Limites tropicales de variétés de Calabi-Yau

Introduction au domaine de recherche

Léonard Pille-Schneider
sous la direction de Sébastien Boucksom

Table des matières

Résumé

Le but du présent texte est d'exposer un cercle d'idées, initialement développé par Kontsevich et Soibelman dans le cadre de la symétrie miroir, visant à identifier les limites de variétés de Calabi-Yau dont la structure complexe dégénère "de la pire manière possible" (vers une grande structure complexe, dans le jargon des physiciens). Ces limites ne sont plus des objets algébriques complexes, mais certains complexes simpliciaux - baptisés variétés de Calabi-Yau *tropicales* par Odaka-Oshima [10] - encodant les propriétés combinatoires des diverses limites (non-uniques!) holomorphes de la dégénérescence (qui ne sont plus en général des variétés irréductibles).
La motivation initiale de Kontsevich et Soibelman était d'associer à chaque famille $X = \{X_t\}_{t\in\Delta^*}$, paramétrée de manière holomorphe par le disque épointé, de variétés de Calabi-Yau, une famille "miroir" $\{\check{X}_t\}_{t\in\Delta^*}$ de variétés de Calabi-Yau, dont les propriétés sont "duales" en un certain sens de celles de $\{X_t\}_{t\in\Delta^*}$. Leur approche passe par la construction intermédiaire d'un squelette essentiel $B = \mathrm{Sk}(X)$, base d'une fibration (dite SYZ, pour Strominger-Yau-Zaslow) en tores $f : X_t \longrightarrow B$, tel que à la limite $t \to 0$, les fibres $f^{-1}(b)$ soient asymptotiquement de taille $(\log|t|^{-1})^{-1}$, si bien que les X_t s'effondrent sur B lorsque $t \to 0$. On reconstruit alors $\check{X}_t$ comme espace total de la fibration "duale" $\check{X}_t \longrightarrow \check{B}$ au-dessus du squelette dual $\check{B}$, qui peut se construire assez simplement comme un "dual combinatoire" de B. La difficulté majeure dans cette approche résidant dans le fait que la fibration f a des fibres singulières, de même que $\check{f}$, pour lesquelles il semble difficile de construire un modèle local explicite. De plus, l'existence d'une fibration SYZ $f_t : X_t \longrightarrow B$ demeure à ce jour conjecturale et n'est pas aisée à construire, même dans les cas simples.
Cependant, l'approche de Kontsevich-Soibelman permet de s'affranchir de l'existence de la fibration SYZ, puisqu'elle exhibe canoniquement le squelette $\mathrm{Sk}(X)$ comme un sous-ensemble de l'analytifié de la famille X au sens de Berkovich, muni d'une structure $\mathbb{Z}$-affine encodant la partie combinatoire de la géométrie de la famille $\{X_t\}_{t\in\Delta^*}$ lorsque $t \to 0$. Indépendamment de toutes considérations liées à la symétrie miroir, il est alors naturel de se demander si ces limites "combinatoires" s'identifient aux limites au sens de Gromov-Hausdorff, i.e. en tant qu'espaces métriques, des variétés X_t munies de leurs métriques de Calabi-Yau.
Ce document est organisé comme suit : dans la section 1, on introduit au préalable les notions de géométrie kählerienne nécessaires, dont la notion de *dégénérescence* de variétés kähleriennes, et la topologie de Gromov-Hausdorff sur l'ensemble des espaces métriques. Dans la section 2, on présente un résultat récent de Boucksom-Jonsson sur la convergence des mesures canoniques sur X_t, qui motive la définition du squelette essentiel de la famille X. Enfin, dans la section 3, on énonce la conjecture de Kontsevich-Soibelman sur la convergence des métriques de Calabi-Yau sur les X_t, et l'on fait le lien avec les problèmes de compactifications d'espaces de modules en géométrie algébrique.

1 Généralités

1.1 Variétés kähleriennes et variétés de Calabi-Yau

Soit Z une variété complexe compacte de dimension n, i.e. une variété lisse de dimension réelle $2n$, admettant un atlas de cartes dont les fonctions de transitions sont des biholomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$. En particulier, pour tout $z \in Z$, l'espace tangent T_zZ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel complexe.
Soit alors ω une 2-forme (à valeurs réelles) de type $(1,1)$ sur Z, c'est-à-dire pouvant s'écrire localement en coordonnées :

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} a_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

où la matrice (a_{jk}) est hermitienne. ω définit donc un champ de formes hermitiennes sur Z, et si (a_{jk}) est définie positive, on obtient de la sorte une métrique riemannienne g_ω sur Z, donnée explicitement par :

$$g(v, w) = \omega(v, Iw)$$

pour tous vecteurs (réels) v et $w \in T_zZ$, I étant la structure complexe sur T_zZ.

Définition 1. *La métrique riemannienne g sera dite* kählerienne *si la forme ω est fermée, i.e. $d\omega$ =0.*
De manière équivalente, la structure complexe I est un tenseur parallèle pour la connexion de Levi-Civita de g : $\nabla I \equiv 0$.
La variété Z sera dite kählerienne s'il existe une métrique kählerienne ω sur Z.

Exemple 1. *Soit $Z = \mathbb{CP}^n$ l'espace projectif complexe, muni de sa structure holomorphe standard, et de coordonnées homogènes $z = [z_0 : ... : z_n]$.*
Sur l'ouvert $U_i = \{z_i \neq 0\}$, on a un système de coordonnées donné par $y_j = \frac{z_j}{z_i}$, $j \neq i$, et l'on définit :

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} [\log(1 + |y|^2)] dy_j \wedge d\bar{y}_k.$$

On vérifie facilement que ω_{FS} est indépendante du choix des coordonnées locales, fermée, et est définie positive, si bien qu'elle définit une métrique kählerienne sur l'espace projectif, dite métrique de Fubini-Study.
La normalisation par le facteur de 2π entraîne en outre que la classe de cohomologie $[\omega]$ est entière, et est égale au générateur standard de $H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$.

