

Percolation critique sur le demi-espace

Romain Panis et Grégoire Szymanski sous la direction de Raphaël Cerf

Table des matières

1	Le modèle	2
1.1	Motivations	2
1.2	Le modèle de percolation	3
1.2.1	Construction de \mathbb{L}^d	3
1.2.2	L'espace de probabilité	4
1.2.3	Les clusters ouverts	5
1.3	La probabilité de percolation	6
1.4	La percolation par site	13
1.5	Les grandes questions	14
1.5.1	Comportement au point critique	14
1.5.2	Phase $p > p_c$	14
1.5.3	Phase $p < p_c$	15
2	Outils probabilistes	16
2.1	Évènements croissants	16
2.2	L'inégalité FKG	17
3	Percolation sur le demi-espace	20
3.1	Le résultat	20
3.2	Démonstration des lemmes	23
3.2.1	Démonstration du lemme A	23
3.2.2	Démonstration du lemme B	28
4	Unicité du cluster infini	36
5	Étude approfondie des valeurs des probabilités critiques	40
5.1	Généralisation du modèle de percolation	40
5.2	Inégalités strictes	40
	Appendices	43
A	Un lemme d'analyse	44
B	Espérance conditionnelle	45
B.1	Définition	45
B.2	Théorèmes de convergences	47
B.3	Autres résultats utiles	47
C	Martingales	48
C.1	Définition	48
C.2	Convergence	48
D	Ergodicité de \mathbb{P}_p	51
E	Listing	54

Chapitre 1

Le modèle

1.1 Motivations

Plongez une grosse pierre poreuse dans l'eau. Le centre de la pierre est-il mouillé? C'est en voulant modéliser de manière simple ce problème que Broadbent et Hammersley introduisent en 1957 le modèle de percolation. L'idée est simple : on modélise la pierre par le réseau \mathbb{Z}^2 , les canaux par lesquels peut passer l'eau sont représentés par des arêtes liant les points du réseau, le modèle choisi est donc celui d'un graphe non orienté infini. Plus exactement, on décide que l'eau peut s'écouler si le canal considéré est ouvert et ne peut s'écouler si ce dernier est fermé. Ce modèle s'accompagne d'un aspect probabiliste. On déclare un canal ouvert avec une probabilité p fixée. Répondre au problème initial revient donc à étudier la question suivante : existe-t-il dans ce modèle de graphe aléatoire de « grandes » composantes connexes ?

Le modèle de percolation est le point de départ de nombreuses questions. Que se passe-t-il lorsque l'on commence à modifier le paramètre p intervenant dans le modèle ? Il semble intuitif que si l'on augmente la probabilité qu'une arête soit ouverte, on augmente aussi la probabilité de trouver de grandes composantes connexes. Ce point sera étudié dans la suite avec l'introduction d'un phénomène critique. Une autre voie de recherche est de s'intéresser, lorsque cela fait sens, à la taille moyenne des composantes connexes d'un point donné. On peut aussi étudier leur forme et observer l'évolution de ces résultats lorsque l'on modifie les paramètres du modèle.

Plus concrètement, l'intérêt du modèle est sa simplicité. Comme nous allons le voir, sa construction n'est pas compliquée mais permet cependant de modéliser des situations physiques très concrètes (voir exemples ci-dessous). De plus, une des richesses du modèle réside dans la simplicité de l'énoncé des questions qu'il soulève. Ces questions simples dans leur formulation demeurent cependant extrêmement difficiles à étudier. Nous verrons dans la suite un exemple de l'une de ces questions, considérée encore aujourd'hui comme le « Graal » de tout percolationniste : l'étude de la percolation critique en dimension 3.

On donne maintenant quelques exemples de situations physiques concrètes dans lesquelles le modèle de percolation apparaît. Ces exemples utilisent certains concepts présentés dans les chapitres qui suivent.

- *Ferromagnétisme* :

Un des phénomènes critiques les plus étudiés en physique est le **ferromagnétisme**. On place un échantillon d'un métal « approprié » dans un champ magnétique et on observe l'évolution des propriétés de magnétisme du métal lorsque l'on modifie le champ extérieur. Supposons que l'on commence par augmenter le champ extérieur d'un champ nul jusqu'à une valeur donnée puis qu'on l'annule progressivement après. Si la température est suffisamment élevée, le métal ne conserve pas de propriétés de magnétisme alors que pour des températures suffisamment faibles on observe une persistance de certains effets magnétiques dans le métal même après inhibition des champs extérieurs. On peut mettre en évidence l'existence d'une température critique appelée température de Curie et notée T_C et marquant la frontière entre les deux phénomènes décrits ci-dessus : l'existence ou non d'un magnétisme « spontané » dans le métal. Le modèle mathématique le plus

couramment utilisé pour décrire ce phénomène est le modèle d'Ising. Il ne s'agit pas ici de décrire avec précision ce modèle mais plutôt de voir en quoi il est lié au modèle de percolation. Dans le modèle d'Ising sur le réseau \mathbb{Z}^d , chaque sommet (les spins) de \mathbb{Z}^d est dans un des deux états 0 ou 1. Une *configuration* est la donnée d'une suite $\omega = (\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ où $\omega(x) \in \{0, 1\}$ représente l'état du point $x \in \mathbb{Z}^d$. Ce modèle comporte un paramètre d'interaction des spins, souvent noté J . Lorsque ce paramètre est nul, on est ramené au cas de la percolation par site que nous décrirons dans la section 1.4.

- *Épidémies* :

Imaginons la situation suivante, des arbres sont plantés aux points du réseau $\lambda\mathbb{Z}^2$ où $\lambda > 0$. On suppose qu'il existe une probabilité p qu'un arbre *sain* soit infecté par un arbre *contaminé* où p est une fonction de la distance entre deux arbres λ . Afin d'empêcher un arbre contaminé de transmettre sa maladie à une infinité de voisins, il est nécessaire d'éloigner les arbres de sorte à ce que la probabilité p obtenue passe en-dessous de la probabilité critique sur \mathbb{Z}^2 .

1.2 Le modèle de percolation

Dans ce paragraphe, d désigne un entier supérieur ou égal à 1.

On construit notre modèle de percolation sur le réseau \mathbb{Z}^d . On commence par introduire quelques définitions et notations essentielles.

1.2.1 Construction de \mathbb{L}^d

Définition 1. Un **graphe** est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble quelconque représentant les sommets (vertices), et E est un ensemble de paires de points de V représentant les arêtes (edges).

Définition 2. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un **chemin** dans G est une suite (x_0, x_1, \dots) de points de V éventuellement infinie telle que pour tout $i \geq 0$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$.

Définition 3. On munit \mathbb{Z}^d d'une distance δ définie pour $x = (x_i)_{1 \leq i \leq d}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq d}$ par

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|. \quad (1.1)$$

Par la suite, on notera $\delta(x, 0) := |x|$ pour alléger les notations.

On introduit une seconde distance sur \mathbb{Z}^d , issue de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|x\| = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq d\} \quad (1.2)$$

pour $x \in \mathbb{Z}^d$. On remarque alors que pour $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|.$$

On définit le **réseau cubique d -dimensionnel** en construisant le graphe $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ où

$$\mathbb{E}^d = \{\{x, y\}, x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ et } \delta(x, y) = 1\}.$$

Dans le cas où $\delta(x, y) = 1$, on dit que x et y sont deux sommets **adjacents**. Le cas échéant, on note $x \sim y$ et l'arête joignant x et y est notée $\langle x, y \rangle$. Une arête e est dite **incidente** en x s'il existe $z \in \mathbb{Z}^d$ telle que $e = \langle z, x \rangle$. Dans ce qui suit, les lettres u, v, w, x et y désigneront plutôt des sommets tandis que les lettre e et f désigneront des arêtes.

