Le théorème de Kolmogorov

Mémoire de première année
Yusuke KAWAMOTO et Hector PELLETIER
Supervision Pr. Patrick BERNARD

Juin 2017

Résumé

Le théorème de Kolmogorov, énoncé en 1954, garantit la préservation de tores invariants lors d'une petite perturbation d'une équation hamiltonienne. Nous développons ici une preuve donnée par J. Féjoz, qui se veut proche de celle de Kolmogorov, dans le but d'en faciliter l'accès à un lecteur non familier avec le théorème.

1 Énoncé et preuve du théorème

1.1 Équations de Hamilton, transformations symplectiques

Les équations gouvernant l'évolution dans le temps d'un système mécanique soumis à des forces conservatives peuvent être mises sous la forme d'une équation hamiltonienne. Une telle équation est la donnée :

- D'un espace de phase $E = U \times V$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ou parfois $U \subset \mathbb{T}^n$, et $V \subset \mathbb{R}^n$. On notera ses éléments $X = (q, p)$.
- D'une fonction $H : E \to \mathbb{R}$, dite hamiltonien du système.

On associe alors à H le champ de vecteurs :

$$\dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} H(p, q)$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q} H(p, q)$$

Que l'on peut noter sous la forme plus compacte :

$$\dot{X} = J \cdot (\nabla H(X))^t, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on effectue le changement de variables $Y = \phi(X)$, avec ϕ un difféomorphisme, et qu'on pose $K(Y) = H(\phi^{-1}(Y))$. Si l'on veut que Y respecte encore l'équation de hamilton, il faut que ϕ vérifie :

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= J \cdot (\nabla K(Y))^t \\
(\partial\phi(X)) \cdot \dot{X} &= J \cdot (\nabla H(X) \cdot (\partial\phi^{-1}(Y)))^t \\
(\partial\phi(X)) \cdot J \cdot (\nabla H(X))^t &= J \cdot (\partial\phi^{-1}(Y)))^t \cdot (\nabla H(X))^t \\
(\partial\phi(X)) \cdot J &= J \cdot (\partial\phi^{-1}(Y)))^t \\
(\partial\phi(X)) \cdot J \cdot (\partial\phi(X)))^t &= J
\end{aligned}$$

Ainsi, si un difféomorphisme vérifie la condition $(\partial\phi) \cdot J \cdot (\partial\phi)^t = J$, on dira qu'il est symplectique (on parlera également de symplectomorphisme). La composition de deux morphismes symplectiques est un morphisme symplectique. On peut remarquer qu'une fonction différentiable vérifiant la condition sur un ouvert est, quitte à restreindre les domaines de départ et d'arrivée, un morphisme symplectique (c'est une conséquence du théorème d'inversion locale). Ainsi, si la limite d'une suite de morphismes symplectiques existe et est dérivable, cette limite est une transformation symplectique (quitte là encore à restreindre les domaines.)

Nous pouvons donner quelques exemples de morphismes symplectiques de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ dans lui-même :

— La première famille de morphismes est composée des transformation de forme : $L(\theta, r) = (\varphi(\theta), r \cdot (\partial\varphi(\theta))^{-1})$ Le produit dans le membre de droite est imposé par la condition de symplecticité. Les éléments de cette famille permettent de rectifier une trajectoire sur le tore à l'origine.

— La seconde famille est composée des transormations $T(\theta, r) = (\theta, r + \rho(\theta))$ avec $\rho(\theta) = R + S'(\theta)$, où R est une constante et S une fonction du tore dans $\mathbb{R}$. La condition sur ρ est là encore liée à la symplecticité :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial\theta} & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial\theta} & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial\theta} - (\frac{\partial\rho}{\partial\theta})^t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial\theta} &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^t
\end{aligned}$$

La matrice de ρ doit donc être symmétrique, ainsi $\rho d\theta$ est une 1-forme fermée sur $\mathbb{T}$, et ρ peut s'écrire comme la dérivée d'une fonction du tore, plus ou moins une constante. De telles transformations permettent de ramener à l'origine un tore qui se serait déplacé le long de r.

— $G(\theta, r) = L \circ T(\theta, r) = (\varphi(\theta), (r + \rho(\theta)) \cdot (\partial\varphi(\theta))^{-1})$ est symplectique par composition. C'est cette famille de morphismes que nous employons dans la démonstration du théorème de Kolmogorov.

Enfin, on notera que si $\dot{X}$ est localement le champ de vecteurs d'une équation hamiltonienne, alors son flot à un temps t quelconque ϕ est un morphisme symplectique (On pourra trouver une démonstration dans [4]).

1.2 Le théorème de Kolmogorov

On note $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore à n dimensions. L'espace des phases que l'on va considérer sera un voisinage de $T_0 = \mathbb{T}^n \times 0$. On notera un élément de l'espace des phases (θ, r) avec $\theta \in \mathbb{T}^n$ et $r \in \mathbb{R}^n$ dans un voisinage de 0. On pose $\mathcal{H}$ l'espace des hamiltoniens analytiques au voisinage de T_0.

Supposons

$$K \in \mathcal{K}^\alpha = \{K \in \mathcal{H} \ \text{ et } \ K(\theta, r) = c + \alpha \cdot r + O(r^2)\}$$

Les solutions à l'équation hamiltonienne sur T_0 sont alors :

$$(\theta, r)(t) = (\theta_0 + \alpha \cdot r, 0)$$

On dit que T_0 est un tore invariant de K, et les solutions sont dites quasipériodiques : S'il existe $k \in \mathbb{Q}^n$ tel que $k \cdot \alpha = 0$, alors la solution est périodique ; dans le cas contraire elle n'est pas périodique mais la trajectoire remplit le tore de façon dense. Dans tous les cas, la trajectoire reste confinée à T_0.

Les trajectoires quasipériodiques sont des solutions simples à l'équation de hamilton, et apparaissent par exemple pour les hamiltoniens ne dépendant que de r. Cependant, la plupart des hamiltoniens ne sont pas aussi sympathiques, et on ne peut en trouver une solution explicite par intégration. Il serait cependant appréciable qu'une solution quasipériodique comme ci-dessus soit préservée lors d'une petite perturbation du hamiltonien K. Le théorème suivant, énoncé par Kolmogorov en 1954 dans [1], apporte une réponse positive sous certaines conditions.

