

# Structures géométriques en petites dimensions

Katharina Pabst et Chloé Perin  
Exposé proposé par Frédéric Paulin

## Actualité

Ces derniers temps, nous avons entendu parler du travail d'un mathématicien russe, Grigori Perelman, qui annonce une preuve de la conjecture célèbre suivante.

**Conjecture de Poincaré :** *La seule variété de dimension 3, compacte, connexe et simplement connexe est  $\mathbb{S}^3$ , la sphère de dimension 3.*

En fait, il aurait avancé dans le "programme de géométrisation" proposé par l'américain William Thurston il y a une vingtaine d'années, et qui fournirait une classification des variétés de dimension trois. En gros, l'idée est de donner aux variétés des structures géométriques afin de mieux comprendre leur structure topologique.

Par exemple, la formule de Gauss-Bonnet (voir [Spi]) permet d'obtenir une information topologique à partir d'une information géométrique : une surface compacte, connexe, orientable, admettant une métrique riemannienne à courbure constante strictement négative, est de genre au moins deux.

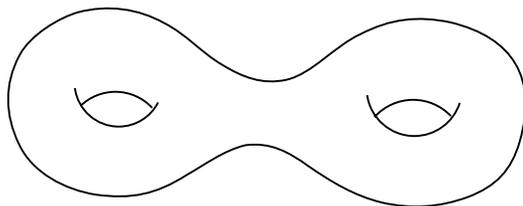


FIG. 1: Surface compacte connexe orientable de genre 2.

Qu'est-ce exactement qu'une structure géométrique sur une variété ? C'est-ce dont nous parlerons dans notre exposé, en traitant des exemples en dimension un et deux.

Dans la première partie, nous exposerons la notion de géométrie modèle, puis la façon de munir une variété d'une structure géométrique correspondante. Dans un deuxième temps, nous en présenterons un des intérêts. Enfin, nous reviendrons aux géométries modèles pour en donner une classification en dimension un.

## Table des matières

<b>1 Variétés, géométries modèles et structures géométriques</b>	<b>4</b>
1.1 Définitions . . . . .	4
1.2 Discussion des conditions . . . . .	8
1.3 Morphismes et isomorphismes . . . . .	8
1.4 Exemple . . . . .	9
<b>2 L'application développante et l'holonomie</b>	<b>11</b>
2.1 Quelques notions de base de topologie algébrique . . . . .	11
2.2 Le théorème . . . . .	12
2.3 Complétude . . . . .	15
<b>3 Classification des géométries modèles en dimension 1</b>	<b>17</b>
3.1 Introduction . . . . .	17
3.2 Variétés analytiques réelles de dimension 1 . . . . .	17
3.3 Passage au revêtement d'une géométrie modèle . . . . .	17
3.4 Groupes et algèbres de Lie . . . . .	22
3.5 Réduction du problème de classification . . . . .	24
3.6 L'application $\pi_*$ . . . . .	25
3.7 Passage des groupes de Lie aux algèbres de Lie . . . . .	27
3.8 Théorème "local" de Lie . . . . .	28
3.9 Étude des algèbres $\mathcal{B}_k$ . . . . .	29
3.10 Théorème de Sophus Lie . . . . .	29

# 1 Variétés, géométries modèles et structures géométriques

## 1.1 Définitions

Pour les paragraphes sur les variétés et les groupes de Lie, on pourra consulter [Spi]. En ce qui concerne géométries modèles et structures géométriques, nous proposons [Thu].

### Rappel : Variétés analytiques

Une *variété topologique*  $V$  de dimension  $n$  est un espace topologique séparé, séparable, et localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Ceci signifie que pour tout point  $p$  dans  $V$ , il existe un ouvert  $U$  de  $V$  contenant  $p$ , un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \Omega$ . Un tel homéomorphisme est appelé une *carte* pour  $V$ , et on l'écrit  $(U, \varphi)$ . Un *atlas* est un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent  $V$ .

Si  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  sont deux cartes, le *changement de cartes* correspondant est l'application

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

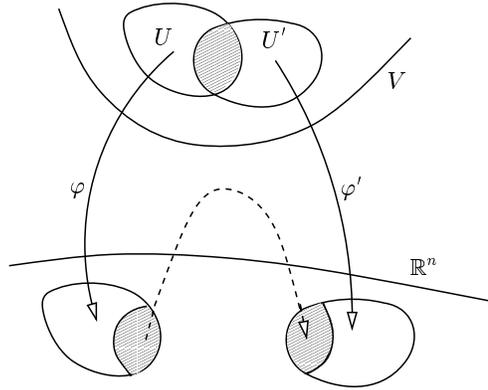


FIG. 2: Le changement de cartes de  $\varphi$  à  $\varphi'$ .

On peut maintenant définir différents types de variétés en imposant des conditions sur les changements de cartes. Les variétés que nous étudierons sont les variétés analytiques réelles, définies ci-dessous.

Deux cartes sont dites  $C^\omega$ -compatibles si le changement de cartes qui leur correspond est un difféomorphisme analytique réel.

Une *variété analytique réelle* est un variété topologique munie d'un atlas maximal de cartes  $C^\omega$ -compatibles. On l'appelle aussi variété  $C^\omega$ .

On peut également imposer d'autres conditions de compatibilité sur les cartes d'un atlas : les variétés  $C^r$  par exemple sont des variétés munies d'atlas maximaux dont les changements de cartes sont de classe  $C^r$ .

Soient  $V_1, V_2$  deux variétés analytiques. Une application  $f : V_1 \rightarrow V_2$  est *analytique réelle* si pour tout  $p \in V_1$ , il existe des cartes  $(\varphi_1, U_1)$  et  $(\varphi_2, U_2)$  avec  $p \in U_1$ ,  $f(U_1) \subseteq U_2$ , telles que  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$  soit analytique réelle.

On peut aussi définir un atlas d'une variété  $V$  dans une autre variété  $X$ , ce sont simplement des ensembles de cartes à valeurs dans  $X$  plutôt que dans  $\mathbb{R}^n$ .

Dans le cas des structures géométriques, on munira une variété topologique  $V$  d'un atlas de cartes à valeurs dans une variété analytique réelle  $X$ , dont les changements de cartes sont des restrictions d'éléments d'un sous-groupe du groupe des difféomorphismes analytiques réels sur  $X$ .

Soit  $V$  une variété analytique réelle. Une partie  $W$  de  $V$  est une *sous-variété analytique réelle* de  $V$  de dimension  $d$  si pour tout point  $p$  de  $W$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  pour  $V$  telle que  $U$  contienne  $p$  et  $\varphi(Y \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^d \times \{0\}$ .

## Groupes de Lie

Un *groupe de Lie* est un groupe muni d'une structure de variété analytique réelle compatible avec sa structure de groupe, c'est-à-dire telle que l'application

$$\begin{aligned} \phi &: G \times G \rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

soit analytique réelle.

### Exemples :

1. Trivialement, le groupe additif  $\mathbb{R}^n$  est un groupe de Lie, l'addition étant une application analytique réelle.
2. Le cercle  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  est un groupe de Lie : c'est une variété analytique réelle de dimension 1 par des cartes définies sur des ouverts appropriés associant à un point  $z = e^{i\theta}$  du cercle son angle  $\theta$ . Sa structure de groupe est celle induite par la multiplication sur  $\mathbb{C}$ .
3. Le groupe  $GL_n(\mathbb{R})$  des matrices  $n \times n$  inversibles est un groupe de Lie :  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n^2}$  puisque c'est l'image inverse par l'application continue  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  de l'ouvert  $\mathbb{R} - \{0\}$ . La multiplication de deux matrices est une application polynômiale sur les coefficients des deux matrices, qui est clairement analytique réelle. L'application d'inversion est également analytique réelle : on peut le constater grâce à l'égalité suivante :

$$\text{Si } A \in GL_n(\mathbb{R}), (A^{-1})_{ji} = \frac{(\det A^{ij})}{\det A}$$

où  $A^{ij}$  est la matrice obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $A$ . Toutes les applications sont des fractions rationnelles en les coefficients dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur  $GL_n(\mathbb{R})$ , donc elles sont analytiques réelles.

4. En tant que sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ , le groupe  $O(n)$  des matrices orthogonales hérite d'une structure de groupe de Lie. En effet,  $O(n)$  est une sous-variété analytique réelle de  $GL_n(\mathbb{R})$  puisqu'elle est définie par l'équation analytique réelle  $A^t A = I_n$ . Comme c'est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ , la multiplication et l'inversion sur  $O(n)$  sont analytiques réelles.

## Géométries modèles

Felix Klein formulait dans son programme d'Erlangen de 1872 l'approche abstraite de la recherche géométrique ainsi : "Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe" (voir [Klei]).

Il s'agit d'une traduction contemporaine ... "multiplicité" veut dire "variété".

En terme moderne, il s'agit d'étudier les géométries modèles :

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $X$  une variété analytique réelle connexe et  $\alpha$  une action du groupe  $G$  sur l'ensemble  $X$ . Le triplet  $(G, X, \alpha)$  est une *géométrie modèle* si  $\alpha$  est une action analytique réelle, transitive, et fidèle, i.e. :

1. l'application  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  est analytique réelle (où  $G \times X$  est munie de la structure produit évidente de variété analytique réelle).
2.  $\forall x_1, x_2 \in X, \exists g \in G$  tel que  $g(x_1) = x_2$
3.  $\forall g \in G$ , avec  $g \neq 1$ ,  $\exists x \in X$  tel que  $g(x) \neq x$

**Remarque :** On parlera dorénavant d'une géométrie modèle  $(G, X)$  sans forcément en préciser l'action  $\alpha$ .

**Exemples :**

1. La géométrie euclidienne :  
 $X = \mathbb{R}^n$ ,  $G = \mathbb{R}^n \times O(n)$ , et l'action de  $G$  sur  $X$  est donnée par  $\alpha(g, x) = t + rx$  où  $g = (t, r) \in G, t \in \mathbb{R}^n, r \in O(n)$ .

C'est l'action sur  $\mathbb{R}^n$  du groupe des déplacements engendré par les translations et les rotations.

2. La géométrie sphérique :  
 $X = \mathbb{S}^{n-1}, G = O(n)$ , l'action de  $G$  sur  $X$  étant induite par l'action de  $G$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
3. La géométrie projective :  
 $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence sur les vecteurs de  $\mathbb{R}^{n+1}$  donnée par  $v \sim w$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = \lambda w$ . Pour  $v$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on note  $\tilde{v}$  la classe d'équivalence de  $v$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

Le groupe de Lie  $G$  est  $PGL_{n+1}(\mathbb{R}) = GL_{n+1}(\mathbb{R}) / Z(GL_{n+1}(\mathbb{R}))$  où  $Z(GL_{n+1}(\mathbb{R}))$ , le centre de  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ , est l'ensemble des homothéties de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pour  $A$  dans  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ , on note  $\tilde{A}$  la classe de  $A$  dans  $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ .

L'action de  $G$  sur  $X$  est donnée par

$$\alpha : PGL_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

$$(\tilde{A}, \tilde{x}) \mapsto \tilde{Ax}.$$

4. La géométrie hyperbolique :  
 $X = \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  (le demi-plan de Poincaré),  $G = PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$   
L'action de  $G$  sur  $X$  est donnée par

$$\tilde{A}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \text{ et } \tilde{A} \text{ est la classe de } A \text{ dans } PSL_2(\mathbb{R}).$$

On peut voir que les transformations hyperboliques sont des composées de réflexions dans des demi-cercles et des demi-droites orthogonaux à l'axe des réels (ce sont les droites de la géométrie hyperbolique, dans le sens que ce sont les géodésiques pour les métriques sur  $\mathcal{H}$  qui sont invariantes par les transformations hyperboliques).

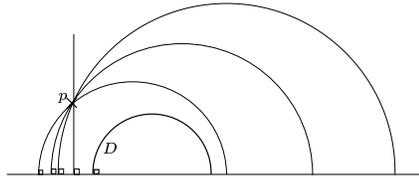


FIG. 3: Donnés une droite  $D$  de  $\mathcal{H}$  et un point  $p$  en dehors de cette droite, il y a une infinité de droites parallèles à  $D$  passant par  $p$ .

## Structures géométriques

Soit  $(G, X)$  une géométrie modèle. Soit  $V$  une variété topologique. Un  $(G, X)$ -atlas sur  $V$  est un atlas de cartes sur  $V$  à valeurs dans  $X$  tel que les changements de cartes soient localement des restrictions d'éléments de  $G$ .

En d'autres termes, si  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  sont deux cartes de cet atlas, et si  $p \in U \cap U'$ , alors il existe  $g$  dans  $G$  et  $\Omega$  un voisinage de  $\varphi(p)$  dans  $X$  tel que :

$$g|_{\Omega} = \varphi' \circ \varphi^{-1}|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

En fait, tout changement de carte est la restriction d'un élément de  $G$  sur l'image de chacune des composantes connexes de l'intersection des domaines des deux cartes.

Une  $(G, X)$ -structure sur  $V$  est la donnée d'un  $(G, X)$ -atlas maximal sur  $V$ .