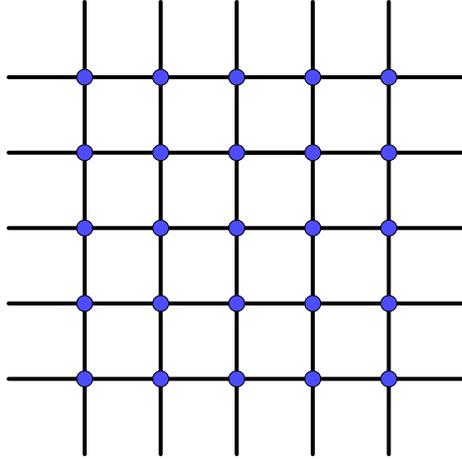


FIGURE 1.1 – Partie du réseau cubique 2-dimensionnel \mathbb{L}^2

1.2.2 L'espace de probabilité

On construit à présent un modèle de graphe aléatoire à partir de \mathbb{L}^d . Soit $p \in [0, 1]$. On souhaite construire un graphe aléatoire de sommets les points de \mathbb{Z}^d dans lequel chaque arête est un élément de \mathbb{E}^d et existe avec probabilité p , indépendamment des autres. L'univers choisi est donc

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}.$$

Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé une **configuration**. Une arête e est dite **ouverte** (resp. **fermée**) dans la configuration ω si $\omega(e) = 1$ (resp. $\omega(e) = 0$). On munit Ω de la tribu produit \mathcal{F} engendrée par les cylindres de dimension finie. Enfin, on équipe l'espace (Ω, \mathcal{F}) de la mesure produit \mathbb{P}_p qui est le produit tensoriel de mesures de Bernoulli de paramètre p . Plus formellement,

$$\mathbb{P}_p = \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} ((1-p)\mathbb{1}_{\omega(e)=0} + p\mathbb{1}_{\omega(e)=1}) = \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e \quad (1.3)$$

où μ_e est une mesure de Bernoulli sur $\{0, 1\}$ donnée par

$$\mu_e(\omega(e) = 1) = p, \quad \mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p.$$

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, on note (sous réserve d'existence) $\mathbb{E}_p[X]$ son espérance.

Remarque 1. *Il existe une relation d'ordre partiel sur les configurations de Ω . Si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, on note $\omega_1 \leq \omega_2$ si*

$$\forall e \in \mathbb{E}^d, \quad \omega_1(e) \leq \omega_2(e).$$

Si $\omega \in \Omega$, on peut considérer

$$K(\omega) = \{e \in \mathbb{E}^d, \omega(e) = 1\}.$$

On a alors pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$,

$$\omega_1 \leq \omega_2 \Leftrightarrow K(\omega_1) \subset K(\omega_2).$$

On complète à présent la définition 2 avec un peu de vocabulaire utile pour la suite. Un chemin dans \mathbb{L}^d est dit **ouvert** si les arêtes qui le constituent sont ouvertes. Deux sous-graphes de \mathbb{L}^d sont

dits *e-disjoints* s'ils n'ont aucune arête en commun ; ils sont dit *disjoints* s'ils n'ont ni arêtes ni sommets en commun. Si $A, B \subset \mathbb{Z}^d$, on dit que A et B sont *connectés* et on note $A \leftrightarrow B$ s'il existe un chemin ouvert joignant un sommet de A à un sommet de B . Dans le cas où $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on note aussi $x \leftrightarrow y$. Lorsque $x \in \mathbb{Z}^d$ est le point de départ d'un chemin de longueur infinie, on note $x \leftrightarrow \infty$. On définit aussi le *bord* d'un ensemble $A \subset \mathbb{Z}^d$, noté ∂A , comme l'ensemble des éléments de A étant adjacents à un élément de $\mathbb{Z}^d \setminus A$. Dans toute la suite on utilisera abondamment la notion de *boîte*. Une boîte est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d de la forme

$$B(a, b) = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \quad (1.4)$$

où $a, b \in \mathbb{Z}^d$ sont tels que $a_i \leq b_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. On note aussi si $n \in \mathbb{N}$,

$$B(n) := [-n, n]^d = \{x \in \mathbb{Z}^d, \|x\| \leq n\}.$$

Enfin, si $x \in \mathbb{Z}^d$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n, x)$ ² la boîte $x + B(n)$ de côté de longueur $2n$ et de centre x .

1.2.3 Les clusters ouverts

Soit $\omega \in \Omega$ une configuration. Considérons $G_\omega = (\mathbb{Z}^d, K(\omega))$ le sous-graphe de \mathbb{L}^d . On appelle *clusters ouverts* de ω les composantes connexes de G_ω . Si $x \in \mathbb{Z}^d$, on note $C(x)$ le cluster ouvert contenant x . Avec les définitions précédentes on a donc

$$C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d, \text{ Il existe un chemin ouvert joignant } x \text{ et } y\}.$$

Dans la suite, $C(x)$ sera aussi vu comme un sous-graphe aléatoire de \mathbb{L}^d dont l'ensemble des arêtes est déduit du graphe aléatoire dont il est issu. Notons que le modèle développé est invariant par translation, ce qui se traduit par l'invariance par translation de \mathbb{P}_p . En particulier la loi de $C(x)$ ne dépend pas de $x \in \mathbb{Z}^d$, on s'intéresse en conséquence à un cluster typique, celui de l'origine $C(0)$ (voir figure 1.1³).

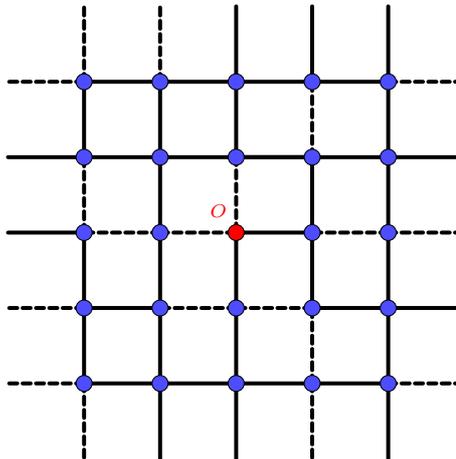


FIGURE 1.2 – Exemple de cluster $C(0)$ en dimension 2

1. On a noté si $\alpha \leq \beta \in \mathbb{Z}$, $[\alpha, \beta] = \{n \in \mathbb{Z}, \alpha \leq n \leq \beta\}$.
2. Il y a un conflit de notation avec (1.4) que l'on règle en prenant la convention de ne jamais noter 'n' un élément de \mathbb{Z}^d .
3. En trait plein, on trouve les arêtes ouvertes et en pointillés les arêtes fermées.

1.3 La probabilité de percolation

On introduit à présent l'objet des développements qui suivent : la probabilité de percolation. L'idée est naturelle, on est parvenu à construire un modèle de graphe aléatoire dépendant d'un paramètre $p \in [0, 1]$. On s'intéresse aux propriétés de ce graphe aléatoire lorsque ce paramètre varie. Nous nous concentrons dans la suite essentiellement au comportement de $C(0)$. Que dire de la probabilité que ce cluster contienne une infinité de points ? En particulier, observe-t-on un phénomène de transition ?