On suppose à présent α diophantien ("fortement non résonnant"), c'est à dire qu'il existe des constantes $\gamma, \tau > 0$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}, \quad \alpha \cdot k \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \tag{1}$$

Et on prend

$$K^0 \in \mathcal{K}^\alpha = c_0 + \alpha \cdot r + r^t \cdot Q_0(\theta) \cdot r + O(r^3)$$

Avec pour condition supplémentaire que la matrice formée de la moyenne des coefficients de Q_0 soit inversible :

$$\det \left(\int_{\mathbb{T}^n} Q_0(\theta) d\theta \right) \neq 0 \tag{2}$$

On a alors :

Kolmogorov (1954) . Pour tout $H \in \mathcal{H}$ suffisament proche de K^0, il existe G un changement de variables symplectique proche de l'identité tel que dans un voisinage de $G^{-1}(T_0)$, $H = K \circ G$, avec $K \in \mathcal{K}^\alpha$ proche de K_0.

Le théorème affirme que H possède un tore invariant, à savoir $G^{-1}(T_0)$, sur lequel les trajectoires ont de plus la même fréquence α que celles de K^0. L'existence d'un tel tore a des conséquences multiples. Par exemple, en mécanique, sous de bonnes conditions de non-dégénérescence, elle implique que le problème à N corps admet une solution quasipériodique. Les conséquences sont même plus fortes : Dans le cas d'un hamiltonien ne dépendant que de r, c'est toute une famille de tores invariants qui est préservée, de mesure presque totale mais dense nulle part.

1.3 Preuve du théorème de Kolmogorov

Nous suivrons ici la preuve donnée par J. Féjoz dans [2], elle-même proche de la preuve originale de Kolmogorov. K et G sont obtenus comme limite d'une suite de transformations symplectiques obtenues par approximations successives.

Posons tout d'abord quelques définitions. Pour tous $0 < s < 1$, on définit les extensions complexes suivantes :

$$\mathbb{T}^n_s = \{\theta \in \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} \text{ avec } \max_{0`j`n}(|\mathrm{Im}(\theta_j)|) \leq s\} T^n_s = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^n_s \times \mathbb{C}^n \text{ avec } \max_{0`j`n}(|r_j|) \leq s\}$$

Et on pose $\mathcal{H}_s$ les hamiltoniens holomorphes sur un voisinage T^n_s, ainsi que $\mathcal{K}^\alpha_s$ les hamiltoniens de $\mathcal{K}^\alpha$ dont l'extension complexe est holomorphe sur un voisinage de T^n_s. On munit $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{K}^\alpha_s$ de la norme sup sur T^n_s, que l'on note $|\bullet|_s$; ce qui en fait des espaces de Banach.

H et K^0 étant analytiques, il existe $0 < s < s_0 = s + \sigma < 1$ tels que $H \in \mathcal{H}_s$ et $K^0 \in \mathcal{H}_{s+\sigma}$. De plus, l'inégalité de Cauchy (voir appendice A) et la condition 2 permettent d'affirmer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\tilde{H} \in \mathcal{H}_s$ avec $|\tilde{H} - K^0|_s < \varepsilon$,

$$\left|\det \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{H}(\theta, 0) d\theta\right| \geq \left|\det \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial^2}{\partial r^2} K^0(\theta, 0) d\theta\right| = d > 0 \tag{3}$$

On construit à présent une application ϕ ainsi qu'une suite $((K^n, \Delta H_n))_{n \geq 0}$, telles que

- $(K^n, \Delta H_n) = \phi^n(K^0, H - K^0)$
- Pour tout $n > 0$, il existe $s < s_n < s_{n-1} < s_0 = s + \sigma$ tel que $(K^n, \Delta H_n) \in \mathcal{K}^\alpha_{s_n} \times \mathcal{H}_{s_n}$.
- Pour tout $n > 0$, il existe γ_n une transformation symplectique telle que $K^n + \Delta H_n = H \circ \gamma_n$ $(\gamma_0 = id)$.

Détaillons la construction, proche dans l'idée de la méthode itérative de Newton. Supposons $(K^n, \Delta H_n) \in \mathcal{K}^\alpha_{s_n+\sigma_n} \times \mathcal{H}_{s_n+\sigma n}$ tels que $K^n + \Delta H_n = H \circ \gamma_n$ (il peut être judicieux de considérer en premier lieu K^0, ΔH_0 pour comprendre le procédé). On aimerait trouver $\Delta K_{n+1} \in \vec{\mathcal{K}}_{s_n} = \mathcal{K}^0_{s_n}$ proche de zéro, et G_{n+1} une transformation symplectique proche de l'identité, tels que l'on puisse écrire :

$$(K^n + \Delta K_{n+1}) \circ G_{n+1} = H \circ \gamma_n$$

ce qui prouverait le théorème. Une telle équation est cependant impossible à résoudre directement avec si peu d'informations. On va donc en résoudre une approximation. Tout d'abord, on se restreindra aux transformations $G \in \mathcal{G}_s$, où $\mathcal{G}_s$ est l'ensemble des transformations symplectiques analytiques sur T^n_s de forme

$$G(\theta, r) = (\varphi(\theta), (r + R + S'(\theta)) \cdot (\varphi'(\theta))^{-1})$$

(Voir 1.1) De plus, on sait qu'on recherche G_{n+1} proche de l'identité. On peut donc supposer que c'est le flot au temps $t = 1$ d'un champ de vecteurs localement hamiltonien $\dot{G}_{n+1}$, proche de 0 (Voir 1.1). On note un tel flot $\exp(\dot{G}_{n+1})$, d'inverse $\exp(-\dot{G}_{n+1})$. Un premier lemme nous assure que si on prend $\dot{G}_{n+1} \in \mathfrak{g}_s$ proche de zéro, avec $\mathfrak{g}_s$ les champs de vecteurs analytiques sur T^n_s de forme

$$\dot{G}(\theta, r) = (\dot{\varphi}(\theta), \dot{R} + \dot{S}'(\theta) - r \cdot \varphi'(\theta)) \quad \text{avec } \dot{R} \text{ un vecteur constant}$$

alors cette transformation existe bien et est proche de l'identité :

Lemme 0. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si l'on pose

$$\gamma_0 := \frac{1}{36n} \quad \text{et} \quad \dot{G} \in \mathfrak{g}_{s+\sigma}, \ \left|\dot{G}\right|_s \leq \gamma_0 \sigma^2$$

Alors

$$\exp(\dot{G}) \in \mathcal{G}_s, \left|\exp(\dot{G}) - id\right|_s \leq c_0 \sigma^{-1} \left|\dot{G}\right|_{s+\sigma}$$