### Exemples :

1. Si  $(G, X)$  est une géométrie modèle, alors la variété  $X$  est trivialement munie d'une  $(G, X)$ -structure.
2. On va voir qu'on peut mettre une structure de géométrie euclidienne sur le tore. Celui-ci est le quotient du plan  $\mathbb{R}^2$  par le groupe  $\Delta$  de transformations engendré par les translations :

$$\begin{aligned} \tau_u : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \tau_r : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y + 1) & (x, y) &\mapsto (x + 1, y) \end{aligned}$$

Soit  $\pi$  l'application quotient. On définit un atlas  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{T}^2$  de la manière suivante : soit  $p$  un point de  $\mathbb{T}^2$ , il existe un voisinage ouvert connexe  $U$  de  $p$  dans  $\mathbb{T}^2$  tel que l'image inverse de  $U$  par  $\pi$  soit une union d'ouverts disjoints de  $\mathbb{R}^2$ , la restriction de  $\pi$  à l'un de ces ouverts étant un homéomorphisme sur son image. On prend les inverses de ces restrictions comme cartes de notre atlas.

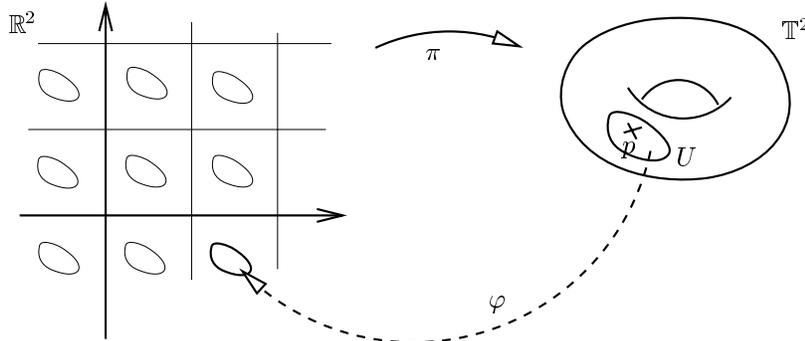


FIG. 4: Un atlas sur le tore.

On obtient bien un ensemble de cartes dont le domaine recouvre  $\mathbb{T}^2$ . Maintenant si deux cartes de notre atlas ont des domaines dont l'intersection est non vide, montrons que le changement de cartes est bien localement dans  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ . Soient  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  deux telles cartes. Sans perdre de généralité, on peut supposer que l'intersection  $U \cap U'$  est égale à  $U$ , et qu'elle est connexe. Le changement de cartes doit alors être la restriction d'un élément de  $G$ . Les ouverts  $\varphi(U)$  et  $\varphi'(U)$  sont des préimages par  $\pi$  de  $U$ , donc pour tout  $p$  dans  $U$ , il existe un élément  $g_p$  de  $\Delta$  tel que  $g_p \cdot \varphi(p) = \varphi'(p)$ . En fait, l'application  $p \mapsto g_p$  est continue, et  $\Delta$  est discret. Donc  $p \mapsto g_p$  est constante, égale à  $g$  sur  $U$ , et le changement de cartes est  $g|_{\varphi(U)}$ .

Le groupe  $\Delta$  est clairement contenu dans le groupe  $G$  des isométries euclidiennes de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Donc  $\mathcal{A}$  est contenu dans un  $(G, \mathbb{R}^2)$ -atlas maximal de  $\mathbb{T}^2$ , et on a bien mis une structure géométrique euclidienne sur le tore.

## 1.2 Discussion des conditions

Nous allons voir pour quelles raisons toutes les conditions imposées dans les définitions des géométries modèles sont nécessaires ou utiles.

- **La fidélité** : C'est une condition extrêmement intuitive. Ce qui nous intéresse étant l'action de  $G$  sur  $X$ , il semble logique de vouloir se borner au cas où le noyau est trivial. Les groupes de Lie considérés sont principalement des groupes de difféomorphismes analytiques réels de  $X$ , et l'action est donnée par l'évaluation. Sinon, on peut toujours quotienter par le noyau de l'action : si  $N$  est le noyau d'une action continue, alors  $N$  est un sous-groupe fermé distingué du groupe de Lie  $G$ , et donc (voir [Spi])  $G/N$  est encore un groupe de Lie, qui lui agit fidèlement.
- **L'analyticité** : Une caractéristique fondamentale des fonctions analytiques, que nous utiliserons beaucoup dans la deuxième partie sur l'application développante, est la propriété de prolongement analytique : si deux fonctions analytiques définies sur un ouvert connexe coïncident sur un ouvert non vide, alors elles sont égales. En particulier pour une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $V$ , si  $(U_j, \varphi_j)$ ,  $(U_k, \varphi_k)$  sont deux cartes telles que  $U_j \cap U_k$  est connexe, alors l'élément de  $G$  dont le changement de cartes  $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k)$  est une restriction est unique.

*Démonstration.* Pour voir cela, il suffit de montrer que toute fonction  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  de classe  $C^\omega$  et identiquement nulle sur un ouvert non vide est nulle partout.

Il est facile de se ramener au cas où  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  en considérant les coordonnées de l'image de  $f$ . Soit  $U$  l'ensemble des points en lesquels  $f$  est nulle. Considérons les coefficients du développement en séries de  $f$  par rapport à un point  $x$  de  $V$ , le domaine de définition de  $f$ . Ces coefficients, par la formule de Taylor, sont les valeurs en  $x$  des dérivées partielles successives de  $f$ . Ils sont donc continus en  $x$  puisque  $f$  est infiniment dérivable. Pour  $x$  sur la fermeture de  $U$ , ils sont donc tous nuls. Donc  $U$  est fermé.

Maintenant soit  $x \in U$ . Le développement en série entière de  $f$  autour de  $x$  converge dans une boule centrée sur  $x$ , donc dans cette boule en particulier  $f$  est identiquement nulle. Donc  $x$  a un voisinage contenu dans  $U$ , et  $U$  est ouvert.

Comme le domaine de définition de  $f$  est connexe,  $f$  est nulle partout.  $\square$

- **La transitivité** : Cette condition impose une certaine symétrie : on demande en fait que tous les points de la variété modèle jouent le même rôle, et que la définition soit une définition locale.

## 1.3 Morphismes et isomorphismes

**Groupes de Lie** Soient  $G, G'$  deux groupes de Lie. On dit que  $\phi$  est un *isomorphisme de groupes de Lie* si  $\phi : G \rightarrow G'$  est un isomorphisme de groupe qui est également un difféomorphisme analytique réel.

**Géométries modèles** Quand considère-t-on que deux géométries modèles sont les mêmes ?

Soient  $(G, X)$  et  $(G', X')$  deux géométries modèles, les actions de  $G$  sur  $X$  et de  $G'$  sur  $X'$  étant notées respectivement par  $\alpha$  et  $\alpha'$ . S'il existe

- un isomorphisme de groupes de Lie  $\phi : G \rightarrow G'$
- un difféomorphisme analytique réel  $\psi : X \rightarrow X'$

tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \phi \times \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ G' \times X' & \xrightarrow{\alpha'} & X' \end{array}$$

soit commutatif, on dit que ces deux géométries modèles sont *isomorphes*.

**Structures géométriques** Soient  $V$  et  $V'$  deux variétés munies de  $(G, X)$ -structures dont les atlas sont notés par  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  respectivement.

Un difféomorphisme local analytique réel  $f : V \rightarrow V'$  est un  $(G, X)$ -difféomorphisme local si autour de tout point  $p$  de  $V$ , il existe une carte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , et une carte  $\varphi' \in \mathcal{A}'$  définie sur  $U' = f(U)$  telle que  $\varphi' \circ f = g \circ \varphi$  pour un élément  $g \in G$ . En particulier une carte de la  $(G, X)$ -structure est un  $(G, X)$ -difféomorphisme local.

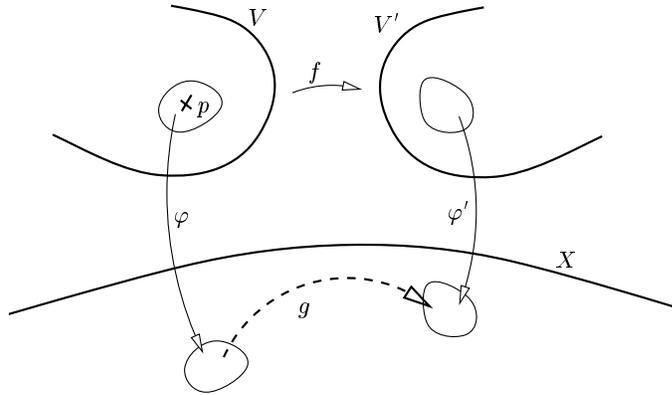


FIG. 5:  $f$  est un  $(G, X)$ -difféomorphisme local

Un  $(G, X)$ -difféomorphisme local  $f$  est un *isomorphisme de  $(G, X)$ -structures* si  $f$  est un difféomorphisme.

## 1.4 Exemple

### Géométrie affine

La géométrie affine est la géométrie modèle donnée par l'action du groupe  $G = \mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$  où :

$$(a, B)(x) = a + Bx$$

pour  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \in GL_n(\mathbb{R})$ .

**Remarque :** Il est clair que la géométrie euclidienne est “contenue” dans la géométrie affine. En général, on voit que pour toute géométrie modèle  $(G, X)$ , si  $H \subseteq G$  est un sous-groupe de Lie de  $G$  dont l'action sur  $X$  est transitive, alors  $(H, X)$  est une autre géométrie modèle.

### Géométrie affine sur le tore

On a vu qu'on pouvait munir le tore d'au moins une structure géométrique euclidienne, ce qui induit évidemment une structure affine puisque la géométrie euclidienne est une sous-géométrie de la géométrie affine.

Mais on peut également munir le tore d'une structure affine non-isomorphe à la structure euclidienne décrite ci-dessus par l'atlas  $\mathcal{A}_1$ .

En tant que variété analytique réelle le tore peut aussi être construit comme suit : considérons un quadrilatère quelconque ABCD dans le plan. On identifie les segments AB et DC par une transformation affine préservant l'orientation de  $\mathbb{R}^2$  envoyant A sur D et B sur C, et les segments BC et AD de même. Si les transformations choisies commutent, on peut voir qu'on a bien une structure affine.

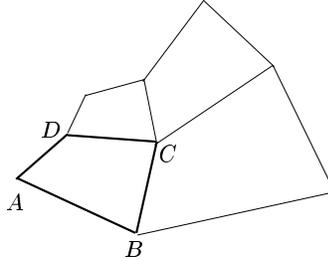


FIG. 6: Le tore affine

En effet les changements de cartes à considérer sont ceux pour les cartes définies au voisinage de points sur le bord du quadrilatère, donc par notre identification les changements de cartes sont bien des applications affines. Soit  $\mathcal{A}_2$  l'atlas maximal correspondant à cette structure affine.

Montrons maintenant que si le quadrilatère  $Q=ABCD$  n'est pas un parallélogramme, les structures affines décrites ne sont pas isomorphes.

Pour qu'on ait un isomorphisme de structures géométriques, il faudrait qu'on ait un difféomorphisme analytique réel  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tel que pour tout point  $p$ , dans un voisinage  $U$  de  $p$ , il existe des cartes  $\phi_1 : U \rightarrow W_1$  de  $\mathcal{A}_1$  et  $\phi_2 : U \rightarrow W_2$  de  $\mathcal{A}_2$ , telles que :  $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$  soit un élément  $g$  de  $G = \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ .

Soit  $p \in \mathbb{T}^2$ . Toute carte de  $\mathcal{A}_1$  définie au voisinage de  $p$  peut s'étendre en une carte définie sur le tore privé de deux lacets  $\gamma_1, \gamma_2$ , par un découpage adéquat de  $\mathbb{T}^2$ . Donc sans perte de généralité on aura  $\phi_1 : \mathbb{T}^2 - \{\gamma_1, \gamma_2\} \rightarrow ]0, 1[ \times ]0, 1[$ .

De même comme  $f(p)$  appartient au complémentaire de  $\{f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2\}$ , on peut réaliser le découpage correspondant sur le tore affine et on peut supposer par analyticité  $\phi_2 : \mathbb{T}^2 - \{f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2\} \rightarrow \overset{\circ}{Q}$ .

Maintenant si localement,  $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} = g$ , par analyticité des deux fonctions elles sont égales sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Donc  $g$  transforme le carr e  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  en un quadrilatère qui n'est pas un parallélogramme :  $g$  ne peut pas être affine, on a une contradiction.

Donc ces deux structures affines sur le tore  $\mathbb{T}^2$  ne sont pas isomorphes en tant que  $(\text{Aff}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -structures.

## 2 L'application développante et l'holonomie

De quelle façon une structure géométrique donne-t-elle des informations sur une variété? Dans ce chapitre, nous verrons une manière possible.

### 2.1 Quelques notions de base de topologie algébrique

Pour toute précision, on pourra consulter [God]. Dans la suite,  $E$  désignera un espace topologique.

- Un *revêtement* de  $E$  est la donnée d'un espace topologique  $E'$  et d'une application continue  $f : E' \rightarrow E$  telle que pour tout  $p$  dans  $E$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$ , un espace topologique discret  $F$  et un homéomorphisme  $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tel que le diagramme suivant, où  $pr_1$  désigne la projection sur la première coordonnée, soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow f & \swarrow pr_1 \\ & & U \end{array}$$

Un tel ouvert  $U$  est appelé un *voisinage trivialisant* de  $p$ . Par abus de langage, on dit aussi simplement que  $f$  ou  $E'$  est un revêtement de  $E$ .