Définition 4. *Nous définissons la probabilité de percolation comme la probabilité que le cluster l'origine contienne une infinité de points. Plus formellement, si $p \in [0, 1]$, on note*

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) \quad (1.5)$$

cette probabilité.

Remarque 2. *On peut aussi écrire*

$$\theta(p) = 1 - \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_p(|C(0)| = n).$$

On observe facilement que $|C(0)| = \infty$ si et seulement si on peut trouver une suite $(x_i)_{i \geq 0}$ de points distincts de \mathbb{Z}^d telle que $x_0 = 0$, $x_i \sim x_{i+1}$ et $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ est ouverte pour tout $i \geq 0$. Cette remarque permet d'introduire l'écriture, utilisée par la suite,

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \text{ connecté à } \infty) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty).$$

On démontre à présent un certain nombre de résultats sur la fonction θ .

Proposition 1. *L'application*

$$p \in [0, 1] \mapsto \theta(p)$$

est croissante.

Le résultat ci-dessus semble intuitif, plus on « augmente » le nombre d'arêtes dans le graphe, plus il y a de probabilités qu'un chemin de longueur infinie de base l'origine existe. La démonstration rigoureuse de ce résultat nécessite un peu de travail et sera réalisée dans le chapitre suivant. On admet provisoirement ce résultat.

L'objectif est maintenant de mettre en évidence le phénomène critique observé par Broadbent et Hammersley en 1957. On commence par l'introduction d'une quantité importante dans ce qui suit : **la constante de connectivité de \mathbb{L}^d** .

Définition 5. *On appelle **chemin auto-évitant** de \mathbb{Z}^d un chemin dans \mathbb{L}^d ne passant pas deux fois par le même sommet.*

Proposition 2. *On suppose $d \geq 2$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c_d(n)$ le nombre de chemins auto-évitants de \mathbb{Z}^d partant de l'origine de longueur n . On définit **la constante de connectivité de \mathbb{L}^d** , que l'on note $\lambda(d)$, de la manière suivante*

$$\lambda(d) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_d(n))^{\frac{1}{n}}.$$

On dispose de l'encadrement suivant

$$0 < \lambda(d) \leq 2d - 1. \quad (1.6)$$

Preuve. On commence par justifier l'existence de $\lambda(d)$. Observons déjà que si $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors

$$c_d(p+q) \leq c_d(p)c_d(q).$$

En effet, il suffit de voir qu'un chemin auto-évitant de longueur $p+q$ partant de l'origine est la concaténation d'un chemin auto-évitant de longueur p et d'un chemin auto-évitant de longueur q .

On en déduit alors que la suite $(\ln c_d(n))_{n \geq 1}$ est sous-additive. Un résultat classique permet de conclure que

$$\frac{\ln c_d(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf \left\{ \frac{\ln c_d(k)}{k}, k \geq 1 \right\}.$$

En particulier comme $c_d(n) \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geq 1$, cette limite est positive. On en déduit en passant à l'exponentielle que $\lambda(d)$ existe bien et vérifie $\lambda(d) > 0$. Il nous reste à établir la majoration de $\lambda(d)$. Cette majoration est en fait très grossière. Construisons un chemin auto-évitant de longueur $n \geq 1$ partant de l'origine. On dispose de $2d$ possibilités pour le placement de la première arête. Pour les arêtes suivantes, il suffit de remarquer qu'à chaque étape d'ajout d'arêtes, on ne peut pas prendre la direction de laquelle on vient : il y a donc au plus $2d - 1$ possibilités. On vient donc d'établir pour $n \geq 1$,

$$c_d(n) \leq 2d(2d - 1)^{n-1}.$$

On en déduit immédiatement le résultat voulu,

$$\lambda(d) \leq 2d - 1.$$

□

Théorème 1 (Broadbent - Hammersley, 1957). *Supposons $d \geq 2$. Il existe $p_c = p_c(d) \in]0, 1[$ tel que*

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si } p < p_c \\ 0 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

*Le point p_c est appelé **probabilité critique**.*

Remarque 3. *Une question naturelle, évoquée par la suite, consiste à s'intéresser à la monotonie de la suite $(p_c(d))_{d \geq 1}$. Il est assez facile de voir que cette suite est décroissante, ce résultat est montré par la suite, mais la monotonie stricte est un peu plus délicate à obtenir. On peut aussi s'intéresser au calcul des probabilités critiques. Actuellement deux valeurs de p_c sont connues : $p_c(1) = 1$ et $p_c(2) = \frac{1}{2}$. La première s'obtient immédiatement tandis que la seconde demande beaucoup plus de travail. Le calcul explicite des probabilités p_c est à ce jour encore un problème ouvert. On dispose néanmoins du résultat suivant qui décrit le comportement asymptotique de cette suite*

$$p_c(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2d} + \frac{1}{4d^2} + \frac{7}{16d^3} + O\left(\frac{1}{d^4}\right).$$

Lemme 1. *La suite $(p_c(d))_{d \geq 1}$ est décroissante.*

Preuve. Soit $d \geq 1$. On peut voir \mathbb{L}^d comme un sous-graphe de \mathbb{L}^{d+1} . Montrons que

$$p_c(d+1) \leq p_c(d).$$

Pour cela, il suffit de voir que si $p \in [0, 1]$ est tel que $\theta_{d+1}(p) = 0$, alors $\theta_d(p) = 0$. Or ceci est immédiat : s'il y a percolation dans un sous-graphe de \mathbb{L}^{d+1} , il y a en particulier percolation dans \mathbb{L}^d . Donc

$$\theta_d(p) > 0 \Rightarrow \theta_{d+1}(p) > 0,$$

ce qui donne la conclusion voulue. □

Preuve du théorème 1. On suppose $d \geq 2$. On définit $p_c = \sup\{p \in [0, 1], \theta(p) = 0\}$. Cette définition est bien licite par croissance de θ et puisque $\theta(0) = 0$.

★ Étape 1 : $p_c(d) > 0$.

Nous allons montrer que $\theta(p) = 0$ si p est suffisamment proche de 0. On introduit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$N(n) = |\{\text{chemins ouverts auto-évitants partant de l'origine de longueur } n\}|.$$

Un chemin auto-évitant de base l'origine et de longueur n est ouvert avec la probabilité p^n . Il vient alors

$$\mathbb{E}_p[N(n)] = p^n c_d(n).$$

En effet, si l'on note Γ_n l'ensemble des chemins auto-évitant de base l'origine et de longueur n , on obtient

$$N(n) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ ouvert}\}}$$

donc

$$\mathbb{E}_p[N(n)] = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \mathbb{E}_p[\mathbb{1}_{\{\gamma \text{ ouvert}\}}] = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} p^n = p^n c_d(n).$$

Si $0 \leftrightarrow \infty$, alors il y a des chemins ouverts de longueur arbitrairement grande partant de l'origine. Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$\theta(p) \leq \mathbb{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}_p(N(n) = k) = \mathbb{E}_p[N(n)] = p^n c_d(n).$$

Or, par la proposition 2,

$$c_d(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (\lambda(d) + o(1))^n.$$

En particulier, si $p < \frac{1}{\lambda(d)}$,

$$\mathbb{E}_p[N(n)] \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

et

$$\theta(p) = 0.$$

On a donc obtenu $p_c(d) > 0$ et même par la proposition 2,

$$p_c(d) \geq \frac{1}{\lambda(d)} \geq \frac{1}{2d-1}.$$

★ Étape 2 : $p_c(d) < 1$.

