histoire.

6.3 Métriques Riemanniennes

Dans les sections précédentes, nous avons utilisé la distance ambiante de \mathbb{R}^D pour définir une distance géométrique sur la sous variété M . En fait, ce qui était utile pour mesurer la longueur d'une courbe est la donnée, pour chaque point x de M , d'une norme sur $T_x M$, nous avons pris comme norme la restriction de la norme Euclidienne de \mathbb{R}^D à $T_x M$.

On aurait aussi pu se donner une métrique Riemannienne quelconque :

Définition 6.11. Une métrique Riemannienne sur une sous variété M est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'un produit scalaire $g_x(v, w)$ sur l'espace vectoriel $T_x M$. On demande de plus que ce produit scalaire dépende différemment du point x , c'est à dire que la fonction $x \mapsto g_x(V(x), W(x))$ est différentiable pour tous champs de vecteurs différentiables V et W .

Exercice 6.2. Si M est une sous variété de \mathbb{R}^D , et si g_x est une métrique Riemannienne sur M , alors il existe une application différentiable $G : M \rightarrow S^+(D)$ (l'ensemble des matrices symétriques définies positives $D \times D$) telle que $g_x(v, w) = \langle G(x)v, w \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^D .

Étant donnée une métrique Riemannienne g_x sur M , on définit comme ci-dessus la longueur d'une courbe de M par

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

puis la distance δ_g donnée comme l'infimum des longueurs des courbes. Cette distance vérifie la propriété 6.7, et donc les Théorèmes 6.8 et 6.10.

On dit que la métrique g est complète si M est complète pour la distance géodésique associée. La métrique Riemannienne naturelle sur une sous-variété fermée est complète. Nous montrerons plus tard que toute (sous) variété admet un plongement dans un espace \mathbb{R}^D dont l'image est fermée, et donc une métrique Riemannienne complète. Cependant, il existe aussi des métriques non complètes (sauf sur une variété compacte).

6.4 Feuilles et feuilletages

Soit M une sous variété. Un champ de sous-espaces est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'un sous-espace vectoriel $E(x)$ de $T_x M$ de dimension k fixée qui dépend régulièrement du point x , c'est à dire que l'application $x \mapsto E(x)$ est régulière à valeurs dans $G(k, D_M)$. Il est équivalent de dire que le champ de sous-espaces est localement engendré par k champs de vecteurs réguliers (cette seconde définition ayant l'avantage de ne pas faire explicitement référence à l'espace ambiant).

On dit que le champ de sous espaces $E(x)$ est intégrable si il satisfait la propriété de redressement suivante :

Pour tout $x \in M$, il existe une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, 0) \rightarrow (M, x)$, où B^k et B^l sont des boules ouvertes centrées en 0 dans \mathbb{R}^k et \mathbb{R}^l , telle que

$$E(\phi(y)) = d\phi_y(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

pour tout $y \in B^k \times B^l$. Une telle paramétrisation est dite adaptée.

On dit alors que le champ $E(x)$ engendre un feuilletage. Le théorème de redressement des champs de vecteurs affirme que les champs de droites (champs de sous espaces de dimension 1) engendrent tous des feuilletages, on verra que ce n'est pas le cas en dimension supérieure.

Étant donné un point $x \in M$, on appelle orbite de x l'ensemble X des points qui peuvent être reliés à x par une courbe tangente au champ de sous espace. Dans le cas où le sous-espace est de dimension un, et où il est engendré par un champ de vecteurs $V(x)$ ne s'annulant pas, l'orbite X est l'image de la solution maximale de l'équation différentielle associée à $\dot{x} = V \circ x$ issue du point x .

Le résultat suivant généralise la propriété 5.18 à ce cadre.

Propriété 6.12. *Supposons que le champ $E(x)$ est intégrable. Pour tout $x_0 \in M$ et toute paramétrisation adaptée ϕ de M en x_0 , il existe une partie dénombrable $Z \subset B^l$ telle que*

$$\phi^{-1}(X(x_0)) = B^k \times Z.$$

◀ La préimage $\phi^{-1}(X)$ d'une orbite X est de la forme $B^k \times Z$, il faut montrer que Z est dénombrable. On munit l'orbite X de la distance géométrique $\delta(x, y)$ définie comme l'infimum des longueurs des courbes tangentes au champ de sous-espaces joignant x à y . On démontre que c'est une distance exactement comme pour la distance géométrique sur une sous variété plongée.

Lemme 6.13. *Pour tout $z \in Z$, l'application*

$$\phi_z : B^k \ni y \mapsto \phi(y, z) \in (X, \delta),$$

est un homéomorphisme sur son image $\phi(B^k \times \{z\})$, qui est un ouvert de (X, δ) .

On déduit de ce lemme que (X, δ) est localement compact. Comme deux points de X sont reliés par une courbe tangente à la distribution, et qu'une telle courbe est continue pour la distance δ , l'espace métrique (X, δ) est connexe. L'espace métrique (X, δ) étant connexe et localement compact, il est séparable (voir la section 4). Finalement, les ouverts $\phi(B^k \times \{z\}), z \in Z$ de (X, δ) étant disjoints, Z est dénombrable. ▶

◀ **DÉMONSTRATION DU LEMME 6.13.** On fixe $z \in Z$ et on pose $U = \phi(B^k \times \{z\})$, c'est un disque plongé dans \mathbb{R}^{D_M} . Soit δ_U la distance géométrique sur U , on a

$$\delta_U \geq \delta \geq d$$

où d est la distance Euclidienne de \mathbb{R}^D . L'inégalité $\delta_U \geq \delta$ découle de l'observation que toute courbe C^1 sur U est tangente au champ de sous-espaces. La proposition 6.3 implique que δ_U et d (et donc aussi δ) engendrent la même topologie sur U . Comme l'application ϕ_z est un homéomorphisme à valeurs dans (U, d) , c'est un homéomorphisme à valeurs dans (U, δ) .

Il reste à démontrer que U est un ouvert de (X, δ) . Pour tout $x_1 = \phi(y_1, z) \in U$, il existe $R > 0$ tel que $\bar{B}^k(y_1, R) \subset B^k$. Soit S l'image par ϕ_z de la sphère $\partial \bar{B}^k(y_1, R)$, c'est un compact de U disjoint de x_1 . Posons $r = \delta(x_1, S)$. Toute courbe qui sort de $\phi_z(\bar{B}^k(y_1, R))$ coupe S , et donc a une longueur supérieure à r . En conséquence

$$B_\delta(x_0, r) \subset \phi_z(\bar{B}^k(y_1, R)) \subset U. \quad \blacktriangleright$$

Définition 6.14. *Soit M une sous variété et X une partie de M . On dit que X est une feuille (de dimension k) si, pour tout $x_0 \in X$, il existe une paramétrisation $\phi : (B^k \times B^l, 0) \rightarrow (M, x_0)$ de M en x_0 telle que $\phi^{-1}(X) = B^k \times Z$ avec Z totalement discontinu.*

Toute orbite d'un feuilletage est une feuille.

On appelle les paramétrisations de la définition des redressement locaux de la feuille X . Si ϕ et φ sont deux redressements de X en un même point x_0 , alors $\varphi^{-1} \circ \phi(B^k \times \{0\}) \subset B^k \times \{0\}$ donc $d\phi_0(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Il est donc légitime de dire que ce sous-espace de $T_{x_0}M$ est l'espace tangent à la feuille X au point x_0 .

Bien que les feuilles ne soient en général pas des sous-variétés, un certain nombre des concepts définis sur les sous-variétés s'étendent au cas des feuilles on a vu que c'est le cas de la dimension, de l'espace tangent.

Soit X une feuille de M , et Y une sous-variété. Une application $h : Y \rightarrow X$ est dite différentiable si elle est différentiable en tant qu'application à valeurs dans M . Une application $g : X \rightarrow N$ est dite différentiable si $g \circ h$ est différentiable pour tout sous-variété Y et toute application différentiable $h : Y \rightarrow X$. De manière équivalente, g est différentiable si et seulement si, pour tout $x_1 \in X$, il existe un redressement $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \rightarrow (M, x_1)$ de X en x_1 tel que la restriction de $f \circ \phi$ à $B^k \times \{0\}$ est différentiable. Attention, cette définition n'est pas standard, et elle a l'inconvénient qu'il peut exister des applications différentiables non continues (pour la topologie sur X issue de celle de M).

Une application différentiable $h : X \rightarrow Y$ a une différentielle $d_x h \in \mathcal{L}(T_x X, T_{h(x)} Y)$ en chaque point $x \in X$. On dit que c'est une immersion si $d_x h$ est injective pour tout x .

On peut enfin définir la distance géométrique δ sur une feuille connexe X exactement comme dans le cas des sous-variétés. La topologie associée à δ est plus fine que la topologie induite de celle de M . Une application $f : M \rightarrow Y$ (Y un espace métrique) est continue pour la distance δ si et seulement si pour tout $x_1 \in X$, il existe un redressement $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \rightarrow (M, x_1)$ de X en x_1 tel que la restriction de $f \circ \phi$ à $B^k \times \{0\}$ est continue. En particulier, les fonctions différentiables sur X sont continues pour la distance δ .

Exercice 6.3. *La feuille X est une sous-variété si et seulement si la topologie associée à δ est égale à la topologie induite (sinon, elle est strictement plus fine).*

Le lemme 6.13 est valable pour toute feuille connexe et tout redressement ϕ . Toute feuille connexe est donc localement compacte pour la distance δ , donc séparable. Dans le cas d'une feuille connexe, l'ensemble transverse Z est dénombrable pour tout redressement local. L'ensemble \mathcal{F} des fonctions différentiables sur une feuille connexe X vérifie les conditions de la proposition 4.14, il existe donc des partitions de l'unité différentiables, et il existe une fonction différentiable propre (pour la distance δ) sur X .

Proposition 6.15. *Soit X une feuille connexe de M . Il existe une unique structure de sous-variété $I : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est une immersion injective différentiable en tant qu'application sur X .*

Plus explicitement, il existe une immersion $I : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $I(X)$ est une sous-variété et telle que l'application I est différentiable sur la feuille X . Si $I' : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une autre immersion ayant les mêmes propriétés, alors $I' \circ I^{-1}$ est un difféomorphisme entre les sous-variétés $I(X)$ et $I'(X)$.

◀ Soit \mathbb{R}^D l'espace ambiant de M , et soit f une fonction différentiable propre. On considère l'application $I(x) = (x, f(x)) : M \rightarrow \mathbb{R}^{D+1}$. Cette application est une immersion (au sens des feuilles). Elle est continue et propre pour la distance δ , c'est donc un homéomorphisme de (X, δ) sur son image. Si x_0 est un point de X et $\phi : B^k \times B^{d-k} \rightarrow M$ un redressement de X en x_0 , alors la restriction de $I \circ \phi$ à $B^k \times \{0\}$ est un plongement dont l'image est un ouvert de $I(X)$ contenant $I(x_0)$. Ceci montre que $I(X)$ est une sous-variété au voisinage de x_0 .

Soit $I' : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une autre immersion différentiable dont l'image est une sous-variété. Pour tout redressement ϕ de X , la restriction de I' à $\phi(B^k \times \{0\})$ est une immersion différentiable au sens classique, donc un difféomorphisme local à valeurs dans la variété $I'(X)$. Ce difféomorphisme local étant de plus injectif, c'est un difféomorphisme sur son image. L'inverse $J' : I'(X) \rightarrow X \subset M$ de I' est donc différentiable. L'application $I \circ J'$ l'est donc aussi. Par symétrie, il en est de même de $I^{-1} \circ I'$, qui est donc un difféomorphisme. ▶

On a démontré aussi l'énoncé suivant :

Proposition 6.16. *Soit X une feuille connexe. Il existe une sous-variété connexe N et une immersion injective $J : N \rightarrow M$ d'image X . Si $J' : N' \rightarrow M$ est une autre immersion injective d'image X , alors $J^{-1} \circ J'$ est un difféomorphisme.*

7 Variétés

7.1 Première définition

Soit M un espace métrique. On dit que M est une variété topologique de dimension d si il est localement homéomorphe à \mathbb{R}^d . On appelle carte topologique de M tout homéomorphisme entre un ouvert U de M et un ouvert V de \mathbb{R}^d .

Une famille $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha, \alpha \in A$ de cartes de M est un atlas C^r si les applications

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont C^r et si les domaines U_α recouvrent M . Notons que les ensembles $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont des ouverts de V_α , donc de \mathbb{R}^d .

Définition 7.1. Une variété de classe C^r est un espace métrique M muni d'un atlas C^r .

Les applications $C^k, k \leq r$ entre variétés C^r sont les applications C^k dans les cartes. Plus précisément, si M et N sont deux variétés munies de leurs atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A$ et $(V_\beta, \psi_\beta), \beta \in B$, l'application $f : M \longrightarrow N$ est dite C^k si $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est C^k sur son domaine $\phi_\alpha(U_\alpha)$ pour tous α et β . Comme (ϕ_α) et (ψ_β) sont des atlas, il suffit de vérifier que, pour tout x , il existe $\alpha \in A$ et $\beta \in B$ tels que $x \in U_\alpha, f(x) \in V_\beta$, et $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est C^k au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

Nous appellerons carte C^r de la variété M tout couple (U, ϕ) , où ϕ est un plongement différentiable dans \mathbb{R}^d . L'ensemble des cartes C^r est un atlas C^r qui contient l'atlas initial de M .

Toute sous variété M de \mathbb{R}^D est naturellement munie d'une structure de variété dont les cartes sont les difféomorphismes entre des ouverts de M et des ouverts de \mathbb{R}^d .

Toute variété différentiable est localement compacte et localement connexe, donc paracompacte. Elle admet des partitions de l'unité C^∞ , ce qui découle de la proposition 4.6 et de son addendum.

7.2 Seconde définition

Soit M un ensemble (a priori sans structure) et soit $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha, \alpha \in A$ une famille d'applications bijectives, où les U_α sont des parties de M qui recouvrent M et les V_α des ouverts de \mathbb{R}^d . On dit que les applications ϕ_α forment un atlas C^r si chacun des ensembles $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), (\alpha, \beta) \in A^2$ est un ouvert de \mathbb{R}^d et si chacune des applications

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^d \supset \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

est C^r .

Définition 7.2. Une pré-variété de classe C^r est un ensemble M muni d'un atlas C^r .

Il existe alors une unique topologie sur M telle que les applications ϕ_α sont des homéomorphismes, c'est la topologie dont les ouverts sont les parties U de M telles que $\phi(U \cap U_\alpha)$ est ouvert (dans \mathbb{R}^d) pour tout α .

On remarque que les domaines U_α sont des ouverts pour cette topologie. De plus, si V est un ouvert de \mathbb{R}^d , alors l'ensemble $\phi_\alpha^{-1}(V)$ est ouvert pour tout α . En effet, pour tout β ,

$$\phi_\beta(\phi_\alpha^{-1}(V)) = (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(V \cap \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$$

est ouvert puisque $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme. Les applications ϕ_α sont donc continues. La continuité des applications réciproques est claire.

La topologie de M associée à l'atlas ϕ_α est séparée, mais elle n'est pas nécessairement métrisable.

Propriété 7.3. Une variété (C^r) est une pré-variété (C^r) dont la topologie sous-jacente est métrisable.

La littérature utilise souvent le terme variété pour ce que nous avons appelé pré-variété. La proposition 4.14 implique que toute pré-variété paracompacte admet des partitions de l'unité différentiables. Au vu de la Proposition 4.13, on conclut que pour toute pré-variété paracompacte et connexe M , il existe une fonction différentiable propre $f : M \longrightarrow [1, \infty)$. On verra ci-dessous qu'une pré-variété paracompacte est une variété.

7.3 Plongement

On montre ici que la notion de variété n'est pas vraiment plus générale que la notion de sous variété :

Théorème 7.4 (Whitney). Pour toute variété C^∞ séparable M , il existe un plongement $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$, de classe C^∞ , dont la première composante est propre. Son image $F(M)$ est donc une sous variété fermée de \mathbb{R}^{2d+1} difféomorphe à M .

L'hypothèse de séparabilité est bien sûr nécessaire. On rappelle que toute variété connexe est séparable. On rappelle aussi que, si la première composante de F est propre, alors F est propre. La démonstration utilise seulement que M est une pré-variété admettant une fonction propre. Comme toute pré-variété paracompacte connexe admet une fonction propre, on a :

Addendum 7.5. La conclusion du Théorème de Whitney est vraie pour toute pré-variété paracompacte connexe. Une telle pré-variété est donc une variété.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE WHITNEY.

Lemme 7.6. Soit M une (pré-) variété de dimension d admettant un atlas fini. Alors il existe $D \in \mathbb{N}$ et un plongement $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^D$.