On simplifie alors l'équation à résoudre par approximations successives :

$$\begin{aligned} &(K^n + \Delta K_{n+1}) \circ \exp(\dot{G}_{n+1}) = H \circ \gamma_n \\ \rightsquigarrow &(K^n + \Delta K_{n+1}) \circ (Id + \dot{G}_{n+1}) = H \circ \gamma_n \\ \rightsquigarrow &K^n \Delta K_{n+1} + (K^n)' \cdot \dot{G}_{n+1} = K^n + \Delta H_n \end{aligned}$$

(on a ici fait un développement en omettant les termes négligeables)

$$\rightsquigarrow \Delta K_{n+1} + (K^n)' \cdot \dot{G}_{n+1} = \Delta H_n$$

C'est cette dernière forme que l'on va résoudre. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 1. Pour tous $(K, \Delta H) \in \mathcal{K}^{\alpha}_{s+\sigma} \times \mathcal{H}_{s+\sigma}$, avec K ε-proche de K^0, il existe un unique couple $(\Delta K, \dot{G}) \in \mathcal{K}_s \times \mathfrak{g}_s$ résolvant l'équation :

$$\Delta K + K' \cdot \dot{G} = \Delta H \tag{4}$$

De plus, ce couple vérifie :

$$\max(|\Delta K|_s, |\dot{G}|_s) \leq C\sigma^{-t_1}(1 + |K|_{s+\sigma})|\Delta H|_{s+\sigma} \tag{5}$$

Où C et t_1 sont des constantes ne dépendant que de τ, γ et n.

L'action infinitésimale de $(Id + \dot{G}_{n+1})$ n'est pas exactement celle de $\exp(\dot{G}_{n+1})$. On doit rajouter un terme ΔH_{n+1} :

$$\Delta K_{n+1} + K^n + \Delta H_{n+1} = H \circ \gamma \exp(-\dot{G}_{n+1})$$

Et on peut donc enfin définir :

$$\phi(K^n, \Delta H_n) = (K^n + \Delta K_{n+1}, \Delta H_{n+1})$$

Un troisième lemme nous permet alors, sous certaines conditions, de majorer ΔH_{n+1} :

Lemme 2. Pour tous $K \in \mathcal{K}^{\alpha}_{s+\sigma}$, $\Delta H \in \mathcal{H}_{s+\sigma}$ tels que

$$(1 + |K|_s)\,|\Delta H|_s \leq \gamma_2 \sigma^{\tau_2} \ ,$$

si $(\Delta K, \dot{G}) \in \overrightarrow{\mathcal{K}} \times \mathfrak{g}_s$ est une solution de $\Delta K + K' \cdot \dot{G} = \Delta H$, alors $\exp(\dot{G}) \in \mathcal{G}_s$, $\left|\exp(\dot{G}) - id\right|_s \leq \sigma$ et

$$\left|(K + \Delta H) \circ \exp(-\dot{G}) - (K + \Delta K)\right|_s \leq c_2 \sigma^{-t_2}(1 + |K|_{s+\sigma})^2\,|\Delta H|^2_{s+\sigma}$$

Résumons les conditions nécessaires à l'existence de $\phi(K^n, \Delta H_n)$ et à la majoration de l'image :

- Afin de pouvoir appliquer le lemme 1, $|K^n - K^0|_s < \varepsilon$.
- Afin de profiter de la majoration donnée par le lemme 2, $|\Delta H_n|_{s_n} \leq (1+|K^n|_{s_n})^{-1}\gamma_2\sigma^{\tau_2}$, mais comme $|K^n|_{s_n} \leq |K^0|_{s+\sigma} + \varepsilon = B$, il suffirait de demander $|\Delta H_n|_{s_n} \leq (1+B)^{-1}\gamma_2\sigma^{\tau_2} = \gamma_3\sigma^{\tau_2}$

On règle cela en ne définissant ϕ que sur les ensembles

$$B_{\dot{s},\dot{\sigma}} = \{(K, \Delta H) \in \mathcal{K}^{\alpha}_{\dot{s}+\dot{\sigma}} \times \mathcal{H}_{\dot{s}+\dot{\sigma}} \ \text{ avec } \ |K - K^0|_{\dot{s}} < \varepsilon \text{ et } |\Delta H_n|_{s_n} \leq \gamma_3\sigma^{\tau_2}\}$$

Pour une telle définition de ϕ, le lemme suivant garantit l'existence et la convergence de la suite :

Convergence quadratique . Etant donnés s et $s + \sigma = s_0$, ainsi que $(K^0, \Delta H_0) \in B_{s,\sigma}$ avec $|\Delta H|_{s+\sigma}$ assez petit, la suite $(K^n, \Delta H_n) = \phi^n(K^0, \Delta H_0)$ converge vers $(K, 0) \in \mathcal{K}^{\alpha}_s \times \mathcal{H}_s$

(Pour la démonstration de ce lemme, voir l'appendice B.)

Ce lemme nous permet d'écrire qu'à la limite des itérations,

$$K = K^0 + \Delta K_1 + \Delta K_2 + \cdots = H \circ \exp(-\dot{G}_1) \circ \exp(-\dot{G}_2) \circ \ldots \tag{6}$$

On utilise alors un dernier lemme :

Lemme 4. La suite des γ_n est une suite de Cauchy qui admet une limite γ dans $\mathcal{G}_{s-\delta}$, où $\delta > 0$ peut être pris aussi petit que voulu.

Quitte à restreindre le domaine de γ, sa simplecticité et le théorème d'inversion locale permettent d'affirmer qu'il existe $G = \gamma^{-1} \in \mathcal{G}_{s-\delta}$. On peut donc poser

$$K \circ G = H$$

ce qui conclut la démonstration du théorème.

2 Estimations de convergence

Nous prouvons ici les différents lemmes énoncés en première partie.

2.1 Lemme 0 : Existence d'une transformation symplectique proche de l'identité

On ne détaille pas ici le fait que $\exp(\dot{G}) \in (G)_s$, mais juste l'existence de l'application et sa proximité à l'identité. On pourrait d'ailleurs s'en passer : Le simple fait que $\dot{G}$ soit localement hamiltonien suffit à rendre $\exp(\dot{G})$ symplectique.