Compte tenu du lemme 1, il suffit d'établir que $p_c(2) < 1$. On se place donc dans le cas particulier $d = 2$. Nous allons établir que $\theta(p) > 0$ si p est suffisamment proche de 1. La preuve repose sur la notion de graphe dual. Le graphe dual de \mathbb{L}^2 est obtenu en traduisant les sommets de \mathbb{L}^2 via $x \mapsto x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On note $(\mathbb{L}^2)^*$ ce graphe. Une arête e^* du graphe dual est ouverte ou fermée selon qu'elle traverse respectivement une arête ouverte ou fermée dans \mathbb{L}^2 .

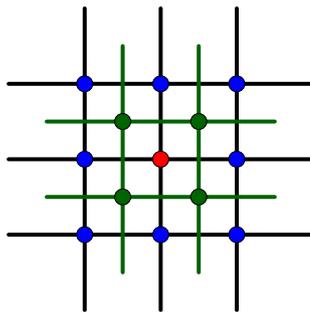


FIGURE 1.3 – Le graphe \mathbb{L}^2 (en noir) et son graphe dual $(\mathbb{L}^2)^*$ (en vert)

Supposons $|C(0)| < \infty$. Un résultat non trivial dû à Kesten⁴ (voir figure 1.4⁵) assure alors que $C(0)$ est entouré par un circuit dans $(\mathbb{L}^2)^*$. On procède de manière similaire à ce qui a été fait dans la première étape en comptant le nombre de tels circuits dans le dual. Notons $\rho(n)$ le nombre de circuits de longueur n dans le graphe dual contenant à l'intérieur l'origine. Observons que

$$\rho(n) \leq nc_d(n-1).$$

Soit γ un circuit du dual d'intérieur contenant 0. On note $M(n)$ le nombre de circuits fermés de ce type dans le graphe dual. On a alors,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ fermé}) &= \sum_{n \geq 1} (1-p)^n \rho(n) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} (1-p)^n nc_d(n-1) \\ &= (1-p) \sum_{n \geq 1} n ((1-p)\lambda(2) + o(1))^{n-1} \end{aligned}$$

et la quantité de droite est finie dès que $(1-p)\lambda(2) < 1$. De plus, on a

$$\sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ fermé}) \xrightarrow{p \rightarrow 1^-} 0.$$

On dispose donc de $\beta \in]0, 1[$ tel que

$$p > \beta \Rightarrow \sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ fermé}) \leq \frac{1}{2}.$$

Alors, si $p \in]\beta, 1[$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) &= \mathbb{P}_p(\forall n \geq 1, M(n) = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}_p(\exists n \geq 1, M(n) \geq 1) \\ &\geq 1 - \sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ fermé}) \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a donc établi $p_c(2) \leq \beta < 1$.

4. Harry Kesten, mathématicien américain (1931-).

5. Le cluster ouvert est représenté en trait plein et le circuit fermé du dual l'entourant est en vert.

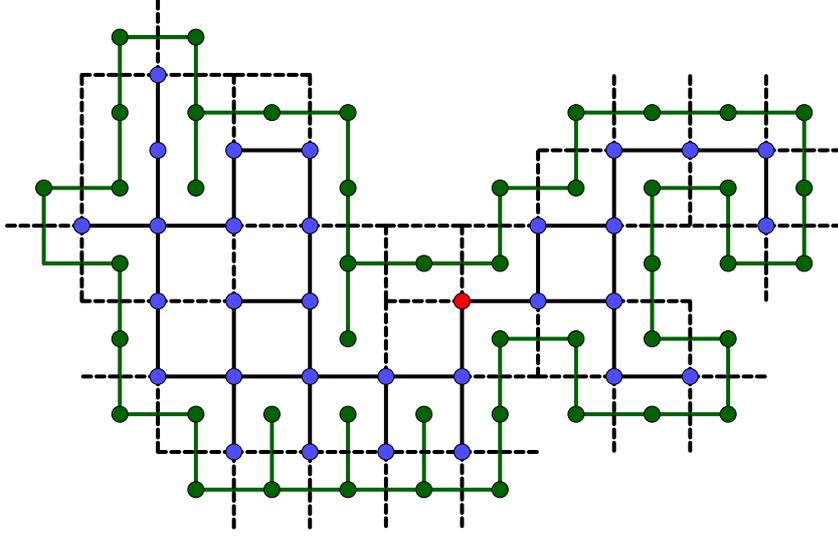


FIGURE 1.4 – Un cluster ouvert fini de l’origine, entouré par un circuit fermé dans le graphe dual

Corollaire 1. *On dispose des résultats suivants :*

(i)

$$\frac{1}{\lambda(2)} \leq p_c(2) \leq 1 - \frac{1}{\lambda(2)}.$$

(ii) Si $d \geq 3$,

$$\frac{1}{\lambda(d)} \leq p_c(d).$$

Preuve. Le point (ii) a été vu dans l’étape 1 de la preuve du théorème 1. On montre la majoration dans (i).

Soit $p > p_c(2)$. Si $m \geq 1$, on introduit

$$F_m = \{\text{il existe un circuit fermé du dual contenant } B(m) \text{ en son intérieur}\}$$

et

$$G_m = \{\text{les arêtes de } B(m) \text{ sont ouvertes}\}.$$

Observons déjà que ces deux événements sont indépendants car ils sont définis à partir d’ensembles d’arêtes disjoints. On reprend les notations de la preuve précédente. On a, si $(1-p)\lambda(2) < 1$,

$$\mathbb{P}_p(F_m) \leq \sum_{n \geq 4m} \mathbb{P}_p(M(n) \geq 1) \leq \sum_{n \geq 4m} (1-p)^n n c_d(n-1).$$

En particulier, si m est suffisamment grand,

$$\mathbb{P}_p(F_m) < \frac{1}{2}.$$

Observons maintenant le cas où G_m a lieu mais pas F_m . Si F_m n’a pas lieu, c’est que l’un des points du bord de $B(m)$ est connecté à l’infini. Si de plus G_m a lieu, alors ce point sur le bord est relié à l’origine et le cluster de l’origine est donc connecté à l’infini. Ainsi,

$$\theta(p) \geq \mathbb{P}_p(\overline{F_m} \cap G_m) = \mathbb{P}_p(\overline{F_m}) \mathbb{P}_p(G_m) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(G_m) > 0.$$

Il vient alors,

$$p > 1 - \frac{1}{\lambda(2)} \Rightarrow \theta(p) > 0.$$

On a donc le résultat voulu,

$$p_c(2) \leq 1 - \frac{1}{\lambda(2)}.$$

□

Théorème 2. *La probabilité $\psi(p)$ qu'il existe un cluster ouvert infini vérifie*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

Preuve. Il s'agit d'une application de la loi du tout ou rien de Kolmogorov. Notons

$$A = \{\text{il existe un cluster ouvert infini}\}.$$

Observons que A ne dépend pas de l'état d'une collection finie quelconque d'arêtes. Par conséquent, A est un évènement de la tribu de queue des variables aléatoires de Bernoulli associés aux arêtes de \mathbb{E}^d . La loi du tout ou rien assure alors que $\psi(p) \in \{0, 1\}$. Si $\theta(p) = 0$,

$$\psi(p) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(|C(x)| = \infty) = 0.$$

Si maintenant $\theta(p) > 0$, alors

$$\psi(p) \geq \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) > 0$$

et donc $\psi(p) = 1$.