◀ Soient $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq k$ un atlas fini de M . Les ouverts U_i recouvrent donc M et les applications ϕ_i sont des plongements. Soit f_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert U_i . Les fonctions f_i sont à support dans U_i . L'application $f_i \phi_i$ peut donc s'étendre en une application C^r sur tout M , valant 0 en dehors de U_i . L'application

$$F : M \ni x \mapsto (f_1(x), f_1(x)\phi_1(x), f_2(x), f_2(x)\phi_2(x), \dots, f_k(x), f_k(x)\phi_k(x)) \in \mathbb{R}^{k(d+1)}$$

est alors une immersion injective. En effet, si $F(x) = F(y)$, alors $f_i(x) = f_i(y)$ pour tout i . En choisissant un indice i tel que $f_i(x) \neq 0$ (et donc $x \in U_i$ et $y \in U_i$) on déduit alors de l'égalité $f_i(x)\phi_i(x) = f_i(y)\phi_i(y)$ que $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ et donc que $x = y$ puisque ϕ_i est injective sur U_i .

Pour montrer que F est une immersion, on calcule

$$dF_x \cdot v = (df_{1x} \cdot v, \phi_1(x)df_{1x} \cdot v + f_1(x)d\phi_{1x} \cdot v, \dots, \phi_k(x)df_{kx} \cdot v + f_k(x)d\phi_{kx} \cdot v.$$

Si v est dans le noyau de cette application linéaire, alors $df_{ix} \cdot v = 0$ pour tout i , donc $f_i(x)d\phi_{ix} \cdot v = 0$. En choisissant i tel que $f_i(x) > 0$, on conclut que $d\phi_{ix} \cdot v = 0$, et, comme ϕ_i est une immersion en x , que $v = 0$.

Finalement, on considère une fonction propre $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. L'application $\psi = (f, F)$ est une immersion injective car F l'est, et elle est propre car f l'est. C'est donc un plongement. ▶

Lemme 7.7. Soit M une sous variété de \mathbb{R}^D , de dimension d . Alors l'ensemble des applications linéaires $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$ telles que $L|_M$ est une immersion injective est dense dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$.

En conséquence, Toute variété de dimension d admettant un atlas fini admet une immersion injective à valeurs dans \mathbb{R}^{2d+1} .

◀ Soit $\mathring{T}M \subset TM$ l'ouvert constitué des points $(x, v) \in TM$ tels que $v \neq 0$. L'application

$$e : \mathring{T}M \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni (x, v, L) \mapsto L \cdot v \in \mathbb{R}^{2d+1}$$

est une submersion. En effet on a $\partial_L e_{x,v,L} \cdot \ell = \ell \cdot v$. Comme $v \neq 0$ l'application linéaire

$$\partial_L e_{x,v,L} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni \ell \mapsto \ell \cdot v \in \mathbb{R}^{2d+1}$$

est surjective. On en déduit que $e^{-1}(0)$ est une sous variété de codimension $2d+1$ de $\mathring{T}M \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$, donc de dimension $n(2d+1) - 1$. Le cas facile du théorème de Sard implique que la projection Σ_1 de $e^{-1}(0)$ sur le facteur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$ est de mesure nulle. Une application linéaire L est dans Σ_1 si et seulement si il existe un point $(x, v) \in \mathring{T}M$ tel que $d(L \circ f)_x \cdot v = 0$, c'est à dire si et seulement si $L \circ f$ n'est pas une immersion.

Soit $\mathring{M}^2 \subset M^2$ l'ouvert constitué des couples (x, y) tels que $x \neq y$. Considérons l'application

$$h : \mathring{M}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni (x, y, L) \mapsto L(f(y) - f(x)) \in \mathbb{R}^{2d+1},$$

qui est une submersion. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathring{M}^2$, on a $f(y) \neq f(x)$ puisque f est injective. L'application $\partial_L h : \ell \mapsto \ell(f(y) - f(x))$ est donc surjective. La préimage $h^{-1}(0)$ est donc une sous variété de dimension $n(2d+1) - 1$, et sa projection Σ_2 sur le facteur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$ est de mesure nulle. Or Σ_2 est précisément l'ensemble des applications L telles que $L \circ f$ n'est pas injective.

L'ensemble $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ est de mesure nulle, et, pour tout L est dans son complémentaire, $L \circ f$ est une immersion injective. ▶

Exercice 7.1. Soit M une sous variété de dimension d . Montrer qu'il existe une immersion de M dans \mathbb{R}^{2d} . On peut pour ceci considérer la restriction de l'application e apparaissant dans la démonstration du Lemme 7.7 à la sous variété

$$STM = \{(x, v) \in TM, |v| = 1\}.$$

Lemme 7.8. Soit M une (pré-) variété et f une fonction propre sur M . Alors il existe un plongement $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{4d+3}$ dont la première composante est égale à f .

◀ Considérons une partition de l'unité g_i de \mathbb{R} subordonnée au recouvrement $]i, i+2[$, $i \in \mathbb{Z}$. Soit U_i l'ouvert $f^{-1}(]i, i+2[)$. Comme U_i est relativement compact, c'est une variété admettant un atlas fini, et donc un plongement ψ_i dans \mathbb{R}^{2d+1} . On prolonge l'application $(g_i \circ f)\psi_i$ par 0 en dehors de U_i . L'application (dans laquelle les sommes se réduisent à un seul terme pour chaque x)

$$F : x \mapsto (f(x), \sum_l g_{2l} \circ f(x)\psi_{2l}(x), \sum_l g_{2l+1} \circ f(x)\psi_{2l+1}(x))$$

est un plongement. Comme la première composant de F est une fonction propre, F est propre et il suffit de montrer que c'est une immersion injective. Si $F(x) = F(y)$, alors $f(x) = f(y)$. Il existe alors au plus deux entiers i tels que $g_i \circ f(x) > 0$, l'un est pair, l'autre impair.

Supposons qu'il existe un entier pair $i = 2k$ tel que $g_{2k} \circ f(x) > 0$, cet entier est alors unique, et on a

$$g_{2k} \circ f(x)\psi_{2k}(x) = \sum_l g_{2l} \circ f(x)\psi_{2l}(x) = \sum_l g_{2l} \circ f(y)\psi_{2l}(y) = g_{2k} \circ f(y)\psi_{2k}(y)$$

donc $\psi_{2k}(x) = \psi_{2k}(y)$, ce qui implique que $x = y$. Si il n'existe pas d'entier pair tel que $g_i \circ f(x) > 0$, alors il existe un unique entier impair tel que $g_i \circ f(x) > 0$, ce cas se traite de la même façon.

Pour montrer que F est une immersion, on calcule

$$\begin{aligned} dF_x \cdot v &= (df_x \cdot v, \sum_l (\psi_{2l}(x)d(g_{2l} \circ f)_x + g_{2l} \circ f(x)d\psi_{2l,x} \cdot v, \\ &\quad \sum_l (\psi_{2l+1}(x)d(g_{2l+1} \circ f)_x + g_{2l+1} \circ f(x)d\psi_{(2l+1),x} \cdot v). \end{aligned}$$

Si v est dans le noyau de cette application linéaire, alors $df_x \cdot v = 0$, donc $d(g_i \circ f)_x \cdot v = 0$ pour tout i . Alors, pour tout i tel que $g_i \circ f(x) > 0$, on a $d\psi_i(x) \cdot v = 0$, ce qui implique que $v = 0$. ▶

PREUVE DU THÉORÈME DE WHITNEY. On considère le plongement $F = (f, g)$ de M dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4d+2}$ donné par le Lemme précédent, où f est une fonction propre. Soit $\phi : \mathbb{R}^{4d+2} \rightarrow B^{4d+2}$ (la boule unité ouverte) une difféomorphisme. Alors $(f, \phi \circ g)$ est un plongement de M dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4d+2}$. Au vu du lemme 7.7, il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{4d+3}, \mathbb{R}^{2d+2})$, dont le coefficient L_{11} est non nul, et telle que $L \circ (f, g)$ est une immersion injective. La première composante de $L \circ (f, g)$ s'écrit $L_{11}f + l \circ g$, où l est une forme linéaire sur \mathbb{R}^{4d+2} . Comme la fonction $l \circ g$ est bornée, la fonction $L_{11}f + l \circ g$ est propre. L'application $L \circ (f, g)$ est donc un plongement. ▶

7.4 Quotients

La plupart des constructions de variétés les donnent directement comme sous-variété. Nous montrons ici que les quotients de variétés par certaines actions de groupes sont naturellement munies de structures de variétés (qui ne sont pas immédiatement données comme plongées dans un espace vectoriel).

Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui en est aussi une sous variété. Une action de G sur une variété M est une application $a : G \times M \rightarrow M$, de classe C^∞ , telle que $a_{Id} = Id$ et telle que $a_g \circ a_h = a_{gh}$ pour tous g et h de G , où a_g est l'application $x \mapsto a(g, x)$. L'application $g \mapsto a_g$ est alors un morphisme du groupe G dans le groupe des difféomorphismes de M . On appelle orbite de x l'ensemble $a(G, x) = a_x(G)$.

Tout ce qui suit s'étend au cadre plus général où G est un groupe de Lie, c'est à dire un groupe muni d'une structure de variété C^∞ pour laquelle les opérations de produit et d'inversion sont différentiables. Dans ce cas, on continuera à noter gh le produit, on notera r_g le difféomorphisme $h \mapsto gh$ et l_h le difféomorphisme $g \mapsto gh$.

On dit que l'action a est libre si l'application $a_x : g \mapsto a(g, x)$ est injective pour tout $x \in M$.

On dit que l'action a est propre si l'application $(g, x) \mapsto (a(g, x), x)$ est propre (c'est moins fort que de demander la propriété de l'application a). De manière équivalente, l'action a est propre si, pour tout compact K de M , l'application $a|_{G \times K}$ est propre.

En particulier, si G est compact, toute action de G est propre.

Exercice 7.2. Montrer que l'action de \mathbb{Z}^n sur \mathbb{R}^n par translations est propre.

Exercice 7.3. Montrer qu'une action a est propre si et seulement si, pour tout $K \in M$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $a_g(K) \cap K \neq \emptyset$ est compact.

Commençons par une remarque générale sur les actions de groupe.

Proposition 7.9. Soit a une action différentiable de G sur M . Pour tout $x \in M$, l'application a_x est de rang constant sur G , et le sous groupe isotrope $I_x := a_x^{-1}(x)$ est une sous variété fermée de G de dimension $d_G - k$ où k est le rang de da_x .

◀ En dérivant par rapport à h en $h = Id$ l'expression $a(gh, x) = a(g, a(h, x))$, on obtient l'égalité $\partial_g a(g, x) \circ dr_g(Id) = \partial_x a(g, x) \circ \partial_g a(Id, x)$ ou r_g est la multiplication à droite par g , qui est un difféomorphisme. Comme $\partial_x a(g, x)$ est un isomorphisme, on conclut que le rang de $d(a_x)_g = \partial_g a(g, x)$ est égal au rang de $d(a_x)_{Id} = \partial_g a(Id, x)$

Le théorème de forme normale des applications de rang constant implique que I_x est une sous variété dont l'espace tangent en Id est le noyau de $\partial_g a(Id, x)$. ▶

Le théorème suivant permet notamment de munir le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ d'une structure de variété qui fait de la projection un difféomorphisme local. Il donne aussi un cadre théorique contenant la fibration de Hopf (dans le cas $G = S^1 = SO_2(\mathbb{R})$).

Théorème 7.10. Soit $a(g, x)$ une action libre et propre du groupe G sur une variété M . Alors il existe une variété N de dimension $d_M - d_G$ et une submersion $\pi : M \rightarrow N$ ayant la propriété suivante :

Tout point $z_0 \in N$ admet un voisinage U et un difféomorphisme $\psi = (\pi, \theta) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ vérifiant

$$\psi \circ a(g, x) = (\pi(x), g\theta(x))$$

pour tout $(g, x) \in G \times \pi^{-1}(U)$. On dit que $\pi : M \rightarrow N$ est un fibré principal de groupe G .

Dans le cas où G est un groupe discret (c'est à dire muni de la topologie discrète), l'hypothèse que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ est inutile.

La submersion π n'est pas forcément propre (sauf si G est compact), c'est malgré tout une fibration.

◀ Pour tout $x \in M$, l'application a_x est un plongement propre de G dans M . En effet, elle est propre en raison de la propriété de l'action a , et c'est une immersion en raison de la liberté de l'action, au vu de la proposition 7.9 (elle est de rang constant égal à d_G). L'orbite du point x est donc une sous variété fermée. En fait, on a :

Lemme 7.11. Pour tout $x_0 \in X$, il existe un disque plongé D centré en x_0 et tel que l'action a induit un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image) de $G \times D$ dans M .

◀ Soit d_G la dimension de G , d_M la dimension de M , et $d =: d_M - d_G$. Considérons une immersion locale $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$ telle que l'image de $d\phi_0$ est un supplémentaire de l'image de $\partial_g a(Id, x_0)$. L'application $A : G \times \mathbb{R}^d \ni (g, y) \mapsto a(g, \phi(y))$ est alors un difféomorphisme local en $(Id, 0)$. Il existe donc une boule ouverte $B^d(0, r)$ et un voisinage ouvert U de Id dans G tels que A est un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image) sur $B^d(0, r) \times U$.

Montrons que A est un difféomorphisme local en chaque point de $G \times B^d(0, r)$. On a en effet $A(gh, x) = a_g(A(h, x))$, et, en différenciant par rapport à (h, x) en $h = Id$, on obtient

$$dA_{(g,x)} \cdot (d(r_g)_{Id} \cdot w, v) = d(a_g)_{\phi(x)} \circ dA_{(Id,x)} \cdot (w, v).$$

Comme A est un difféomorphisme local en (Id, x) , et comme r_g est un difféomorphisme, c'est un difféomorphisme local en (g, x) .

Montrons finalement que A peut être rendu injective en réduisant la boule B^d . Si ce n'était pas le cas, il existerait deux suite y_n et y'_n tendant vers 0 dans $B^d(0, r)$ et des suites $h_n \neq h'_n$ dans G telles que $A(g_n, y_n) = A(g'_n, y'_n)$. En notant $x_n = \phi(y_n)$, $x'_n = \phi(y'_n)$, ceci implique que $x_n = a(h_n^{-1}h'_n, x'_n)$, c'est à dire que $x_n = a(g_n, x'_n)$ avec $g_n \in G$, $g_n \neq Id$. Comme les suite x_n et x'_n restent dans un compact, la propriété de l'action implique que g_n reste dans un compact de G . On peut donc supposer que g_n converge vers un élément g de G . À la limite, on voit que $x_0 = a(g, x_0)$ et donc $g = Id$. A partir d'un certain rang, on a donc $g_n \in U$ et l'injectivité de A sur $B^d(0, r) \times U$ implique (si $g_n \neq Id$) que $a(g_n, x'_n) = A(g_n, y'_n) \neq A(Id, y_n) = x_n$, ce qui est une contradiction.

L'application A est un difféomorphisme local injectif, et donc un difféomorphisme sur son image. On pose alors $D = \phi(B)$, et $a(g, x) = A(g, \phi^{-1}(x))$ est un difféomorphisme de $G \times D$ sur son image. ▶

Soit N l'ensemble des orbites, et $\pi : M \rightarrow N$ la projection naturelle qui, a un point, associe son orbite. Traitons d'abord l'aspect métrique.

Lemme 7.12. Il existe une distance d_G sur M , compatible avec sa topologie usuelle, qui est invariante par l'action de G , c'est à dire que $d_G(a(g, x), a(g, x')) = d_G(x, x')$ pour tout $g \in G$.

◀ On munit le compactifié d'Alexandrov de M d'une distance d compatible avec la topologie de M , et l'on restreint cette distance à M . Elle a la propriété que $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ si les suites x_n et x'_n sortent de tout compact. On pose alors

$$d_G(x, x') = \max_{g \in G} d(a(g, x), a(g, x')).$$

On vérifie facilement que d_G est une distance. Montrons que le maximum est atteint. En effet, si g_n est une suite maximisante, alors l'une des suites $a(g_n, x)$ et $a(g_n, x')$ admet une valeur d'adhérence (sinon la distance $d(a(g_n, x), a(g_n, x'))$ tendrait vers 0) ce qui implique que g_n admet une sous-suite convergente en raison de la propriété de l'action. Si g est la limite, on a $d_G(x, x') = d(a(g, x), a(g, x'))$.