Remarque : la restriction d'une métrique kählerienne à une sous-variété holomorphe étant kählerienne, l'exemple précédent entraîne que les variétés algébriques projectives sont toutes kähleriennes. Notons cependant que la réciproque est fausse, et qu'il existe par ailleurs des variétés complexes compactes non kähleriennes.
Remarque : Si ω est une forme de Kähler sur Z, on vérifie par un calcul direct que sa puissance extérieure maximale ω^n définit une forme volume (réelle) sur Z, ce qui entraîne donc $\int_Z \omega^n > 0$. En particulier, le théorème de Stokes implique que la classe de cohomologie de De Rham $[\omega] \in H^2(Z, \mathbb{R})$ est non-nulle.
On appelera *classe de Kähler* sur Z toute classe $\alpha \in H^2(Z, \mathbb{R})$ contenant une forme de Kähler.

On introduit maintenant une classe (assez restreinte) de variétés kähleriennes compactes, aux propriétés spécifiques remarquables :

Définition 2. *Soit Z une variété kählerienne compacte, de dimension complexe n. On dira que c'est une variété de Calabi-Yau si elle est simplement connexe, et que son fibré en droites canonique $K_Z = \bigwedge^n \Omega^1_Z$ est holomorphiquement trivial, i.e. $K_Z \simeq \mathcal{O}_Z$.*
De manière équivalente, il existe sur Z une n-forme holomorphe Ω ne s'annulant nulle part, et celle-ci est unique à multiplication par un scalaire près.

Si Ω est une n-forme holomorphe sur X, la 2n-forme $i^{n^2}\Omega \wedge \bar{\Omega}$ est une forme volume sur X, et l'on peut normaliser Ω de telle sorte que $i^{n^2} \int_Z \Omega \wedge \bar{\Omega} = 1$. L'importance des variétés de Calabi-Yau en géométrie complexe provient du théorème suivant, conjecturé par E. Calabi en 1959 [3] puis démontré par S.T. Yau [11] en 1978 :

Théorème 1. *(Calabi-Yau)*
Soit Z une variété de Calabi-Yau, et $[\omega_0]$ une classe de Kähler sur Z, telle que $[\omega_0]^{\cup n} = V$. Il existe une unique métrique kählerienne Ricci-plate $\omega \in [\omega_0]$, i.e. satisfaisant l'équation de Monge-Ampère :

$$V^{-1}\omega^n = i^{n^2}\Omega \wedge \bar{\Omega}.$$

Remarque : l'existence de métriques kähleriennes Ricci-plates est en fait équivalente à ce que le fibré canonique K_Z soit de torsion, i.e. il existe un entier $m > 0$ tel que $K_Z^{\otimes m} \simeq \mathcal{O}_Z$.
Le lemme du $\partial\bar{\partial}$ assure que l'on peut chercher la solution ω sous la forme $\omega = \omega_0 + i\partial\bar{\partial}\phi$, où $\phi : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse.
Dans un système de coordonnées locales, on peut écrire $\Omega \wedge \bar{\Omega} = dz_1 \wedge ... \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_n$, et $\omega_0 = i \sum_{j,k} a_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, et l'équation devient alors :

$$\det(a_{jk} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}) = 1.$$

En particulier, l'équation est hautement non-linéaire, et la solution construite par Yau n'est absolument pas explicite. En fait, en dehors de quelques cas simples, on est incapable de décrire les (nombreuses) métriques kähleriennes Ricci-plates sur Z. Il semblerait que le mieux que l'on puisse espérer soit de décrire le comportement à la limite de ces métriques dans un certain régime asymptotique.
Il existe notamment une vaste littérature sur la description des métriques Ricci-plates dans une suite α_n de classes de Kähler, tendant vers une classe $\alpha_0 \in H^2(Z, \mathbb{R})$ qui n'est plus kählerienne, par exemple dans le cas où il existe une application holomorphe surjective $f : Z \longrightarrow Y$ vers une variété kählerienne de dimension inférieure, et où $\alpha_0 = f^*\omega_Y$ est le tiré en arrière d'une classe de Kähler sur Y : on peut alors montrer que la structure métrique sur Z induite par la métrique Ricci-plate $\omega_n \in \alpha_n$ s'effondre sur Y lorsque $n \to \infty$, cf. par exemple [5].
Dans ce texte, c'est en fait la situation "miroir" qui va nous intéresser, i.e. le cas où la structure complexe des Z_t varie avec t, et où la classe de Kähler est fixée (en un certain sens).

1.2 Dégénérescence de variétés kähleriennes

Définition 3. *Une dégénérescence de variétés kähleriennes (de dimension n) est une variété complexe X de dimension $(n+1)$, munie d'une submersion holomorphe $\pi : X \longrightarrow \Delta^*$, telle que les fibres $X_t = \pi^{-1}(t)$ soient des variétés kähleriennes compactes.*
On demande de plus que X soit méromorphe en 0, au sens suivant :
il existe un espace analytique complexe normal $\mathscr{X}$ muni d'une application holomorphe propre surjective $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow \Delta$, tel que $\mathscr{X}_{|\Delta^*} = X$.