Démonstration du lemme 0. Notons $\delta := \frac{\sigma}{3}$, et $\dot{G}(\theta, r) = (f(\theta), g(\theta) - r \cdot f'(\theta))$. On a alors :

$$|f|_{s+2\delta} \leq |f|_{s+\sigma} \leq \left|\dot{G}\right|_{s+\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\left|g - r \cdot f'\right|_{s+2\delta} &\leq |g|_{s+2\delta} + \left|r \cdot f'\right|_{s+2\delta} \\
&= |g|_{s+2\delta} + \max\left\{\left|r \cdot {f_j}'\right|_{s+2\delta};\ j = 1, 2, 3, ..., n\right\} \\
&\leq |g|_{s+2\delta} + n\,|r| \max\left\{\left|{f_j}'\right|_{s+2\delta}\ ;\ j = 1, 2, 3, ..., n\right\} \\
&\leq \left|\dot{G}\right|_{s+2\delta} + n\frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

Et, par l'inégalité de Cauchy et $|r| \leq 1$,

$$\max\left\{|f_j|_{s+2\delta}\ ;\ j = 1, 2, 3, ..., n\right\} \leq \left|\dot{G}\right|_{s+\sigma} + \frac{n}{\delta}\left|\dot{G}\right|_{s+\sigma} \leq \left(1 + \frac{n}{\delta}\right)\left|\dot{G}\right|_{s+\sigma}$$

Donc,

$$\left\|\dot{G}\right\|_{s+2\delta} := max\left\{|f|_{s+2\delta}, \left|g - r \cdot f'\right|_{s+2\delta}\right\} \leq \left(1 + \frac{n}{\delta}\right)\left|\dot{G}\right|_{s+\sigma} \leq \frac{2n}{\delta}\gamma_0\sigma^2 = \frac{2n}{\delta}\frac{1}{36n}(3\delta)^2 = \frac{\delta}{2}$$

Définissons à présent l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned}
&I_s := [0, 1] \times i\,[-s, s] \\
&\mathfrak{F} := \left\{F \in [A(I_s \times i\,[-s, s])]^{2n}; |f(t, \theta)|_s \leq \delta\right\} \\
&P : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}, \quad f \mapsto Pf(t, \theta) := \int_0^t \dot{G}(\theta + f(s, \theta))ds
\end{aligned}$$

Pour $f, g \in \mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned}
|Pf - Pg|_s &\leq \int_0^t \left|\dot{G}(\theta + f(s, \theta)) - \dot{G}(\theta + g(s, \theta))\right|_s ds \\
&\leq \int_0^t \left|\dot{G}'\right|_{s-\sigma} |\theta + f(s, \theta) - (\theta + g(s, \theta))|\, ds \\
&\leq \left|\dot{G}'\right|_s |f - g|_s \\
&\leq \frac{1}{\delta}\left|\dot{G}\right|_{s-2\delta} |f - g|_s \\
&\leq \frac{1}{\delta}\frac{\delta}{2} |f - g|_s \\
&= \frac{1}{2} |f - g|_s
\end{aligned}$$

Donc P est un opérateur contractant, et admet un unique point fixe que l'on notera f. Il vérifie :

$$f(t,\theta) = Pf(t,\theta) = \int_0^t \dot{G}(\theta + f(s,\theta))ds$$

En dérivant des deux côtés, on obtient

$$\frac{\partial\left(f(t,\theta)+\theta\right)}{\partial t} = \frac{\partial f(t,\theta)}{\partial t} = \dot{G}(\theta + f(t,\theta))$$
$$f(t,\theta) + \theta = \exp(\dot{G})(f(0,\theta)+\theta) = \exp(\dot{G})(\theta)$$

$(f(t,\theta) = \int_0^0 \dot{G}ds = 0$, et $\exp(t\dot{G})$ est le flot du champ de vecteurs $\dot{G}$.)

À $t = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\exp(\dot{G}) - id\right|_s = |f(1,\cdot)|_s &= \left|\int_0^1 \dot{G}(f(u,\theta)+\theta)du\right| \\
&\leq \left\|\dot{G}\right\|_{s+\frac{1}{3}\sigma} \leq 2n\frac{1}{\frac{2}{3}\sigma}|\dot{G}|_{s+\sigma} \\
&= c_0\frac{|\dot{G}|_{s+\sigma}}{\sigma} \quad (c_0 := 3n)
\end{aligned}$$

□

2.2 Lemme 1 : Résolution de l'équation cohomologique

C'est ce lemme qui utilise les conditions imposées à α et à Q_0. La résolution de l'équation est faite à l'aide d'un développement en séries de Fourier, et les estimations découlent de l'inégalité de Cauchy. L'appendice A présente les outils utilisés ici.

Démonstration du lemme 1. Commençons par résoudre l'équation $\Delta K + K' \cdot \dot{G} = \Delta H$. On écrit

$$\begin{cases} K(\theta,r) = c + \alpha\cdot r + r\cdot Q_0(\theta)\cdot r + O(r^3) \\ \Delta K(\theta,r) = \dot{c} + \dot{K}_2(\theta,r) \quad \text{avec} \quad \dot{K}_2 \in O(r^2) \\ \dot{G}(\theta,r) = (\varphi(\theta), \dot{R} + \dot{S}'(\theta) + r\cdot\dot{\varphi}'(\theta)) \end{cases}$$

Et

$$K'(\theta,r)\cdot\dot{G} = \sum_{1\leq i\leq n}\left(r_i\alpha_i + \dot{S}_i'(\theta)\alpha_i + 2\left(\sum_{1\leq j\leq n} Q_{i,j}\theta r_j\right)\dot{S}_i'(\theta) - r\cdot\dot{\varphi}_i'\alpha_i\right) + O(r^2)$$

En écrivant l'équation selon les puissances de r, on obtient :

$$\left(\dot{c} + (\dot{R}+\dot{S}')\cdot\alpha\right) + r\cdot\left(-\dot{\varphi}'\cdot\alpha + 2Q\cdot(\dot{R}+\dot{S}')\right) + \dot{K}_2 = \dot{H}_0 + r\cdot\dot{H}_1 + O(r^2) \qquad (7)$$

On va résoudre étape par étape cette équation.
Intéressons nous tout d'abord aux termes d'ordre 0 en r. On observe que $\dot{S}'\cdot\alpha$ est le seul terme non constant, et de moyenne nulle. On peut donc écrire

$$\dot{S}'\cdot\alpha = \dot{H}_0 - \int_{\mathbb{T}^n}\dot{H}_0(\theta)d\theta$$

et l'application décrite dans l'appendice A nous permet d'écrire :

$$\dot{S} = L_\alpha^{-1}\left(\dot{H}_0 - \int_{\mathbb{T}^n} \dot{H}_0(\theta)d\theta\right)$$

L'équation 7 s'écrit alors :

$$\left(\dot{c} + \dot{R}\cdot\alpha\right) + r\cdot\left(-\dot{\varphi}'\cdot\alpha + 2Q\cdot\dot{R}\right) + \dot{K}_2 = \int_{\mathbb{T}^n} \dot{H}_0(\theta)d\theta + r\cdot(\dot{H}_1 - 2Q\cdot\dot{S}') + O(r^2)$$