Montrons finalement que la topologie engendrée par d_G est moins fine (et donc égale) à celle engendrée par d . Supposons que $d(x_n, x) \rightarrow 0$ mais qu'il existe $g_n \in G$ tels que $d(a(g_n, x_n), a(g_n, x)) > b > 0$ pour tout n . Alors l'un des suites $a(g_n, x_n)$ ou $a(g_n, x)$ admet une valeur d'adhérence dans M , donc g_n aussi au vu de la propriété de l'action. On peut donc supposer que $g_n \rightarrow g$ et alors, pour la distance d sur M , on a $a(g_n, x_n) \rightarrow a(g, x)$ et $a(g_n, x) \rightarrow a(g, x)$ et donc $d(a(g_n, x_n), a(g_n, x)) \rightarrow 0$, ce qui est une contradiction. ►

On munit N de la distance

$$d_N(x, x') = \inf_{y \in \pi^{-1}(x), y' \in \pi^{-1}(x')} d_G(y, y') = \inf_{y' \in \pi^{-1}(x')} d_G(z, y')$$

pour tout $z \in \pi^{-1}(x)$. Montrons que d_N est bien une distance. Si $d_N(x, x') = 0$, alors pour tout $y \in \pi^{-1}(x)$ il existe une suite $y'_n \in \pi^{-1}(x')$ telle que $d_G(y, y'_n) \rightarrow 0$. Ceci implique que y est contenu dans la fermeture de $\pi^{-1}(x')$ et donc dans $\pi^{-1}(x')$. On a donc $x = x'$. Pour démontrer l'inégalité triangulaire $d(x, x') + d(x', x'') \geq d(x, x'')$, on fixe $y' \in \pi^{-1}(x')$, et on écrit

$$d(x, x') + d(x', x'') = \inf_{y, y''} (d_G(y, y') + d_G(y', y'')) \geq \inf_{y, y''} d_G(y, y'') = d(x, x''),$$

où les infimums sont pris sur $y \in \pi^{-1}(x)$ et $y'' \in \pi^{-1}(x'')$. On remarque que la projection $\pi : (M, d_G) \rightarrow (N, d_N)$ est 1-Lipschitz donc continue.

On munit N de l'atlas dont les paramétrisations locales sont les application $\pi \circ \phi$, où $\phi : B \rightarrow M$ est un plongement d'un boule ouverte B de \mathbb{R}^d dans M vérifiant la conclusion du lemme précédent, c'est à dire tel que a induit un plongement de $G \times \phi(B)$ dans M . Ces applications sont injectives car si deux points y et y' sont tels que $\pi \circ \phi(y) = \pi \circ \phi(y')$, alors il existe $g \in G$ tel que $a(g, \phi(y)) = \phi(y')$, ce qui implique que $\phi(y) = \phi(y')$ au vu de l'injectivité de a sur $G \times \phi(B)$, et donc que $y = y'$. L'ensemble $a(G \times \phi(B))$ est une réunion d'orbite. Notons A_2^{-1} le second facteur de A^{-1} , qui est aussi l'application $(\pi \circ \phi)^{-1} \circ \pi$. L'application $\phi \circ A_2^{-1}$ associe à tout point $z \in a(G \times \phi(B))$ l'unique intersection de l'orbite de z avec le disque $\phi(B)$. Elle est différentiable puisque A_2^{-1} l'est.

Le lemme précédent montre que les images de ces paramétrisations locales recouvrent N .

Les applications $\pi \circ \phi$ sont continues car π l'est. Montrons que leurs inverses sont continues. Si $x_n \rightarrow x$ dans (N, d_N) , alors il existe une suite $y_n \in \pi^{-1}(x_n)$ qui tend vers le point $y = \phi(B) \cap \pi^{-1}(x)$. Comme l'application A_2^{-1} est différentiable, donc continue, on a $z_n \rightarrow z$ dans B , où $z = (\pi \circ \phi)^{-1}(x)$ et $z_n = (\pi \circ \phi)^{-1}(x_n)$. On a montré que chaque paramétrisation $\pi \circ \phi$ est un homéomorphisme, on note φ l'homéomorphisme inverse (qui est donc une carte de N).

Chaque changement de carte $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ est différentiable puisqu'il s'écrit $A_2^{-1} \circ \tilde{\phi}$. Les cartes φ constituent donc un atlas de N et la munissent d'une structure de variété.

Pour toute carte $\varphi : U \rightarrow B$ de N associée comme ci-dessus à un plongement $\phi : B \rightarrow M$, on considère le difféomorphisme

$$G \times U \ni (g, z) \mapsto a(g, \phi \circ \varphi(z)) \in \pi^{-1}(U).$$

Son inverse ψ satisfait les conclusions du théorème. ►

Addendum 7.13. Si $\pi : M \rightarrow N$ est une application vérifiant les conclusions du théorème, alors toute application différentiable $f : M \rightarrow X$ (à valeurs dans une variété X) invariante par l'action a (c'est à dire que $f \circ a_g = f$ pour tout $g \in G$) se factorise par π , c'est à dire s'écrit $f = \tilde{f} \circ \pi$ avec une application différentiable $\tilde{f} : N \rightarrow X$.

En particulier, l'application $\pi : M \rightarrow N$ est unique : Toute autre application $\tilde{\pi} : M \rightarrow \tilde{N}$ vérifiant le théorème est de la forme $\tilde{\pi} = \tilde{\phi} \circ \pi$ avec un difféomorphisme $\tilde{\phi}$.

◀ Toute application $f : M \rightarrow X$ invariante par l'action a se factorise en $f = \tilde{f} \circ \pi$ où $\tilde{f}(y)$ est défini comme $f(x)$ pour n'importe quel point x de $\pi^{-1}(y)$. La valeur $f(x)$ ne dépend pas du choix de x au vu de l'invariance de f .

Comme π est une submersion surjective, la différentiabilité de f implique celle de \tilde{f} .

Si $\tilde{\pi} : M \rightarrow \tilde{N}$ est une autre application satisfaisant les conclusions du théorème, alors il existe une application différentiable $\tilde{\phi}$ telle que $\tilde{\pi} = \tilde{\phi} \circ \pi$, et réciproquement il existe une application différentiable $\tilde{\psi}$ telle que $\pi = \tilde{\psi} \circ \tilde{\pi}$. On a alors $\tilde{\pi} = \tilde{\phi} \circ \pi = \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\pi}$. Comme $\tilde{\pi}$ est surjective, on conclut que $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi} = Id$, et de la même façon que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} = Id$. Les application $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ sont donc des difféomorphismes. ►

Pour vérifier que ce résultat s'applique à la fibration de Hopf, et plus généralement à tous les champs de vecteurs dont toutes les orbites sont 1-périodiques, on utilise :

Exercice 7.4. Soit V un champ de vecteur sur une sous variété M dont toutes les orbites sont périodiques de période (minimale) 1. Montrer qu'il existe une action libre a de S^1 sur M telle que $\phi_V^t(x) = a(e^{2it\pi}, x)$.

On dit que le groupe G agit librement proprement discontinûment sur M si il agit par une action libre a qui est propre pour la topologie discrète. Dans ce cas, la submersion $\pi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme local puisque les variétés M et N ont la même dimension. C'est même un revêtement :

Définition 7.14. L'application différentiable $\pi : M \rightarrow N$ est un revêtement si tout $y_0 \in N$, admet un voisinage ouvert U ayant la propriété suivante : Il existe un ensemble au plus dénombrable discret Z et un difféomorphisme $\psi : U \times Z \rightarrow \pi^{-1}(U)$ qui commute avec les projections sur U .

Le théorème D'Erhesman implique que tout difféomorphisme local propre est un revêtement fini (c'est à dire que Z est fini). Nous invitons le lecteur à donner une preuve directe de ce fait.

Soit H un groupe de Lie et soit G un sous-groupe de H qui est une sous variété fermée de H (en fait, le caractère fermé est automatique). On définit l'action de G sur H par $a(g, h) = hg^{-1}$. Cette action est propre (car G est fermé dans H). L'ensemble des orbites de cette action est le quotient H/G , que le théorème 7.10 munit d'une structure de variété telle que la projection canonique est une submersion.

Il y a une action naturelle de H sur H/G . En effet la composition $A : \pi \circ p : H \times H \rightarrow H/G$ du produit et de la projection canonique est invariante par l'action du sous groupe $\{Id\} \times G$ donnée par $((Id, g), (h, h')) \mapsto (h, h'g^{-1})$ sur $H \times H$, et donc se factorise en une application a de $(H \times H)/(Id \times G) = H \times (H/G)$ dans H/G . Cette application est une action de H sur H/G .

Réciproquement, soit M une variété munie d'une action transitive $a(h, x)$ de H . On dit que l'action est transitive si chaque orbite est égale à M , c'est à dire si chacune des applications $a_x : H \rightarrow M$ est surjective. Alors, pour tout $x \in M$ le sous-groupe isotrope $I_x := a_x^{-1}(x)$ est une sous variété fermée de H , et l'application a_x se factorise en $a_x = \phi \circ \pi$ où $\pi : H \rightarrow H/I_x$ est la projection canonique et $\phi : H/I_x \rightarrow M$ est un difféomorphisme. En effet, l'application a_x est de rang $\dim M$ au vu de la proposition 7.9, donc l'application ϕ aussi.

Plus généralement, si a est une action différentiable de H sur M et si x est un point de M , alors l'application a_x se factorise en $\phi \circ \pi$ où $\phi : H/I_x \rightarrow M$ est une immersion injective. Dans le cas où l'action a est propre, l'immersion injective ϕ l'est aussi, c'est donc un plongement. Chaque orbite d'une action propre (pas nécessairement libre) est donc une sous variété.

Exercice 7.5. Montrer que l'orbite du point x est une feuille même lorsque l'action n'est pas propre.

◀ On considère au voisinage de x un disque $\Sigma \subset M$ transverse à l'orbite, et un disque $T \subset G$ transverse au sous-groupe I_x en I . L'action a plonge $T \times \Sigma$ dans M . On montre alors comme dans le cas des feuilletages en utilisant la préimage de l'orbite de x par cette paramétrisation est de la forme $T \times Z$ avec $Z \subset \Sigma$. Les ensembles $a_x^{-1}(T \times \{z\}), z \in Z$ sont des ouverts disjoints de G . Comme G est séparable, Z est dénombrable. ▶

Exercice 7.6. Expliquer les égalités $G(k, n) = \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)/Gl_k(\mathbb{R})$,
 $G(k, n) = \mathcal{L}_{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})/Gl_{n-k}(\mathbb{R})$, $G(k, n) = O(n)/(O(k) \times O(n-k))$.

8 Espace tangent et crochet de Lie

8.1 Espaces tangents et champs de vecteurs.

Deux courbes $\gamma, \tilde{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, x)$ sont dites tangentes en 0 si les courbes $\phi \circ \gamma$ et $\phi \circ \tilde{\gamma}$ ont la même dérivée en 0 pour toute carte de M en x . Il suffit que cette propriété soit satisfaite dans une carte. C'est une relations d'équivalence R sur l'ensemble $C_x^1(\mathbb{R}, M)$ des courbes sur M qui satisfont $\gamma(0) = x$. Définissons l'espace tangent comme l'ensemble des classes d'équivalences

$$T_x M := C_x^1(\mathbb{R}, M)/R.$$

Pour toute carte ϕ en x , l'application $\gamma \mapsto \phi \circ \gamma'(0)$ engendre une bijection entre $T_x M$ et \mathbb{R}^d (car deux courbes ont la même image si et seulement si elles appartiennent à la même classe d'équivalence). On munit $T_x M$ de la structure d'espace vectoriel qui fait de cette bijection un isomorphisme. Cette structure ne dépend pas du choix de la carte ϕ . En effet, si $\tilde{\phi}$ est une autre carte en x , alors

$$(\tilde{\phi} \circ \gamma)'(0) = d(\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})_0((\phi \circ \gamma)'(0)),$$

où $d(\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})_0$ est un isomorphisme.

Toute application différentiable $f : M \rightarrow N$ définie au voisinage de x engendre naturellement une application dérivée

$$d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N.$$

Cette application associe à tout vecteur $v \in T_x M$ le vecteur défini par la courbe $f \circ \gamma$, où γ est n'importe quelle courbe représentant v . Si $\tilde{\gamma}$ est une autre courbe représentant v , alors pour toute carte ϕ de M en x et toute carte φ de N en y , on a

$$(\varphi \circ f \circ \tilde{\gamma})'(0) = d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_0 \cdot (\phi \circ \tilde{\gamma})'(0) = d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_0 \cdot (\phi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ f \circ \gamma)'(0)$$

donc la classe de $f \circ \tilde{\gamma}$ est la même que celle de $f \circ \gamma$. Si J est un plongement de M dans \mathbb{R}^D , l'application $dJ_x : [\gamma] \rightarrow (J \circ \gamma)'(0)$ est un isomorphisme entre l'espace tangent $T_x M$ de M vue comme variété abstraite et l'espace tangent $T_x(J(M))$ de $J(M)$ vue comme sous variété.

Le représentant $[\gamma] \in T_x M$ d'une courbe C^1 n'est autre que

$$[\gamma] = d\gamma_0(1),$$

que l'on continuera à noter $\dot{\gamma}(0)$.

Présentons maintenant un autre point de vue très utile. On dit qu'une application linéaire

$$L : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

est une dérivation ponctuelle en x si elle a la propriété de Leibnitz

$$L(fg) = g(x)L(f) + f(x)L(g).$$

Si L est une dérivation en x sur M , et si $\psi : M \rightarrow N$ est une application C^∞ au voisinage de x , alors l'application

$$\psi_* L : f \mapsto L(f \circ \psi)$$

est une dérivation ponctuelle en $f(x)$. L'application $L \mapsto \psi_* L$ est linéaire. À toute vecteur tangent $v \in T_x M$, on associe la dérivation ponctuelle

$$L_v(f) := df_x \cdot v = (f \circ \gamma)'(0)$$

pour toute courbe γ représentant v . si M et N sont deux (pré) variétés et $\psi : (M, x) \rightarrow (N, y)$ une application différentiable, alors $\psi_*(L_v) = L_{d\psi_x \cdot v}$ dans \mathcal{D}_y (les dérivations ponctuelles en y).

Proposition 8.1. *L'espace \mathcal{D}_x des dérivations en x est un espace vectoriel de dimension d , et l'application $v \mapsto L_v$ est un isomorphisme de $T_x M$ dans $\mathcal{D}_x M$.*

Même dans le cas d'une sous variété, la proposition ci-dessus n'est pas évidente.

◀ Pour tout ouvert U de M contenant x , les espaces $\mathcal{D}_x(U)$ et $\mathcal{D}_x(M)$ sont isomorphes. Un isomorphisme est donné par l'application i_* associée à l'inclusion de U dans M (c'est l'application $(i_* L)(f) = L(f \circ i) = L(f|_U)$).

Pour le montrer, on considère une fonction $h : M \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ égale à 1 au voisinage de x et à support dans U , et la fonction $g = 1 - (1 - h)^2$, qui a les mêmes propriétés.

Pour toute dérivation ponctuelle L en x sur M (ou sur U), on a $L(f) = L(gf)$. En effet,

$$L(f) - L(gf) = L((1 - h)^2 f) = (1 - h)(x)L((1 - h)f) + (1 - h)(x)f(x)L(1 - h) = 0.$$

On constate alors que l'application qui à une dérivation L sur M associe la dérivation $f \mapsto L(gf)$ sur U (où la fonction gf est étendue par zero en dehors de U) est une inverse de i_* .

Soit $\phi : (M, x) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ une carte de M en x (de domaine U). On peut choisir ϕ surjective.

Les applications $d\phi_x : T_x M \rightarrow T_0 \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$ et $\phi_* : \mathcal{D}_x(U) \rightarrow \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^d)$ sont des isomorphismes. Il suffit donc de démontrer que l'application

$$\mathbb{R}^d \ni v \mapsto L_v \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^d)$$

est un isomorphisme. Pour démontrer la surjectivité, on considère une dérivation ponctuelle L en 0 sur \mathbb{R}^d .

On commence par constater, si 1 est la fonction constante égale à 1, que $L(1) = L(1 \cdot 1) = 1L(1) + 1L(1) = 2L(1)$, donc $L(1) = 0$.