Dans ce contexte, il convient de penser l'espace total X plutôt comme une famille $(X_t)_{t\in\Delta^*}$ de variétés kähleriennes paramétrée de manière holomorphe par le disque épointé, dont la singularité en 0 est méromorphe. Une extension (pas forcément lisse) de la famille X au disque tout entier sera appelée un *modèle* de X.
La situation typique sera la suivante : $\mathscr{X} \subset \mathbb{CP}^N \times \Delta$, et l'application π est donnée par la seconde projection, toutes les fibres étant lisses exceptée $\pi^{-1}(0)$. Par le théorème de Chow, les fibres X_t sont des variétés algébriques (définies par des équations polynomiales homogènes), et les équations qui les définissent sont à coefficients méromorphes en t.
On va en fait s'en tenir à une classe plus restreinte de modèles (qui existent toujours par le théorème de réduction semi-stable de Mumford [6]) :

Définition 4. *Un modèle $\mathscr{X}$ de X est semi-stable si l'espace total $\mathscr{X}$ est lisse, et si la fibre centrale est une réunion :*

$$\mathscr{X}_0 = \bigcup_{i\in I} D_i,$$

où les D_i sont des variétés kähleriennes lisses, s'intersectant deux à deux transversalement, et tel que localement sur $\mathscr{X}$ on puisse écrire $t = \pi(z) = \prod_{i\in I} z_i$, avec $D_i = \{z_i = 0\}$.

Les intersections des composantes irréductibles de la fibre centrale étant toutes transverses, pour tout ensemble d'indice $J \subset I$, l'intersection $D_J = \cap_{j\in J} D_j$ est kählerienne lisse (pas forcément connexe) de dimension $n+1-|J|$, et une composante connexe Y de D_J sera appelée *strate* de $\mathscr{X}_0$.
La combinatoire des intersections des strates s'encode naturellement via le complexe (pas tout à fait) simplicial suivant :

Définition 5. *(Complexe dual)*
Soit $\mathscr{X}/\Delta$ un modèle semi-stable de X, avec $\mathscr{X}_0 = \cup_{i\in I} D_i$. On définit le complexe dual $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ de la façon suivante :
A chaque strate Y, composante connexe de D_J, on associe un simplexe :

$$\sigma_Y = \{w \in \mathbb{R}_+^J / \sum_{j\in J} w_j = 1\},$$

et les relations d'incidence sont les suivantes :
σ_Y est une face de $\sigma_{Y'}$ si et seulement si $Y' \subset Y$.
On note de plus $|\mathscr{D}(\mathscr{X})|$ l'espace topologique sous-jacent à ce complexe simplicial.

Exemple 2. *Supposons que $\mathscr{X} \longrightarrow \Delta$ soit une dégénérescence semi-stable de courbes (i.e. de surfaces de Riemann, en particulier automatiquement projectives donc kähleriennes).*

La fibre centrale est une réunion $\mathscr{X}_0 = \cup_{i\in I} C_i$, dont les points singuliers sont modelés sur le point double $\{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, et le complexe dual $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ est simplement le graphe obtenu en assignant un sommet v_i à chaque courbe C_i, et une arête e_{ij} reliant v_i et v_j. pour chaque point d'intersection $z \in C_i \cap C_j$.

1.3 Convergence de Gromov-Hausdorff

Si $X \longrightarrow \Delta^*$ est une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau, et que l'on fixe une classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ dont la restriction à chaque fibre est Kähler, le théorème de Yau assure que chaque fibre X_t est munie canoniquement d'une métrique kählerienne Ricci-plate ω_t, qui induit en particulier une structure d'espace métrique sur X_t. Dans cette section, on définit alors la notion de *convergence* d'espaces métriques (compacts), au sens de Gromov-Hausdorff, afin de donner un sens à la dégénérescence des structures métriques sur X_t.

Commencons par le cas des sous-espaces compacts d'un même espace métrique (M, d_M), munis de la distance induite. Si $K \subset M$ est compact, on note :

$$V_\varepsilon(K) = \bigcup_{x\in K} \mathcal{B}(x, \varepsilon)$$

son ε-voisinage dans M.

La distance de Hausdorff entre deux compacts K et K' de M est alors définie par la formule :

$$d_H(K, K') = \inf\{\varepsilon > 0 / K' \subset V_\varepsilon(K) \text{ et } K \subset V_\varepsilon(K')\},$$

et l'on vérifie qu'il s'agit bien d'une distance sur l'ensemble des compacts de M.

On étend alors la définition aux espaces métriques abstraits Z et Z' de la manière suivante : on regarde tous les espaces métriques X admettant un plongement isométrique de Z et Z', et on prend l'infimum des distances de Hausdorff entre (les images de) Z et Z' calculée dans X :

$$d_{GH}(Z, Z') = \inf_X d_{H,X}(Z, Z').$$

Cette distance induit donc une topologie métrique sur l'ensemble $\mathcal{G}$ des classes d'isométries d'espaces métriques compacts. Cet espace est naturellement énorme, mais l'on va en pratique se restreindre uniquement aux espaces métriques de la forme (M, d_M), où M est une variété riemannienne compacte, et d_M la distance géodésique associée. Le résultat majeur de Gromov est alors le suivant :

Théorème 2. *(Précompacité de Gromov)*
Soit $C > 0$ une constante réelle. L'ensemble des espaces métriques (M, d_M), où M est une variété riemannienne compacte de dimension n, satisfaisant :

$$\operatorname{diam}(M, d_M) \leq C \textit{ et } \operatorname{Ricci}(g_M) \geq -C$$

est précompact dans $\mathcal{G}$ pour la topologie de Gromov-Hausdorff.
En particulier, si (M_i, g_i) est une suite de variétés riemanniennes de dimension n, de diamètre uniformément borné et de courbure de Ricci uniformément minorée, il existe une sous-suite $i(n)$ et un espace métrique compact (Z, d_Z) tel que :

$$(M_{i(n)}, g_{i(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{d_{GH}} (Z, d_Z).$$