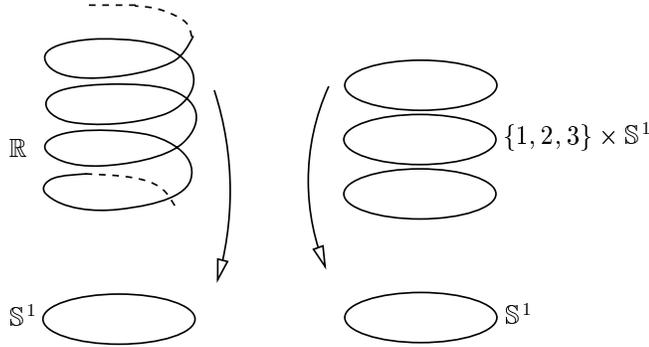


FIG. 7: Deux revêtements du cercle.

On remarque qu'un revêtement est toujours surjectif.

- Si  $V$  est une variété munie d'une  $(G, X)$ -structure, et si  $(V', f)$  est un revêtement de  $V$  avec  $V'$  séparé et séparable, alors  $f$  induit une structure de  $(G, X)$ -variété sur  $V'$ , appelée  *$(G, X)$ -structure relevée*.

En effet, si  $(U_j, \varphi_j)_{j \in J}$ , est un  $(G, X)$ -atlas pour  $V$  avec  $U_j$  des voisinages trivialisants, alors la famille des restrictions des  $\varphi_j \circ f$  aux ouverts de  $f^{-1}(U_j)$  homéomorphes à  $U_j$  est un  $(G, X)$ -atlas de  $V'$ .  $f$  est alors un  $(G, X)$ -difféomorphisme local.

A l'inverse, si  $V$  est une variété topologique, et si  $(V', f)$  est un revêtement de  $V$  où  $V'$  est une variété munie d'une  $(G, X)$ -structure, on peut munir  $V$  comme le quotient  $V'/f$  d'une  $(G, X)$ -atlas en suivant la construction dans l'exemple en 1.1, et  $f$  est alors un  $(G, X)$ -difféomorphisme local.

- Soit  $f : E' \rightarrow E$  un revêtement. Un homéomorphisme  $\gamma : E' \rightarrow E'$  est un *automorphisme du revêtement* si  $f(\gamma(p)) = f(p)$  pour tout  $p$  dans  $E'$ . L'ensemble des automorphismes du revêtement forme un groupe qu'on appelle *groupe du revêtement*.

- On appelle *homotopie relative* une homotopie de chemins qui fixe les extrémités. En fixant un point  $p$  de  $E$ , on peut définir  $\pi_1(E, p)$  comme l'ensemble des classes d'homotopie relative des lacets dans  $E$  d'origine  $p$ . La composition des chemins induit une structure de groupe sur  $\pi_1(E, p)$ . Dès que deux points  $p$  et  $q$  se trouvent dans la même composante connexe par arcs de  $E$ , les groupes  $\pi_1(E, p)$  et  $\pi_1(E, q)$  sont isomorphes. Quand  $E$  est connexe par arcs on peut donc parler de  $\pi_1(E)$ , qui s'appelle *groupe fondamental de  $E$* . On dit que  $E$  est *simplement connexe* quand  $\pi_1(E)$  est trivial.
- Pour n'importe quel variété topologique connexe  $V$ , il existe un revêtement  $(V', f)$  de  $V$ , tel que  $V'$  est connexe et simplement connexe. Ce revêtement est unique dans le sens que si  $(V', f)$  et  $(V'', g)$  sont deux tels revêtements, il existe un homéomorphisme  $H : V' \rightarrow V''$  tels que  $f = g \circ H$ . On l'appelle *revêtement universel de  $V$* , et on le note  $\tilde{V}$ .
- Soit  $V$  une variété topologique connexe par arcs, et  $p$  fixé dans  $V$ . Alors l'espace  $\tilde{V}$  des classes d'homotopie relative de chemins  $\alpha : [0, 1] \rightarrow V$  d'origine  $p$ , avec  $\tilde{\pi} : \tilde{V} \rightarrow V$ ,  $[\alpha] \mapsto \alpha(1)$ , où  $[\alpha]$  est la classe d'homotopie relative de  $\alpha$ , est un revêtement universel de  $V$ .

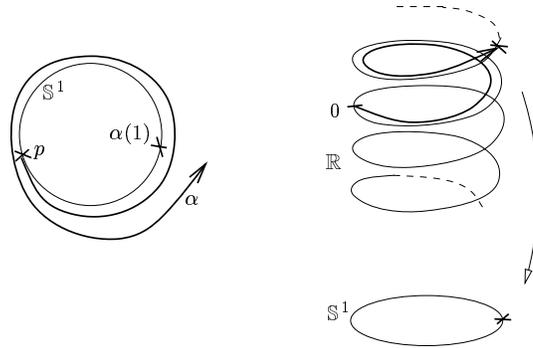


FIG. 8: Revêtement du cercle par l'espace des classes d'homotopie relative de chemins d'origine  $p$ , homéomorphe au revêtement par  $\mathbb{R}$ .

En associant à  $[\lambda] \in \pi_1(V, p)$  l'automorphisme du revêtement  $\gamma_{[\lambda]} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ ,  $[\alpha] \mapsto [\lambda\alpha]$ , on obtient un isomorphisme de groupes entre  $\pi_1(V, p)$  et le groupe du revêtement  $\tilde{\pi} : \tilde{V} \rightarrow V$ .

## 2.2 Le théorème

Soient maintenant  $V$  une variété connexe, munie d'une  $(G, X)$ -structure comme au chapitre 1,  $\tilde{\pi} : \tilde{V} \rightarrow V$  un revêtement universel, et  $\Gamma$  le groupe du revêtement  $\tilde{\pi}$ .

### **Théorème 1 (de l'application développante).**

Il existe un couple  $(D, \varrho)$  avec  $D : \tilde{V} \rightarrow X$  un  $(G, X)$ -difféomorphisme local et  $\varrho : \Gamma \rightarrow G$  un morphisme de groupes, tels que

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall \sigma \in \tilde{V}, \text{ on a } D(\gamma \cdot \sigma) = \varrho(\gamma)D(\sigma) \quad (*).$$

Ce couple est unique à composition près par un élément de  $G$  : si  $(D, \varrho)$  et  $(D', \varrho')$  sont deux tels couples, alors il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $D' = g \circ D$  et  $\varrho' = i_g \circ \varrho$ , où  $i_g : h \mapsto ghg^{-1}$  est la conjugaison avec  $g$ .

**Définition :** On appelle  $D$  l'application développante,  $\varrho$  l'holonomie, et son image  $H = \varrho(\Gamma)$  le groupe d'holonomie de la structure géométrique.

**Preuve de l'unicité :** Supposons qu'il existe deux tels couples,  $(D, \varrho)$  et  $(D', \varrho')$ . Les applications  $D$  et  $D'$  sont des  $(G, X)$ -difféomorphismes locaux, donc (voir ch. 1, 1.3) pour tout  $\sigma$  dans  $\tilde{V}$ , il existe  $U, U'$  deux voisinages de  $\sigma$ ,  $\varphi : U \rightarrow X, \varphi' : U' \rightarrow X$  deux cartes de la  $(G, X)$ -structure, et  $g, g'$  dans  $G$  tels que  $D = g \circ \varphi$  sur  $U$ , et  $D' = g' \circ \varphi'$  sur  $U'$ .

On peut choisir  $U$  et  $U'$  assez petits pour que  $U = U'$  et  $U$  connexe. Par définition d'une  $(G, X)$ -structure, le changement de cartes  $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \varphi'(U)$  s'étend alors en un élément  $\bar{g}$  de  $G$ .

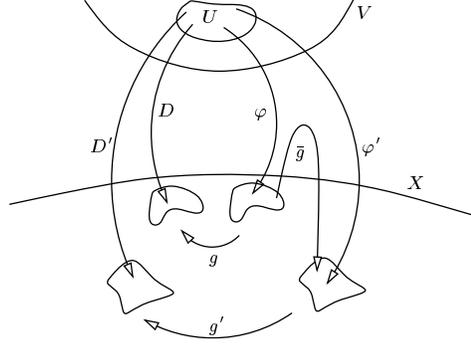


FIG. 9: Sur  $U = U'$ , on a  $D' = g' \circ \bar{g} \circ g^{-1} \circ D$ .

Donc au moins localement, on trouve un  $g$  dans  $G$  avec  $D' = g \circ D$ . Comme  $\tilde{V}$  est connexe, on a en fait partout le même élément  $g$  de  $G$  (voir discussion dans 1.2), et  $D' = g \circ D$  sur  $\tilde{V}$ .

Maintenant, avec la condition (\*) pour  $(D, \varrho)$  et  $(D', \varrho')$ , on obtient

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall \sigma \in \tilde{V} \quad g\varrho(\gamma) \cdot D(\sigma) = \varrho'(\gamma)g \cdot D(\sigma).$$

Comme  $D$  est un difféomorphisme local, il y a donc un ouvert de  $X$  sur lequel  $g\varrho(\gamma)$  et  $\varrho'(\gamma)g$  coïncident, et, par la remarque dans 1.2, ils coïncident alors sur tout  $X$ .  $\square$

**Preuve de l'existence :** On va chercher à construire l'application développante  $D$ . Pour faire cela, il est utile de se fixer un point  $p_0$  dans  $V$ , et d'identifier  $\tilde{V}$  à l'espace des classes d'homotopie relative de chemins dans  $V$  d'origine  $p_0$ .

### Prolongement analytique d'une carte le long d'un chemin

On se fixe aussi une carte  $(U_0, \varphi_0)$  autour de  $p_0$ . Soit  $\alpha : [0, 1] \rightarrow V$  un chemin d'origine  $p_0$ . Par compacité, on peut trouver des  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$  tels que  $\alpha([0, t_1])$  soit contenu dans  $U_0$ , et pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  soit contenu dans un domaine de carte  $(U_i, \varphi_i)$ . On peut supposer que les  $U_i \cap U_{i+1}$  sont connexes. En suivant  $\alpha$ , on peut "ajuster" une carte sur l'autre au sens suivant.

Pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , le point  $\alpha(t_i)$  est contenu dans  $U_{i-1}$  et dans  $U_i$ , et par compatibilité des deux cartes, il existe  $g_i$  dans  $G$ , tel que  $\varphi_{i-1} = g_i \circ \varphi_i$  sur  $U_{i-1} \cap U_i$ .

Soit  $\psi_0 = \varphi_0$  et soient

$$\psi_1 = g_1 \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow X,$$

$$\psi_2 = g_1 \circ g_2 \circ \varphi_2 : U_2 \rightarrow X,$$

$\vdots$

$$\psi_n = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n \circ \varphi_n : U_n \rightarrow X.$$

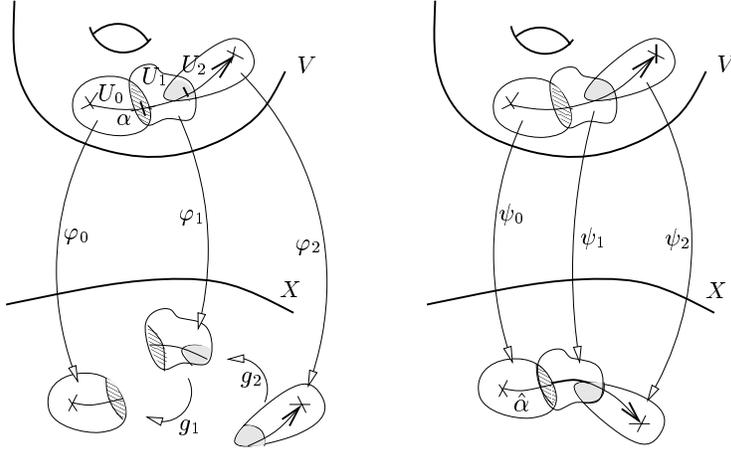


FIG. 10: tracer  $\alpha$  sur  $X$

L'application  $\hat{\alpha} : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow X \\ \hat{\alpha} |_{[t_i, t_{i+1}]} = \psi_i \circ \alpha |_{[t_i, t_{i+1}]} \end{cases}$  est un prolongement de  $\varphi_0 \circ \alpha |_{[0, t_1]}$  sur  $[0, 1]$ .

Il est facile de montrer que  $\hat{\alpha}$  ne dépend pas du choix des  $t_i$ ,  $(U_i, \varphi_i)$  pour  $i \geq 1$ , et que  $\hat{\alpha}(1)$  est invariant par homotopie relative de  $\alpha$ . On obtient alors une application  $D : \begin{cases} \tilde{V} \rightarrow X \\ [\alpha] \mapsto \hat{\alpha}(1) \end{cases}$ , qui est un  $(G, X)$ -difféomorphisme local. En effet, sur un voisinage de  $[\alpha]$ , l'application  $D$  coïncide avec  $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n \circ \varphi_n \circ \tilde{\pi}$  qui, comme composition de  $(G, X)$ -difféomorphismes locaux, est un  $(G, X)$ -difféomorphisme local.

Nous avons maintenant un candidat pour l'application développante.