On s'intéresse à présent aux termes en r.
Comme $\alpha\cdot\dot{\varphi}'$ a une moyenne nulle, toute la moyenne est contenue dans $2Q\cdot\dot{R}$. On peut donc poser :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n}(2Q(\theta)\cdot\dot{R})d\theta &= \int_{\mathbb{T}^n}(\dot{H}_1 - 2Q(\theta)\cdot\dot{S}'(\theta)d\theta \\
2\left(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta\right)\cdot\dot{R} &= \int_{\mathbb{T}^n}(\dot{H}_1 - 2Q(\theta)\cdot\dot{S}'(\theta)d\theta \\
\dot{R} &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta\right)^{-1}\cdot\left(\int_{\mathbb{T}^n}(\dot{H}_1 - 2Q(\theta)\cdot\dot{S}'(\theta)d\theta\right)
\end{aligned}$$

L'inversibilité de $\int_{\mathbb{T}^n} Q$ a ici un rôle primordial.
On utilise ensuite pour calculer $\dot{\varphi}$ la même méthode que pour $\dot{S}$, mais en s'assurant que φ s'annule en 0 :

$$\dot{\varphi} = \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}(0), \text{ où } \quad \tilde{\varphi} = L_\alpha^{-1}\left(\dot{H}_1 - 2Q\cdot(\dot{R} + \dot{S}')\right)$$

Enfin, on obtient pour les deux derniers termes :

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= \int_{\mathbb{T}^n} \dot{H}_0(\theta)d\theta - \dot{R}\cdot\alpha \\
\dot{K}_2 &= O(r^2)
\end{aligned}$$

Intéressons nous à présent à l'estimation de ΔK et de $\dot{G}$. (Nous allons définir ci-dessous plusieurs constantes destinées à simplifier les calculs. Ces constantes, notées $C^f_{\tau,\gamma,n}$, ne dépendent que de τ, γ et n ; tous les autres indices ne servent qu'à les distinguer. Elles sont donc valables quels que soient K, $\dot{H}$, s et σ.) Nous utiliserons les résultats suivants :

— Si $f = L^{-1}_{alpha}(g)$, alors $|f|_s \leq C_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n}|g|_{s+\sigma}$ (Voir l'appendice A).

— $|\dot{H}_0|_s \leq |\dot{H}_0|_{s+\sigma} = |\Delta H|_{s+\sigma,r=0} \leq |\Delta H|_{s+\sigma}$

— $|\dot{H}_1|_s \leq c^1_n\sigma^{-1}|\Delta H|_{s+\sigma}$ (Découle de l'inégalité de Cauchy, voir appendice A).

— Quelques estimations sur les matrices Q et $\int Q$:
$\forall 1 \leq i,j \leq n, |Q_{i,j}|_s \leq C^2_n\sigma^{-2}|K|_{s+\sigma}$ (Par l'inégalité de Cauchy).
Donc, en norme d'opérateur, $|Q|_s < C^{Q,1}_n\sigma^{-2}|K|_{s+\sigma}$.

Mais on peut aussi utiliser le fait que K est ε-proche de K^0. Ainsi,

$$\forall 1 \leq i,j \leq n, |Q_{i,j}|_s \leq C_n^2\sigma^{-2}(|K^0|_{s+\sigma}+\varepsilon) \leq C_n^2\sigma^{-2}(|K^0|_{s_0}+\varepsilon)$$

et donc en norme d'opérateur $|Q|_s < C_n^{Q,2}\sigma^{-2}$. On a alors également

$$\left|\left(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta\right)\right| \leq C_n^{Q,2}\sigma^{-2}$$

Par la formule d'inversion utilisant la comatrice, et en utilisant la minoration du déterminant de la moyenne de Q,

$$\left|\left(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta\right)^{-1}_{i,j}\right| \leq \frac{1}{q}\left|\mathrm{Comat}(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta)_{i,j}\right| \leq C_n^{Q,3}\sigma^{-2(n-1)}$$

Donc en norme d'opérateur,

$$\left|\left(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta\right)^{-1}\right| \leq C_n^{Q,4}\sigma^{-2(n-1)}$$

— Enfin, de par le fait que $0<\sigma<1$, on sait que $\forall t_1>t_2>0, 1<\sigma^{-t_2}<\sigma^{-t_1}$.

On tire de ces résultats :

$$\begin{aligned}|\dot{S}|_s \leq |\dot{S}|_{s+\frac{\sigma}{4}} \leq |\dot{S}|_{s+\frac{2\sigma}{4}} \leq |\dot{S}|_{s+\frac{3\sigma}{4}} &\leq C_{\tau,\gamma,n}\left(\frac{\sigma}{4}\right)^{-\tau-n}\cdot 2|\dot{H}_0|_{s+\sigma}\\ &= C^{\dot{S}}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n}|\Delta H|_{s+\sigma}\end{aligned}$$

Donc :

$$|\dot{S}'|_s \leq |\dot{S}'|_{s+\frac{\sigma}{4}} \leq |\dot{S}'|_{s+\frac{2\sigma}{4}} \leq C_n^1\left(\frac{\sigma}{4}\right)^{-1}|\dot{S}|_{s+\frac{3\sigma}{4}} \leq C^{\dot{S}'}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n-1}|\Delta H|_{s+\sigma}$$

Puis,

$$\begin{aligned}|\dot{R}| &\leq \frac{1}{2}\left|\left(\int_{\mathbb{T}^n} Q(\theta)d\theta\right)^{-1}\right|\cdot(|\dot{H}_1|_s+2|Q|_s|\dot{S}'|_{s+\sigma})\\ &\leq \frac{1}{2}C_n^{Q,4}\sigma^{-2(n-1)}(C_n^1\sigma^{-1}|\dot{H}|_{s+\sigma}+2C_n^{Q,2}\sigma^{-2}C^{\dot{S}'}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n-1}|\Delta H|_{s+\sigma}\\ &\leq \frac{1}{2}C_n^{Q,4}\sigma^{-2(n-1)}((C_n^1+2C_n^{Q,2}C^{\dot{S}'}_{\tau,\gamma,n})\sigma^{-\tau-n-3}|\Delta H|_{s+\sigma})\\ &\leq C^{\dot{R}}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-3n-1}|\Delta H|_{s+\sigma}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}|\dot{\varphi}|_s \leq |\dot{\varphi}|_{s+\frac{\sigma}{4}} &\leq 2|\tilde{\varphi}|_{s+\frac{\sigma}{4}}\\ &\leq C_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n}(|\dot{H}_1|_{s+\sigma}+2|Q|_{s+\frac{\sigma}{2}}(|\dot{R}|+|\dot{S}'|_{s+\frac{\sigma}{2}}))\\ &\leq C_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n}(C_n^1\sigma^{-1}|\Delta H|_{s+\sigma}+2C_n^{Q,1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-2}|K|_{s+frac\sigma 2}\\ &\quad\cdot(C^{\dot{R}}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-3n-1}|\Delta H|_{s+\sigma}+C^{\dot{S}'}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n-1}|\Delta H|_{s+\sigma}))\\ &\leq C_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-n}(\bar{C}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-3n-3}(1+|K|_{s+\sigma})|\Delta H|_{s+\sigma})\\ &= C^{\dot{\varphi}}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-2\tau-4n-3}(1+|K|_{s+\sigma})|\Delta H|_{s+\sigma}\end{aligned}$$