□

Théorème 3. *L'application $p \mapsto \theta(p)$ est continue sur $[0, 1] \setminus \{p_c\}$.*

On commence par illustrer ce théorème par simulation numérique. Après avoir écrit un programme simulant un processus de percolation dans une boîte suffisamment grande (en dimension 3), on obtient la figure 1.5.

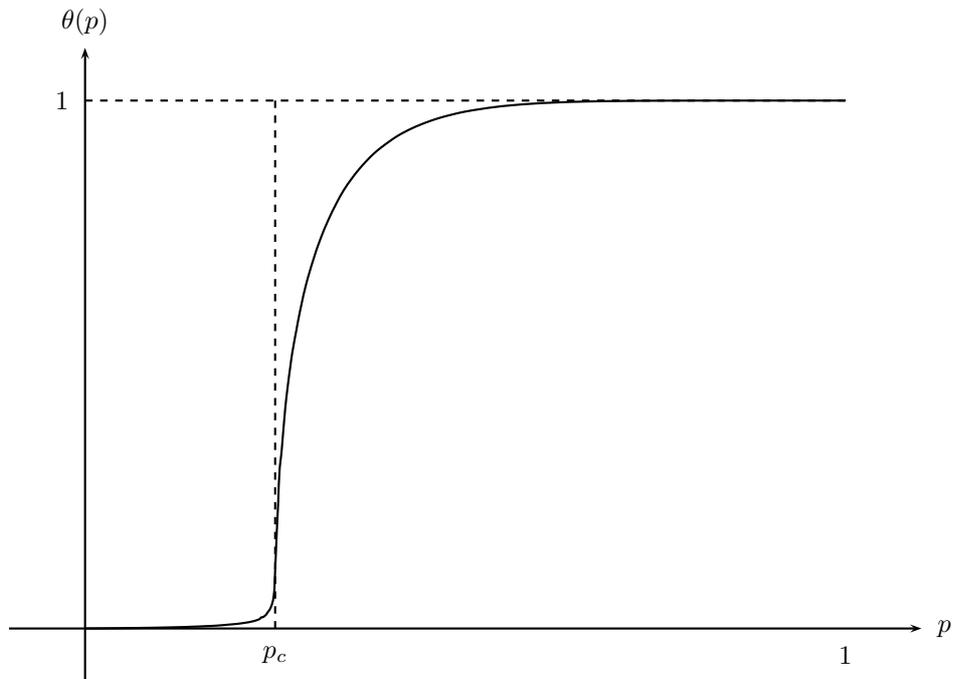


FIGURE 1.5 – Approximation de la fonction θ

La continuité en p_c est encore une question ouverte. Il a néanmoins été démontré que $\theta(p_c(d)) = 0$ pour $d = 2$ et $d \geq 11$ ⁶ et il est conjecturé que pour $d \in \{3, \dots, 10\}$, $\theta(p_c(d)) = 0$. La plus grande avancée vers le résultat a été l'obtention récente de cette conjecture dans le cas particulier d'un demi-espace de la forme $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}^+$. C'est l'objet des développements qui suivent. On démontre le théorème 3 grâce aux deux lemmes suivant. On suppose dans la suite $d \geq 2$.

Lemme 2. $p \mapsto \theta(p)$ est continue à droite sur l'intervalle $[0, 1]$.

Lemme 3 (Van Der Berg - Keane, 1984). $p \mapsto \theta(p)$ est continue à gauche sur l'intervalle $]p_c(d), 1]$.

Preuve du lemme 2. On commence par observer que

$$\theta(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B(n)). \quad (1.7)$$

En effet, ceci provient du fait suivant : il existe un chemin de longueur infini partant de l'origine si et seulement si il existe des chemins de longueur arbitrairement grande partant de l'origine. Cette remarque étant réalisée, on obtient 1.7 par continuité monotone.

L'application $p \mapsto \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B(n))$ est une fonction polynomiale en p donc continue, puisque l'évènement $\{0 \leftrightarrow \partial B(n)\}$ ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes. En effet, une manière d'observer ceci est d'écrire, en notant Γ_n l'ensemble des chemins liant l'origine à $\partial B(n)$,

$$\{0 \leftrightarrow \partial B(n)\} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_n} \{\gamma \text{ ouvert}\}$$

et de calculer cette probabilité en utilisant la formule du crible de Poincaré. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \geq \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B(n+1)).$$

Ainsi, θ est la limite (décroissante) d'une suite de fonctions continues, et donc θ est semi-continue supérieurement⁷. De plus, θ est croissante donc continue à droite.

Preuve du lemme 3. On utilise ici un résultat que nous démontrerons plus tard, l'unicité du cluster ouvert infini. Soit $(X(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$ une collection de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $0 \leq p \leq 1$, on définit

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(e) < p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit qu'une arête est *p-ouverte* si $\eta_p(e) = 1$ et *p-fermée* si $\eta_p(e) = 0$. On note C_p le p -cluster ouvert de \mathbb{L}^d contenant l'origine. Notons que si $q \leq p$, $C_q \subset C_p$. On a

$$\theta(p) = \mathbb{P}(|C_p| = \infty)$$

et

$$\lim_{q \nearrow p} \theta(q) = \lim_{q \nearrow p} \mathbb{P}(|C_q| = \infty) = \mathbb{P}(|C_q| = \infty, \text{ pour un } q < p),$$

puisque l'évènement $\{|C_q| = \infty\}$ est croissant en q . Compte tenu de la monotonie de θ , il s'agit de montrer que

$$\mathbb{P}(|C_p| = \infty, |C_q| < \infty \text{ pour tout } q < p) = 0 \quad \forall p > p_c. \quad (1.8)$$

Soit $p > p_c$. Supposons que $|C_p| = \infty$. Si $p_c < \alpha < p$, il existe presque sûrement un α -cluster ouvert infini I_α (conséquence directe de $\alpha > p_c$ et du théorème 2) et de plus I_α est presque sûrement un sous-graphe de C_p puisque sinon il existerait au moins deux p -cluster ouverts infinis. Il vient alors qu'il existe un chemin p -ouvert ℓ joignant l'origine à un sommet de I_α . Un tel chemin ℓ est de longueur finie et chaque arête e dans ℓ satisfait $X(e) < p$ de telle sorte que $\mu = \max\{X(e), e \in \ell\}$ satisfait $\mu < p$. Si β est tel que $\beta \geq \alpha$ et $\mu < \beta < p$, alors il existe un chemin β -ouvert joignant l'origine à un sommet de I_α . Donc $|C_\beta| = \infty$. On en déduit 1.8.

6. L'obtention du résultat dans le cas d'une dimension d vérifiant $11 \leq d < 19$ est très récente et utilise une méthode connue sous le nom de *lace expansion*.

7. Voir l'annexe pour une démonstration de ce résultat.

1.4 La percolation par site

La **percolation par lien** que nous venons d'étudier attache une grande importance aux arêtes. Cependant, il existe plusieurs manières de construire des modèles de percolation.