On n'aura pas besoin dans ce texte de définir la courbure de Ricci d'une variété riemannienne en toute généralité, notons simplement que si les (M_i, g_i) sont des variétés de Calabi-Yau munies de métriques kähleriennes Ricci-plates, le contrôle sur la courbure de Ricci est automatique puisque $\mathrm{Ricci}(g_i) \equiv 0$.
Notons de plus que la limite de Gromov-Hausdorff n'est *a priori* pas unique (i.e. peut dépendre du choix de la sous-suite), et qu'il s'agit uniquement d'un espace métrique - par exemple, dans ce degré de généralité, la seule notion de dimension valable pour la limite est sa dimension de Hausdorff.

2 Le squelette essentiel

2.1 Convergence des mesures

On s'intéresse à partir de maintenant à la situation suivante : $\mathscr{X} \longrightarrow \Delta$ est une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau, lisse au-dessus de Δ^*, et de fibre centrale à croisements normaux $\mathscr{X}_0 = \cup_{i\in I} D_i$. En dehors de 0, chaque fibre X_t admet alors une n-forme holomorphe Ω_t, et l'on peut choisir la normalisation de telle sorte que Ω_t varie de manière holomorphe en t, si bien que la $(n+1)$-forme $dt \wedge \Omega_t$ définit alors une trivialisation de K_X ; et de plus telle que $dt \wedge \Omega_t$ s'étende méromorphiquement en une section du fibré canonique $K_{\mathscr{X}}$. Sous ces conditions, la forme Ω_t est définie à multiplication par un facteur ut^a près, où $a \in \mathbb{Z}$ et u est holomorphe ne s'annulant nulle part sur Δ.
Ceci munit naturellement chaque fibre X_t d'une forme volume $i^{n^2} \Omega_t \wedge \bar{\Omega}_t$, que l'on verra comme une mesure sur X_t, et que l'on notera ν_t.
La métrique de Calabi-Yau sur X_t étant obtenue par résolution de l'équation de Monge-Ampère $(\omega_t)^n = \nu_t$, il est naturel, pour étudier le comportement des ω_t à la limite $t \to 0$, de commencer par comprendre le comportement asymptotique des mesures ν_t, que l'on peut décrire précisément comme suit.
La $(n+1)$ forme $dt \wedge \Omega_t$ ayant éventuellement des pôles et des zéros le long des D_i, on peut donc écrire localement sur $\mathscr{X}$:

$$dt \wedge \Omega_t = \prod_{i\in I} z_i^{a_i} dz_0 \wedge ... \wedge dz_n,$$

où les $a_i \in \mathbb{Z}$, de telle sorte que Ω_t s'annule à l'ordre a_i (ou a un pôle d'ordre $-a_i$) le long de D_i.
Ces poids associés aux D_i permettent de distinguer certaines faces privilégiées de $\mathscr{D}(\mathscr{X})$:

Définition 6. *Une face σ_Y de $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ est dite essentielle si on a $a_j = \min_i a_i$ pour tout D_j contenant Y.*
On définit alors le squelette essentiel $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$ *de $\mathscr{X}$ comme l'union des faces essentielles de $\mathscr{D}(\mathscr{X})$.*

On peut alors décrire le comportement asymptotique de la masse $\nu_t(X_t)$, en fonction du complexe dual $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ et des poids a_i :

Théorème 3. *On a un équivalent au voisinage de* 0 *:*

$$\nu_t(X_t) \sim_{t\to 0} C|t|^{2a} (\log|t|^{-1})^d,$$

où C est une constante positive, $a = \min_i a_i$ et d la dimension du squelette essentiel $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$.
En particulier, d ne dépend que de X et pas du choix d'un modèle $\mathscr{X}$.

Démonstration. Suivant le calcul de [4], on se contente de démontrer un résultat légèrement plus faible, i.e. :

$$\log \nu_t(X_t) = a \log|t|^2 + d \log \log|t|^{-1} + O(1).$$

Soit $x \in \mathscr{X}_0$, et $J(x) = \{j \in I / x \in D_j\}$.$\mathscr{X}$ étant à croisements normaux, on peut trouver au voisinage de x un système holomorphe de coordonnées $(z_0, ..., z_n)$ tel que $t = \prod_{j \in J(x)} z_j$, et D_j soit défini par $\{z_j = 0\}$.
On fixe un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_\alpha)_\alpha$ d'un voisinage de la fibre tel que de telles coordonnées existent sur chaque $U_\alpha = \{|z_i| \leq 1\}$, ainsi qu'une partition de l'unité $(\phi_\alpha)_\alpha$ subordonnée à $\mathscr{U}$.
On peut de plus choisir les U_α de telle sorte que l'on puisse écrire $\Omega_t \wedge \pi^* dt = \prod_{j \in J(x)} z_j^{a_j} dz_0 \wedge ... \wedge dz_n$,
Soit $j_0 \in J(x)$ réalisant le minimum des a_j sur $J(x)$, on écrit alors :

$$dz_0 \wedge ... \wedge dz_n = (-1)^{j_0} z_{j_0} \pi^* \frac{dt}{t} \wedge dz_0 \wedge ... \widehat{dz_{j_0}} \wedge ... dz_n.$$