Donc :

$$|\dot{\varphi}'|_s \leq C^1 \left(\frac{\sigma}{4}\right)^{-1} |\dot{\varphi}|_{s+\frac{\sigma}{4}} \leq C^{\dot{\varphi}'}_{\tau,\gamma,n} \sigma^{-2\tau-4n-4}(1+|K|_{s+\sigma})|\Delta H|_{s+\sigma}$$

par l'inégalité de Cauchy. Enfin,

$$|\dot{c}| \leq |\dot{H}_0|_s + nC^{\dot{R}}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-3n-1}|\alpha||\Delta H|_{s+\sigma} \leq C^{\dot{c}}_{\tau,\gamma,n}\sigma^{-\tau-3n-1}|\Delta H|_{s+\sigma}$$

et

$$|\dot{K}_2|_s \leq 3\sigma^{-1}|\Delta H|_{s+\sigma}$$

Quitte à majorer les $C^{\bullet}_{\tau,\gamma,n}$ par C, et $|r|$ par 1, on obtient finalement :

$$\max(|\Delta K|_s, |\dot{G}|_s) \leq C\sigma^{-(2\tau+4n+4)}(1+|K|_{s+\sigma})|\Delta H|_{s+\sigma}$$

□

2.3 Lemme 2 : Différence entre l'action de $\dot{G}$ et celle de $\exp(\dot{G})$

L'estimation vient ici d'un développement de Taylor avec reste intégral.

Démonstration du lemme 2. Posons $\delta := \frac{\sigma}{2}$.
Le premier résultat est une conséquence du lemme 0 (qui garantit que $\exp(\dot{G})$ est bien défini) et du lemme 1 (qui garantit l'existence de $\dot{G}$).
On demande $\tau_2 := t_1 + 2$, $\gamma_2 := \frac{\gamma_0}{C}$; alors :

$$\left|\dot{G}\right|_{s+\delta} \leq C\delta^{-t_1}(1+|K|_{s+\sigma})\,|\Delta H|_{s+\sigma} \leq C\delta^{-t_1}\gamma_2\delta^{\tau_2} = \gamma_0\delta^2$$
$$\left|\exp(\dot{G}) - id\right|_s \leq c_0\delta^{-1}\,|V|_{s+\delta} \leq c_0\delta^{-1}\gamma_0\delta^2 = \delta \quad (c_0 = \frac{1}{\gamma_0})$$

On va prouver la seconde inéqualité en utlisant le développement de Taylor de la fonction :

$$\begin{aligned}
H\circ\exp(-\dot{G}) &= H\circ\exp(-0\dot{G}) + \frac{\mathrm{d}(H\circ\exp(-t\dot{G}))}{\mathrm{d}x}(0) + \frac{1}{2!}\int_0^1 (1-t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(H\circ\exp(-t\dot{G}))(t)dt \\
&= H - \left\langle H', \dot{G}\right\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle H'(\exp(-t\dot{G})), -\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))\right\rangle(t)dt \\
&= H - \left\langle H', \dot{G}\right\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\left\{\left\langle \mathrm{Hess}(H)(\exp(-t\dot{G})(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G})), -\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))\right\rangle\right. \\
&\qquad \left. + \left\langle H'(\exp(-t\dot{G})), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G})))\right\rangle\right\} dt \\
&= K + (\Delta K + K'\cdot\dot{G}) - \left\langle H', \dot{G}\right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\left\{\left\langle \mathrm{Hess}(H)(\exp(-t\dot{G}))(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G})), -\dot{G}(\exp(-t\dot{G})))\right\rangle\right. \\
&\qquad \left. + \left\langle H'(\exp(-t\dot{G})), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))\right\rangle\right\} dt
\end{aligned}$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
&H \circ \exp(-\dot{G}) - (K + \Delta K) \\
&\quad = -\left\langle (\Delta H)', \dot{G} \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) \left\{ \left\langle \mathrm{Hess}(H)(\exp(-t\dot{G}))(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G})), -\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))) \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle H'(\exp(-t\dot{G})), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))) \right\rangle \right\} dt
\end{aligned}
$$

Ici, nous avons

$$
\left| \left\langle (\Delta H)', \dot{G} \right\rangle \right|_s \leq n \left| (\Delta H)' \right|_s \left| \dot{G} \right|_s \leq \frac{n}{\sigma} \left| \Delta H \right|_s \left| \dot{G} \right|_s
$$

$$
\left| \int_0^1 (1-t) \left\langle \mathrm{Hess}(H)(\exp(-t\dot{G}))(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G})), -\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))) \right\rangle dt \right|_s \leq n \left| H \right|_{C^2} \left| \dot{G} \right|_s^2
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \left\langle H'(\exp(-t\dot{G})), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))) \right\rangle \right|_s &\leq n \left| H \right|_{C^1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\dot{G}(\exp(-t\dot{G}))) \right|_s \\
&\leq n \left| H \right|_{C^1} \left| \dot{G}'(\exp(-t\dot{G}))(-\dot{G})(\exp(-t\dot{G})) \right|_s \\
&\leq n \left| H \right|_{C^1} n \frac{1}{\sigma} \left| \dot{G} \right|_{s+\sigma}^2
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\left| H \circ \exp(-\dot{G}) - (K + \Delta K) \right|_s &\leq \frac{n}{\sigma} \left| \Delta H \right|_{s+\sigma} \left| \dot{G} \right|_{s+\sigma} + n \left| H \right|_{C^2} \left| \dot{G} \right|_{s+\sigma}^2 + n^2 \left| H \right|_{C^1} \frac{1}{\sigma} \left| \dot{G} \right|_{s+\sigma}^2 \\
&\leq \frac{n}{\sigma} \left| \Delta H \right|_{s+\sigma} (1 + \left| K \right|_{s+\sigma}) \left| \dot{G} \right|_{s+\sigma} + \left| H \right|_{C^2} (1 + \frac{n}{\sigma}) n \left| \dot{G} \right|_{s+\sigma}^2 \\
&\leq (\frac{n}{\sigma} C \sigma^{-t_1} + \left| H \right|_{C^2} \frac{2n^2}{\sigma}) C^2 \sigma^{-2t_1} (\left| \Delta H \right|_{s+\sigma} (1 + \left| \Delta K \right|_{s+\sigma}))^2 \\
&= \sigma^{-(2t_1+1)} n C (\sigma^{t_1} + \left| H \right|_{C^2} 2nC)(\left| \Delta H \right|_{s+\sigma} (1 + \left| \Delta K \right|_{s+\sigma}))^2 \\
&\leq \sigma^{-(2t_1+1)} n C (1 + 2nC \left| H \right|_{C^2})(\left| \Delta H \right|_{s+\sigma} (1 + \left| \Delta K \right|_{s+\sigma}))^2
\end{aligned}
$$