On rappelle alors qu'une fonction f de classe C^∞ s'écrit $f(x) = f(0) + F(x) \cdot x$ où

$$F(x) := \int_0^1 df_{tx} dt$$

est une application C^∞ de \mathbb{R}^d dans $(\mathbb{R}^d)^*$, telle que $F(0) = df_0$. On a donc, $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^d x_i F_i(x)$, et donc

$$Lf = \sum_{i=1}^d F_i(0)L(x_i) = D_v f$$

où $v = (L(x_1), L(x_2), \dots, L(x_d))$. ►

Un champ de vecteurs sur une (pré) variété M est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'un vecteur $V(x) \in T_x M$. On demande de plus que ce vecteur $V(x)$ dépende régulièrement de x . Il y a plusieurs façons équivalentes d'exprimer cette régularité. On peut par exemple demander que le champ de vecteurs soit différentiable dans les cartes. On peut aussi demander que la fonction $x \mapsto df_x \cdot V(x)$ soit C^∞ pour toute fonction f de classe C^∞ . On associe alors au champ $V(x)$ une l'application linéaire

$$\mathcal{L}_V : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

telle que $\mathcal{L}_V f(x) = df_x \cdot V(x)$. Cette application vérifie la propriété de Leibnitz

$$\mathcal{L}_V(fg) = f\mathcal{L}_V g + g\mathcal{L}_V f,$$

On dit que c'est un dérivation globale. Réciproquement, si $\mathcal{L} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ est une dérivation globale, alors pour chaque $x \in M$ l'application $L_x : f \mapsto \mathcal{L}f(x)$ est une dérivation ponctuelle. Elle est donc engendrée par un vecteur de $T_x M$. Toute dérivation globale est donc engendrée par un champ de vecteurs. On prendra garde à la formule de calcul :

Propriété 8.2. Si V est un champ de vecteurs sur M , et $\varphi : M \longrightarrow N$ est une application différentiable telle que $\varphi_* V$ existe, alors

$$(\mathcal{L}_{\varphi_* V} f) \circ \varphi = \mathcal{L}_V(f \circ \varphi).$$

La proposition suivante est bien utile :

Proposition 8.3. Pour tout champ de vecteurs X sur une variété séparable M , il existe une fonction f à valeurs strictement positive telle que le champ fX est complet.

► Soit g une fonction propre C^∞ et strictement positive. Si la fonction $\mathcal{L}_X g$ est bornée, alors X est complet. En effet, on considère une solution maximale $x(t) :]T^-, T^+[\longrightarrow M$. La fonction $(g \circ x)'$ est bornée sur $]T^-, T^+[$. Si $T^+ < \infty$, on conclut que $g \circ x$ est bornée sur $[0, T^+[$, ce qui implique que $x([0, T^+])$ est contenu dans un compact, ce qui est une contradiction. On montre de la même façon que $T^- = -\infty$.

Si Xg n'est pas borné, on considère une fonction h lisse et strictement positive qui majore $|\mathcal{L}_X g|$, par exemple $h = (\mathcal{L}_X g)^2 + 1$. On pose alors $f = 1/h$, et on observe que $|\mathcal{L}_{fX} g| = |f\mathcal{L}_X g| = |\mathcal{L}_X g|/h \leq 1$. Au vu de ce qui précède, le champ fX est donc complet. ►

En général, il n'y a pas de manière canonique de représenter la dérivée seconde $\ddot{\gamma}(t)$ d'une courbe comme un élément de $T_{\gamma(t)} M$. Dans le cas où M est une sous-variété de \mathbb{R}^D , ceci se manifeste par le fait que $\ddot{\gamma}(t)$ (définie en considérant γ comme une courbe de \mathbb{R}^D) n'appartient pas à $T_{\gamma(t)} M$.

Il y a toutefois un cas particulier important dans lequel c'est possible : lorsque $\dot{\gamma}(t) = 0$.

Proposition 8.4. Soit γ une courbe C^2 sur M telle que $\dot{\gamma}(0) = 0$. Alors la courbe $g : t \mapsto \gamma(t^{1/2})$ est C^1 (où $t^{1/2}$ est prolongé sur \mathbb{R} comme fonction impaire). En notant $\ddot{\gamma}(0) := 2g'(0) \in T_{\gamma(0)} M$, on a

$$d\phi_{\gamma(0)} \cdot \ddot{\gamma}(0) = (\phi \circ \gamma)''(0)$$

pour toute carte locale $\phi : (M, \gamma(0)) \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

► La courbe $z(t) := \phi \circ \gamma$ est une courbe sur \mathbb{R}^d telle que $\dot{z}(0) = 0$. Un développement limité élémentaire montre alors que $z(t^{1/2}) = 2t\ddot{z}(0) + o(t)$. La courbe $t \mapsto z(t^{1/2})$ est donc dérivable en $t = 0$ de dérivée égale à $2\ddot{z}(0)$. La courbe $t \mapsto \gamma(t^{1/2}) = \phi^{-1} \circ z(t^{1/2})$ est donc dérivable en $t = 0$, de dérivée $(d\phi_{\gamma(0)})^{-1} \cdot \ddot{\gamma}(0)$. ►

On peut aussi faire une preuve directe du fait que la dérivée seconde est bien un vecteur tangent en un temps où la dérivée est nulle :

Exercice 8.1. Soit $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ un difféomorphisme et soit $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ une courbe C^2 . Montrer par un calcul direct que $(\phi \circ \gamma)''(0) = d\phi_0 \cdot \gamma''(0)$ si $\dot{\gamma}(0) = 0$, mais que ce n'est pas le cas en général.

Plus généralement :

Proposition 8.5. Soit $f : M \rightarrow N$ est une fonction C^2 telle que $df_{x_0} = 0$. Alors il existe une unique application bilinéaire symétrique $d^2 f_{x_0}$ de $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$ dans $T_{f(x_0)}N$ telle que, pour toute paramétrisation locale ψ de M en x_0 et tout carte locale φ de N en $f(x_0)$,

$$d^2(\varphi \circ f \circ \psi)_0 \cdot (v, w) = d\varphi_{f(x_0)} \circ d^2 f_{x_0}(d\psi_0 \cdot v, d\psi_0 \cdot w).$$

◀ Pour chaque choix de ψ et φ , la formule ci-dessus détermine une forme bilinéaire symétrique b de $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$ dans $T_{f(x_0)}N$. Il nous faut montrer que cette forme bilinéaire ne dépend pas du choix de φ et ψ . On peut le faire par un calcul direct (pas si facile, mais instructif), mais nous allons utiliser une autre méthode. Pour tout $v \in T_{x_0}M$, on choisit une courbe γ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\dot{\gamma} = v$. On constate alors que la courbe $f \circ \gamma$ est de dérivée nulle en 0, et sa dérivée seconde vérifie $(f \circ \gamma)''(0) = b(v, v)$. Pour le vérifier, on pose $\eta = \psi^{-1} \circ \gamma$. L'application $\varphi \circ f \circ \psi : \mathbb{R}^{d_M} \rightarrow \mathbb{R}^{d_N}$ est de dérivée nulle en 0, et on a

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f \circ \psi)''(0) &= (\varphi \circ f \circ \psi \circ \eta)''(0) = d^2(\varphi \circ f \circ \psi)_0 \cdot (\eta'(0), \eta'(0)) \\ &= d\varphi_{f(x_0)} \cdot b(d\psi_0 \cdot \eta'(0), d\psi_0 \cdot \eta'(0)) = d\varphi_{f(x_0)} \cdot b(v, v). \end{aligned}$$

D'autre part, il découle de la proposition 8.4 que

$$(\varphi \circ f \circ \gamma)''(0) = d\varphi_{f(x_0)} \cdot (f \circ \gamma)''(0)$$

ce qui démontre l'égalité $(f \circ \gamma)''(0) = b(v, v)$. On conclut que $b(v, v)$ est indépendant de φ et ψ pour tout v , et donc, par polarisation, que la forme bilinéaire symétrique b est indépendante de φ et ψ . ▶

Dans le cas où M est une sous variété de \mathbb{R}^D , on a encore une autre interprétation naturelle pour $d^2 f_{x_0}$: C'est la restriction à $T_{x_0}M$ de la forme bilinéaire $d^2 \tilde{f}_{x_0}$, où \tilde{f} est n'importe quelle extension C^2 de f à un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^D .

8.2 Crochets de Lie

Soient X et Y deux champs de vecteurs, que nous supposons complets sur la (pré) variété M .

On veut décrire dans quelle mesure les flots φ_X et φ_Y commutent. On considère, pour chaque $x \in M$, l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ donnée par

$$\phi_x(t, s) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^{-s} \circ \varphi_X^{-t}(x).$$

Il est immédiat que $\phi(t, s) = x$ si $t = 0$ ou $s = 0$, donc $\partial_t \phi(0) = \partial_s \phi(0) = 0$ dans $T_x M$. La dérivée seconde $d^2 \phi_0$ est donc bien définie comme application bilinéaire de \mathbb{R}^2 dans $T_x M$ et elle est de la forme (toujours car $\phi(t, s) = x$ si $t = 0$ ou $s = 0$)

$$d^2 \phi_0 \cdot (s, t) = st \partial_{st}^2 \phi(0)$$

avec $\partial_{st}^2 \phi \in T_x M$. On pose

$$[X, Y](x) = \partial_{st}^2 \phi(0)$$

c'est le **Crochet de Lie** de X et Y . C'est un champ de vecteurs C^∞ si X et Y le sont. En considérant la courbe $\gamma_x(t) := \phi_x(t, t)$, qui a une dérivée nulle $\dot{\gamma}(0) = 0$, on a

$$[X, Y](x) := \ddot{\gamma}_x(0)/2.$$

Propriété 8.6. Soit $\psi : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si $\psi_* X$ et $\psi_* Y$ existent (et sont des champs de vecteurs différentiables), alors

$$[\psi_* X, \psi_* Y] = \psi_* [X, Y].$$

◀ Fixons un point x et Considérons la courbe $x(t) = \phi(r(t), r(t))$, où $r(t) = \text{sign}(t)\sqrt{|t|}$, de sorte que $x'(0) = [X, Y](x)$.

$$x(t) := \varphi_Y^{r(t)} \circ \varphi_X^{r(t)} \circ \varphi_Y^{-r(t)} \circ \varphi_X^{-r(t)}(x)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \psi \circ x(t) &= \psi \circ \varphi_Y^{r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_X^{r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_Y^{-r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_X^{-r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi(x) \\ &= \varphi_{\psi_* Y}^{r(t)} \circ \varphi_{\psi_* X}^{r(t)} \circ \varphi_{\psi_* Y}^{-r(t)} \circ \varphi_{\psi_* X}^{-r(t)}(\psi(x)), \end{aligned}$$

et, en dérivant en $t=0$, $d\psi_x \cdot [X, Y](x) = [\psi_* X, \psi_* Y](\psi(x))$. ▶ L'exercice suivant montre que le crochet n'est pas toujours nul :

Exercice 8.2. Soit X un champ de vecteurs constant et Y un champ de vecteurs linéaire donné par $Y(x) = bx$. Alors $[X, Y]$ est le champ constant égal à bX .

Exercice 8.3. Soient X et Y deux champs de vecteurs linéaires sur \mathbb{R}^d , donnés par $X(x) = ax, Y(x) = bx$. Montrer que $[X, Y](x) = (ba - ab)(x)$.

Exercice 8.4. Soient a et b deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Considérons les champs de vecteurs X et Y sur $Gl_n(\mathbb{R})$ donnés par $X(g) = ag, Y(g) = bg$. On a alors $\varphi_X^t(g) = \exp(ta)g, \varphi_Y^t(g) = \exp(tb)g$. Montrer que $\partial_t \phi_g(0, s) = \exp(sb)a \exp(-sb)g - ag$ et donc que $[X, Y](g) = (ba - ab)g$.

Si G est un sous groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$ qui en est aussi une sous variété, alors l'espace tangent $\mathfrak{g} = T_{Id}G \subset M_n(\mathbb{R})$ est stable par l'opération $a, b \mapsto ab - ba$.

On obtient une autre interprétation du crochet de Lie en remarquant que

$$\varphi_Y^s \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^{-s} = \varphi_{(\varphi_Y^s)_* X}^t$$

et donc

$$\phi_x(t, s) = \varphi_{(\varphi_Y^s)_* X}^t \circ \varphi_X^{-t}(x).$$

On a alors

$$\partial_t \phi_x(0, s) = (\varphi_Y^s)_* X(x) - X(x)$$

dont on déduit :

Propriété 8.7.

$$[X, Y](x) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_Y^s)_* X(x)).$$

Exercice 8.5. Montrer la formule

$$\partial_s ((\varphi_Y^s)_* X(x)) = [(\varphi_Y^s)_* X, Y] = (\varphi_Y^s)_* [X, Y]$$

Calculons les crochets de Lie en coordonnées. Si X et Y sont des champs de vecteurs de \mathbb{R}^n , vus comme applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , alors on a $(\varphi_Y^s)_* X(x) = (d(\varphi_Y^s)_x \cdot X(x))(\varphi_Y^{-s}(x))$. En remarquant que $\partial_s|_{s=0} d(\varphi_Y^s)_x \cdot X(x) = d(\partial_s|_{s=0} \varphi_Y^s)_x \cdot X(x) = dY_x \cdot X(x) = dY_x \cdot X(x)$, on obtient :

$$[X, Y](x) = dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x)$$

ce qui s'écrit aussi en coordonnées

$$([X, Y])_i = \sum_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j.$$

Il est instructif de revenir aux exercices 8.2 et 8.3 avec ces formules. Finalement, on a

Propriété 8.8.

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

Cette propriété caractérise le champ $[X, Y]$, et est souvent donnée comme sa définition.

◀ Soit φ une carte. On remarque d'abord que $\mathcal{L}_X(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}_{\varphi_* X} f) \circ \varphi$. En utilisant cette formule, on obtient

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}_{\varphi_* [X, Y]} f) \circ \varphi = (\mathcal{L}_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} f) \circ \varphi$$

et

$$(\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f \circ \varphi) = ((\mathcal{L}_{\varphi_* X} \circ \mathcal{L}_{\varphi_* Y} - \mathcal{L}_{\varphi_* Y} \circ \mathcal{L}_{\varphi_* X})f) \circ \varphi.$$

Il suffit donc de montrer l'égalité dans les cartes, c'est à dire dans \mathbb{R}^d . On fait le calcul direct

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y f(x) = d(df_x \cdot Y(x))_x \cdot X(x) = d^2 f_x \cdot (Y(x), X(x)) + df_x \circ dY_x \cdot X(x)$$

$$\mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X f(x) = d(df_x \cdot X(x))_x \cdot Y(x) = d^2 f_x \cdot (Y(x), X(x)) + df_x \circ dX_x \cdot Y(x)$$

et donc

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y f(x) - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X f(x) = df_x \cdot (dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x)) = df_x \cdot [X, Y](x).$$

Le point remarquable de ce calcul est la simplification des termes de second ordre. ►

Il est remarquable que l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ est une dérivation (a priori, c'est un opérateur du second ordre). C'est un exercice facile et intéressant de vérifier directement qu'il vérifie la propriété de Leibnitz. La propriété 8.8 implique :

Propriété 8.9. L'application qui aux champs de vecteurs X et Y associe leur crochet de Lie $[X, Y]$ est bilinéaire et antisymétrique :

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

Elle vérifie de plus l'**identité de Jacobi**

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

L'antisymétrie implique notamment que

$$[X, Y](x) = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\varphi_X^s)_* Y(x)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\varphi_X^{-s})_* Y(x)) =: \mathcal{L}_X(Y).$$

Le dernier opérateur est appelé dérivée de Lie de Y par rapport à X . L'identité de Jacobi est équivalente à

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]],$$

elle s'interprète comme la relation

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$$

où cette fois les opérateurs \mathcal{L} agissent sur les champs de vecteurs et plus, comme plus haut, sur les fonctions.

Propriété 8.10. On a la relation $[fX, gY] = fg[X, Y] - (\mathcal{L}_Y f)gX + (\mathcal{L}_X g)fY$.

Le cas particulier $[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y$ se réécrit $\mathcal{L}_X(gY) = g\mathcal{L}_X(Y) + (\mathcal{L}_X g)Y$, c'est une règle de Leibnitz pour l'opérateur \mathcal{L}_X . La démonstration est immédiate en utilisant propriété 8.8. Revenons maintenant à la question de la commutation :

Théorème 8.11. Soient X et Y des champs de vecteurs tels que le champ $[X, Y]$ est identiquement nul. Alors les flots de X et de Y commutent. Plus précisément, pour tout $x \in M$, si I et J sont des intervalles contenant 0 tels que $\varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$ est défini pour tout $s \in I$, $t \in J$ alors on a la relation

$$\varphi_X^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$$

pour tous $s \in I$, $t \in J$ (en particulier, le membre de gauche est bien défini). Si X et Y sont complets, alors la relation de commutation est valable pour tous t et s dans \mathbb{R} .

Dans le cas complet, ceci implique aussi que $(\varphi_Y^s)_* X = X$ pour tout s .

◀ Il suffit de démontrer le résultat dans le cas où I et J sont compacts. Soit U le domaine de définition commun des flots φ_Y^s , $s \in J$. C'est un ouvert contenant x . On a $(\varphi_Y^{-s})_* X = X$ sur U , ceci découle du calcul

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}((\varphi_Y^{-s})_* X(x)) &= \frac{d}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0} ((\varphi_Y^{-\sigma})_* (\varphi_Y^{-s})_* X(x)) \\ &= [Y, (\varphi_Y^{-s})_* X] = [(\varphi_Y^{-s})_* Y, (\varphi_Y^{-s})_* X] = (\varphi_Y^{-s})_* [Y, X] = 0. \end{aligned}$$

Les champs $(\varphi_Y^{-s})_* X$, $s \in J$ sont tous définis sur U , et ils y satisfont la relation $\frac{d}{ds}((\varphi_Y^{-s})_* X(x)) = 0$, donc $(\varphi_Y^{-s})_* X = X$.