On effectue alors le changement de variable $z_j = \exp(-r_j + i\theta_j)$ pour $j \in J(x)$, le domaine d'intégration $U_\alpha \cap X_t$ est donné par $|z_i| \leq 1$ et $t = \prod_{j \in J(x)} z_j$, soit $r_i \geq 0$, $\sum_{j \in J(x)} \theta_j = \arg(s)$ et $\sum_{j \in J(x)} r_j = -\log|t|$. On obtient :

$$\nu_t(X_t)_\alpha = \int_{U_\alpha \cap X_t} \phi_\alpha \frac{|z_{j_0}|^2}{|t|^2} \prod_{j \in J(x)} |z_j|^{2a_j} \prod_{j \neq j_0} dz_j \wedge d\overline{z_j}$$

$$= |t|^{-2} \int \phi_\alpha e^{-2r_{j_0}} \prod_{j \in J(x)} e^{-2a_j r_j} \prod_{j \neq j_0} e^{-2r_j} dr_j \wedge d\theta_j$$

$$= |t|^{-2} \int \phi_\alpha \prod_{j \in J(x)} e^{-2(a_j - 1) r_j} \prod_{j \neq j_0} dr_j \wedge d\theta_j$$

$$= |t|^{2a_{j_0}} \int_{\sum r_j = -\log|t|} \psi_\alpha(r) \prod_{j \in J(x)} e^{-2(a_j - a_{j_0}) r_j} \prod_{j \neq j_0} dr_j,$$

où $\psi_\alpha(r)$ est une fonction bornée positive, obtenue en intégrant ϕ_α par rapport aux angles θ_j, et en effectuant l'intégrale par rapport aux coordonnées qui ne sont pas dans $J(x)$.
Il reste à estimer la dernière intégrale, à un facteur borné près on peut supposer que $\psi_\alpha \equiv 1$. Il s'agit d'une intégrale sur un simplexe de taille $(\log|t|^{-1})$, (les coordonnées hors de $J(x)$ n'ayant aucune importance dans le calcul) donc il est clair qu'elle est dominée par un facteur $(\log|t|^{-1})^n$.
La contribution de l'ouvert U_α à la masse totale de ν_t ne peut donc être maximale que si le terme en puissance de $|t|^{2(a_{j_0}-1)}$ est lui-même maximal, i.e. $a_{j_0} = a_{min} = a$, ce que l'on supposera désormais.
De plus, pour chaque $j \in J(x)$ tel que $a_j \neq a_{min}$, il est clair que la décroissance exponentielle du facteur $e^{-2(a_j - a_{j_0}) r_j}$ compense la croissance du simplexe sur lequel on effectue

l'intégrale, si bien que l'intégrale se compare à celle prise uniquement sur les indices j tels que $a_j = a_{min}$. Dans ce cas, on intègre simplement la fonction constante égale à 1 sur un k-simplexe de taille $-\log|t|$, d'où une contribution en $(\log|t|^{-1})^k$, où $k+1$ est le nombre maximal de composantes D_i de $\mathscr{X}_0$ telles que $a_i = a_{min}$ et $\cap_i D_i \neq \varnothing$.
Ceci signifie précisément que k est la dimension maximale d'une face Ω-essentielle, et l'on obtient bien que la contribution maximale est en :

$$\nu_t(X_t)_\alpha \sim |t|^{2a_{min}}(\log|t|^{-1})^d.$$

$\square$

Remarque : le terme en puissance de t apparaissant dans ce développement est en fait sans importance, il suffirait de remplacer la forme Ω par $t^{-a}\Omega$ pour le faire disparaître - à l'inverse du terme logarithmique, qui contient *intrinsèquement* de l'information sur le degré de dégénérescence de la famille X en $t = 0$.
L'observation cruciale découlant de cette démonstration est que la masse de ν_t s'accumule uniquement au voisinage des points $x \in \mathscr{X}_0$ tels que pour tout D_j contenant x, on ait $a_j = a$. On introduit alors la mesure renormalisée, de masse convergente :

$$\mu_t = \frac{\nu_t}{|t|^{2a}(\log|t|^{-1})^d},$$

et on va décrire plus précisément son comportement à la limite $t \to 0$. Sur un ouvert $U \subset \mathscr{X}$ comme précédemment, i.e. avec $t = \prod_{j\in J} z_j$, et tel que de plus on ait $U \cap D_J \subset Y$ pour une unique composante connexe Y de D_J, on peut alors définir une application (locale) de "tropicalisation" :

$$\mathrm{Log}_t : U \cap X_t \longrightarrow \sigma_Y,$$
$$\mathrm{Log}_t(z_0, ..., z_n) = (\frac{\log|z_0|}{\log|t|}, ..., \frac{\log|z_0|}{\log|t|}),$$

dont les fibres sont des tores réels. Le calcul précédent montre alors que les mesures poussées en avant $(\mathrm{Log}_t)_*\mu_t$ ne chargent de masse sur σ_Y à la limite $t \to 0$ que si la face σ_Y est essentielle. On a en fait le résultat suivant :

Théorème 4. *(Boucksom-Jonsson, [2])*
Sous les mêmes hypothèses, on note toujours :

$$\mu_t = \frac{i^{n^2}\Omega_t \wedge \bar{\Omega}_t}{|t|^{2a}(\log|t|^{-1})^d}.$$

La famille de mesures μ_t converge, lorsque $t \to 0$, vers une mesure μ_0 sur $\mathscr{D}(\mathscr{X})$, dont le support est précisément l'union des faces essentielles.
De plus, si la famille est maximalement dégénérée, i.e. $d = n$, la restriction de μ_0 à chaque face essentielle σ est un multiple de la mesure de Lebesgue sur σ.