□

2.4 Convergence de la suite de transformations

Démonstration du lemme 4. On reprend les s_j et σ_j du lemme de convergence quadratique. Comme d'après le lemme 2, l'image par $\exp(\dot{G})$ de T_s^n est comprise dans $T_{s+\sigma}^n$, on peut écrire pour tout $j \geq 0$, $k > 0$:

$$\begin{aligned}
|\gamma_j - id|_{s_j} &\leq |\exp(-\dot{G}_1)|_{s_1} + \cdots + |\exp(-\dot{G}_j)|_{s_j} \leq \sum_{n\geq 1} |\exp(-\dot{G}_n)|_{s_n} \\
&\leq \bar{c}\sum_{n\geq 1} \sigma^{-t}|\Delta H_n|_{s_n} \quad \text{On utilise ici les majorations des lemmes 0 et 1} \\
&\leq \bar{C}
\end{aligned}$$

Donc quitte à ne considérer les $\gamma_\bullet$ que sur $T^n_{s-\delta}$, on peut alors leur imposer par l'inégalité de Cauchy un module de continuité de $c_n\delta^{-1}(1+\bar{C})$. En reprennant le calcul précédent, en posant $\gamma^n_{n+k} = \exp(-\dot{G}_n)\circ\cdots\circ\exp(-\dot{G}_{n+k})$, on remarque que $\forall\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $\forall n > N, k \geq 0, |\gamma^n_{n+k}|_{s_{n+k}} < \epsilon$. Alors, on a

$$|\gamma_n - \gamma n + k|_{s-\delta} \leq \sup(|\gamma_n(a) - \gamma_n(b)| \text{ avec } |a-b| < \epsilon) \leq c_n\delta^{-1}(1+\bar{C})\epsilon$$

Il est alors évident que les γ_n forment une suite de Cauchy de l'espace de Banach $\mathcal{G}_{s-\delta}$, de limite γ.

□

Appendices

A Inégalité de Cauchy et séries de Fourier

Quelques outils nous sont nécessaires pour travailler avec des fonctions holomorphes de plusieurs variables. Commençons par énoncer (sans démonstration) la formule de Cauchy en dimension n :
Soient $D := D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ un polydisque, $z \in D$, et f holomorphe sur un voisinnage de D. Alors,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D_1}\int_{\partial D_2}\cdots\int_{\partial D_n}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)\ldots(\zeta_n-z_n)} \\
\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(z) &= \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D_1}\int_{\partial D_2}\cdots\int_{\partial D_n}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)^{\alpha_1}(\zeta_2-z_2)^{\alpha_2}....(\zeta_n-z_n)^{\alpha_n}}
\end{aligned}$$

De cette formule, on peut tirer l'inégalité de Cauchy en dimension n, utilisée de façon intensive dans la démonstration du théorème de Kolmogorov :

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\right|_s \leq \frac{n!}{\sigma^n}|f|_{s+\sigma}$$

où $|\bullet|_s$ désigne la norme sup sur le domaine $\{z \in \mathbb{C}^n\ ,\ \max_{1\leq j\leq n}(|z_j|) \leq s\}$. Le passage de $s+\sigma$ à s est lié à la nécessité de laisser un peu d'espace pour appliquer la formule intégrale de Cauchy. σ peut cependant être choisi aussi petit que l'on veut (mais non nul).

De l'inégalité précédente, on va tirer une majoration importante des coefficients de Fourier d'une fonction $T^n_s \to \mathbb{C}$:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k e^{i\langle k,\theta\rangle} \text{ avec } \quad |f_k| \leq |f|_s\, e^{-|k|s}$$

En effet, de par la périodicité de f et le théorème de Cauchy,

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\theta) e^{-i\langle k,\theta\rangle} d\theta$$
$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\theta - i\varphi) e^{-i\langle k,\theta - i\varphi\rangle} d\theta \textit{ pour toute constante } \varphi \textit{ t.q. } |\varphi| \le s$$

En prenant $\varphi = (s-\sigma)(e_1, e_2, ..., e_n)$ (avec $0 < \sigma < s$, $e_j := \text{signe}(k_j)$), on obtient :

$$|f_k| \le |f|_s \, e^{-|k|s}$$

Enfin, on donne un dernier résultat. Si g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{T}^n_{s+\sigma}$ de moyenne nulle, et α est diophantien, alors il existe une unique fonction f holomorphe sur $\mathbb{T}^n_s$ de moyenne nulle telle que $L_\alpha f = f' \cdot \alpha = g$. De plus, $|f|_s \le c_{\gamma,\tau,n} \sigma^{-\tau-n} |g|_{s+\sigma}$.
En effet, on écrit

$$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f) e^{ik\cdot\theta}$$
$$g(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(g) e^{ik\cdot\theta}$$
$$c_k(g) = \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ik\cdot t} dt = \int_0^{2\pi} f'(t)\cdot\alpha \; e^{-ik\cdot t} dt = i\,\langle k, \alpha\rangle\, c_k(f)$$