Considérons la restriction X_U de X à l'ouvert $U \subset M$. On conclut que les flots $\varphi_Y^{-s} \circ \varphi_{X_U}^t \circ \varphi_Y^s$ et $\varphi_{X_U}^t$ de ces champs sont égaux sur le domaine de définition de $\varphi_{X_U}^t$ (qui, à priori, peut être strictement contenu dans $U \cap \text{dom} \varphi_X^t$). Il découle de notre hypothèse que U contient le segment d'orbite $\varphi_X(I \times \{x\})$, et donc que x est dans le domaine de $\varphi_{X_U}^t$ pour tout $t \in I$. On a donc $\varphi_Y^{-s} \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_{X_U}^t(x)$ pour tout $t \in I$, $s \in J$, ce qui est le résultat annoncé. ▶

L'exercice suivant montre qu'il faut être un peu prudent dans le cas de champs non complets.

Exercice 8.6. Considérons l'application exponentielle $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ et les champs de vecteurs constants e_1 et e_2 sur \mathbb{C}^* .

Montrer qu'il existe des champs X_1 et X_2 sur \mathbb{C} tels que $e_* X_i = e_i$.

Montrer que $\varphi_1^1 \circ \varphi_2^1(z) \neq \varphi_2^1 \circ \varphi_1^1(z)$ pour $z = -3i\pi/4$.

On rappelle que tout champ de vecteurs peut être redressé au voisinage d'un point régulier. En présence de plusieurs champs de vecteurs, on a :

Théorème 8.12. Soient X_1, \dots, X_k des champs de vecteurs au voisinage de x_0 dont les valeurs en x_0 forment une famille libre. Il existe une carte locale $\phi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, c'est à dire telle que

$$\phi_* X_i = e_i$$

(le champ de vecteur constant égal au i -ème vecteur de base) si et seulement si $[X_i, X_j] \equiv 0$ dans un voisinage de x_0 .

◀ Supposons que les champs X_i peuvent être redressés. Alors $X_i = \phi_*^{-1} e_i$, donc $[X_i, X_j] = \phi_*^{-1} [e_i, e_j] = 0$.

Réciproquement, soit $E \subset T_{x_0} M$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $X_i(x_0)$, $1 \leq i \leq k$. On considère alors une immersion $\psi : (\mathbb{R}^{d-k}, 0) \rightarrow (M, x_0)$ transverse à E en 0, c'est à dire telle que l'image de $d\psi_0$ est un supplémentaire de E dans $T_{x_0} M$. Les flots $\varphi_{X_i}^t$ sont bien définis dans un voisinage de $(0, x_0)$ et ils commutent deux à deux. Soit $\Psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}, 0) \rightarrow (M, x_0)$ l'application définie par

$$\Psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{X_k}^{t_k}(\psi(y)).$$

On voit facilement que $\partial_y \Psi_0 = d\psi_0$ et que $\partial_{t_i} \Psi_0 = X_i(0)$, et on conclut que Ψ est un difféomorphisme local de M en x_0 . Ceci est vrai sans hypothèse de commutation. On voit directement dans l'expression du flot que $\partial_{t_1} \Psi(y, t) = X_1(\Psi(y, t))$, c'est à dire que $\Psi_* e_1 = X_1$, où e_1, \dots, e_k est la base canonique de \mathbb{R}^k . En utilisant la commutation locale des flots, on observe que

$$\Psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{X_i}^{t_i} \circ \dots \circ \varphi_{X_{i-1}}^{t_{i-1}} \circ \varphi_{X_{i+1}}^{t_{i+1}} \circ \dots \circ \varphi_{X_k}^{t_k}(\psi(y)),$$

et donc que $\partial_{t_i} \Psi(y, t) = X_i(\Psi(y, t))$, c'est à dire que $\Psi_* e_i = X_i$ pour tout i . L'inverse locale ϕ de Ψ est la carte locale cherchée. ▶

Considérons maintenant un champ de sous-espaces $E(x)$ de rang k , c'est à dire la donnée, pour tout $x \in M$, d'un sous-espace vectoriel $E(x)$ de $T_x M$. On suppose que ce champ est différentiable, c'est à dire qu'il est représenté dans une carte par une application différentiable à valeurs dans la Grassmannienne $G(k, n)$. Il est équivalent de dire que, au voisinage de tout point $x_0 \in M$, il existe des champs de vecteur différentiables X_1, \dots, X_k tels que les $X_i(x)$ engendrent $E(x)$ pour tout x voisin de x_0 . Ce champ de sous-espaces est dit intégrable au voisinage de x_0 si il existe une carte dans laquelle il est constant. Il engendre alors un feuilletage, voir la section 6.4. Un corollaire immédiat du théorème 8.12 est :

Corollaire 8.13. Le champ $E(x)$ est intégrable au voisinage de x_0 si et seulement si il peut être engendrée localement par des champs de vecteurs X_i qui commutent deux à deux.

Il est bien sûr possible d'engendrer un champ de sous-espaces intégrable par des champs de vecteurs qui ne commutent pas deux à deux. On a en effet donné un exemple de champs de vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^2 et qui ne commutent pas, ils engendrent le champ de sous-espaces constant (donc intégrable) de rang maximal. Toutefois, on a :

Propriété 8.14. Si $E(x)$ est un champ de sous-espaces intégrable au voisinage de x_0 , et si les champs de vecteurs X_i , $1 \leq i \leq k$ engendrent $E(x)$ au voisinage de x_0 , alors $[X_i, X_j](x) \in E(x)$ au voisinage de x_0 .

On a aussi la réciproque :

Théorème 8.15 (Frobenius). Soit $E(x)$ un champ de sous-espaces de dimension k au voisinage de x_0 , engendré par les champs X_1, \dots, X_k . Si il existe un voisinage de x_0 dans lequel $[X_i, X_j](x) \in E(x)$ pour tous i, j , alors le champ de sous-espaces $E(x)$ est intégrable au voisinage de x_0 .

◀ Nous allons construire des champs qui engendrent localement le même champ de sous-espaces et qui commutent. On considère pour ceci une submersion $\psi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ telle que $d\psi_{x_0}|_{E(x_0)}$ est un isomorphisme. L'application linéaire $d\psi_x|_{E(x)}$ est alors un isomorphisme pour tout x proche de x_0 , et on définit les champs de vecteurs

$$Y_i(x) := (d\psi_x|_{E(x)})^{-1}(e_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Comme dans la preuve du Théorème D'Ehresmann (5.13), les champs Y_i sont réguliers et vérifient $\psi_* Y_i = e_i$. On a donc $\psi_* [Y_i, Y_j] = [e_i, e_j] = 0$, c'est à dire que $d\psi_x \cdot [Y_i, Y_j](x) = 0$. Au vu du Lemme ci-dessous, on a $[Y_i, Y_j] \in E(x)$ et donc $[Y_i, Y_j] = 0$ puisque $d\psi_x$ est injective sur $E(x)$. ▶

Lemme 8.16. Sous les hypothèses du théorème, si Y et Z sont deux champs tangents à E en chaque point, alors $[Y, Z]$ est un champ tangent à E en chaque point.

L'espace des champs contenus dans E est stable par crochet de Lie, on dit que c'est une sous algèbre de Lie de l'espace de tous les champs de vecteurs sur M .

◀ On écrit $Y = \sum y_i X_i, Z = \sum z_i X_i$, où y_i, z_i sont des fonctions régulières. Le crochet $[Y, Z]$ est donc une somme de termes de la forme

$$[y_i X_i, z_j X_j] = y_i [X_i, z_j X_j] - z_j (X_j X_i) X_i = y_i z_j [X_i, X_j] + y_i (X_i z_j) X_j - z_j (X_j X_i) X_i \in E. \blacktriangleright$$

Dans le cas général d'un champ de sous-espaces de dimension k non nécessairement intégrable, ou plus généralement d'une famille \mathcal{V} de champs de vecteurs, le théorème de l'orbite donne l'existence d'orbites qui sont localement difféomorphes au produit d'un disque de dimension d et d'un ensemble dénombrable. L'espace tangent $H(x) \subset T_x M$ de l'orbite de x contient l'espace $E(x) = \text{Vect}(\mathcal{V}(x))$.

De plus, si V et W sont deux champs de vecteurs tangents à l'orbite de x , alors la courbe

$$\gamma(t) = \varphi_W^{t^{1/2}} \circ \varphi_V^{t^{1/2}} \circ \varphi_W^{-t^{1/2}} \circ \varphi_V^{-t^{1/2}}(x)$$

est contenue dans l'orbite de x , donc sa dérivée $\dot{\gamma}(0) = 2[V, W](x)$ est tangente à l'orbite de x . En définissant l'algèbre de Lie \mathcal{LV} engendrée par \mathcal{V} comme le plus petit espace vectoriel de champs vecteurs contenant \mathcal{V} et invariant par crochet de Lie, on en déduit que $H(x) \supset \mathcal{LV}(x)$ (cette inclusion est souvent une égalité, mais pas toujours). On conclut en particulier :

Théorème 8.17 (Chow). *Soit M une variété connexe et \mathcal{V} une famille de champs de vecteurs complets sur M telle que $\mathcal{LV}(x) = T_x M$ pour tout x . Alors l'orbite de tout point de M est égale à M .*

Exercice 8.7. *Dans le cas analytique, l'inclusion $H(x) \supset \mathcal{LV}(x)$ est une égalité.*

Il suffit de démontrer que $(\varphi_Y^t)_ X(x) \subset \mathcal{LV}(x)$ pour tous X et Y dans \mathcal{LV} .*

On vérifie pour ceci que la courbe $t \mapsto (\varphi_Y^t)_ X(x) \in T_x M$ est tangente à $\mathcal{LV}(x)$ à tous les ordres en 0. Ses dérivées successives sont en effet $(\mathcal{L}_X)^k Y$.*

Soit G un sous groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$ qui en est une sous variété. Soit \mathfrak{g} l'espace tangent de G en l'identité et soit a une action différentiable de G sur une variété M . A tout vecteur $v \in \mathfrak{g}$, on associe le champ de vecteurs sur M défini par $V_v(x) = \partial_g a(Id, x) \cdot v$. Rappelons que \mathfrak{g} est un sous espace vectoriel de l'ensemble des matrices \mathfrak{g} invariant par le crochet de Lie $[v, w] = vw - wv$ (produit de matrices). On en conclut que l'ensemble des champs V_v est invariant par crochet de Lie. Si G est connexe, alors le group $a_g, g \in G$ est précisément le groupe \mathcal{G} engendré par les flots des champs V_v . On peut donc appliquer directement le théorème de l'orbite et conclure que les orbites $a(G, x)$ vérifient sa conclusion pour tout x (avec $H(x) = \partial_g a(Id, x) \cdot \mathfrak{g}$).

Si G n'est pas connexe, alors on considère la composante G_0 de l'identité dans G . C'est un sous groupe distingué de G , qui est aussi une sous-variété. Le quotient G/G_0 est discret, donc dénombrable. Chaque G -orbite est donc une réunion au plus dénombrable de G_0 -orbites difféomorphes, elle vérifie donc les conclusions du théorème de l'orbite (avec le même espace tangent $H(x)$ que ci-dessus).

8.3 Formes de Pfaff

Une forme différentielle de degré un, ou forme de Pfaff, sur la variété M est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'une forme linéaire α_x sur $T_x M$. On demande de plus que cette forme linéaire dépende régulièrement du point x , c'est à dire par exemple que la fonction $x \mapsto \alpha_x \cdot V(x)$ soit différentiable pour tout champ de vecteurs x .

Exercice 8.8. *Toute forme de Pfaff α engendre une application linéaire A des champs de vecteurs vers les fonctions, qui est $C^\infty(M)$ -linéaire, c'est à dire telle que $A(fX) = fA(x)$. Réciproquement, montrer que tout application linéaire de l'espace des champs de vecteurs C^∞ vers $C^\infty(M)$ qui est $C^\infty(M)$ -linéaire est engendré par une forme de Pfaff.*

Pour toute fonction f , on définit la forme $\alpha_x = df_x$. Les formes de Pfaff de ce type sont dites exactes. Les formes localement exactes sont dites fermées.

Si α est une forme de Pfaff sur M et si $\psi : N \rightarrow M$ est une application différentiable, alors on définit la forme $\psi^* \alpha$ sur N par

$$(\psi^* \alpha)_x = \alpha_{\psi(x)} \circ d\psi_x.$$

En particulier, si ψ est une paramétrisation locale de M , alors $\psi^* \alpha$ est la représentation locale de α . On remarque que, pour tout champ de vecteurs V sur M , on a

$$(\psi^* \alpha) \cdot (\psi_*^{-1} V) = (\alpha \cdot V) \circ \psi$$

c'est à dire qu'on peut calculer $\alpha \cdot V$ dans les cartes. Comme $\psi^*(df) = d(f \circ \psi)$, être exacte ou fermée est invariant par difféomorphisme.

Les formes de Pfaff s'intègrent le long des courbes. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est une courbe C^1 , on définit $\int_\gamma \alpha := \int_0^1 \alpha_{\dot{\gamma}(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) dt$. Pour toute application ψ , on a $\int_{\psi \circ \gamma} \alpha = \int_\gamma \psi^* \alpha$. Dans le cas d'une forme exacte, on a $\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

De la même façon que le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de l'espace \mathbb{R}^n s'identifie à \mathbb{R}^n on pourrait penser qu'il y a peu de différences entre les champs de vecteurs et les formes de Pfaff. Mais ce n'est pas le cas. Par exemple, deux champs de vecteurs sont équivalents en des points non singuliers, mais il n'en est pas de même des formes de Pfaff : si toutes les formes de Pfaff étaient localement équivalentes, elles seraient toutes fermées, ce n'est pas le cas.

Exercice 8.9. *Montrer que la forme $\alpha = x_1 dx_2$ sur \mathbb{R}^2 n'est pas fermée. En effet, si $\alpha = df$, alors $\partial_{12} f = 1$ et $\partial_{21} f = 0$, ce qui contredit le théorème de Schwarz.*

À toute forme de Pfaff α , on associe le champ de sous-espaces $K(x) = \ker \alpha_x$. C'est un champ d'hyperplans si la forme ne s'annule pas. Réciproquement, tout champ d'hyperplans peut localement être représenté comme noyau d'une forme de Pfaff α non nulle. Si les formes de Pfaff α et β ont le même champ de noyaux, alors il existe une fonction non nulle f telle que $\alpha = f\beta$.

Propriété 8.18. *Soit α une forme de Pfaff non nulle en x_0 . Le champ de noyaux de α est intégrable si et seulement si il existe des fonction f et g telles que $\alpha = gdf$ au voisinage de x_0 .*

On dit parfois que g est un facteur intégrant de f . Le champ de noyau d'une forme fermée est donc intégrable.

◀ Si $\alpha = gdf$, alors df_{x_0} est non nul, donc f est la première coordonnée d'une carte locale ϕ en x_0 . La carte ϕ redresse le champ K .

Si le champ K est redressé en le champ constant $x_1 = 0$ dans la carte ϕ , et si f est la première coordonnée de ϕ , alors df et α ont le même noyau, donc il existe une fonction g telle que $\alpha = gdf$. ▶

La thermodynamique classique offre un exemple célèbre. On décrit un système physique par des quantités macroscopiques $x \in \mathbb{R}^n$. On a alors une forme α qui donne les échanges de chaleurs, c'est à dire que si les quantités macroscopiques x du systèmes évoluent au cours du temps (assez lentement pour rester en équilibre) suivant une courbe $\gamma(t)$, alors l'intégrale $\int_\gamma \alpha$ donne l'échange de chaleur total entre le système et son milieu. Les physiciens notent cette forme δQ .

Les évolutions $\gamma(t)$ tangentes au noyau de α sont les transformations adiabatiques. Si le champ de noyaux de la forme α n'était pas intégrable, il existerait un état x_0 depuis lequel on pourrait faire évoluer le système vers n'importe quel état x voisin de x_0 par des transformations adiabatiques. En effet ou bien les hypothèses du théorème de Frobenius sont satisfaites en chaque point, ou bien il existe un point x_0 et deux champs de vecteurs X et Y tangents au noyau de α tels que $\alpha \cdot [X, Y] \neq 0$ en x_0 , et donc au voisinage de x_0 . On peut alors appliquer le théorème de Chow (qui dans ce cadre est plutôt dû à Carathéodory) à un voisinage de x_0 .