Si  $\alpha$  est un lacet, alors  $(U_n, \psi_n)$  est une carte contenant  $p_0$ . On peut supposer que  $U_n = U_0$ , et que  $\varphi_n$  était égale à  $\varphi_0$ . Le changement de cartes de  $\varphi_0$  à  $\psi_n = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n \circ \varphi_0$  est une restriction de l'élément  $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$  de  $G$ , qui ne dépend que de la classe d'homotopie relative de  $\alpha$ , et qu'on note  $g_{[\alpha]}$

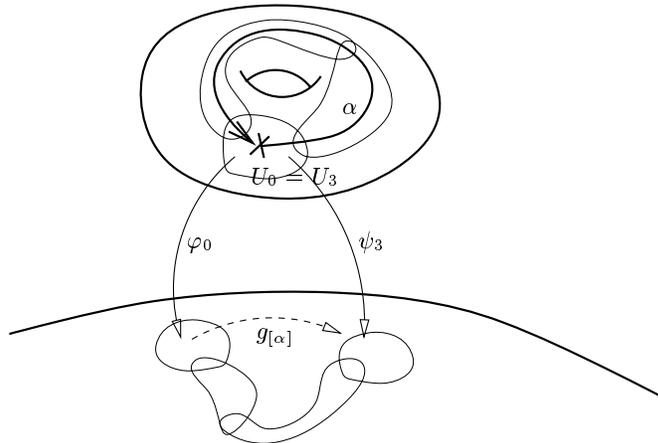


FIG. 11: Le changement de cartes de  $\varphi_0$  à  $\psi_3$ .

En identifiant un automorphisme de revêtement avec la classe correspondante dans  $\pi_1(V, p_0)$ , on obtient une application  $\varrho : \begin{cases} \Gamma \longrightarrow G \\ \gamma_{[\alpha]} \mapsto g_{[\alpha]} \end{cases}$ . Ce  $\varrho$  est un morphisme de groupe, et le couple  $(D, \varrho)$  satisfait à (\*).

En effet :

Montrons d'abord (\*) : pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , pour tout  $\sigma$  dans  $\tilde{V}$ , on a  $D(\gamma \cdot \sigma) = \varrho(\gamma)D(\sigma)$ . Si  $\gamma$  correspond à la classe de lacets  $[\lambda]$ , et si  $\sigma = [\tau]$ , alors d'appliquer  $D$  à  $\gamma \cdot \sigma$  revient à prolonger  $(U_0, \varphi_0)$  le long de  $\lambda$ , et à prolonger ensuite la carte obtenue autour de  $p_0$  le long de  $\tau$ . Or, la carte obtenue est  $g_{[\lambda]} \circ \varphi_0$ . On a donc bien  $D(\gamma \cdot \sigma) = D([\lambda\tau]) = g_{[\lambda]}D([\tau]) = \varrho(\gamma)D(\sigma)$ .

Maintenant on voit aussi que  $\varrho$  est un morphisme de groupe : Soient  $\gamma, \gamma'$  dans  $\Gamma$ . Pour tout  $\sigma$  dans  $\tilde{V}$  on a  $\varrho(\gamma\gamma')D(\sigma) = D((\gamma\gamma') \cdot \sigma) = \varrho(\gamma)D(\gamma' \cdot \sigma) = \varrho(\gamma)\varrho(\gamma')D(\sigma)$ . Comme  $D$  est un difféomorphisme local, on a donc coïncidence local de  $\varrho(\gamma\gamma')$  et  $\varrho(\gamma)\varrho(\gamma')$ . Par la remarque en 1.2 donc  $\varrho(\gamma\gamma') = \varrho(\gamma)\varrho(\gamma')$ .  $\square$

**Exemple :** On voit facilement que le groupe d'holonomie du tore euclidien de l'exemple en 1.3 est  $\Delta$ .

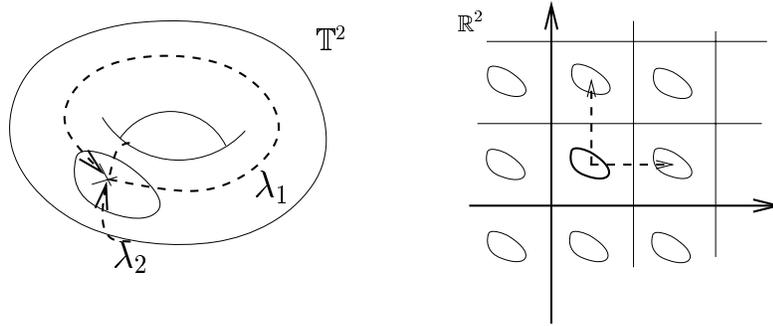


FIG. 12:  $\varrho(\gamma_{\lambda_1})$  est  $\tau_r$ , et  $\varrho(\gamma_{\lambda_2})$  est  $\tau_u$ .

Rappelons que le tore héritait sa structure euclidienne comme quotient  $\mathbb{R}^2/\Delta$ . Il est ainsi un quotient de  $X = \mathbb{R}^2$  par le sous-groupe  $H$  de  $G$ . En fait, nous verrons que cela est un phénomène plus général.

## 2.3 Complétude

Soient  $V$  une variété connexe munie d'une  $(G, X)$ -structure,  $\tilde{\pi} : \tilde{V} \rightarrow V$  un revêtement universel, et  $\Gamma$  le groupe du revêtement  $\tilde{\pi}$ .

**Définition :** On dit que la variété  $V$  est  $(G, X)$ -complète si son application développante  $D : \tilde{V} \rightarrow X$  est un revêtement (ce qui ne dépend pas du choix de  $D$ .)

**Exemple :** Le tore euclidien est complet. En général par contre, un tore affine n'est pas complet : si dans l'exemple 1.4 le quadrilatère  $ABCD$  n'est pas un parallélogramme, alors l'image de l'application développante évite un point de  $\mathbb{R}^2$ . Or, un revêtement est toujours surjectif.

En 2.1, on avait obtenu une structure géométrique sur  $\tilde{V}/\Gamma$  (qui est homéomorphe à  $V$ ) tel que  $\tilde{V}/\Gamma$  et  $V$  sont isomorphes comme variétés munies de  $(G, X)$ -structures.

Si  $V$  est complet, alors  $D : \tilde{V} \rightarrow X$  est un revêtement universel de  $X$ . Comme  $X$  est déjà lui-même simplement connexe,  $D$  est en fait un difféomorphisme et on peut identifier  $\tilde{V}$  à  $X$  tout en préservant leurs  $(G, X)$ -structures. De plus, l'holonomie  $\varrho$  est alors injectif, et donc  $H$  est isomorphe à  $\Gamma$  : si  $\lambda, \lambda'$  sont deux classes de lacets, et si  $\varrho(\lambda) = \varrho(\lambda')$ , on obtient avec (\*) en posant  $\sigma = [\equiv p_0]$  que  $D(\lambda) = D(\lambda')$ . Donc  $\lambda = \lambda'$ , car  $D$  est un difféomorphisme.

L'action de  $H$  sur  $X$  correspond à l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{V}$ . Si la variété  $X/H$  est munie de la  $(G, X)$ -structure construite comme dans 1.1, alors  $X/H$  et  $\tilde{V}/\Gamma$  sont isomorphes comme variétés munies de  $(G, X)$ -structures.

On vient de montrer la proposition suivante.

**Proposition 2.** *Si  $V$  est  $(G, X)$ -complète et si  $X$  est simplement connexe, alors les variétés munies de  $(G, X)$ -structures  $V$  et  $X/H$  sont isomorphes.*

Pour des cas importants on a ainsi traduit des problèmes géométriques en questions algébriques. Si  $(G, X)$  est une géométrie modèle avec  $X$  simplement connexe, afin de trouver toutes les variétés portant une  $(G, X)$ -structure complète, il suffit de classifier les sous-groupes discrets du groupe de Lie  $G$ .

## 3 Classification des géométries modèles en dimension 1

### 3.1 Introduction

Revenons maintenant à l'étude des géométries modèles. Nous allons démontrer le théorème de Sophus Lie, qui donne une classification des géométries modèles  $(G, X)$  pour  $X$  une variété analytique réelle de dimension 1 et  $G$  un groupe de Lie connexe. Nous verrons qu'il existe 5 telles géométries.

### 3.2 Variétés analytiques réelles de dimension 1

La première tâche dans la classification des géométries modèles est celle de comprendre les variétés analytiques réelles de dimension 1. On a le résultat suivant (voir [Mil] page 55).

**Proposition 3.** *Les seules variétés analytiques réelles à connexes de dimension 1 (à isomorphisme près) sont la droite  $\mathbb{R}$ , et le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  munis de leurs structures analytiques réelles usuelles.*

### 3.3 Passage au revêtement d'une géométrie modèle

On peut passer d'une géométrie modèle sur  $X$  à une géométrie modèle sur le revêtement universel de  $X$ . Il nous faut d'abord montrer quelques résultats sur les groupes de Lie et leur revêtement.

#### Revêtements et groupes de Lie

**Proposition 4.** *Le revêtement universel  $\tilde{G}$  d'un groupe de Lie connexe  $G$  admet une structure de groupe de Lie telle que le revêtement  $\tilde{G} \rightarrow G$  soit un difféomorphisme analytique réel local et un morphisme de groupes de Lie.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, et  $\tilde{G}$  l'espace des classes d'homotopie (relativement aux extrémités) des chemins dans  $G$  d'origine l'élément neutre.

Si  $[\alpha], [\beta] \in \tilde{G}$ , on définit le produit  $[\alpha][\beta]$  comme la classe d'homotopie du chemin  $t \mapsto \alpha(t)\beta(t)$  d'origine 1. De même l'inverse  $[\alpha]^{-1}$  est donné par la classe d'homotopie du chemin  $t \mapsto \alpha(t)^{-1}$ .

On vérifie aisément que le produit  $[\alpha][\beta]$  ne dépend pas du choix de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

Cela donne à  $\tilde{G}$  une structure de groupe, et on voit que l'application de revêtement

$$\begin{aligned} \pi & : \tilde{G} \rightarrow G \\ g & \mapsto g(1) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe puisque  $\pi(gh) = gh(1) = g(1)h(1) = \pi(g)\pi(h)$ .

Le groupe  $\tilde{G}$  est un groupe de Lie : comme  $\pi$  est un homéomorphisme local, si on compose localement des cartes pour  $G$  avec  $\pi$ , on obtient un atlas pour  $\tilde{G}$  dont les changements de cartes sont des difféomorphismes analytiques réels. Cette structure fait bien de  $\pi$  un difféomorphisme analytique réel local et de la multiplication sur  $\tilde{G}$  une application analytique réelle.  $\square$

Il nous faut également montrer :

**Lemme 1.** *Si  $G$  est un groupe de Lie connexe, alors  $\pi_1(G) \subseteq Z(\tilde{G})$ .*

*Démonstration.* Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  un lacet de  $G$  basé en  $e$ . On a donc que  $[\gamma]$  est un élément de  $\pi_1(G)$ , et  $[\gamma]$  agit sur  $\tilde{G}$  (si  $\alpha$  est un chemin dans  $G$  basé en  $e$ ,  $[\gamma] \cdot [\alpha]$  est la classe d'homotopie du

chemin basé en  $e$  qui parcourt d'abord  $\gamma$ , puis  $\alpha$ ). Ceci fait de  $[\gamma]$  un morphisme de revêtement, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{G} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & G & \end{array}$$

où  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  est l'application de revêtement. Soit  $\tilde{g}$  l'image par  $\gamma$  de  $\tilde{e}$ , une préimage de  $e$  par  $\pi$  dans  $\tilde{G}$ . L'élément  $\tilde{g}$  (qui est en fait  $[\gamma]$  vu comme élément de  $\tilde{G}$ ) agit sur  $\tilde{G}$  par translation à gauche et alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{g}^{-1} \circ \gamma} & \tilde{G} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & G & \end{array}$$

Donc  $\tilde{g}^{-1} \circ \gamma$  est un morphisme de revêtement, or il fixe  $\tilde{e}$  donc c'est l'identité (voir [God] page 116, Cor 6.4). On voit donc que l'action de  $g$  par translation à gauche coïncide avec l'action de  $[\gamma]$  sur  $\tilde{G}$  décrite ci-dessus. Donc l'application

$$\begin{aligned} \tilde{g} \circ - \circ \tilde{g}^{-1} : \tilde{G} &\rightarrow \tilde{G} \\ x &\mapsto \tilde{g}x\tilde{g}^{-1} \end{aligned}$$

coïncide avec l'application  $\gamma \circ - \circ \gamma^{-1} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  où  $\gamma^{-1}$  agit de la manière suivante : si  $\alpha$  est un chemin dans  $G$  basé en  $e$ ,  $[\gamma^{-1}] \cdot [\alpha]$  est la classe d'homotopie du chemin basé en  $e$  qui parcourt d'abord  $\gamma^{-1}$ , puis  $\alpha$ . Donc  $\gamma \circ - \circ \gamma^{-1} = \tilde{g} \circ - \circ \tilde{g}^{-1}$  est l'identité, d'où  $[\gamma]$  est dans le centre de  $\tilde{G}$ .  $\square$

**Lemme 2.** *Tout sous-groupe discret et distingué  $\Gamma$  d'un groupe de Lie connexe  $G$  est en fait un sous-groupe du centre de  $G$ .*

*Démonstration.* En effet, si  $k \in \Gamma$  et  $g \in G$ , il existe un chemin  $t \mapsto g(t)$  reliant  $g$  à l'identité :  $g(t)kg(t)^{-1}$  est un chemin dans  $\Gamma$  donc est constant. Maintenant  $g(0)kg(0)^{-1} = k$ , donc pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $gkg^{-1} = k$ . Donc  $k$  est dans le centre de  $G$ .  $\square$

On aura aussi besoin des résultats suivants. On peut trouver ce théorème dans [Gal] (page 31) :  
**Théorème 5.** *Si  $G$  est un groupe de Lie,  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  (ce qui implique que  $H$  est un sous-groupe de Lie), alors il existe sur  $G/H$  une unique structure de variété analytique réelle telle que :*

1.  $\pi : G \rightarrow G/H$  est une fibration analytique réelle.
2. L'action de  $G$  sur  $G/H$  par translation à gauche est analytique réelle.