Remarque : il est important de noter que l'on a pas précisé en quel sens la convergence des mesures avait lieu - la mise en place d'un bon cadre pour cela constitue en fait l'étape principale de la preuve de ce résultat, et l'on renvoie à [2] pour plus d'informations.

2.2 Le point de vue non-archimédien

Dans cette section, on explique comment réaliser le squelette essentiel de X canoniquement à l'intérieur de l'espace analytique non-archimédien X^{an} associé à X - et donc indépendamment du choix d'un modèle $\mathscr{X}$.
Soit donc $X \longrightarrow \Delta^*$ une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau, que l'on supposera de plus projective, i.e. $X \subset \mathbb{P}^N \times \Delta^*$. Les fibres X_t sont alors des sous-variétés algébriques de $\mathbb{P}^N$, données par un système d'équations polynomiales homogènes, dont les coefficients sont des fonctions méromorphes de $t \in \Delta^*$. En particulier, ces coefficients peuvent être vus comme des éléments du corps $K = \mathbb{C}((t))$ des séries de Laurent sur $\mathbb{C}$, et l'on peut donc voir l'espace total X comme une sous-variété algébrique de l'espace projectif $\mathbb{P}^N_K$.
Le corps K est en outre muni d'une valeur absolue *non-archimédienne* $|\cdot|_K$, c'est-à-dire satisfaisant l'inégalité triangulaire ultramétrique :

$$|f+g|_K \leq \max\{|f|_K, |g|_K\},$$

pour tous f et $g \in K$. Elle est simplement définie par la formule $|f|_K = \exp(-v(f))$, où v est l'ordre d'annulation de f en zéro, plus précisément :

$$v(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} / a_n \neq 0\}$$

si $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$.
Cette valeur absolue permet de développer une notion de géométrie analytique non-archimédienne sur K (introduite au début des années 90 par Berkovich [1]), et de la même manière qu'à une sous-variété algébrique de $\mathbb{CP}^N$ on peut associer une variété holomorphe, on peut associer à $X \subset \mathbb{P}^N_K$ un *espace analytique au sens de Berkovich* X^{an}, dont les points sont des (semi)valeurs absolues sur le corps des fonctions méromorphes $K(X)$, étendant la valeur absolue de base sur K, qui est vu comme les fonctions constantes sur X. Il s'agit notamment d'un espace topologique assez agréable, puisque compact, localement connexe et localement contractile.
L'observation de Kontsevich-Soibelman est alors que le complexe dual $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ de tout modèle à croisements normaux se plonge naturellement dans X^{an} : si $\mathscr{X}_0 = \cup_{i\in I} D_i$, on associe au sommet correspondant à D_i la valeur absolue $|\cdot|_{D_i} = \exp(-\mathrm{ord}_{D_i})$, où $\mathrm{ord}_{D_i}(f)$ est l'ordre d'annulation de f le long de D_i, pour tout $f \in K(X)$. On étend ensuite cette application aux faces de dimension plus grandes par un procédé d'interpolation linéaire, et on obtient une application continue :

$$i_{\mathscr{X}} : |\mathscr{D}(\mathscr{X})| \longrightarrow X^{an}$$

réalisant un homéomorphisme sur son image, que l'on note $\mathrm{Sk}(\mathscr{X})$. En outre, $\mathrm{Sk}(\mathscr{X})$ se trouve être un rétracte par déformation fort de l'espace topologique X^{an}, et la rétraction apparaît comme une limite (globale !) non-archimédienne des applications de tropicalisation locales Log_t de la section précédente. Cette rétraction est alors appelée *fibration SYZ non-archimédienne* (associée au modèle $\mathscr{X}$).
Etant donnée une n-forme méromorphe sur X Ω, on associe naturellement à la valuation $\mathrm{ord}_{D_i} \in \mathrm{Sk}(\mathscr{X})$ l'ordre d'annulation $a_i = \mathrm{ord}_{D_i}(\Omega)$, il se trouve que cette application s'étend ensuite par interpolation affine à $\mathscr{D}(\mathscr{X}) \simeq \mathrm{Sk}(\mathscr{X})$ puis à X^{an} tout entier, on note μ_Ω cette extension. On a alors :

Théorème 5. *(Mustata-Nicaise, [8])*
La fonction $\mu_\Omega : X^{an} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est semi-continue inférieurement, et donc atteint son minimum* $\mu_\Omega(X)$*. On note alors :*

$$\mathrm{Sk}(X) = \{x \in X^{an} / \mu_\Omega(x) = \mu_\Omega(X)\}.$$

Pour tout modèle à croisements normaux $\mathscr{X}$ *de* X*,* $\mathrm{Sk}(X)$ *coïncide avec le squelette essentiel* $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$*, qui est donc indépendant de* $\mathscr{X}$*.*

3 Dégénérescence des métriques

3.1 La conjecture de Kontsevich-Soibelman

Dans toute cette sous-section, on suppose que la famille $X \longrightarrow \Delta^*$ est *maximalement dégénérée*, i.e. $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sk}(X) = n = \dim_{\mathbb{C}} X_t$ (bien qu'il semble raisonnable de supposer qu'une discussion similaire soit valable dès que $d > 0$).
L'une des motivations initiales pour comprendre le comportement asymptotique des mesures μ_t est la compréhension de la limite (au sens de Gromov-Hausdorff) des mesures kähleriennes Ricci-plates (renormalisées) $\tilde{\omega}_t = \frac{\omega_t}{\mathrm{diam}(\omega_t)^2}$. Notons que le théorème de précompacité de Gromov garantit qu'avec cette normalisation sur les diamètres, pour tout choix de suite $t_i \to 0$, la suite d'espaces métriques $(X_{t_i}, \tilde{\omega}_{t_i})$ converge (après extraction d'une sous-suite) vers un certain espace métrique compact (Z, d_Z) (bien qu'*a priori* la limite ne soit pas unique).
Les métriques Ricci-plates ω_t sur les fibres X_t étant obtenues par résolution de l'équation de Monge-Ampère :