Le principal concurrent à la percolation par lien est la **percolation par site**. Nous allons présenter ici le cas de la dimension 2 qui est plus facile à visualiser. Nous utiliserons les définitions qui suivent lors de la démonstration de 3.2.2. Ce qui suit se généralise sans peine aux dimensions supérieures, pour plus de détails nous renvoyons à [Gri99].

Reprenons le réseau \mathbb{Z}^d précédemment introduit. Dans le modèle de percolation par lien, on choisit de bloquer les arêtes. La question naturelle est de se demander ce qu'il se passe lorsque l'on choisit plutôt de bloquer les sommets : c'est l'objectif du modèle de percolation par site. En conséquence, la dimension probabiliste du modèle de percolation ne porte cette fois-ci plus sur d'éventuelles arêtes mais sur les sommets. Ainsi, on choisit un modèle dans lequel les points du réseau \mathbb{Z}^d sont présents (ou ouverts) avec une probabilité p fixée et ce indépendamment les uns des autres. Formalisons un peu ces idées. L'univers choisi est ici $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. La mesure de probabilité choisie est également une mesure produit de Bernoulli de paramètre p choisie définie de manière analogue à 1.3. La principale différence entre les deux modèles réside dans la définition des clusters. On dit qu'il existe un **chemin ouvert** joignant $x, y \in \mathbb{Z}^d$ s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des points $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ de \mathbb{Z}^d tels que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\delta(x_i, x_{i+1}) = 1$ et tel que tous ces sommets soient ouverts. Un **chemin fermé** liant deux points de \mathbb{Z}^d est défini de manière analogue en remplaçant la distance δ par $\|\cdot\|$ (définie au 1.2). Dans un chemin fermé on s'autorise donc à lier des points situés sur une même diagonale du réseau. On définit alors le **cluster** d'un point $x \in \mathbb{Z}^d$ par

$$C^{\text{site}}(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d, \text{ il existe un chemin ouvert joignant } x \text{ et } y\}.$$

Tout comme précédemment, on peut définir la probabilité $\theta^{\text{site}}(p)$ que le cluster $C^{\text{site}}(0)$ soit infini, ainsi que la probabilité critique :

$$p_c^{\text{site}} = \sup\{p \in [0, 1], \theta^{\text{site}}(p) = 0\}.$$

Il semble assez naturel de se demander à quel point ce modèle diffère de celui que nous avons présenté précédemment. Le théorème suivant quantifie cette différence.

Théorème 4. *Les probabilités critiques de percolation sur \mathbb{Z}^d vérifient*

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c^{\text{lien}} \leq p_c^{\text{site}} \leq 1 - (1 - p_c^{\text{lien}})^{2d-1}.$$

En particulier, on voit que $p_c^{\text{site}} < 1$ si et seulement si $p_c^{\text{lien}} < 1$. Nous ne démontrerons pas ce résultat mais nous renvoyons à [GS98] pour plus d'informations.

Nous observons un résultat bien plus faible mais essentiel dans la démonstration de 3.2.2.

Théorème 5. *En dimension $d = 2$, on a :*

$$p_c^{\text{site}} < 1$$

Preuve. La méthode utilisée est essentiellement celle du corollaire 1. On introduit ici les événements

$$\tilde{F}_m = \{\text{il existe un circuit fermé extérieur à } B(m) \text{ contenant } B(m) \text{ en son intérieur}\}$$

et

$$G_m = \{\text{les sommets de } B(m) \text{ sont ouverts}\}.$$

Ici aussi, ces deux événements sont indépendants car sont définis à partir d'ensembles de sommets disjoints. La première différence avec le corollaire 1 est que le circuit fermé porte sur les sites usuels et non pas sur le dual du réseau \mathbb{Z}^2 .

Nous allons maintenant montrer que l'on a $\mathbb{P}_p(\tilde{F}_m) < \frac{1}{2}$ pour m assez grand. On pourra alors conclure comme dans le corollaire 1. On définit de manière analogue (en prenant cette fois-ci en compte la possibilité d'exploiter les diagonales dans la construction des chemins)

$$\tilde{M}(n) = |\{\text{chemins fermés contenant } B(n)\}|.$$

et

$$\tilde{c}_2(n) = |\{\text{chemins auto-évitants (sur les sites) de longueur } n\}|.$$

On a alors

$$\mathbb{P}_p(\tilde{F}_m) \leq \sum_{n \geq 4m} \mathbb{P}_p(\tilde{M}(n) \geq 1) \leq \sum_{n \geq 4m} (1-p)^n n \tilde{c}_2(n-1)$$

Observons enfin que $\tilde{c}_2(n) \leq 8 \cdot 7^{n-1}$. Donc pour p suffisamment proche de 1, la série précédente converge et on peut choisir m suffisamment grand tel que

$$\mathbb{P}_p(\tilde{F}_m) < \frac{1}{2}$$

La fin de la preuve est identique à celle du corollaire 1. □

1.5 Les grandes questions

L'objectif de cette section est de présenter certaines conjectures / grandes questions actuelles en percolation.

1.5.1 Comportement au point critique

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le comportement précis de θ en p_c n'est pas entièrement connu. Le résultat suivant a été obtenu récemment pour les dimensions $d \in \llbracket 11, +\infty \rrbracket \cup \{2\}$.

Conjecture 1. *Soit $d \geq 2$. Alors $\theta(p_c(d)) = 0$.*

On peut aussi s'intéresser à une version quantitative de ce résultat. Dans le cas où $\theta(p_c) = 0$ on peut s'intéresser à une estimation de la quantité $\mathbb{P}_{p_c}(|C(0)| \geq n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Conjecture 2. *On dispose de l'estimation suivante*

$$\mathbb{P}_{p_c(d)}(|C(0)| \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\delta(d)}}$$

où $\delta(d)$ est un réel strictement positif qui dépend uniquement de la dimension.

Remarque 4. *On conjecture aussi que $\delta(2) = \frac{5}{48}$ et $\delta(d) = \frac{1}{2}$ si $d > 6$.*

La connaissance de ces **exposants critiques** est cruciale dans la compréhension du comportement du modèle au niveau de la probabilité critique.

1.5.2 Phase $p > p_c$

Lorsque $p > p_c$, on a vu avec le théorème 2 qu'il existe presque sûrement un cluster ouvert infini. On peut s'intéresser au nombre de tels clusters ouverts, ce travail est réalisé au chapitre 4 où l'on démontre que ce cluster infini est presque sûrement unique. Dans le cas où $|C(0)| < \infty$, on peut s'intéresser à la vitesse de décroissance de la queue de probabilité de $|C(0)|$. On peut montrer qu'il existe des constantes $0 < \beta_2(p) \leq \beta_1(p) < \infty$ telles que pour tout $n \geq 1$,

$$\exp\left(-\beta_1(p)n^{\frac{d-1}{d}}\right) \leq \mathbb{P}_p(|C(0)| = n) \leq \exp\left(-\beta_2(p)n^{\frac{d-1}{d}}\right).$$

On dispose de même de la conjecture suivante.