**Remarque.** *Une fibration sur  $B$  de fibre  $F$  est une application continue  $\varphi : T \rightarrow B$  telle que pour tout  $b \in B$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $b$  dans  $B$  et un homéomorphisme  $\phi$  de  $V \times F$  sur  $\varphi^{-1}(V)$  tel que le diagramme suivant, où  $pr_1$  désigne la projection sur la première coordonnée, soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} V \times F & \xrightarrow{\phi} & \varphi^{-1}(V) \\ & \searrow pr_1 & \swarrow \varphi \\ & V & \end{array}$$

On utilisera simplement le fait qu'une fibration avec  $F$  discret est un revêtement et le résultat ci dessous, prouvé dans [Mnei] pages 159 et suivantes.

**Théorème 6.** Si  $\varphi : T \rightarrow B$  est une fibration, alors :

- tout chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  est relevable avec une condition initiale, c'est à dire qu'étant donné un point  $x$  de  $T$ , il existe un chemin  $\gamma'$  dans  $T$  d'origine  $x$  tel que  $p \circ \gamma' = \gamma$ .
- toute homotopie  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  de chemins relative aux extrémités est relevable, c'est-à-dire qu'étant donné un relèvement  $\gamma'$  de  $\gamma : t \mapsto h(0, t)$ , il existe  $h' : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow T$  une homotopie de chemins dans  $T$  relative aux extrémités telle que  $h = h' \circ p$  et  $\gamma' : t \mapsto h'(0, t)$ .

Pour ce résultat, on consultera [Hoch] (page 94) :

**Théorème 7.** Si  $G$  est un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe normal et fermé de  $G$ , alors on peut munir le groupe  $G/H$  d'une structure de groupe de Lie.

### Passage au revêtement

On se donne une géométrie modèle  $(G, X)$ , et  $p : X' \rightarrow X$  un revêtement connexe de  $x$ . On peut construire une géométrie modèle  $(\tilde{G}, X')$  sur  $X'$ .

- On fixe un point  $x'_0$  dans  $X'$ , on note  $x_0 = p(x'_0)$ . Soit  $x'$  un point de  $X'$ , et  $\gamma'$  un chemin de  $x'_0$  à  $x'$  dans  $X'$ . On peut projeter  $\gamma'$  en un chemin de  $X$  par  $p$ , en posant  $\gamma = p \circ \gamma'$ . Soit  $\alpha$  un chemin dans  $G$  d'origine l'élément neutre, sa classe d'homotopie  $[\alpha]$  est un élément de  $\tilde{G}$ . On pose  $\delta : t \mapsto \alpha(t) \cdot \gamma'(t)$ , c'est un chemin dans  $X$  d'origine  $x_0$ . Comme  $p$  est un revêtement, par le théorème 6 on peut relever  $\delta$  en un chemin  $\delta'$  de  $X'$  d'origine  $x'_0$ .

L'action de  $\tilde{G}$  sur  $X'$  est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{G} \times X' &\rightarrow X' \\ ([\alpha], x) &\mapsto \delta(1) \end{aligned}$$

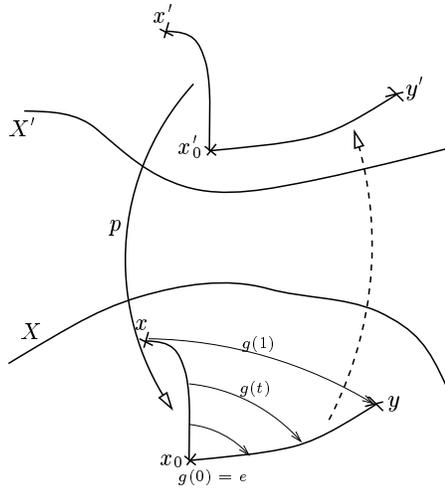


FIG. 13: Définition de l'action de  $\tilde{G}$  sur  $X'$

Quel que soit le chemin  $\gamma'$  choisi entre  $x'_0$  et  $x'$ , les extrémités des chemins  $\gamma, \delta$  sont respectivement  $x$  et  $g \cdot x$  donc l'extrémité de  $\delta'$  ne change pas : l'action est bien définie.

Comme l'analyticité est une propriété locale, et que la structure analytique réelle choisie sur le revêtement d'une variété  $V$  le rend localement difféomorphe à  $V$ , l'action décrite est analytique réelle.

Montrons la transitivité de l'action : soit  $x'_0$  un point de  $X'$  et  $x_0 = p(x'_0)$ , on va identifier  $X$  à  $G/H$  où  $H = \text{Stab}_G(x_0)$ . En effet on a que  $G/H$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $X$  : par le théorème 5, il existe une unique structure de variété analytique réelle sur  $G/H$  telle que l'action de  $G$  sur  $G/H$  soit analytique réelle. Comme  $G/H$  est en bijection avec  $X$ , on obtient le résultat voulu. On note  $p : G \rightarrow G/H$  la projection de  $G$  sur  $G/H$ .

Soit  $x'$  un élément de  $X'$ . Soit  $\gamma'$  un chemin de  $x'_0$  à  $x$  dans  $X'$ , posons  $\gamma = p \circ \gamma'$ . L'application  $p : G \rightarrow G/H$  étant une fibration, on peut relever le chemin  $\gamma$  en un chemin  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ .

Posons maintenant  $\delta : t \mapsto \alpha(t)^{-1}$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \delta \cdot \gamma &= (t \mapsto \delta(t) \cdot \gamma(t)) \\ &= (t \mapsto (\alpha(t))^{-1} \cdot \gamma(t)) \end{aligned}$$

Mais  $\alpha(t)$  est tel que  $p(\alpha(t)) = \gamma(t)$  c'est-à-dire tel que  $\alpha(t)$  appartient à la classe à gauche  $\gamma(t)$  (l'action est la translation à gauche). Donc  $(\alpha(t))^{-1}\gamma(t) = e_{G/H} = [x_0]$  (le chemin constant en  $x_0$ ). Donc l'image de  $x'$  par  $[\delta] \in \tilde{G}$  est  $x'_0$  (le relevé du chemin constant en  $x_0$  étant le chemin constant en  $x'_0$ ). Comme on peut trouver pour tout point  $x'$  de  $X'$  un point de  $\tilde{G}$  qui envoie  $x'$  sur  $x'_0$ , l'action est transitive.

Soit  $N$  le noyau de l'action de  $\tilde{G}$  sur  $X'$  : on pose  $G' = \tilde{G}/N$ . Le groupe  $G'$  est bien un groupe de Lie puisque  $N$  est un sous-groupe fermé de  $\tilde{G}$  (voir théorème 7), et l'action de  $G'$  sur  $X'$  est fidèle en plus d'être analytique et transitive :  $(G', X')$  est bien une géométrie modèle.

- Pour réaliser l'opération inverse, c'est à dire pour redescendre une géométrie modèle  $(G, X)$  d'un espace  $X$  sur un espace  $Y$  admettant un revêtement  $p : X \rightarrow Y$ , il suffit que la condition suivante soit remplie : si  $x_1, x_2 \in X$  sont tels que  $p(x_1) = p(x_2)$  alors  $\forall g \in G, p(g(x_1)) = p(g(x_2))$ .

Alors on peut faire agir  $G$  sur  $Y$  par  $g(p(x)) = p(g(x))$  pour tous  $x \in X, g \in G$ , et on a une action bien définie. L'action est analytique réelle, puisque localement  $p$  est un difféomorphisme analytique réel entre  $X$  et  $Y$ .

Pour la transitivité, si  $y_1 = p(x_1), y_2 = p(x_2)$  sont des points de  $Y$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g(x_1) = x_2$  donc  $g \cdot y_1 = p(g \cdot x_1) = p(x_2) = y_2$ . Donc l'action est bien transitive.

Pour la fidélité, on quotiente par le noyau de l'action si nécessaire.

- Ces deux opérations sur les géométries modèles sont inverses : Si  $(G, X)$  est une géométrie modèle,  $p : X' \rightarrow X$  un revêtement connexe de  $X$ , on note  $(G^h = \tilde{G}/N, X', \alpha^h)$  la géométrie modèle obtenue par relèvement comme décrit ci-dessus, où  $N$  est le noyau de l'action de  $\tilde{G}$  sur  $X'$ . (Pour simplifier la notation on notera  $\alpha^h$  à la fois l'action de  $\tilde{G}$  sur  $X'$  et celle de  $G'$  sur  $X'$  obtenue en quotientant par le noyau).

Si  $(G, Y, \beta)$  est une géométrie modèle, et  $p : Y \rightarrow Z$  un revêtement, on note  $(G^b = G/N', Z, \beta^b)$  la géométrie modèle obtenue par passage à l'espace revêtu décrite ci-dessus.

Soient  $x' \in X^h$  et  $g \in \tilde{G}$ ,  $\gamma'$  un chemin entre  $x'_0$  et  $x'$ ,  $\gamma = p \circ \gamma'$  sa projection qui est un chemin entre  $x_0$  et  $x$ . Le point  $\alpha^h(g, x')$  est l'extrémité du relèvement du chemin  $\delta$ , donc  $p(\alpha^h(g, x')) = \delta(1)$ . Or  $\delta = \{t \mapsto \alpha(g(t), \gamma(t))\}$  donc  $p(\alpha^h(g, x')) = \alpha^{hb}(g, x) = \alpha(g(1), \gamma(1)) = \alpha(g(1), x)$ . Quand on quotiente par le noyau de l'action (les classes d'homotopies des lacets dans  $G$  basés en l'identité), on obtient exactement l'action initiale de  $G$  sur  $X$ .

Pour l'autre sens, si on a une géométrie modèle  $(G, Y)$  et un revêtement  $p : Y \rightarrow Z$ , soient  $y, y_0 \in Y, z = p(y), z_0 = p(y_0) \in Z$ . Soit  $\gamma'$  un chemin de  $y_0$  à  $y$  dans  $Y$ , et  $\gamma$  son projeté par  $p$ . Pour  $g$  un chemin dans  $G^b$ ,  $\delta = \{t \mapsto \alpha^b(g(t), \gamma(t)) = p(\alpha(g(t), \gamma'(t)))\}$  donc le relevé de  $\delta$  dans  $Y$  est donné par  $t \mapsto \alpha(g(t), \gamma'(t))$ , et donc  $\alpha^{bh}(g, y) = \alpha(g, y)$ .

- **Remarque :** Le but de cette construction est de simplifier la classification des géométries modèles. En effet, il nous suffit maintenant de rechercher toutes les géométries modèles sur les variétés simplement connexes de la dimension voulue. Toute géométrie modèle  $(G, X)$  sur une variété analytique réelle de cette dimension peut se remonter en une géométrie modèle

$(\widetilde{G}, \widetilde{X})$  sur son revêtement universel qui est simplement connexe. Pour retrouver toutes les géométries modèles, on essaye ensuite de redescendre les géométries trouvées sur les diverses variétés revêtues.

Par le paragraphe précédent, on voit que pour classer les géométries modèles en dimension 1, il nous suffit de considérer les géométries modèles sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple :**  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$

On va appliquer la construction précédente à la géométrie modèle  $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ . Soit  $p : \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  le revêtement universel de  $PSL_2(\mathbb{R})$

Examinons le centre de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ . Tout élément du centre de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  est dans le noyau de l'application de revêtement de  $PSL_2(\mathbb{R})$  par  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  puisque le centre de  $PSL_2(\mathbb{R})$  est trivial. Par le lemme 1, tout élément du noyau de l'application de revêtement, c'est-à-dire tout élément du groupe fondamental de  $PSL_2(\mathbb{R})$ , est dans le centre de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ . Donc  $\pi_1(PSL_2(\mathbb{R})) = Z(\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})})$ .

On a un homéomorphisme  $SL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} SO_2(\mathbb{R}) \times SDP_2$ , où  $SDP_2$  est l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  symétriques définies positives, donné par la décomposition polaire (voir [Mnei] pages 18-20). Cette décomposition est unique. Comme  $SPD_2$  est simplement connexe, on peut identifier le groupe fondamental de  $SL_2(\mathbb{R})$  et celui de  $SO_2$  donné par  $\pi_1(SO_2(\mathbb{R})) = \{[t \mapsto R_{2m\pi t}], k \in \mathbb{Z}\}$  où  $R_\alpha$  est la rotation d'angle  $\alpha$ . Donc  $\pi_1(SL_2(\mathbb{R}))$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  par  $[t \mapsto R_{2m\pi t}] \mapsto m$ .