Le second principe de la thermodynamique affirme que ce n'est pas le cas (sinon, on pourrait trouver une petite courbe fermée γ au voisinage de x_0 le long de laquelle le bilan de chaleur $\int_\gamma \alpha$ est non-nul). On conclut que le champ d'hyperplans $\ker \alpha$ est intégrable, et que la forme α admet localement un facteur intégrant, c'est à dire qu'il existe localement des fonctions $T > 0$ et S telles que $\alpha = TdS$.

8.4 Complément : fibrés vectoriels

Un fibré vectoriel de rang k au dessus de la variété M est la donnée, pour chaque point x de M , d'une espace vectoriel $F(x)$ de dimension k . On a alors un espace total $E := \{(x, v), x \in M, v \in F(x)\}$ et une projection naturelle $\pi : E \rightarrow M$. On suppose de plus qu'est donné un espace vectoriel \mathcal{S} de sections de π qui vérifie :

Pour tout $x_0 \in M$, il existe k sections s_1, \dots, s_k dans \mathcal{S} et un voisinage U de x_0 telles que, pour chaque $x \in U$, les vecteurs $s_i(x)$ forment une base de $F(x)$ et tel que toute section $s \in \mathcal{S}$ est, sur U , une combinaison linéaire à coefficients C^∞ des sections s_1, \dots, s_k .

On dit que le fibré est trivial sur U si il existe des sections s_1, \dots, s_k comme ci-dessus.

L'application

$$U \times \mathbb{R}^k \ni (x, t) \mapsto (x, \sum t_i s_i(x)) \in \pi^{-1}(U)$$

est alors bijective et linéaire dans les fibres, son inverse est appelé une trivialisations locale du fibré.

Il existe une unique structure de pré variété sur E telle que π est une submersion et telle que les sections de \mathcal{S} sont différentiables. Pour tout ouvert U de la base M qui est un ouvert de carte de M et qui est tel que le fibré est trivial au dessus de U , on a une paramétrisation

$$V \times \mathbb{R}^k \ni (y, t) \mapsto (\phi(y), \sum t_i s_i(\phi(y)))$$

de $\pi^{-1}(U)$, où V est un ouvert de \mathbb{R}^d et où $\phi : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme. Ces paramétrisations forment un atlas de E .

Exercice 8.10. Soient $\pi : E \rightarrow M$ et $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ deux fibrés vectoriels de base M . Soit $g : E \rightarrow \tilde{E}$ une application différentiable qui envoie chaque fibre $F(x) = \pi^{-1}(x)$ dans la fibre $\tilde{F}(x) = \tilde{\pi}^{-1}(x)$ par une injection linéaire. Montrer que g est un plongement de E dans \tilde{E} .

Les plongements de l'exercice sont appelés plongements de fibré vectoriel au dessus de l'identité.

Théorème 8.19. Tout fibré vectoriel de rang k au dessus de la variété M admet un plongement de fibré vectoriel au dessus de l'identité à valeurs dans le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^{d_M+k}$. Son espace total est une variété différentiable.

On rappelle qu'un sous fibré équivalent à un sous-fibré d'un fibré trivial est dit de type fini. Tout fibré vectoriel de rang fini au dessus d'une variété est donc de type fini.

Lemme 8.20. Si $\pi : E \rightarrow M$ est un sous fibré vectoriel de $M \times \mathbb{R}^n$ de rang k , alors il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ telle que l'application $(x, v) \mapsto (x, L(v))$ est un plongement au dessus de l'identité de E dans $M \times \mathbb{R}^{d_M+k}$.

◀ On suppose que $k > 0$. Soit $SE \subset M \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des $(x, v) \in E$ tels que $|v| = 1$ (norme Euclidienne dans \mathbb{R}^n). C'est une sous variété de E , de dimension $d_M + k - 1$, car 1 est une valeur régulière de l'application $v \mapsto |v|^2$ sur chaque fibre $F(x)$ et donc une valeur régulière de l'application $(x, v) \mapsto |v|^2$ sur E .

Considérons maintenant l'application $g : SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k}) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M+k}$ définie par

$$g(x, v, L) = L \cdot v.$$

C'est une submersion sur $SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$, et $g^{-1}(0)$ est donc une sous variété de $SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ de codimension $d_M + k$, c'est à dire de dimension strictement inférieure à la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$. Sa projection sur ce facteur est donc de mesure nulle, et il existe un point $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ qui n'est pas dans cette projection. Pour un tel L , on voit que $L|_{E(x)}$ est injective pour tout x , c'est à dire que l'application $(x, v) \mapsto (x, L \cdot v)$ est un plongement. ▶

Lemme 8.21. Si $\pi : E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel et si V est un ouvert relativement compact de M , alors il existe un plongement au dessus de l'identité de $\pi^{-1}(V)$ à valeurs dans $V \times \mathbb{R}^{d_M+k}$.

◀ On recouvre V par un nombre fini N d'ouverts U_i pour lesquels il existe une trivialisations $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$. On note $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ la seconde composante de ϕ_i . On considère une partition de l'unité f^i subordonnée aux ouverts U_i . Les applications $H_i(x, v) := f^i(x)h_i(x, v)$ sont étendues par 0 en dehors de $\pi^{-1}(U_i)$. L'application $H : E \rightarrow (\mathbb{R}^k)^N$ ayant pour composantes les H_i est linéaire et injective dans chaque fibre. En effet, pour tout $x \in M$, il existe i tel que $f_i(x) > 0$, mais alors l'application H_i est injective sur la fibre $F(x)$. On a donc un plongement $z \mapsto (\pi(z), H(z))$ de E dans $M \times \mathbb{R}^{kN}$. En appliquant le premier lemme, on en déduit l'existence d'un plongement linéaire dans les fibres à valeurs dans \mathbb{R}^{d_M+k} , de la forme $z \mapsto (\pi(z), L \circ H(z))$. ▶

Lemme 8.22. Si $\pi : E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel sur la variété M alors il existe un plongement au dessus de l'identité de E dans $V \times \mathbb{R}^{d_M+k}$.

◀ On considère une fonction propre g sur M , les ouverts $U_i = g^{-1}(]i, i+2])$ et une partition de l'unité f_i adaptée aux ouverts U_i . Pour chaque i , il existe une application linéaire dans les fibres $\theta_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M+k}$ telle que $z \mapsto (\pi(z), \theta_i(z))$ est un plongement. On prolonge θ_i par 0 en dehors de $\pi^{-1}(U_i)$, et on considère les applications $\Theta := \sum_k \theta_{2k}$ (au plus un des termes de cette somme est non nul pour chaque point) et $\tilde{\Theta} = \sum_k \theta_{2k+1}$. L'application $(\Theta, \tilde{\Theta}) : E \rightarrow \mathbb{R}^{2(d_M+k)}$ induit une injection linéaire sur chaque fibre. Au vu du premier lemme, il existe donc $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2(d_M+k)}, \mathbb{R}^{d_M+k})$ telle que $L \circ (\Theta, \tilde{\Theta})$ induit une injection linéaire dans chaque fibre. ▶

Le fibré tangent TM d'une variété est le fibré dont les sections sont les champs de vecteurs, le fibré cotangent T^*M est le fibré dont les sections sont les formes de Pfaff.

9 Formes différentielles

9.1 Formes multilinéaires alternées.

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie E , on note $A^k E$ l'espace des formes k -linéaires alternées sur E .

Pour $k = 1$, $A^1 E$ est le dual de E . Pour $k = \dim E$, $A^k E$ est de dimension 1. En particulier, $A^k(\mathbb{R}^k)$ est engendré par le déterminant.

Si l_1, \dots, l_k sont des éléments de E^* , alors on note $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ l'élément de $A^k E$ défini par

$$l_1 \wedge \dots \wedge l_k = \det((l_i(v_j))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}) = \det(Lv_1, \dots, Lv_k),$$

où $L : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ est l'application linéaire de coordonnées l_i . On remarque que l'application

$$(l_1, \dots, l_k) \mapsto l_1 \wedge \dots \wedge l_k$$

est linéaire et antisymétrique. Son image engendre linéairement $A^k E$ (mais, si $k > 1$, son image n'est pas égale à $A^k E$, on appelle décomposables les formes linéaires alternées de la forme $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$). La forme $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ est non nulle si et seulement si les formes linéaires l_i sont indépendantes dans E^* .

Propriété 9.1. Soit e_1, \dots, e_d une base de E et soit l_i la base duale. Alors les éléments $l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ forment une base de $A^k E$, dans laquelle chaque élément $a \in A^k E$ se décompose en

$$a = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}.$$

L'espace vectoriel $A^k E$ est donc de dimension $\binom{d}{k}$.

◀ Pour calculer $a(v_1, \dots, v_k)$, on écrit $v_i = \sum_j l_j(v_i) e_j$ et on décompose alors par multilinéarité

$$\begin{aligned} a(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} a(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) l_{j_1}(v_1) \cdots l_{j_k}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}}) l_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots l_{i_{\sigma(k)}}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} s(\sigma) l_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots l_{i_{\sigma(k)}}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) l_1 \wedge \dots \wedge l_k(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition découle facilement de l'observation que, si $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ sont des suites différentes, alors $l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$. ▶

Si $L : E \rightarrow F$ est linéaire, alors pour tout k on définit l'application linéaire $A^k L : A^k F \rightarrow A^k E$ par

$$(A^k L)\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Av_1, \dots, Av_k).$$

On la notera souvent L^* au lieu de $A^k L$. On constate que $L^* l_1 \wedge \dots \wedge L^* l_k = L^*(l_1 \wedge \dots \wedge l_k)$ pour $l_i \in E^*$. Si L est une application linéaire de E dans F et si $\dim E = k$, alors $A^k L$ est la multiplication par $\det L$, ce que l'on peut réécrire $L^* \alpha = (\det L)\alpha$. Plus généralement, si $L : E \rightarrow F$ est linéaire, si (e_i) est une base de E et (f_j) une base de F , alors les coefficients de $A^k L$ dans les bases $f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k}$ et $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ sont les déterminants des matrices $k \times k$ extraites de la matrice représentant L .

Étant donné une k forme alternée α sur E et un vecteur $v \in E$, on définit le produit intérieur $i_v \alpha$ comme la $(k-1)$ forme alternée

$$i_v \alpha(v_1 \dots v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Propriété 9.2.

$$i_v(l_1 \wedge \dots \wedge l_k) = \sum_i (-1)^{i+1} l_i(v) l_1 \wedge \dots \wedge l_{i-1} \wedge l_{i+1} \wedge \dots \wedge l_k.$$

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_v \beta.$$

◀ La première égalité est le développement du déterminant

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_k)(v, v_2, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} l_1(v) & l_1(v_2) & \dots & l_1(v_k) \\ l_2(v) & l_2(v_2) & \dots & l_2(v_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_k(v) & l_k(v_2) & \dots & l_k(v_k) \end{vmatrix}$$

par rapport à la première colonne. La seconde égalité découle facilement de la première. ▶ Le noyau $\ker \alpha$ de la forme α est défini comme l'ensemble des vecteurs v tels que la $(k-1)$ -forme $i_v \alpha$ est nulle.

Propriété 9.3. Le noyau d'une k -forme non-nulle α est de dimension au plus $d - k$. De plus, si ce noyau est de dimension $d - k$, alors la forme α est décomposable, et elle est proportionnelle à $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ pour toute base (l_1, \dots, l_k) de l'orthogonal de $\ker \alpha$.

◀ Soit F est un supplémentaire du noyau de α . La restriction de α à F est une k -forme non-nulle (le vérifier), donc $k \leq \dim F$. La k -forme α a un noyau de dimension $n - k$ si et seulement si elle est décomposable et non nulle. En effet, soit F un supplémentaire de $\ker \alpha$ et π est la projection sur F parallèlement à $\ker \alpha$. Alors la restriction β de α à F est une k -forme sur l'espace F de dimension k , donc elle est décomposable. La forme $\alpha = \pi^* \beta$ est donc décomposable. Le noyau de la forme décomposable non-nulle $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ est $\ker l_1 \cap \cdots \cap \ker l_k$. ▶

Définissons maintenant le produit extérieur $\wedge : A^k E \times A^l E \longrightarrow A^{k+l} E$ par les formules

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1 \dots v_{k+l}) &:= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} s(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in Q(k,l)} s(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}), \end{aligned}$$

où $Q(k, l) \subset \mathfrak{S}_{k+l}$ est l'ensemble des permutations σ telles que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$ et $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \cdots < \sigma(k+l)$; cet ensemble contient un élément dans chaque classe à droite de $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l$. Le produit extérieur est bilinéaire, et vérifie

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$$

où $(-1)^{kl}$ est la signature de la permutation $(1, \dots, k+l) \mapsto (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$.

Propriété 9.4. On a

$$(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k) \wedge (l_{k+1} \wedge \cdots \wedge l_{k+l}) = l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$$

pour toutes formes linéaires l_1, \dots, l_{k+l} . Le produit extérieur est donc associatif.

◀ Posons $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ et $\beta = l_{k+1} \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$.

Si les formes l_1, \dots, l_{k+l} sont linéairement indépendantes, alors il existe des vecteurs $v_j, 1 \leq j \leq k+l$ tels que $l_i(v_j) = \delta_{i,j}$. On a alors, pour ces vecteurs,

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = 1 = l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}(v_1, \dots, v_{k+l}).$$

On déduit de ce calcul que l'égalité voulue est satisfaite dans le cas où $\alpha \wedge \beta$ est nulle (ce qui ne peut arriver que si les formes $l_i, 1 < i < l+k$ sont liées).

Si les formes (l_1, \dots, l_k) sont liées, les deux membres sont nuls et l'égalité est satisfaite. Il en est de même si les formes $(l_{k+1}, \dots, l_{k+l})$ sont liées.

Dans les autres cas, le noyau $\ker \alpha = \ker l_1 \cap \cdots \cap \ker l_k$ est de dimension $d - k$, et le noyau $\ker \beta = \ker l_{k+1} \cap \cdots \cap \ker l_{k+l}$ est de dimension $d - l$. L'intersection $\ker \alpha \cap \ker \beta$ est de dimension au moins $d - (k+l)$. Il découle de la définition de $\alpha \wedge \beta$ que $\ker \alpha \cap \ker \beta \subset \ker(\alpha \wedge \beta)$.

Si la forme $(k+l)$ -forme $\alpha \wedge \beta$ est non nulle (le cas où elle est nulle a déjà été traité) son noyau est de dimension au plus $d - (k+l)$ donc en l'occurrence égale à $d - (k+l)$. Ce noyau est donc égal à $\ker \alpha \cap \ker \beta = \bigcap_{i=1}^{k+l} \ker l_i$ et la forme $\alpha \wedge \beta$ est proportionnelle à $l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$. Le calcul initial de cette preuve montre que le coefficient de proportionnalité est égal à un. ▶

En particulier, cette application coïncide avec celle que nous avons déjà définie de $A^1 E \times A^1 E$ dans $A^2 E$.

L'ensemble des k -formes décomposables est un cône. Pour l'étudier, on considère son image N dans le projectif $G(1, A^k E)$. N est donc l'ensemble des droites vectorielles de $A^k E$ dirigées par des formes décomposables non nulles. On fixe une base et on identifie E à \mathbb{R}^d . Le groupe orthogonal $O(d)$ agit sur $G(1, A^k \mathbb{R}^d)$ par $O, \alpha \mapsto (O^{-1})^* \alpha$. Comme $O(d)$ est compact cette action est propre, ses orbites sont des variétés. La trace N des formes décomposables sur $G(1, A^k \mathbb{R}^d)$ est une orbite de cette action, c'est donc une variété. Le groupe isotrope des transformations qui fixent $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ est le groupe $O(k) \times O(d-k)$ des transformations orthogonales qui fixent $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. La variété N est donc difféomorphe à la grassmannienne $G(k, d)$, ou à la Grassmannienne $G(d-k, d)$.

On construit directement une bijection de $G(k, d)$ dans N de la façon suivante : étant donné $F \in G(d-k, d)$ on prend une base l_1, \dots, l_k de l'orthogonal de F dans $(\mathbb{R}^d)^*$ et on associe à F la droite vectorielle dirigée forme $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$, qui est non-nulle. Cette droite ne dépend pas du choix de la base (mais la forme $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ en dépend, à un facteur près). Le passage par l'action du groupe orthogonal ci-dessus permet de montrer sans effort que l'application que nous venons de définir est bien un difféomorphisme.

L'ensemble des formes décomposables non nulles est donc une sous-variété de $A^k E$ de dimension $1 + k(d-k)$. On vérifie que $1 + k(d-k) < \binom{d}{k}$ sauf si $k \leq 1$ ou $k \geq d-1$.