$$\omega_t^n = V \nu_t,$$

il est raisonnable de s'attendre à ce que la limite des $(X_t, \tilde{\omega}_t)$ soit alors le squelette $\mathrm{Sk}(X)$, muni d'une métrique de type Monge-Ampère réelle, i.e. donnée sur l'intérieur d'une face par la hessienne d'une fonction convexe ϕ, satisfaisant l'équation de Monge-Ampère réelle :

$$\det\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i \partial w_j}\right) dw = \mu_0,$$

où les w_i sont les coordonnées naturelles induites par la structure simpliciale sur $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$.
Notons que le membre de gauche *dépend* du choix des coordonnées w_i, qui sont ici obtenues naturellement à partir de la structure simpliciale sur $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$, pour un certain modèle à croisements normaux $\mathscr{X}$.
Cependant, la structure simpliciale sur $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$ est celle induite par $\mathscr{D}(\mathscr{X})$, et *dépend* du choix du modèle $\mathscr{X}$, qui n'est absolument pas canonique.
Il est alors plus naturel d'introduire la notion de structure $\mathbb{Z}$-affine, et de voir que la structure $\mathbb{Z}$-affine (par morceaux) sur $\mathrm{Sk}^{ess}(\mathscr{X})$ est indépendante du choix d'un modèle :

Définition 7. *Soit* B *une variété lisse de dimension* n*.*
Une structure $\mathbb{Z}$*-affine sur* B *est la donnée d'un atlas de cartes* (U_α) *sur* B *telles que les fonctions de transitions* $\varphi_{\alpha\beta}$ *soient des fonctions* $\mathbb{Z}$*-affines entre ouverts de* $\mathbb{R}^n$*, i.e. données par des polynômes de degré au plus 1 à coefficients entiers :*

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

où les $a_i \in \mathbb{Z}$, ou encore $\varphi_{\alpha\beta} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^n$.
De manière équivalente, pour tout ouvert $V \subset B$, on peut parler de fonctions $\mathbb{Z}$-affines $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ indépendamment du choix d'une carte.
Si g_B est une métrique riemannienne réelle sur B, on dira que g_B est une métrique de Monge-Ampère réelle si localement en coordonnées $\mathbb{Z}$-affines, on a :

$$g_B = Hess(\phi) \text{ et } \det(g_{ij}) = \det(\partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j) = cst,$$

pour une fonction ϕ convexe par rapport aux coordonnées affines.

Notons que si B est l'espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial, il n'admet une structure $\mathbb{Z}$-affine (donnée par les coordonnées standard sur le n-simplexe) que sur la réunion des intérieurs de ses faces de dimension maximales - on parle alors plutôt de structure $\mathbb{Z}$-affine *par morceaux.*
La discussion qui précède suggère que les limites "tropicales" des variétés de Calabi-Yau (au moins dans le cas maximalement dégénéré) sont des variétés de Monge-Ampère réelles :

Conjecture 1. *(Kontsevich-Soibelman, version faible, [7] 5.1.2)*
Soit $X \longrightarrow \Delta^*$ une famille maximalement dégénérée de variétés de Calabi-Yau, et $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Q})$ une classe de cohomologie dont la restriction à chaque fibre est Kähler. On note ω_t l'unique métrique kählerienne Ricci-plate sur la fibre X_t, telle que $[\omega_t] = [\omega]_{|X_t}$. Alors :
• $\mathrm{diam}(X_t, \omega_t) = \log|t|^{-1}(1 + O(1))$ *;*
• *la limite au sens de Gromov-Hausdorff de $(X_t, \mathrm{diam}(\omega_t)^{-2}\omega_t)$ est unique et notée (B, g_B), satisfaisant la propriété suivante :*
il existe un ouvert $B^o \subset B$, dont le complémentaire est de codimension (de Hausdorff) au moins 2, tel que B^o soit une variété $\mathbb{Z}$-affine et g_{B^o} soit une métrique de Monge-Ampère réelle ;
• *B est homéomorphe à* $\mathrm{Sk}(X)$.

La difficulté de cette approche réside tout d'abord dans le fait que la convergence $\mu_t \to \mu_0$ s'effectue en un sens assez faible. Il n'y a donc *a priori* pas de raison que la convergence des mesures entraîne la continuité des solutions des équations de Monge-Ampère correspondantes - notamment parce qu'elles sont de nature très différentes.

3.2 Compactification d'espaces des modules

Dans cette section, on se contente d'une description heuristique des perspectives ouvertes par la conjecture de Kontsevich-Soibelman en termes d'espaces des modules, que l'on introduit ci-dessous.
Soit $\mathcal{F}$ une certaine famille de variétés algébriques (par exemple, la famille $\mathcal{F}_g$ des courbes de genre g). Un espace des modules (grossier) pour la famille $\mathcal{F}$ est une variété algébrique $\mathcal{M}$ paramétrant de manière naturelle les classes d'isomorphismes de variétés de $\mathcal{F}$. Formellement, il s'agit d'une variété algébrique $\mathcal{M}$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :
• les points de $\mathcal{M}$ sont en bijection avec les classes d'isomorphisme d'éléments de $\mathcal{F}$,
• pour toute base B et toute famille $\mathcal{E} \longrightarrow B$ dont les fibres $\mathcal{E}_b$ sont dans $\mathcal{F}$, l'application classifiante :