Conjecture 3. *La limite suivante existe et est strictement positive*

$$\delta(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-n^{\frac{d-1}{d}} \log \mathbb{P}_p(|C(0)| = n)\right).$$

Remarque 5. *L'existence de cette limite a été obtenue en 1990 pour $d = 2$ par Alexander, Chayes et Chayes et en 1998 pour $d = 3$ par Cerf.*

1.5.3 Phase $p < p_c$

Lorsque $p < p_c$, le théorème 2 nous assure que presque sûrement tous les clusters ouverts sont finis. On peut s'intéresser à une estimation de $\mathbb{P}_p(|C(0)| = n)$ lorsque n tend vers l'infini. On dispose en fait de l'estimation suivante :

$$\mathbb{P}_p(|C(0)| = n) \approx e^{-n\alpha(p)}$$

où $\alpha(p) > 0$. Pour une démonstration de ce résultat, on renvoie au chapitre 6 de [Gri99].

Chapitre 2

Outils probabilistes

2.1 Évènements croissants

On travaille dans l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) introduit au chapitre précédent.

Définition 6. On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ est **croissant** si pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \leq \omega'$, on a

$$\mathbb{1}_A(\omega) \leq \mathbb{1}_A(\omega').$$

De manière similaire, on dit qu'un évènement A est **décroissant** si \bar{A} est croissant.

Plus généralement, une variable aléatoire réelle X sur (Ω, \mathcal{F}) est dite **croissante** si pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \leq \omega'$,

$$X(\omega) \leq X(\omega')$$

et X est dite **décroissante** si $-X$ est croissante.

Exemple. L'évènement $\{|C(0)| = \infty\}$ est croissant.

Théorème 6. Soit X une variable aléatoire réelle croissante sur (Ω, \mathcal{F}) . Alors si $p_1 \leq p_2$,

$$\mathbb{E}_{p_1}[X] \leq \mathbb{E}_{p_2}[X] \tag{2.1}$$

lorsque ces quantités existent. Si maintenant $A \in \mathcal{F}$ est un évènement croissant, alors pour $p_1 \leq p_2$,

$$\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A). \tag{2.2}$$

Preuve. Considérons comme dans le lemme 3 des variables aléatoires indépendantes $(X(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$ sur (Ω, \mathcal{F}) suivant une même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $0 \leq p \leq 1$, on définit encore

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(e) < p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $p_1 \leq p_2$, $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$, et en particulier

$$Y(\eta_{p_1}) \leq Y(\eta_{p_2})$$

pour toute variable aléatoire croissante Y sur (Ω, \mathcal{F}) . En passant à l'espérance dans l'inégalité précédente on obtient le résultat voulu. La seconde partie du théorème s'obtient en considérant des fonctions indicatrices d'évènements croissants. \square

Corollaire 2. L'application $p \mapsto \theta(p)$ est croissante.

Preuve. Il suffit d'appliquer 2.2 à l'évènement croissant $\{|C(0)| = \infty\}$. \square

2.2 L'inégalité FKG

Toutes les variables aléatoires considérées dans cette section sont réelles et définies sur l'espace (Ω, \mathcal{F}) . On a vu que les événements croissants ont plus de chance de se produire quand p augmente. Ainsi, deux variables croissantes semblent être positivement corrélées, dans le sens où une augmentation de l'une provoque souvent une augmentation de l'autre. Ces inégalités de corrélation ont été découvertes par Harris en 1960, et étendues par Fortuin, Kasteleyn et Ginibre en 1971.

Théorème 7. (Inégalité FKG)

(a) Soient X et Y deux variables aléatoires croissantes. Soit $p \in [0, 1]$. On suppose que $\mathbb{E}_p[X^2], \mathbb{E}_p[Y^2] < \infty$, alors

$$\mathbb{E}_p[XY] \geq \mathbb{E}_p[X]\mathbb{E}_p[Y]. \quad (2.3)$$

(b) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ deux événements croissants. Alors

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B). \quad (2.4)$$

Remarque 6. On dispose d'inégalités similaires pour le cas de variables aléatoires décroissantes. Par exemple, en supposant que X et Y sont deux variables aléatoires \mathcal{L}^2 décroissantes alors $-X$ et $-Y$ sont croissantes et 2.3 donne

$$\mathbb{E}_p[XY] \geq \mathbb{E}_p[X]\mathbb{E}_p[Y].$$

Si maintenant X est croissante et Y décroissante, alors en appliquant 2.3 à X et $-Y$, on obtient

$$\mathbb{E}_p[XY] \leq \mathbb{E}_p[X]\mathbb{E}_p[Y].$$

On commence par donner deux applications simples de l'inégalité **FKG**.

Corollaire 3. Soient Π_1, \dots, Π_d des familles de chemins de \mathbb{L}^d . Soit, pour $1 \leq i \leq d$, A_i l'évènement « il existe un chemin ouvert dans Π_i ». Alors

$$\mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=1}^d A_i \right) \geq \prod_{i=1}^d \mathbb{P}_p(A_i).$$

Preuve. On remarque que les A_i sont des événements croissants. De plus une intersection d'évènements croissants est un événement croissant. On obtient en appliquant 2.4 que

$$\mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=1}^d A_i \right) \geq \mathbb{P}_p(A_1) \mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=2}^d A_i \right).$$

On obtient alors le résultat voulu par récurrence. □

Corollaire 4. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe infini et localement fini¹ avec un nombre dénombrable d'arêtes. On peut définir un processus de percolation sur G comme pour \mathbb{L}^d . Si $x \in V$ on note $\theta(p, x)$ la probabilité que le cluster contenant x soit infini. On peut définir comme précédemment une probabilité critique associée à x notée $p_c(x)$. Alors pour tout $x, y \in V$,

$$p_c(x) = p_c(y).$$

Preuve. Soient $x, y \in V$. On écrit grâce à l'inégalité **FKG**

$$\theta(p, x) \geq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\}) \geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)\theta(p, y).$$

En particulier, comme $\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) > 0$, ceci assure que $p_c(y) \geq p_c(x)$. Le travail précédent est symétrique en x et y donc on dispose de l'inégalité inverse et

$$p_c(x) = p_c(y)$$

ce qui est bien le résultat recherché. □

1. Ce qui signifie qu'un sommet du graphe n'a qu'un nombre fini de voisins.

Preuve du théorème 21. On ne démontre que (a) ; (b) en est un corollaire direct en choisissant des fonctions indicatrices des évènements croissants considérés. On commence par démontrer le résultat pour des variables aléatoires croissantes X et Y ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes.

★ Étape 1 : X et Y ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes.

On suppose donc que X et Y sont deux variables aléatoires croissantes ne dépendant que des arêtes e_1, \dots, e_n . On raisonne par récurrence forte sur $n \geq 1$. Supposons donc $n = 1$. X et Y sont des fonctions de l'état $\omega(e_1)$ de e_1 prenant les valeurs 0 et 1 avec probabilités respectives $1 - p$ et p . Observons que