On a notre homéomorphisme  $h : SL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} SO_2(\mathbb{R}) \times SDP_2$ , et  $h(\text{Id}) = (\text{Id}, \text{Id})$ ,  $h(-\text{Id}) = (-\text{Id}, \text{Id})$ . Soit  $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow G$  un chemin dans  $G$  basé en l'identité. L'élément  $[\tilde{g}]$  appartient à  $\pi_1(PSL_2(\mathbb{R}))$  si et seulement si le relevé en  $\text{Id}$  de  $\tilde{g}$  dans  $SL_2(\mathbb{R})$  est homotope à  $t \mapsto R_{\pi m t}$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ . Donc  $[\tilde{g}] \in \pi_1(PSL_2(\mathbb{R}))$  si et seulement si  $\tilde{g}$  est homotope à  $t \mapsto R_{2\pi m t}$  dans  $PSL_2(\mathbb{R})$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ . On a l'isomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \theta : \quad \pi_1(PSL_2(\mathbb{R})) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [t \mapsto (R_{2\pi m t}, \alpha(t))] &\mapsto m \end{aligned}$$

Donc  $Z(\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Par le lemme 2, on sait que les groupes de revêtements sont des sous-groupes du centre, donc ici les groupes de Lie revêtus par  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  correspondent aux sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ .

Comme le centre de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  est trivial,  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} = \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} / Z(\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})})$ . Tous les groupes de Lie revêtus par  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  sont de la forme  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k = \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} / k\mathbb{Z}$  avec  $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$ . (On note  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_\infty = \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ ). Si  $\Gamma_k$  est le groupe de revêtement associé à  $p_k : \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})} \rightarrow \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k$ , on a alors  $\theta(\Gamma_k) = k\mathbb{Z}$ .

On veut maintenant remonter la géométrie modèle  $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k$ , le revêtement d'ordre  $k$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , qui est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . On va voir que le noyau de l'action de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k$  est précisément le groupe  $\Gamma_k$  et donc que la géométrie modèle qu'on obtient est  $(\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k, \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k)$ .

Soit  $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ . On va noter  $\phi_k : \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k \rightarrow \mathbb{S}^1$  l'homéomorphisme entre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k$  et  $\mathbb{S}^1$  vu comme le cercle unité dans le plan complexe, et  $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^1$  l'homéomorphisme entre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{S}^1$ . On peut voir alors que le revêtement  $\pi_k : \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est tel que  $\phi \circ \pi_k \circ \phi_k : z \mapsto z^k$ ,

c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k & \xrightarrow{\pi_k} & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ \phi_k \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Soit  $x'$  un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})_k$ , et  $z = e^{i\theta} = \phi_k(x')$ . Par souci de simplicité, on omet maintenant de noter les compositions nécessaires avec  $\phi$  et  $\phi_k$ . En conservant les notations utilisées dans la construction ci-dessus, on prend  $\gamma' : t \mapsto e^{it\theta}$ . Cela nous donne  $\gamma : t \mapsto e^{ikt\theta}$ , puis  $\delta : t \mapsto \tilde{g}(t) \cdot e^{ikt\theta}$  et enfin  $\delta' : t \mapsto (\tilde{g}(t) \cdot e^{ikt\theta})^{\frac{1}{k}}$ . Donc l'action cherchée est donnée par  $[\tilde{g}] \cdot e^{i\theta} = (\tilde{g}(1) \cdot e^{ik\theta})^{1/k}$ .

L'élément  $[\tilde{g}]$  est dans le noyau de l'action si et seulement si pour tout  $\theta$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{g}(1) \cdot e^{ik\theta} = e^{ik\theta + 2\pi j(\theta)k}$ . Par continuité de l'action,  $j(\theta)$  est constant, donc  $\tilde{g}$  est homotope à  $t \mapsto R_{2\pi jkt}$  pour un  $j \in \mathbb{Z}$ .

Maintenant si  $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  est tel que  $[\tilde{g}]$  est un élément de  $\Gamma_k$ , on a vu que  $\theta([\tilde{g}])$  était un multiple de  $k$ .

Donc

$$\begin{aligned} [\tilde{g}] \in \Gamma_k & \iff \theta([\tilde{g}]) = kj \text{ pour un } j \in \mathbb{Z} \\ & \iff [\tilde{g}] = [t \mapsto R_{2\pi kjt}] \end{aligned}$$

Donc les éléments du noyau de l'action de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sont précisément les éléments du groupe de revêtement  $\Gamma_k$  et le groupe de Lie de notre géométrie modèle relevée est  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k$ .

### 3.4 Groupes et algèbres de Lie

Pour la preuve du théorème de Sophus Lie, nous allons avoir besoin de quelques résultats sur les groupes et les algèbres de Lie. Mais d'abord, un rappel sur des notions de géométrie différentielle dont on pourra trouver une exposition plus complète dans [Spi].

**Espaces tangents et dérivées** Soit  $V$  une variété analytique réelle, en tout point  $p$  de  $V$  on définit l'espace tangent à  $V$  en  $p$  par

$$T_p(V) = \{\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow V \text{ pour un } \epsilon \mid \gamma \text{ est } C^0 \text{ et } \gamma(0) = p\} / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence définie par :  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  si et seulement si il existe une carte  $\phi : U \rightarrow W$  définie au voisinage de  $p$  telle que  $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$ .

On note  $TV = \bigcup_{p \in V} T_p(V)$  l'espace tangent de  $V$ .

Si  $f : V \rightarrow V'$  est une application analytique réelle entre deux variétés analytiques réelles, si  $p \in X$  et  $f(p) = q \in Y$ , on pose

$$\begin{aligned} D_p(f) & : T_p(V) \rightarrow T_q(V') \\ & [\gamma] \mapsto [\phi \circ \gamma] \end{aligned}$$

C'est la dérivée de  $f$  en  $P$ .

**Définition :** Une algèbre de Lie réelle est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni d'une application bilinéaire antisymétrique  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , qu'on appelle le *crochet de Lie*, qui vérifie l'identité de Jacobi :  $[W, [Y, Z]] + [Y, [Z, W]] + [Z, [W, Y]] = 0$  pour tous  $W, Y, Z$  dans  $\mathfrak{g}$ .

**Exemples :**

1. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des matrices  $n \times n$  à coefficients réels (donc son ensemble sous-jacent est  $M_n(\mathbb{R})$ ) muni du crochet de Lie  $[Y, Z] = YZ - ZY$   
L'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(Y) = 0\}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $V$  une variété  $C^\infty$ , une *dérivation* sur  $V$  est une application linéaire  $d : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{R})$  qui vérifie  $d(fg) = fd(g) + d(f)g$ .  
L'espace vectoriel des dérivations sur  $V$  est noté  $\mathcal{D}(V)$ , il est muni d'un crochet de Lie par  $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ .
3. Soit  $V$  une variété  $C^\infty$ , on appelle un *champ de vecteurs*  $C^\infty$  une application  $C^\infty X : V \rightarrow TV$ , où  $TV$  est l'espace tangent de  $V$ , telle que  $\forall p \in V, X(p) \in T_p(V)$ , où  $T_p(V)$  est l'espace tangent à  $V$  en  $p$ . On notera indifféremment  $Y(x)$  ou  $Y_x$  la valeur du champ de vecteurs  $Y$  au point  $x$ . On note  $\Gamma(V)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $V$ .  
Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre  $\Gamma(V)$  et  $\mathcal{D}(V)$ , donné par

$$\begin{aligned} \phi & : \Gamma(V) \rightarrow \mathcal{D}(V) \\ Y & \mapsto (\mathcal{L}_Y : f \mapsto (x \mapsto D_x f(Y_x))) \end{aligned}$$

Par transport de structures, on peut alors munir  $\Gamma(V)$  d'une structure d'algèbre de Lie, en posant  $[Y, Z] = \phi^{-1}([\phi(Y), \phi(Z)])$ , c'est-à-dire que  $[Y, Z]$  est le champ de vecteurs correspondant à la dérivation  $\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z - \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y$ .

**4. Algèbres de Lie d'un groupe de Lie**

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathfrak{g} = T_e G$  son espace tangent en  $e$ . On va définir le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  de deux manières différentes, mais équivalentes.

**Première méthode** Soit  $Y$  un champ de vecteurs sur  $G$ . On dit que  $Y$  est *invariant à gauche* s'il satisfait

$$\forall g \in G, \forall \gamma \in G, Y(\gamma g) = D_g L_\gamma Y(g)$$

où  $L_\gamma : g \mapsto \gamma g$  est la translation à gauche par  $\gamma$ . On voit qu'un champ de vecteurs invariant à gauche est  $C^\omega$ .

Un tel champ de vecteurs  $Y$  est uniquement déterminé par sa valeur en  $e$ . En effet, si  $g \in G$ , on a  $Y(g) = D_e L_g Y(e)$ . Si  $Y$  est un élément de  $\mathfrak{g}$ , on note  $\overline{Y}$  le champ de vecteurs invariant à gauche tel que  $\overline{Y}(e) = Y$ .

On note  ${}^G\Gamma(G)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs  $C^\omega$  sur  $G$  invariants à gauche. Cet espace est donc isomorphe à  $\mathfrak{g} = T_e$  en tant qu'espace vectoriel.

Ceci nous permet de définir le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  par :  $[Y, Z] = [\overline{Y}, \overline{Z}](e)$ .

**Deuxième méthode** Soit maintenant  $i_\gamma : G \rightarrow G$  la conjugation par  $\gamma$ , c'est-à-dire que  $i_\gamma(g) = \gamma g \gamma^{-1}$ . On note  $\text{Ad} \gamma = D_e i_\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  la différentielle de  $i_\gamma$  en  $e$ . L'application  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  est appelée la *représentation adjointe* de  $G$ , c'est un morphisme de groupes de Lie.

Enfin on note  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  la différentielle de  $\text{Ad}$  en  $e$ . L'espace  $GL(\mathfrak{g})$  étant un groupe de Lie (voir exemple 1), on peut bien définir son algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , dont les éléments sont les applications linéaires de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

On définit maintenant le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  par  $[Y, Z] = \text{ad}Y(Z)$  pour tous  $Y, Z$  dans  $\mathfrak{g}$ .

On peut montrer que l'algèbre de Lie de  $GL_n(\mathbb{R})$  est  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  et celle de  $SL_N(\mathbb{R})$  est  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  (voir [Mnei] page 68).

On admettra la proposition suivante (pour une preuve, voir [Spi]) :

**Proposition 8.** *Les espaces  $\mathfrak{g}$  et  ${}^G\Gamma(G)$ , munis de leur crochets de Lie respectifs, sont des algèbres de Lie et l'application*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow {}^G\Gamma(V) \\ Y &\mapsto \bar{Y} \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Nous admettrons les résultats suivants sur les algèbres et les groupes de Lie. On peut trouver leurs preuves détaillées dans [Spi] et [Hoch].

**Proposition 9.** *Soient  $G, G'$  des groupes de Lie d'algèbres de Lie respectives  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ .*

1. *Si  $\phi : G \rightarrow G'$  est un morphisme de groupes de Lie, alors  $D_e\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  est un morphisme d'algèbres de Lie.*
2. *Si  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , alors il existe un groupe de Lie connexe  $H$ , unique à isomorphisme près, s'injectant dans  $G$  par un morphisme de groupes de Lie  $\iota : H \rightarrow G$  tel que  $D_e\iota : D_eH \rightarrow \mathfrak{h}$  soit un isomorphisme d'algèbres de Lie.*
3. *Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie, elle est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un certain groupe de Lie.*
4. *Si  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à  $\mathfrak{g}'$ , alors  $G$  est localement isomorphe à  $G'$ , c'est-à-dire qu'il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $U'$  de l'élément neutre dans  $G$  et  $G'$  respectivement, et un difféomorphisme  $h : U \rightarrow U'$  tels que :
 
  - si  $x, y$  et  $xy$  sont dans  $U$ , alors  $h(xy) = h(x)h(y)$ .
  - si  $x', y'$  et  $x'y'$  sont dans  $U'$ , alors  $h^{-1}(xy) = h^{-1}(x)h^{-1}(y)$ .
  - si  $x$  et  $x^{-1}$  sont dans  $U$ , alors  $h(x)^{-1} = h(x^{-1})$ .*
5. *Si  $G$  et  $G'$  sont localement isomorphes, alors leurs revêtements universels respectifs sont isomorphes.*

### 3.5 Réduction du problème de classification

On a vu qu'il nous suffisait de rechercher les groupes de Lie connexes agissant de manière analytique réelle, transitive et fidèle sur  $\mathbb{R}$ . On peut maintenant voir qu'il suffit pour cela de trouver toutes les paires  $(G, H)$  où  $G$  est un groupe de Lie connexe,  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  tel que  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$  et  $G/H$  est  $C^\omega$  difféomorphe à  $\mathbb{R}$ . En effet si  $(G, \mathbb{R})$  est une géométrie modèle, soit  $H$  le stabilisateur de 0, on a :

- $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , la propriété  $g(0) = 0$  étant clairement fermée.
- Comme l'action de  $G$  sur  $\mathbb{R}$  est fidèle, l'intersection des stabilisateurs des points de  $\mathbb{R}$  ne contient que l'identité, donc  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$ .
- $G/H$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{R}$  : par le théorème 7, il existe une unique structure de variété analytique réelle sur  $G/H$  telle que l'action de  $G$  sur  $G/H$  soit analytique réelle. Comme  $G/H$  est en bijection avec  $\mathbb{R}$ , on obtient le résultat voulu.