9.2 Formes différentielles

Une k -forme différentielle sur la variété M est la donnée, pour chaque $x \in M$, d'une forme k -linéaire alternée α_x sur $T_x M$. On suppose de plus que α_x dépend régulièrement de x , c'est à dire que, étant donnés k champs de vecteurs différentiables X_1, \dots, X_k sur M , la fonction $x \mapsto \alpha_x(X_1, \dots, X_k)$ est différentiable. Il est pratique d'assimiler les fonction à des 0-formes.

Il existe un unique fibré vectoriel $A^k(TM)$ au dessus de M dont les fibres sont les espaces $A^k T_x M$ et dont les sections différentiables sont les formes différentielles de degré k . Les formes de Pfaff sont les formes différentielles de degré un.

Une k -forme différentielle α engendre donc une application \mathbb{R} -multilinéaire alternée sur l'espace des champs de vecteurs dans $C^\infty(M)$. Réciproquement, une telle application multilinéaire alternée a "vient" d'une forme différentielle si et seulement si elle vérifie

$$a(fX_1, X_2, \dots, X_k) = fa(X_1, \dots, X_k)$$

pour toute fonction f de classe C^∞ (la preuve est la même que pour les formes de Pfaff).

On note $\Lambda^k M$ l'ensemble des k -formes différentielles sur M . On définit fibre à fibre le produit $\wedge : \Lambda^k M \times \Lambda^l M \rightarrow \Lambda^{k+l} M$.

Si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application différentiable et si α est une k -forme sur N , alors on définit la forme $\varphi^* \alpha$ sur M par

$$(\varphi^* \alpha)_x = A^k(d\varphi_x) \alpha_{\varphi(x)}$$

c'est à dire

$$(\varphi^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\varphi(x)}(d\varphi_x \cdot v_1, \dots, d\varphi_x \cdot v_k).$$

On voit que $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ et on rappelle que $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$ pour toute fonction f . Une k -forme différentielle est dite décomposable si elle s'écrit $gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k$. Si α est décomposable, alors $\varphi^* \alpha$ l'est aussi, au vu de la propriété ci-dessous.

Propriété 9.5.

$$\varphi^*(gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (g \circ \varphi)d(f_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\varphi^*(gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (\varphi^* g)(\varphi^* df_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* df_k).$$

DÉMONSTRATION. Pour vérifier cette égalité, on constate que

$$\begin{aligned} \varphi^*(gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k)_x(v_1, \dots, v_k) &= g \circ \varphi(x) ((df_1)_{\varphi(x)} \wedge \dots \wedge (df_k)_{\varphi(x)})(d\varphi_x \cdot v_1, \dots, d\varphi_x \cdot v_k) \\ &= g \circ \varphi(x) \det(((df_i)_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x \cdot v_j)_{i,j}) \\ &= g \circ \varphi(x) \det((d(f_i \circ \varphi)_x \cdot v_j)_{i,j}) \\ &= (g \circ \varphi)d(f_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi). \end{aligned}$$

► Toute k -forme différentielle sur \mathbb{R}^d est de la forme

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

où dx_i désigne la forme linéaire l_i de la base duale canonique (qui est aussi la forme df pour $f = x_i$).

Si α est une forme sur M et si φ est une paramétrisation locale de M au voisinage de x_0 , alors $\varphi^* \alpha$ est une forme sur \mathbb{R}^d , c'est donc une somme finie de formes décomposables. On en déduit que α est localement une somme finie de formes décomposables. En utilisant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de M par des disques plongés, on conclut :

Proposition 9.6. *Toute k -forme différentielle sur la variété M est une somme localement finie de formes décomposables.*

On a aussi

Propriété 9.7. $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta$.

En effet cette égalité est clairement satisfaite lorsque α et β sont décomposables, et les deux membres sont linéaires. La proposition suivante sera utile :

Proposition 9.8. Soit α une forme décomposable non nulle en x_0 . Considérons deux décompositions $\alpha = f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$ et $\alpha = \tilde{f} d\tilde{g}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{g}_k$ au voisinage de x_0 . Alors il existe un difféomorphisme local ϕ de \mathbb{R}^k tel que, au voisinage de x_0 ,

$$(\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_k(x)) = \phi(g_1(x), \dots, g_k(x)).$$

En conséquence,

$$(d\tilde{g}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{g}_k)_x = \det(d\phi(g_1(x), \dots, g_k(x)))(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)_x.$$

◀ Considérons le champ de sous-espaces de dimension $d - k$ donné par $H(x) = \ker \alpha_x$. Ce champ est intégrable, ses feuilles locales sont les fibres de la submersion $\psi : M \ni x \mapsto (g_1(x), \dots, g_k(x)) \in \mathbb{R}^k$. Ce sont aussi les fibres de la submersion $\tilde{\psi} : M \ni x \mapsto (\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_k(x)) \in \mathbb{R}^k$. Soit N un petit disque de dimension k transverse à $H(x_0)$. La restriction à N de chacune des submersions ψ et $\tilde{\psi}$ est un difféomorphisme sur son image. L'application $\phi := \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ convient. ▶

Étant donné un champ de vecteurs X sur M , on définit l'opérateur \mathcal{L}_X sur $\Lambda^k M$ par

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_x = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_X^s)^* \alpha)_x.$$

On remarque que, dans le cas où α est de degré 0, c'est à dire une fonction f , on a $(\varphi_X^s)^* f = f \circ \varphi_X^s$ et l'opérateur \mathcal{L}_X coïncide avec celui que nous avons déjà défini. On déduit de la propriété 9.7 par bilinéarité que :

Propriété 9.9. $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$.

Un calcul immédiat montre

Propriété 9.10. $\psi^*(\mathcal{L}_{\psi_* X} \alpha) = \mathcal{L}_X \alpha$.

On remarque aussi les identités $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$ et $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$, et finalement :

Propriété 9.11. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$.

◀ Cette égalité est vraie pour les formes de degré 0, c'est une des définitions du crochet de Lie. Au vu de l'identité $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$, elle est donc vraie pour toute 1 forme exacte $\alpha = df$. Au vu de la propriété 9.9, elle est donc satisfaite pour toute forme décomposable, et donc pour toute forme. ▶

9.3 Intégration et formule de Stokes sur le cube.

On peut intégrer les d -formes différentielles sur \mathbb{R}^d . En définissant la d -forme de référence $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$, on peut écrire toute d -forme α sous la forme $\alpha_x = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$. Dans le cas où α est à support compact, on définit alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx.$$

Plus généralement, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, et toute forme α définie sur \mathbb{R}^d (ou sur un voisinage de K), on définit

$$\int_K \alpha := \int_K a(x) dx.$$

Cette définition est moins naïve qu'il n'y paraît au vu de la proposition suivante. On dit que le difféomorphisme φ de \mathbb{R}^d (ou entre ouverts de \mathbb{R}^d) préserve l'orientations si $\det d\varphi > 0$ en tout point.

Proposition 9.12. Soit V un ouvert de \mathbb{R}^d , α une forme différentielle sur V , et K un compact contenue dans V . Soit $\varphi : W \rightarrow V$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation, alors

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_K \alpha.$$

◀ En écrivant α sous la forme $\alpha_x = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$, on a

$$(\varphi^* \alpha)_x = (\det d\varphi_x) a(\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

On a donc $\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} (\det d\varphi_x) a(\varphi(x)) dx$, et, comme φ préserve l'orientation

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} |\det d\varphi_x| a(\varphi(x)) dx = \int_K a(x) dx,$$

où la dernière égalité est la formule de changement de variables dans les intégrales multiples. ►

Considérons le cube $C = [0, 1]^d$. Il a $2d$ faces que nous notons $C_1^0 = \{0\} \times [0, 1]^{d-1}$, $C_1^1 = \{1\} \times [0, 1]^{d-1}$, $C_2^0 = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]^{d-2}$, etc.. En notant ω_i la forme $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d$, toute $(d-1)$ -forme α s'écrit $\sum_i a_i(x) \omega_i$. La restriction de chacune des formes multilinéaires ω_j , $j \neq i$ à un sous-espace contenant e_i est nulle. Il est donc naturel de poser

$$\int_{C_i^0} \alpha := \int_{[0,1]^{d-1}} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d$$

et

$$\int_{C_i^1} \alpha := \int_{[0,1]^{d-1}} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d.$$

On définit alors l'intégrale de α sur le bord de C par

$$\int_{\partial C} \alpha := \sum_{i=1}^d (-1)^i \left(\int_{C_i^0} \alpha - \int_{C_i^1} \alpha \right).$$

Comme

$$a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d) - a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) = \int_0^1 \partial_i a_i(x_1, \dots, x_d) dx_i,$$

on obtient

$$\int_{\partial C} \alpha = \int_C \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \partial_i a(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

En notant $d\alpha$ la d -forme

$$d\alpha := \left(\sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \partial_i a(x_1, \dots, x_d) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

on a démontré :

Proposition 9.13. $\int_{\partial C} \alpha = \int_C d\alpha$

On va maintenant extrapoler autour de cette formule. On va définir une différentielle d sur les formes différentielles, la différentielle extérieure, une notion d'intégration sur les variétés et une notion de bord de sorte que la formule de Stokes $\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha$ soit satisfaite.

9.4 Différentielle extérieure

On définit un opérateur d qui, à une k -forme sur une variété M associe une $k+1$ -forme. On demande au vu de l'étude ci-dessus que la différentielle de la forme $a(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$ sur \mathbb{R}^k soit $\partial_1 a(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}$. Cette dernière forme n'est autre que $da \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}$. On demande aussi que l'opérateur d se comporte bien par changement de carte, et plus généralement que

$$\varphi^* d\alpha = d(\varphi^* \alpha)$$

pour toute application différentiable φ . Au vu de ces deux propriétés, la différentielle d'une forme décomposable $\alpha = fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$ ne peut être que

$$df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k.$$

En effet, on considère l'application $\varphi(x) = (f(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$. On a alors $fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k = \varphi^*(x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k)$ et donc $d(fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = \varphi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$.

Théorème 9.14. Soit M une variété. Il existe une unique famille d'applications \mathbb{R} -linéaires $d_k : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$ telles que

$$(d_k \alpha)_x = (df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)_x$$

si $\alpha = fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$ au voisinage de x .

Par définition, on a $d_1 f = df$ pour toute fonction f . On notera d la différentielle d_k .

◀ L'unicité est claire, mais pas l'existence. Commençons par démontrer que, si α est une forme nulle au voisinage de x , alors, pour toute décomposition locale $\alpha = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$ on a $(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$. Si $(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$, il est clair que $(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$. Si $(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x \neq 0$, on doit avoir $f = 0$ sur un voisinage de x , donc $df_x = 0$, et on a encore $(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$.

Considérons maintenant une k -forme décomposable α et deux décompositions $\alpha = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$ et $\alpha = \tilde{f} d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k$. On doit montrer l'égalité

$$(d\tilde{f} \wedge d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k)_x = (df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x$$

pour tout x . Montrons cette égalité en un point x_0 en lequel α_{x_0} est non-nulle. Il découle de la proposition 9.8 qu'il existe un difféomorphisme local ϕ de \mathbb{R}^k tel que

$$(d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k)_x = \det(d\phi(g_1(x), \dots, g_k(x))) (dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x$$

au voisinage de x_0 . On a alors $\tilde{f}(x) = f(x)h(g_1(x), \dots, g_k(x))$ où $h = 1/\det d\phi$. On déduit que $d\tilde{f} = hdf + \sum_i f \partial_i h dg_i$, et on conclut l'égalité voulue puisque $dg_i \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k = 0$.

L'égalité voulue est démontrée sur l'ouvert U des points x en lesquels $\alpha_x \neq 0$. Par continuité, elle est aussi valide sur l'adhérence de cet ouvert. Nous avons aussi démontré qu'elle est satisfaisante sur le complémentaire de cette adhérence, donc partout. ▶

On appelle différentielle extérieure les applications d_k données par le théorème, elles sont en général toutes notées d , et c'est aussi ce que nous ferons. On déduit immédiatement de la définition :

Propriété 9.15. $(d_k \alpha)_x = 0$ si α est nulle au voisinage de x .

$d_1 f = df$ pour toute fonction f .

$d_{k+1} \circ d_k = 0$.

$d_k(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d_k \alpha)$ Pour toute application différentiable φ .

$d_{k+l}(\alpha \wedge \beta) = (d_k \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d_l \beta)$.

On notera d pour d_k .

◀ Il suffit de démontrer ces propriétés pour des formes décomposables, et elles sont immédiates. Détaillons juste le calcul pour la dernière. Si $\alpha = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$ et $\beta = h dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l}$, alors $\alpha \wedge \beta = f h dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l}$ donc

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= hdf \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} + f dh \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} \\ &= (df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) \wedge (h dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l}) + f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \wedge dh \wedge dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta). \end{aligned}$$

▶

Lemme 9.16. Si α_s est une famille (régulière) de k -formes, alors $\partial_s(d\alpha_s) = d(\partial_s \alpha_s)$.

◀ On se place au voisinage d'un point x_0 . En prenant des fonctions f_1, \dots, f_d qui sont les coordonnées d'une carte locale, on voit que les formes $(df_i)_x$ engendrent $(T_x M)^*$ pour x proche de x_0 . Toute k -forme différentielle au voisinage de x_0 s'écrit donc

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}.$$

La famille α_s s'écrit

$$\alpha_s = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(s, x) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(\partial_s \alpha_s) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \partial_x (\partial_s a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \partial_s (\partial_x a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} = \partial_s (d\alpha_s). \end{aligned}$$

▶

En dérivant par rapport à s l'égalité $d((\varphi_X^s)^* \alpha) = (\varphi_X^s)^*(d\alpha)$, on obtient :

Proposition 9.17. Pour tout champ de vecteurs X on a $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$.

On a finalement :

Proposition 9.18 (Formule de Cartan).

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d.$$

◀ On vérifie pour les formes décomposables $\alpha = fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$:

$$\begin{aligned} i_X d\alpha &= \mathcal{L}_X fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k - \mathcal{L}_X g_1 df \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_k + \mathcal{L}_X g_2 df \wedge dg_1 \wedge dg_3 \cdots \wedge dg_k + \cdots \\ d(i_X \alpha) &= d(f\mathcal{L}_X g_1 dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_k - f\mathcal{L}_X g_2 dg_1 \wedge dg_3 \cdots \wedge dg_k + \cdots) \\ &= d(f\mathcal{L}_X g_1) \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_k - d(f\mathcal{L}_X g_2) \wedge dg_1 \wedge dg_3 \cdots \wedge dg_k + \cdots \\ &= \mathcal{L}_X g_1 df \wedge dg_2 \cdots \wedge dg_k - \mathcal{L}_X g_2 df \wedge dg_1 \wedge dg_3 \cdots \wedge dg_k + \cdots \\ &\quad + f(\mathcal{L}_X dg_1) \wedge dg_2 \cdots \wedge dg_k - fd(\mathcal{L}_X dg_2) \wedge dg_1 \wedge dg_3 \cdots \wedge dg_k + \cdots \\ \mathcal{L}_X \alpha &= \mathcal{L}_X fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k + f(\mathcal{L}_X dg_1) \wedge dg_2 \cdots \wedge dg_k + fdg_1 \wedge (\mathcal{L}_X dg_2) \wedge dg_3 \cdots \wedge dg_k + \cdots . \end{aligned}$$

On peut aussi faire une preuve par récurrence sur le degré en utilisant les formules $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ et $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$. ▶

Soit M une variété munie d'une forme volume ω (c'est à dire une d -forme qui ne s'annule pas). Pour tout champ de vecteurs X , on considère la $(d-1)$ -forme $i_X \omega$ et sa différentielle $d(i_X \omega) = \mathcal{L}_X \omega$. Cette d -forme est de la forme $f\omega$ et on appelle divergence de X (par rapport à la forme volume ω) la fonction f . La divergence $\text{div} X$ de X est donc la fonction définie par la formule

$$(\text{div} X)\omega = \mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega).$$

Exercice 9.1. Sur \mathbb{R}^d muni de la forme volume canonique $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, la divergence du vecteur $X = \sum_i X_i(x)e_i$ s'écrit $\text{div} X = \sum_i \partial_i X_i$.

Munissons maintenant \mathbb{R}^3 de son produit Euclidien usuel et de sa forme volume canonique ω . À tout champ de vecteurs X , on associe la 1-forme $\alpha_x \cdot v = \langle X(x), v \rangle$ et la 2-forme $i_X \omega$. On remarque que l'application $v \mapsto i_v \omega$ est un isomorphisme entre $A^1 \mathbb{R}^3$ et $A^2 \mathbb{R}^3$. On définit alors le rotationnel du champ de vecteurs X comme l'unique champ de vecteur tel que

$$d(\alpha_X) = i_{\text{rot } X} \omega.$$

9.5 Orientation et intégration

Le bon comportement de l'intégrale des formes différentielles sur \mathbb{R}^d (proposition 9.12) permet d'envisager une extension de l'intégrale aux variétés. Il y a toutefois une difficulté liée à la contrainte, dans la proposition 9.12, que le difféomorphisme φ préserve l'orientation. Ceci nous conduit aux définitions suivantes.