$$\psi_{\mathcal{E}} : B \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$b \mapsto [\mathcal{E}_b]$$

est holomorphe.
En particulier, si $X \longrightarrow \Delta^*$ est une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau, elle induit une application holomorphe $\psi : \Delta^* \longrightarrow \mathcal{M}$ vers un certain espace de modules, que l'on aimerait compactifier en $\overline{\mathcal{M}}$, espace des modules compact, de telle sorte que ψ s'étende en 0 (à valeurs dans $\overline{\mathcal{M}}$) et que de plus les points de $\overline{\mathcal{M}} \backslash \mathcal{M}$ paramètrent certains objets géométriques, limites dégénérées de variétés de $\mathcal{F}$. On dit alors que la compactification est *modulaire.*
Dans le cas des variétés de Calabi-Yau, il n'est en général pas possible de construire une compactification naturelle dont les points du bord paramètrent des variétés algébriques (même très singulières) ; ceci résulte simplement du fait que l'on ne dispose pas de manière canonique de "remplir" une famille X/Δ^* en une famille $\mathscr{X}/\Delta$ lorsque les fibres sont des variétés de Calabi-Yau - inclure par exemple toutes les fibres centrales $\mathscr{X}_0$ de dégénérescences dans $\overline{\mathcal{M}}$ conduirait à un espace non séparé.
Cependant, le théorème de précompacité de Gromov entraîne que l'adhérence dans $\mathcal{G}$ de l'ensemble des espaces métriques (X, g_X) est un espace métrique compact $\overline{\mathcal{M}}^{GH}$, pour $X \in \mathcal{M}$ et g_X la métrique kählerienne Ricci-plate de diamètre 1 dans la classe de Kähler donnée. De plus, $\overline{\mathcal{M}}^{GH}$ contient naturellement $\mathcal{M}$ comme un ouvert dense : il s'agit donc d'un candidat naturel pour compactifier $\mathcal{M}$, au moins topologiquement.
Cependant, il semble s'agir d'une compactification un peu grossière - un moyen de la "raffiner" serait de garder en mémoire des structures additionnelles vivant sur la limite au sens de Gromov-Hausdorff (par exemple, la structure $\mathbb{Z}$-affine).
De ce point de vue, la conjecture de Kontsevich-Soibelman suggère alors que l'on puisse construire une compactification "tropicale" $\overline{\mathcal{M}}^{Trop}$ de $\mathcal{M}$, dont les objets du bord paramètrent certaines variétés de Calabi-Yau tropicales, comme définies en 3.1, satisfaisant la propriété suivante :
Pour toute famille $X \longrightarrow \Delta^*$ de variétés de Calabi-Yau polarisées, l'application classifiante $\psi : \Delta^* \longrightarrow \mathcal{M}$ s'étend en 0 en une application $\psi : \Delta \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{Trop}$, $\psi(0)$ étant le point correspondant au squelette $\mathrm{Sk}(X)$ muni de sa structure affine, et de la métrique de Monge-Ampère réelle construite au paragraphe précédent.
L'espace $\overline{\mathcal{M}}^{Trop}$ est naturellement muni d'une application d'oubli $p : \overline{\mathcal{M}}^{Trop} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{GH}$, qui associe simplement à une variété de Calabi-Yau tropicale l'espace métrique sous-jacent.
On peut alors formuler une version "globale" de la conjecture de Kontsevich-Soibelman, qui a été annoncée comme partiellement résolue en dimension 2 par Odaka-Oshima [10] :

Conjecture 2. *(Kontsevich-Soibelman-Odaka, version globale)*
L'application d'oubli $p : \overline{\mathcal{M}}^{Trop} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{GH}$ *est continue.*

Notons cependant que la compactification $\overline{\mathcal{M}}^{Trop}$ reste assez grossière - par exemple, si $\mathrm{Sk}(X)$ est de dimension 1, il s'agit simplement de l'intervalle $[0, 1]$ (de longueur 1 à cause de la normalisation sur le diamètre), si bien que $\psi(0)$ est le même pour toute dégénérescence satisfaisant $d = 1$.

Références

[1] V. Berkovich. Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields. *Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 33*, 1990.

[2] S. Boucksom and M. Jonsson. Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms. *Journal de l'Ecole polytechnique*, pages 87–139, 2017.

[3] E. Calabi. On Kähler manifolds with vanishing canonical class. *Algebraic Geometry and Topology, a Symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 78–89, 1955.

[4] D. Eriksson, G. Freixas I Montplet, and C. Mourougane. Singularities of metrics on Hodge bundles and their topological invariants. *Algebr. Geom.*, 2016.

[5] M. Gross, V. Tosatti, and Y. Zhang. Gromov-Hausdorff collapsing of Calabi-Yau manifolds. *Comm. Anal. Geom. 24*, pages 93–113, 2016.

[6] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings I.* Springer-Verlag, 1973.

[7] M. Kontsevich and Y. Soibelman. Affine structures and non-archimedean analytic spaces. *The unity of mathematics, Progress in Math., vol. 244*, pages 321–385, 2006.

[8] M. Mustata and J. Nicaise. Weight functions on non-Archimedean analytic spaces and the Kontsevich-Soibelman skeleton. *Algebr. Geom. 2*, page 365 ?404, 2015.

[9] Y. Odaka. Tropical geometric compactification of moduli, I - Mg case. *preprint, arXiv :1406.7772v3*, 2014.

[10] Y. Odaka and Y. Oshima. Collapsing K3 surfaces and moduli compactification. *preprint, arXiv :1805.01724*, 2018.

[11] S.-T. Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1978.