Inversement, si on a un couple  $(G, H)$  satisfaisant ces propriétés, l'action de  $G$  sur  $G/H$  par multiplication  $(g_1(g_2H) = (g_1g_2)H)$  est analytique réelle par le théorème 7, fidèle par la condition  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$  et transitive.

### 3.6 L'application $\pi_*$

Soit un couple  $(G, H)$  avec  $G$  groupe de Lie,  $H$  sous-groupe fermé de  $G$  et  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$ . On note  $\pi : G \rightarrow H \backslash G$  la projection canonique, et  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . On suppose que  $\dim H \backslash G \geq 1$ .

On va définir une application  $\pi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(T(H \backslash G))$

**Remarque.** Si  $f : V \rightarrow V'$  est un difféomorphisme analytique et  $Y$  un champ de vecteurs sur  $V$ , on peut définir un champ de vecteurs  $f_*Y$  sur  $V'$  par

$$f_*Y(v') = D_{f^{-1}(v')}f(Y(f^{-1}(v')))$$

Mais si  $f$  n'est pas inversible, cette opération n'est pas en général possible.

**L'application exponentielle** Soit  $Y$  un élément de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\bar{Y}$  le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant à  $Y$ . L'équivalent du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir [Gal] page 27) sur une variété analytique réelle et pour des champs de vecteurs invariants à gauche montre qu'il existe une unique application analytique réelle  $\psi^{\bar{Y}} : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$  telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^{\bar{Y}}(t, g) = \bar{Y}(\psi(t, g))$$

On pose alors  $\exp Y = \psi^{\bar{Y}}(1, e)$ . C'est la valeur au temps 1 de la courbe intégrale de  $\bar{Y}$  passant par  $e$ .

**Propriétés :**

1. L'application  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  est  $C^\omega$  et c'est un difféomorphisme local au voisinage de  $e$ .
2. La dérivée en 0 de  $\exp$  est l'identité. Autrement dit on a  $D_0 \exp = Id_{\mathfrak{g}}$ .

On trouvera la démonstration de la première propriété dans [Hoch] page 80. Montrons la deuxième. On va d'abord voir que  $\exp(sX) = \psi^{\bar{X}}(s, e)$ . En effet, posons  $\varphi_s(t, g) = \psi^{\bar{X}}(st, g)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_s(t, g) &= s \frac{\partial}{\partial t} (\psi^{\bar{X}}(st, g)) \\ &= sX(\psi^{\bar{X}}(st, g)) \\ &= sX(\varphi_s(t, g)) \end{aligned}$$

Par unicité de la solution à cette équation différentielle, on a  $\varphi_s(t, g) = \psi^{\bar{X}}(st, g)$ . Donc  $\exp(sX) = \varphi_s(1, e) = \psi^{\bar{X}}(s, e)$ .

Maintenant

$$\begin{aligned} D_e \exp X &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\exp(sX) - \exp 0}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi^{\bar{X}}(s, e) - e}{s} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial s} \psi^{\bar{X}}(s, e) \right)_{|s=0} \\ &= X(\psi^{\bar{X}}(s, e))_{|s=0} = \bar{X}(e) = X \end{aligned}$$

**Définition et propriétés de  $\pi_*$**  On pose maintenant

$$\begin{aligned}\pi_* & : \mathfrak{g} \rightarrow {}^G\Gamma(T(H\backslash G)) \\ Y & \mapsto \pi_* Y : Hg \mapsto \left( \frac{d}{dt} Hg \exp(tY) \right) \Big|_{t=0}\end{aligned}$$

**Lemme 3.** *L'application  $\pi_* : \mathfrak{g} \rightarrow {}^G\Gamma(T(H\backslash G))$  est un morphisme d'algèbres de Lie.*

*Démonstration.* Commençons par montrer la formule suivante :

$$\forall g \in G, (\pi_* Y)_{\pi(g)} = D_g \pi(\bar{Y}_g) \quad (\dagger)$$

(Cette formule montre qu'en fait  $\pi_*$  correspond à la formule classique du transfert d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme  $C^\omega$ , bien que  $\pi$  lui même ne soit pas un difféomorphisme analytique réel).

On a :

$$\begin{aligned}(\pi_* Y)_{\pi(g)} & = \frac{d}{dt} (\pi \circ L_g(\exp tY)) \Big|_{t=0} \\ & = D_{\exp 0}(\pi \circ L_g) \circ \frac{d}{dt}(\exp tY) \Big|_{t=0} \\ & = D_e(\pi \circ L_g) \circ D_0 \exp(Y) \\ & = D_e(\pi \circ L_g)(Y) \quad \text{car } D_0 \exp = Id_{\mathfrak{g}} \\ & = D_{L_g(e)} \pi \circ D_e L_g(Y) \\ & = D_g \pi(\bar{Y}_g)\end{aligned}$$

Donc si  $f \in C^\infty(H\backslash G, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{L}_{\pi_* Y}(f) \in C^\infty(H\backslash G, \mathbb{R})$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi_* Y}(f)(\pi(g)) & = D_{\pi(g)} f((\pi_* Y)_{\pi(g)}) \\ & = D_{\pi(g)} f(D_g \pi(\bar{Y}_g)) \\ & = D_g(f \circ \pi)(\bar{Y}_g) \\ & = \mathcal{L}_{\bar{Y}}(f \circ \pi)(g)\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\pi_* Y} \circ \mathcal{L}_{\pi_* Z} - \mathcal{L}_{\pi_* Z} \circ \mathcal{L}_{\pi_* Y})(f) \circ \pi(g) & \\ & = \mathcal{L}_{\pi_* Y}(\mathcal{L}_{\pi_* Z}(f))(\pi(g)) - \mathcal{L}_{\pi_* Z}(\mathcal{L}_{\pi_* Y}(f))(\pi(g)) \\ & = \mathcal{L}_{\bar{Y}}(\mathcal{L}_{\pi_* Z}(f) \circ \pi)(\pi(g)) - \mathcal{L}_{\bar{Z}}(\mathcal{L}_{\pi_* Y}(f) \circ \pi)(\pi(g)) \\ & = \mathcal{L}_{\bar{Y}}(\mathcal{L}_{\bar{Z}}(f \circ \pi))(g) - \mathcal{L}_{\bar{Z}}(\mathcal{L}_{\bar{Y}}(f \circ \pi))(g) \\ & = \mathcal{L}_{[\bar{Y}, \bar{Z}]}(f \circ \pi)(g) \\ & = \mathcal{L}_{[Y, Z]}(f \circ \pi)(g) \\ & = \mathcal{L}_{\pi_* [Y, Z]}(f) \circ \pi(g)\end{aligned}$$

Donc  $\pi_*$  est un morphisme d'algèbres de Lie. □

**Lemme 4.** *L'application  $\pi_*$  est injective.*

*Démonstration.* Soit  $Y \in \mathfrak{g}$  tel que  $\pi_* Y = 0$ . Alors l'application  $t \mapsto Hg \exp tY = Hg \exp t_0 Y \exp(t-t_0)Y$  a pour dérivée 0 en  $t = t_0$ , donc elle est constante. Comme elle vaut  $Hg$  en  $t = 0$ , on a donc :

$$\forall g \in G, Hg \exp tY = Hg \iff \exp tY \in g^{-1}Hg$$

Comme  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$ , on a donc  $Y = 0$ .  $\square$

**Lemme 5.** *Pour tout point  $x$  de  $H \backslash G$ , il existe un élément  $Y$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\pi_* Y(x) \neq 0$*

*Démonstration.* Comme  $\pi : G \rightarrow H \backslash G$  est une submersion, l'application  $D_e \pi : T_g G \rightarrow T_{Hg}(H \backslash G)$  est surjective. On sait que  $\dim H \backslash G \geq 1$  donc il existe  $Z \in T_g G$  tel que  $T_g \pi(Z) \neq 0$ . Si  $Y = D_g L_{g^{-1}} \in \mathfrak{g}$ , alors  $\bar{Y}_g = Z$  et  $(\pi_* Y)_{Hg} = D_g \pi(\bar{Y}_g) \neq 0$ .  $\square$

**Lemme 6.** *Soit  $Y$  un élément de  $\mathfrak{g}$ , alors  $\pi_* Y$  s'annule en  $He$  si et seulement si  $Y$  est un élément de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $H$ .*

*Démonstration.* L'application  $\pi : G \rightarrow H \backslash G$  est une submersion et  $\ker D_e \pi = \mathfrak{h}$ . Comme  $(\pi_* Y)_{He} = D_e \pi(Y)$ , le résultat suit.  $\square$

### 3.7 Passage des groupes de Lie aux algèbres de Lie

Nous avons réduit notre problème à la classification des paires  $(G, H)$  avec  $G$  groupe de Lie,  $H$  sous-groupe fermé satisfaisant la propriété  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$  et  $G/H$   $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(G, H)$  un tel couple. Les variétés  $G/H$  et  $H \backslash G$  sont clairement  $C^\omega$ -difféomorphes dans  $\mathbb{R}$ , donc  $H \backslash G$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{R}$ . Donc on peut trouver  $\varphi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme analytique réel d'un voisinage  $U$  de  $e$  dans  $H \backslash G$  dans un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\varphi(He) = 0$ .

On obtient donc une application

$$\begin{aligned} \varphi_* & : \Gamma(TU) \rightarrow \Gamma(TV) \\ X & \mapsto (y \mapsto D_e \varphi(X_{\varphi^{-1}(y)})) \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Elle a la propriété que  $\varphi_* Y(0) = 0$  si et seulement si  $\varphi(He) = 0$ .

En composant avec notre application  $\pi_*$ , on a un morphisme injectif d'algèbre de Lie donné par :

$$\begin{aligned} \phi_* \circ \pi_* & : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TV) \\ Y & \mapsto \phi_*(\pi_* Y) \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{A} = \phi_*(\pi_*(\mathfrak{g}))$  est une algèbre de Lie de dimension finie de champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, on sait que  $\phi_* \circ \pi_*(\mathfrak{h})$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{A}$  formée par les champs de vecteurs s'annulant en 0; en effet

$$\begin{aligned} \phi_* \circ \pi_*(X)(0) = 0 & \iff \pi_*(X)(He) = 0 \\ & \iff X \in \mathfrak{h} \end{aligned}$$

par le lemme 6.

En résumé, on cherche à trouver les algèbres de Lie de dimension finie de champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Ensuite les sous-algèbre des champs de vecteurs s'annulant en 0 correspondront aux algèbre de Lie du groupe  $H$ .

C'est précisément le résultat auquel parvient le théorème suivant, qui peut être considéré comme une version infinitésimale du théorème de Sophus Lie, puisqu'il réalise une classification des algèbres de Lie susceptibles de correspondre au groupe de Lie d'une géométrie modèle sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.8 Théorème “local” de Lie

Ce théorème ainsi que sa preuve proviennent de [Ghy].

**Théorème 10.** *Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Lie de champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie, et s’il existe  $X \in \mathcal{A}$  tel que  $X(0) \neq 0$ , alors il existe  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$  un difféomorphisme analytique réel défini sur un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 tel que :*

$$\varphi_* (\mathcal{A}|_W) = \mathcal{B}_k := \left\{ P(x) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\phi(W)}, P \in \mathbb{R}[x], \deg(P) \leq k \right\}$$

pour  $k = 0, 1$  ou 2

**N.B. :**  $\varphi_* (\mathcal{A}|_W) := \{ \varphi_* (X|_W) : X \in \mathcal{A} \}$

*Démonstration.* Soit  $Y \in \mathcal{A}$  ne s’annulant pas en 0. Comme  $Y(0) \neq 0$ , le flot  $\psi(t) = \phi_{t=x}^Y(0)$  du champ de vecteurs  $Y$  avec  $\psi(0) = 0$  est un  $C^\omega$ -difféomorphisme sur un voisinage  $U$  de 0. On note  $\varphi$  son inverse. On a  $D\psi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = Y(\psi(x))$ . Donc  $\psi_* \frac{\partial}{\partial x} = Y$  et donc  $\varphi_* Y = \frac{\partial}{\partial x}$ .

Soit  $\mathcal{A}' = \varphi_* (\mathcal{A}|_U)$ , qui est une algèbre de Lie de dimension finie, de champs de vecteurs sur  $U = \varphi(W) \subset \mathbb{R}$  et qui contient  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Les éléments de  $\mathcal{A}'$  sont de la forme  $u(x) \frac{\partial}{\partial x}$ . Comme  $\left[ \frac{\partial}{\partial x}, u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] = u'(x) \frac{\partial}{\partial x}$ , l’espace  $\mathcal{A}'$  est stable par dérivation qui est donc un opérateur linéaire sur  $\mathcal{A}'$ . Les itérés de cet opérateur sont linéairement dépendants puisque  $\mathcal{A}'$  est de dimension finie. Donc tous les éléments de  $\mathcal{A}'$  vérifient une certaine équation différentielle d’ordre  $n$  à coefficients constants.