Un atlas de la variété M est dit orienté si tous les changements de cartes $\varphi \circ \psi^{-1}$ sont des difféomorphismes de \mathbb{R}^d qui préservent l'orientation.

Une variété orientée est une variété munie d'un atlas orienté. Une orientation d'une variété M est le choix d'une structure de variété orientée pour M (c'est à dire d'un atlas orienté compatible avec la structure de variété de M). Une variété orientable est une variété admettant une orientation.

Une orientation de M détermine une orientation de $T_x M$ pour tout x . Cette orientation dépend continûment de x au sens où, si (V_i) sont des champs de vecteurs tels que les évaluations $V_1(x), \dots, V_d(x)$ forment une base orientée de $T_x M$, alors les $V_i(y)$ forment une base orientée de $T_y M$ pour y proche de x . Réciproquement, la donnée d'une orientation de $T_x M$ pour tout x dépendant continûment de x détermine une orientation de M .

Le choix de deux orientations d'une variété M détermine donc un signe localement constant. Une variété orientable connexe admet exactement deux orientations.

Soit α une d -forme sur la variété orientée M supportée dans un compact d'un domaine de carte orientée. On définit l'intégrale

$$\int_M \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^* \alpha$$

où $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ est n'importe quel plongement orienté dont l'image contient le support de α . La proposition 9.12 implique que cette valeur ne dépend pas du choix de φ . En effet, si ψ est un autre plongement orienté, alors $\psi^* \alpha = (\varphi^{-1} \circ \psi)^*(\varphi^* \alpha)$, et $\varphi^{-1} \circ \psi$ préserve l'orientation, donc $\int \psi^* \alpha = \int \varphi^* \alpha$.

Soit $\Lambda_c^d M$ l'espace des d formes à support compact sur M .

Définition 9.19. L'intégrale $\alpha \mapsto \int_M \alpha$ est l'unique forme linéaire sur $\Lambda_c^d M$ telle que $\int_M \alpha = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^* \alpha$ lorsque φ est un plongement orienté et α une d -forme supportée dans l'image de φ .

Pour toute partie compacte K de M , l'intégrale $\alpha \mapsto \int_K \alpha$ est l'unique forme linéaire sur $\Lambda^d M$ telle que $\int_K \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha$ lorsque φ est un plongement orienté et α une d -forme supportée dans l'image de φ .

Pour calculer $\int_K \alpha$, on recouvre le compact K par un nombre fini d'images U_i de paramétrisations orientées $\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow M$, on choisit une partition de l'unité f_i de M subordonnée au recouvrement $(U_i, M - K)$ de M , et on pose

$$\int_K \alpha = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(K)} \varphi_i^*(f_i \alpha) = \sum_i \int_K f_i \alpha.$$

Si (g_j) est une autre partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par ouverts de cartes, alors

$$\sum_j \int_K g_j \alpha = \sum_{i,j} \int_K f_i g_j \alpha = \sum_i \int_K f_i \alpha,$$

c'est à dire que la somme est indépendante de la partition de l'unité choisie.

Propriété 9.20. Soit $\phi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme préservant l'orientation, soit K un compact de N , et soit α une d -forme sur N . On a a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha = \int_K \alpha$$

◀ Il suffit de montrer la formule pour les formes α supportées dans l'image d'une paramétrisation orientée φ . Dans ce cas, la forme $\phi^* \alpha$ est supportée dans l'image de la paramétrisation orientée $\phi^{-1} \circ \varphi$, et on a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha = \int_{(\phi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(\phi^{-1}(K))} (\phi^{-1} \circ \varphi)^* \phi^* \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_K \alpha.$$

▶

Étudions un peu plus la question de l'orientation. On donnera en particulier un exemple de variété non orientable. Une forme volume sur M est une d -forme ω (d est la dimension de M) ne s'annulant pas, c'est à dire que pour tout $x \in M$, la forme ω_x sur $T_x M$ est non nulle. Comme l'espace des d -formes alternées sur $T_x M$ est de dimension 1 pour tout x , si ω est une forme volume sur M , toute d -forme α sur M s'écrit $\alpha = f\omega$.

Proposition 9.21. La variété M est orientable si et seulement si elle admet une forme volume.

◀ Soit ω une forme volume sur M . Pour toute paramétrisation locale $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$, la forme $\varphi^* \omega$ est de la forme $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ avec une fonction f qui ne s'annule pas. On dit que la paramétrisation φ est positive si $f > 0$, négative si $f < 0$. Si φ est une paramétrisation négative, alors $\varphi \circ s$ est une paramétrisation positive, où s est la symétrie linéaire $(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_d)$. Les images des paramétrisations positives recouvrent donc M , et constituent un atlas de M . Si φ et ψ sont deux paramétrisations positive, alors $\varphi^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ et $(\psi)^* \omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ donc

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d) = \frac{f}{g \circ \psi^{-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d,$$

c'est à dire que $\det d(\psi^{-1} \circ \varphi)_x = f(x)/g(\psi^{-1}(x)) > 0$. L'atlas constitué des (inverses des) paramétrisations positives est donc orienté.

Réciproquement, considérons une variété orientée M , muni d'un atlas orienté constitué de cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$. Considérons une partition de l'unité (f_i) subordonnée aux ouverts relativement compacts $\varphi_i^{-1}(B)$. La forme $\alpha := \sum_i f_i \varphi_i^* \omega$, où ω est la d -forme canonique sur \mathbb{R}^d , est alors une forme volume. En effet, étant donné une paramétrisation orientée ψ de M en un point x , on a

$$\psi^* \alpha = \sum_i (f_i \circ \psi) (\varphi_i \circ \psi)^* \omega = \left(\sum_i g_i (f_i \circ \psi) \right) \omega$$

où chaque fonction g_i est strictement positive sur $\psi^{-1}(U_i)$. De plus, pour tout point x du domaine de ψ , il existe i tel que $f_i \circ \psi(x) > 0$, donc $g_i(x)(f_i \circ \psi)(x) > 0$, donc $(\sum_i g_i (f_i \circ \psi))(x) > 0$. Nous avons montré que la d -forme α ne s'annule pas. ▶

Propriété 9.22. Soit $\pi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme local, et soit φ un difféomorphisme de M tel que $\pi \circ \varphi = \pi$. Si N est orientable, alors M l'est aussi, et φ préserve l'orientation.

◀ Soit ω une forme volume sur N . Alors $\pi^*\omega$ est une forme volume sur M , qui est donc orientable. De plus, $\varphi^*(\pi^*\omega) = (\pi \circ \varphi)^*\omega = \pi^*\omega$ donc φ préserve la forme volume $\pi^*\omega$ sur M , et donc l'orientation. ▶

La sphère S^d est orientable. On obtient un orientation de $T_x S^d$ en choisissant les bases v_1, \dots, v_d telles que x, v_1, \dots, v_d est une base orientée de \mathbb{R}^{d+1} . L'application $-Id$ préserve l'orientation de \mathbb{R}^d si et seulement si d est pair. On conclut que l'espace projectif $\mathbb{R}P^d = S^d / -Id$ est orientable si et seulement si d est impair. On a utilisé :

Propriété 9.23. Soit M une variété orientable et G un groupe discret de difféomorphisme préservant l'orientation de M agissant librement et proprement. Alors le quotient M/G est une variété orientable.

Soit $A^d TM$ le fibré vectoriel de rang un au-dessus de M dont les d -formes sont les sections. On peut le considérer comme un sous-fibré de $M \times \mathbb{R}^{d+1}$. Son intersection \hat{M} avec $M \times S^d$ est une variété de dimension d , qui est telle que la projection $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ est un revêtement à deux feuillets. La symétrie $\sigma : (x, v) \mapsto (x, -v)$ préserve \hat{M} et sa restriction est un difféomorphisme σ tel que $\pi \circ \sigma = \pi$ et $\sigma \circ \sigma = Id$.

Proposition 9.24. La variété \hat{M} est orientable, et la variété M est orientable si et seulement si σ préserve l'orientation.

On appelle \hat{M} le revêtement des orientations.

◀ Tout point \hat{x} de \hat{M} est de la forme (x, ω) où ω est une d -forme non-nulle sur $T_x M$. On définit une forme volume α sur \hat{M} par

$$\alpha_{(x, \omega)} := d\pi_{(x, \omega)}^* \omega.$$

La variété \hat{M} est donc orientable. La seconde affirmation découle des propriétés ci-dessus. ▶

Exercice 9.2. Supposons M connexe. Montrer que M est orientable si et seulement si \hat{M} est connexe.

9.6 Domaines à bord et formule de Stokes

On note H^d le demi plan $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 9.25. Soit N une variété. On dit que $M \subset N$ est un domaine à bord si pour tout $x \in M$ il existe une carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de N dont le domaine U contient x et telle que $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap H^d$ (on ne demande pas que $\phi(x) = 0$).

On appelle redressement à bord de M les cartes de M vérifiant la propriété ci-dessus.

Notons $\overset{\circ}{M}$ l'intérieur de M dans N au sens topologique. Le point $x \in M$ appartient à l'intérieur $\overset{\circ}{M}$ si et seulement si il existe une carte ϕ de N en x dont le domaine est contenu dans M . C'est aussi équivalent à l'existence d'un redressement à bord ϕ de M tel que $\phi(x)$ est dans l'intérieur de H^d .

Notons $\partial M := M - \overset{\circ}{M}$ le bord de M en tant que domaine à bord. Attention, si M n'est pas fermé dans N , ∂M n'est pas le bord topologique de M dans N . Considérer par exemple $]0, 1[\times]0, 1]$, qui est un domaine à bord difféomorphe à H^d , dont le bord en tant que domaine à bord est $]0, 1[\times \{1\}$ alors que son bord topologique est le carré.

Propriété 9.26. Les redressements à bords de M envoient le bord de M sur le bord de H^d . Plus précisément, si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un redressement à bord de M , alors $\phi(U \cap \partial M) = \phi(U) \cap \partial H^d$.

◀ Il suffit de montrer que $\phi(U \cap \overset{\circ}{M}) = \phi(U) \cap \overset{\circ}{H^d}$. C'est vrai car $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ est un homéomorphisme, $U \cap \overset{\circ}{M}$ est l'intérieur topologique de $U \cap M$ dans U , $\phi(U) \cap \overset{\circ}{H^d}$ est l'intérieur de H^d dans $\phi(U) \cap H^d$, et $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap H^d$. ▶

Les redressements à bord de M dont le domaine intersecte le bord de M sont donc des redressements du bord de M . Le bord de M est donc une sous variété de N , de dimension $d-1$. L'espace tangent $T_x N$ en un point du bord est découpé en trois parties : l'hyperplan $T_x(\partial M)$ des vecteurs tangents à ∂M , qui sont ceux que les redressements de M envoient dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$, l'ouvert des vecteurs entrants dans M , qui sont ceux que les redressements envoient dans $(-\infty, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}$, et les vecteurs sortants (les termes entrant et sortant sont donc définis au sens strict).

On dit que M est orientable (orientée) si son intérieur l'est. Si M est orientée, tous les espaces tangents $T_x M$, $x \in M$ sont orientés.

Le bord de M est orientable (en tant que variété de dimension $d-1$) si M l'est. On va déterminer une orientation de ∂M en fonction d'une orientation de M (il y a la une convention arbitraire, mais universellement acceptée car elle permet de ne pas avoir de signe dans le formule de Stokes) :

On dit que la base (v_2, \dots, v_d) de $T_x(\partial M)$ est orientée si (v, v_2, \dots, v_d) est une base orientée de $T_x M$ pour tout vecteur sortant v .

Montrons pour commencer que ce choix est indépendant du choix du vecteur sortant v . En effet, si w est un autre vecteur sortant, alors il s'écrit $av + a_2v_2 + \dots + a_dv_d$ avec $a > 0$. La base (w, v_2, \dots, v_d) est donc obtenue depuis la base (v, v_2, \dots, v_d) par la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ * & Id \end{pmatrix} \in Gl_d(\mathbb{R}),$$

qui est de déterminant $a > 0$.

Montrons maintenant que ce choix d'orientation est effectivement continu. On considère pour ceci des champs de vecteurs V_2, \dots, V_d tangents à ∂M et formant une base orientée en $x_0 \in \partial M$. On considère alors un champ de vecteurs V qui est sortant en x_0 . Alors le champ de vecteurs V est sortant au voisinage de x_0 , et $(V(x), V_2(x), \dots, V_d(x))$ est une base orientée de $T_x M$ pour tout x dans un voisinage de x_0 . Ceci implique que $(V_2(x), \dots, V_d(x))$ est une base orientée de $T_x(\partial M)$ pour tout x voisin de x_0 dans ∂M .

Par exemple, l'orientation de $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ en tant que bord de H^d est l'orientation donnée par (e_2, \dots, e_d) (c'est pour cette raison que nous avons travaillé avec le demi plan inférieur plutôt que supérieur). Ceci permet de donner une nouvelle définition de l'orientation du bord d'un domaine à bord : C'est l'unique orientation telle que la restriction au bord d'un redressement orienté de M est une carte orientée de ∂M (à valeurs dans ∂H^d muni de son orientation ci-dessus).

On peut utiliser cette convention pour orienter les faces du cube $C^d = [0, 1]^d$, (bien que celui-ci ne soit pas une variété à bord, il l'est quand on se restreint à la partie des points (x_i) dont au plus une coordonnée est égale à 0 ou 1). L'orientation de la face C_i^1 est $(-1)^{i+1}$ fois l'orientation donnée par $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d)$. Ici, $(-1)^{i+1}$ est la signature de la permutation circulaire $1, \dots, i \mapsto i, 1, \dots, i-1$. L'orientation de la face C_i^0 est $(-1)^i$ fois l'orientation donnée par $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d)$. Ceci coïncide avec les signes que nous avons mis dans la définition de $\int_{\partial C} \alpha$.

Théorème 9.27 (Stokes). *Soit α une $(d-1)$ -forme à support compact sur la variété N et M un domaine à bord orienté de N , alors*

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha$$

si ∂M est muni de l'orientation induite de celle de M .

◀ Montrons d'abord la formule dans le cas où $M = H^d \subset N = \mathbb{R}^d$. Elle prend la forme

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (i_1)^* \alpha = \int_{H^d} d\alpha$$

où $i_1 : (x_2, \dots, x_d) \mapsto (0, x_2, \dots, x_d)$ est la paramétrisation naturelle (et orientée) de ∂H^d . On pourrait se ramener au cas déjà fait du cube, mais on va plutôt refaire le calcul. On rappelle la notation $\omega_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d$. Considérons d'abord une forme α qui s'écrit $\alpha_x = a(x)\omega_1$. On a alors $i_1^* \alpha(x_2, \dots, x_d) = a(0, x_2, \dots, x_d) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d$ donc, par définition, $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (i_1)^* \alpha = \int_{y \in \mathbb{R}^{d-1}} a(0, y) dy$. Comme a est à support compact,

$$a(0, y) = \int_{-\infty}^0 \partial_1 a(t, y) dt$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (i_1)^* \alpha = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} a(0, y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{(-\infty, 0]} \partial_1 a(t, y) dt dy = \int_{H^d} \partial_1 a = \int_{H^d} d\alpha$$

puisque $d\alpha = da \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d = \partial_1 a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$. Dans le cas d'une forme $\alpha_x = a(x)\omega_i$, $i \geq 2$, on a $(i_1)^* \alpha = 0$, et

$$\int_{H^d} d\alpha = \int_{H^d} (-1)^{i+1} (\partial_i a) dx = (-1)^{i+1} \int_{H^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_i a(x_1, \dots, x_d) dx_i dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_d = 0$$

car

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_i a(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) dt = 0$$

puisque a est à support compact. La formule est donc satisfaite aussi dans ce cas (les deux termes sont nuls). La formule est donc satisfaite pour toute forme à support compact.

Considérons maintenant un domaine à bord $M \subset N$ général. Si $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ est une paramétrisation orientée de N qui envoie H^d dans M et si α est supportée sur l'image de φ , alors

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\varphi \circ i_1)^* \alpha = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} i_1^* (\varphi^* \alpha) = \int_{H^d} d(\varphi^* \alpha) = \int_{H^d} \varphi^*(d\alpha) = \int_M d\alpha.$$

La formule de Stokes est donc satisfaite par la forme α . Par linéarité, elle est donc satisfaite par toute forme α . ►