La condition diophantienne sur α nous permet ensuite d'écrire :

$$|f|_s = \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{c_k(g)}{i\,\langle k,\alpha\rangle} e^{ik\cdot\theta} \right|_s \le \sum_{k\neq 0} \frac{1}{|\langle k,\alpha\rangle|} |c_k(g)| \le \sum_{k\neq 0} \frac{|k|^\tau}{\gamma} |g|_{s+\sigma} e^{-|k|\sigma} \le \frac{|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \sum_{k\neq 0} |k|^\tau e^{-|k|\sigma}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
|f|_s &\le \frac{|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \sum_{k\neq 0} |k|^\tau e^{-|k|\sigma} \\
&\le \frac{c\,|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} r^\tau e^{-r\sigma} dS_r dr \\
&\le \frac{c\,|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \int_{r=0}^{\infty} \int_{S^{n-1}} r^\tau e^{-r\sigma} dS dr \\
&= \frac{c\,|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \int_0^\infty r^\tau e^{-r\sigma} \text{Aire}(S^{n-1}) dr \\
&= \frac{c\,|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \int_0^\infty r^\tau e^{-r\sigma} C r^{n-1} dr \\
&= \frac{c\,|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \frac{1}{\sigma^{\tau+n}} C \int_0^\infty \lambda^{\tau+n-1} e^{-\lambda} d\lambda \\
&= \frac{c\,|g|_{s+\sigma}}{\gamma} \frac{1}{\sigma^{\tau+n}} C\Gamma(\tau+n) \\
&= c_{\tau,\gamma,n} \sigma^{-\tau-n} |g|_{s+\sigma}
\end{aligned}$$

B Preuve du théorème de convergence quadratique

La preuve que nous donnons ici est un cas particulier de celle donnée dans [2] (où elle est énoncée en termes d'espaces de Banach génériques, ce qui ne change qu'une ou deux notations).

Démonstration. On procède par récurrence pour montrer que la suite est bien définie, en partant de $(K, \Delta H) = (K_0, \Delta H_0) \in B_{s,\sigma}$. On pose $s + \sigma = s_0$, $s_j = s + 2^{-j}\sigma$ et donc $\sigma_j = s_j - s_{j+1} = 2^{-(j+1)}\sigma$, et on suppose les $(K_n, \Delta H_n)$ construits pour n allant de 0 à $j-1$. On peut supposer que $c \geq t$, de façon à ce que $c\sigma^{-t} > 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|\Delta H_j|_{s_j} &\leq c\sigma_j^{-t}|\Delta H_{j-1}|_{s_{j-1}}^2 \\
&\leq \cdots \leq |\Delta H|_{s+\sigma}^{2^j} \cdot \prod_{0\leq k\leq j-1} (c\sigma_k^{-t})^{2^{j-1-k}} \\
&\leq \left(|\Delta H|_{s+\sigma} \cdot \prod_{0\leq k\leq j-1} (c\sigma_k^{-t})^{2^{-k-1}}\right)^{2^j} \\
&\leq \left(|\Delta H|_{s+\sigma} \cdot \prod_{0\leq k} (c\sigma_k^{-t})^{2^{-k-1}}\right)^{2^j} \quad (\text{car } c\sigma_k^{-t} > 1) \\
&\leq \left(|\Delta H|_{s+\sigma} (c^{\sum_{k\geq 0} 2^{-k-1}}) \prod_{0\leq k} ((2^{-k-1})^{-t}\sigma^{-t})^{2^{-k-1}}\right)^{2^j} \\
&\leq \left(|\Delta H|_{s+\sigma} c((2^{-\sum_{k\geq 0}(k+1)2^{-k-1}}))^{-t}(\sigma^{-t})^{\sum_{k\geq 0} 2^{-k-1}}\right)^{2^j} \\
&\leq \left(c(4\sigma)^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma}\right)^{2^j}
\end{aligned}$$

Or, si $a < \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n\geq 0} a^{2^n} = a + \sum_{n\geq 1} a^{2^n} = a + a\sum_{n\geq 1} a^{2^n-1} \leq a + a\sum_{n\geq 1} (\frac{1}{2})^{2^n-1} \leq 2a$$

Donc en prenant ΔH suffisament petit, de sorte que $c\sigma^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma} \leq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
|K - K_j|_{s_j} &\leq \sum_{0\leq k\leq j-1} |K_k - K_{k+1}|_{s_{k+1}} \leq \sum_{0\leq k\leq j-1} c\sigma_k^{-t}|\Delta H_k|_{s_k} \\
&\leq c\sigma^{-t} \sum_{0\leq k\leq j-1} 2^{t(k+1)}|\Delta H_k|_{s_k} \\
&\leq c\sigma^{-t} \sum_{0\leq k\leq j-1} 2^{t(k+1-2^{k+1}}(c\sigma^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma})^{2^k} \\
&\leq c\sigma^{-t} \sum_{0\leq k\leq j-1} (c\sigma^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma})^{2^k} \leq c\sigma^{-t} \cdot 2(c\sigma^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma}) < C
\end{aligned}$$

Où la dernière majoration peut s'obtenir quitte à encore diminuer ΔH.

On a également :

$$
\begin{aligned}
|\Delta H_j|_{s_j} &\le \left(c(4\sigma)^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma}\right)^{2^j} \\
&\le 2^{-t2^{j+1}}\left(c\sigma^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma}\right)^{2^j} \\
&\le 2^{-t2^{j+1}+1}\left(c\sigma^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Et quitte à réduire encore ΔH de façon à avoir $\le \gamma_3\sigma^{\tau_2}$, et de façon à borner correctement les éventuels premiers termes (lorsque $2^{-t2^{j+1}+1} > 2^{-\tau_2(j+2)}$), on a

$$
(K_j, \Delta H_j) \in B_{s_j,\sigma_j}
$$

Ce qui montre que la suite est bien définie. Enfin,

$$
\left(\forall j,\ \Delta H_j \in \mathcal{H}_s \text{ et } |\Delta H_j|_s \le |\Delta H_j|_{s_j} \le 2c(4\sigma)^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma} \to 0\right) \Rightarrow \quad \Delta H_j \to 0 \text{ dans } \mathcal{H}_s
$$

Et

$$
\sum_{j\ge 0} |K_j - K_{j+1}| \le 2c(4\sigma)^{-t}|\Delta H|_{s+\sigma}
$$

Comme la série est convergente, les K_j forment une suite de Cauchy de l'espace de Banach $\mathcal{K}_s^\alpha$, donc convergent vers $K \in \mathcal{K}_s^\alpha$ avec $|K - K^0| \le \varepsilon$. Ceci conclut la preuve. □

Références

[1] A. N. Kolmogorov, *Preservation of conditionally periodic movements with small change in the hamilton function. Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 98 :527-530, 1954.

[2] J. Féjoz, *A proof of the invariant torus theorem of Kolmogorov. Regular and Chaotic Dynamics, MAIK Nauka/Interperiodica*, 17 (1), pp.1-5, 2012.

[3] J. Pöschel, *A lecture on the classical KAM theorem. Proc. Symp. Pure Math*, 69(2001) 707-732, Dec. 2000.

[4] E. Hairer, *Geometric numerical integration, lecture 1 : Hamiltonian systems.* TU München, Janvier-Février 2010.