Donc si  $u(x) \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{A}'$ , comme  $u$  est  $C^\infty$  elle admet un développement de Taylor autour de 0. Supposons que  $u(x)$  est choisi dans  $\mathcal{A}'$  pour maximiser le degré du développement de Taylor autour de 0. Ce degré est borné par l’existence de l’équation différentielle trouvée plus haut : une fonction satisfaisant une équation différentielle de degré  $n$  ne peut avoir un développement de Taylor de degré plus grand que  $n$  puisque l’équation est satisfaite également par le développement de Taylor.

Soit  $a_i x^i + \dots + a_0$  le développement de Taylor de  $u$  autour de 0.

On a

$$\begin{aligned} \left[ u(x) \frac{\partial}{\partial x}, u'(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] &= u(x) u''(x) \frac{\partial}{\partial x} - u'^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \\ &= i(i-2) a_i^2 x^{2i-2} - i^2 a_i^2 x^{2i-2} + \text{des termes de plus petit degr} \end{aligned}$$

Donc  $i \leq 2$ .

Maintenant si on considère l’application  $j : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}_2$  qui à un champ de vecteurs de  $\mathcal{A}'$  associe son développement de Taylor en 0 à l’ordre 2, on voit que c’est un morphisme d’algèbres de Lie, injectif par ce qui précède.

L’opérateur linéaire

$$\begin{aligned} \text{ad}^3 \frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{A}' &\rightarrow \mathcal{A}' \\ Z &\mapsto \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \left[ \frac{\partial}{\partial x}, Z \right] \right] \right] \end{aligned}$$

est nul car son image par  $j$  l’est. Donc la dérivée d’ordre 3 de tout élément de  $\mathcal{A}'$  est nulle, donc si on regarde au voisinage de zero, les éléments de  $\mathcal{A}'$ , uniquement déterminés par leur développement de Taylor à l’ordre 2, sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. □

### 3.9 Étude des algèbres $\mathcal{B}_k$

On note  $\mathcal{B}_k^0$  la sous-algèbre de  $\mathcal{B}_k$  des champs de vecteurs s'annulant en 0.

On a  $\mathcal{B}_2 = \{(c + 2ax - bx^2)\frac{\partial}{\partial x} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ . Le crochet de Lie est donné par

$$\begin{aligned} & \left[ (c + 2ax - bx^2)\frac{\partial}{\partial x}, (f + 2dx - ex^2)\frac{\partial}{\partial x} \right] \\ = & \left( (c + 2ax - bx^2)\frac{\partial}{\partial x} \right) \left( (f + 2dx - ex^2)\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left( (f + 2dx - ex^2)\frac{\partial}{\partial x} \right) \left( (c + 2ax - bx^2)\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ = & 2((c + 2ax - bx^2)(d - 2ex) - (f + 2dx - ex^2)(a - 2bx))\frac{\partial}{\partial x} \\ = & 2((cd - af) + x(bf - ce) + x^2(bd - ae))\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Maintenant si on considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ , où le crochet de Lie est défini par  $[A, B] = AB - BA$ , on voit que l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 & \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \\ (c + 2ax + bx^2)\frac{\partial}{\partial x} & \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie. En effet,

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} \right] & = \begin{pmatrix} ad + bf & ae - db \\ cd - af & ce + ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad + ce & bd - ae \\ af - cd & bf + ad \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} bf - ce & 2(ae - db) \\ 2(cd - af) & ce - bf \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathcal{B}_1 = \{(c + 2ax)\frac{\partial}{\partial x} : a, c \in \mathbb{R}\}$  est isomorphe à la sous-algèbre de Lie  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$ . On voit aisément que  $\mathcal{B}_0 = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x}$ . On voit également que  $\mathcal{B}_2^0$  est isomorphe à l'algèbre de Lie  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$ ; et que  $\mathcal{B}_1^0$  est isomorphe à l'algèbre de Lie  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

### 3.10 Théorème de Sophus Lie

**Théorème 11.** *A isomorphisme près, les géométries modèles de dimension 1 dont le groupe de Lie  $G$  est connexe sont :*

- l'action de  $G = \mathbb{R}$  sur  $X = \mathbb{R}$  par translation
- l'action de  $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sur  $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  par translation (il s'agit en fait de la géométrie sphérique)
- l'action du groupe affine  $G = \text{Aff}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$  sur  $X = \mathbb{R}$  par  $x \mapsto a + bx$  où  $(a, b) \in G$
- l'action du revêtement d'ordre  $k$  de  $PSL_2(\mathbb{R})$ , noté  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k$ , sur le revêtement d'ordre  $k$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , homéomorphe à  $X = \mathbb{S}^1$ , pour  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ .
- l'action du revêtement universel de  $PSL_2(\mathbb{R})$ , noté  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ , sur le revêtement universel de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Nous allons commencer par étudier les géométries modèles sur  $\mathbb{R}$ .

Par les résultats des sections précédentes, si  $(G, H)$  est un couple avec  $G$  groupe de Lie connexe  $H$  sous-groupe fermé satisfaisant la propriété  $\bigcap_g \in GgHg^{-1} = \{e\}$  et  $G/H$  difféomorphe à  $\mathbb{R}$ , les algèbres de Lie respectives  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  de  $G$  et  $H$  sont isomorphes à  $\mathcal{B}_k$  et  $\mathcal{B}_k^0$  pour  $k = 0, 1$ , ou  $2$ .

(Ici  $\mathcal{B}_k^0$  est l'ensemble des champs de vecteurs dans  $\mathcal{B}_k$  qui s'annulent en  $0$ ).

**Si  $k=0$  :** L'algèbre de Lie  $\mathcal{B}_0 = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x}$ , et  $\mathcal{B}_0^0 = 0$ . Donc  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{h} = \{0\}$ .

Par la propriété 4 du théorème 9,  $G$  est connexe et localement isomorphe à  $\mathbb{R}$ , donc son revêtement universel est  $\mathbb{R}$ . Donc  $G = \mathbb{R}$  ou  $G = \mathbb{S}^1$ . Or  $H$  est discret, et  $G/H$  est simplement connexe. Donc  $G$  est simplement connexe. D'où  $G = \mathbb{R}$ , et  $H = \{0\}$ .

**Si  $k=1$  :** L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

Considérons le groupe de Lie  $\text{Aff}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+*}$  des transformations affines de  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathfrak{a}$  son algèbre de Lie : on représente les éléments de  $\mathfrak{a}$  par des couples de réels. Soit  $(2a, b) \in \mathfrak{a}$  : le champ de vecteur invariants à gauche lui correspondant est donné par :  $X_{(2a,b)}(t, \lambda) = (\lambda 2a, \lambda b)$  puisque  $L_{(t,\lambda)} : x \mapsto t + \lambda x$ . La dérivation correspondant à ce champ de vecteurs est

$$\partial_{(2a,b)} : f \mapsto 2ay \frac{\partial f}{\partial x} + by \frac{\partial f}{\partial y}$$

On trouve que le crochet de Lie est donné par  $[\partial_{(2a,b)}, \partial_{(2c,d)}] = 2(bc - ad) \frac{\partial}{\partial x}$ , ce qui montre que l'isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &\rightarrow \mathcal{B}_1 \\ (b + 2ax) \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Ceci montre également que le sous-groupe connexe (unique par la proposition 2 du théorème 9) de  $\text{Aff}_0$  d'algèbre de Lie isomorphe à  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$  est le groupe des homothéties  $\mathbb{R}_{+*}$ .

Les groupes de Lie  $\text{Aff}_0$  et  $G$  ayant des algèbre de Lie isomorphes sont localement isomorphes. Comme  $\text{Aff}_0$  est simplement connexe, c'est le revêtement universel de  $G$ . Soit  $\Gamma$  le groupe du revêtement : c'est un sous-groupe discret et distingué de  $G$ , puisque par le théorème 4 l'application de revêtement est un morphisme de groupe de Lie.

Par le lemme 2, tout sous groupe discret et distingué d'un groupe de Lie connexe est un sous-groupe du centre  $Z(G)$ . Le centre de  $\text{Aff}_0(\mathbb{R})$  étant trivial, on a  $G = \text{Aff}_0$ .

Soit  $H_0$  la composante connexe de  $e$  dans  $H$ . Le sous-groupe  $H_0$  est normal dans  $H$ . Par le théorème 7,  $G/H_0 \rightarrow G/H$  est une fibration, et comme  $H/H_0$  est discret, c'est un revêtement de groupe de revêtement  $H/H_0$ . Comme  $G/H$  est simplement connexe, le revêtement est trivial donc  $H = H_0$  donc  $H$  est connexe.

Donc  $H = \mathbb{R}_{+*}$ .

**Si  $k=2$  :** L'algèbre de Lie de  $G$  est isomorphe à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ , donc  $G$  est localement isomorphe à  $SL_2(\mathbb{R})$ , donc à  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  puisque  $SL_2(\mathbb{R})$  est un revêtement de  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Donc le revêtement universel de  $G$  est  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ .

Le sous-groupe  $B$  de  $PSL_2(\mathbb{R})$  correspondant aux matrices triangulaires supérieures est fermé et simplement connexe, et d'algèbre de Lie isomorphe à  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . On note encore  $B$  son relevé dans  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k$ .

Si  $k \neq \infty$ ,  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k$  a le type d'homotopie du cercle puisque c'est un revêtement à l'ordre  $k$  de  $PSL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  et que le revêtement à l'ordre  $k$  de  $\mathbb{S}^1$  est  $\mathbb{S}^1$ .

Le sous-groupe  $B \leq \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k$  est distingué, contractible donc simplement connexe. Si  $H$  est tel que  $H_0 = B$ , l'application  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k/B \rightarrow \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k/H$  est une fibration de groupe  $H/B$  discret donc c'est un revêtement. Comme  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k/H$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{R}$  donc simplement connexe, le revêtement est trivial. Mais  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k/B$  n'est pas simplement connexe, on a une contradiction. Donc  $k = \infty$  et  $(G, H) = (PSL_2(\mathbb{R}), B)$ .

Maintenant que nous connaissons les géométries modèles sur  $\mathbb{R}$ , nous pouvons en déduire les géométries modèle sur  $\mathbb{S}^1$ . Soit  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  l'application de revêtement de  $\mathbb{R}$  sur le cercle.

Pour  $G = \mathbb{R}$  agissant par translation sur  $\mathbb{R}$ , on a bien la propriété requise pour pouvoir redescendre une géométrie modèle sur un espace revêtu : si  $x, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \pi(x) = \pi(y)$  implique  $\pi(t+x) = \pi(t+y)$ . Le noyau de l'action par translation de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}$ , donc on obtient une géométrie modèle  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ .

Pour  $G = \text{Aff}_0$  agissant sur  $\mathbb{R}$ , cette propriété n'est pas satisfaite :  $(0, 3/2) \in \text{Aff}_0$ , on a  $\pi(0) = \pi(1)$  mais  $\pi((0, 3/2)0) = 0 \neq \pi((0, 3/2)1) = 3/2$ . On n'obtient donc pas de géométrie modèle sur  $\mathbb{S}^1$ .

La géométrie modèle donnée par  $G = \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  agissant sur  $\mathbb{R}$  est précisément le relevé au revêtement universel de l'action de  $PSL_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Comme les espaces revêtus par  $\mathbb{R}$  sont des revêtements à l'ordre  $k$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  les géométries modèles obtenues en descendant l'action de  $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$  sur  $\mathbb{R}$  sont les géométries obtenues en relevant l'action de  $PSL_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  au revêtement d'ordre  $k$  (pour tous  $k \geq 1$ ). On a vu plus haut que les géométries obtenues sont alors les  $(\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}_k, \mathbb{S}^1)$ .

Ceci conclut la preuve.  $\square$

### **Bibliographie :**

- [**Ghy**] Ghys, É. : Groups acting on the circle, *L'Enseign. Math.* **47**(2001)329-407. *Sur la classification des géométries modèles en dimension un.*
- [**God**] Godbillon, C. : Éléments de topologie algébrique, Paris, 1971. *Utile pour tous les résultats concernant les revêtements.*
- [**Hoch**] Hochschild, G. : The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965. *Assez abstrait mais très complet sur les groupes de Lie.*
- [**Klei**] Klein, F. : Le programme d'Erlangen, Gauthier-Villars, 1974. *La philosophie des géométries modèles.*
- [**Mil**] Milnor, J.W. : Topology from the differential viewpoint, Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1965. *Contient une démonstration que  $\mathbb{R}$  et  $S^1$  sont les seules variétés connexes de dimension 1.*
- [**Mnei**] Mneimné, R. et Testard, F. : Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann, 1997. *Quelques résultats généraux, mais surtout beaucoup d'analyse d'exemples particuliers de groupes de Lie.*
- [**Spiv**] Spivak, M. : Differential geometry, vol. I, Publish or perish, 1970. *Une référence pour tout ce qui concerne les variétés, quelques résultats utiles sur les groupes et les algèbres de Lie.*
- [**Ste**] Stewart, I. : Conjuring with conjectures, dans *Nature*, 423, 2003. *Sur la Conjecture de Poincaré.*
- [**Thu**] Thurston, W. : Three dimensional geometry and topology, Princeton University Press, 1997. *Très intuitif et complet sur les géométries modèles, les structures géométriques et l'application développante.*