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0$$

pour toute paire $(\omega_1, \omega_2) \in \{0, 1\}^2$; ceci est clair si $\omega_1 = \omega_2$ et découle de la croissance de X et Y sinon. On a alors

$$\begin{aligned} 2(\mathbb{E}_p[XY] - \mathbb{E}_p[X]\mathbb{E}_p[Y]) &= 2 \sum_{\omega \in \{0,1\}} X(\omega)Y(\omega) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega) \\ &\quad - 2 \left(\sum_{\omega \in \{0,1\}} X(\omega) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega) \right) \left(\sum_{\omega \in \{0,1\}} Y(\omega) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega) \right) \\ &= \sum_{\omega_1 \in \{0,1\}} X(\omega_1)Y(\omega_1) \mathbb{P}_p(\omega_1(e_1) = \omega_1) \\ &\quad + \sum_{\omega_2 \in \{0,1\}} X(\omega_2)Y(\omega_2) \mathbb{P}_p(\omega_2(e_1) = \omega_2) \\ &\quad - \left(\sum_{\omega_1 \in \{0,1\}} X(\omega_1) \mathbb{P}_p(\omega_1(e_1) = \omega_1) \right) \left(\sum_{\omega_2 \in \{0,1\}} Y(\omega_2) \mathbb{P}_p(\omega_2(e_1) = \omega_2) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{\omega_2 \in \{0,1\}} X(\omega_2) \mathbb{P}_p(\omega_2(e_1) = \omega_2) \right) \left(\sum_{\omega_1 \in \{0,1\}} Y(\omega_1) \mathbb{P}_p(\omega_1(e_1) = \omega_1) \right) \\ &= \sum_{\omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}} (X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \\ &\quad \times \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1) \mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat voulu.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat acquis pour tout entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$. On suppose aussi que X et Y sont deux variables aléatoires croissantes ne dépendant que des arêtes e_1, \dots, e_n . Ce sont en particulier des fonctions croissantes des états $\omega(e_1), \dots, \omega(e_n)$ des arêtes e_1, \dots, e_n . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[XY] &= \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p[XY \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]) \\ &\geq \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})] \mathbb{E}_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]) \end{aligned}$$

puisque si l'on fixe $\omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})$, X et Y sont des fonctions croissantes de la variable $\omega(e_n)$. Maintenant, observons que $\mathbb{E}_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]$ et $\mathbb{E}_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]$ sont des fonctions croissantes de l'état de $n-1$ arêtes. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$\mathbb{E}_p[XY] \geq \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]) \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]) = \mathbb{E}_p[X] \mathbb{E}_p[Y].$$

★ Étape 2 : Cas général.

On considère à présent X et Y deux variables aléatoires \mathcal{L}^2 . Soit $(e_i)_{i \geq 1}$ une numérotation des éléments de \mathbb{E}^d . Définissons pour $n \geq 1$

$$X_n = \mathbb{E}_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)], \quad Y_n = \mathbb{E}_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)].$$

X_n et Y_n sont des fonctions croissantes de l'état de e_1, \dots, e_n . On peut leur appliquer les résultats précédents et obtenir

$$\mathbb{E}_p[X_n Y_n] \geq \mathbb{E}_p[X_n] \mathbb{E}_p[Y_n]. \quad (2.5)$$

Le théorème de convergence des martingales assure que lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a \mathbb{P}_p -presque partout et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{P}_p)$

$$X_n \rightarrow X, \quad Y_n \rightarrow Y.$$

De plus par inégalité triangulaire et inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[|X_n Y_n - XY|] &\leq \mathbb{E}_p(|(X_n - X)Y_n| + |(Y_n - Y)X|) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_p[(X_n - X)^2] \mathbb{E}_p[Y_n^2]} + \sqrt{\mathbb{E}_p[(Y_n - Y)^2] \mathbb{E}_p[X^2]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Il vient alors que

$$\mathbb{E}_p[X_n Y_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_p[XY].$$

En passant à la limite dans 2.5, on obtient bien l'inégalité voulue.

Chapitre 3

Percolation sur le demi-espace

3.1 Le résultat

On commence par définir un modèle de percolation sur un demi-espace. Soit $d \geq 2$. On note $\mathbb{H} = \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}^+$ le demi-espace. On note alors

$$\theta_{\mathbb{H}}(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H})$$

la probabilité de percolation associée, et

$$p_c(\mathbb{H}) = \sup\{p \in [0, 1], \theta_{\mathbb{H}}(p) = 0\}.$$

Il est possible de démontrer que $p_c(\mathbb{H}) = p_c$; ce résultat, non trivial, n'est pas démontré ici. On renvoie le lecteur à [Gri99] pour plus d'informations à ce sujet.

Barsky, Grimmett et Newman ont démontré en 1991 le résultat suivant, qui se rapproche le plus d'une démonstration de la continuité de $p \mapsto \theta(p)$.

Théorème 8. *Soit $d \geq 2$. Alors $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) = 0$.*

On mentionne un corollaire immédiat de ce résultat, en lien avec la fameuse conjecture $\theta(p_c) = 0$.

Corollaire 5. *Soit $d \geq 3$. Supposons $\theta(p_c) > 0$. Alors un cluster ouvert infini dans \mathbb{Z}^d ne peut être inclus dans un demi-espace.*

Remarque 7. *Ainsi, le cluster infini de l'origine prend la forme d'une spirale en dimension 3. L'obtention de ce résultat est essentielle dans la perspective de comprendre le comportement du modèle au niveau de la probabilité critique.*

La preuve de ce résultat repose sur les deux lemmes compliqués suivant dont la démonstration est donnée dans la section suivante. On commence par introduire certaines notations et définitions essentielles.

La construction du modèle sur \mathbb{H} diffère de celle sur \mathbb{Z}^d à cause d'un manque de symétrie. Par conséquent on ne travaillera pas avec des boîtes mais plutôt avec des briques définies ci-après. Nous démontrons le résultat dans le cas particulier $d = 3$. La preuve est plus simple dans le cas $d = 2$ et un argument similaire (mais moins visuel) permet d'obtenir le résultat pour $d \geq 4$.

Soient L, H deux entiers positifs, on définit la **brique** $B(L, H)$ par

$$B(L, H) = [-L, L]^2 \times [0, H].$$

Nous dirons que $B(L, H)$ est de **longueur** $2L$ et de **hauteur** H . Sur cette brique, on peut définir une face inférieure U , une face supérieure T et une face latérale S que l'on définit ainsi

$$U = U(L, H) = [-L, L]^2 \times \{0\}$$

$$T = T(L, H) = [-L, L]^2 \times \{H\}$$

$$S = S(L, H) = \{x \in B(L, H), |x_i| = L \text{ pour un } i \in \{1, 2\}\}.$$

La face supérieure peut être subdivisée en quatre « sous-faces » semblables

$$T_1 = [0, L]^2 \times \{H\}, \quad T_2 = [0, L] \times [-L, 0] \times \{H\}$$

$$T_3 = [-L, 0]^2 \times \{H\}, \quad T_4 = [-L, 0] \times [0, L] \times \{H\}.$$

De manière analogue, on peut subdiviser les faces latérales S en quatre puis huit sous-faces S_i . Chacune des faces S_i étant de la forme $\{L\} \times [0, L] \times [0, H]$. Cette subdivision est représentée dans la figure 3.1.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit des **carrés** en posant pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

$$b_k(m) = [-m, m]^{k-1} \times \{0\} \times [-m, m]^{3-k}.$$

On définit de même des carrés en considérant les translatés $x + b_k(m)$ pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $x \in \mathbb{Z}^3$. Un carré $x + b_k(m)$ est appelé une **graine** si toutes les arêtes joignant deux sommets du carré sont ouvertes. À tout $x \in S \cup T$ on associe le carré $b(x) = b(x, m, L, H)$ de centre x que l'on définit comme suit. Si $x \in T$, on définit $b(x) = x + b_3(m)$. Si $x \in S \setminus T$, et si $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ est tel que $x \in S_i$, on choisit un entier $k(x) \in \{1, 2\}$ tel que $b(x) = x + b_{k(x)}(m)$ soit tangent à S_i . Si x appartient à plusieurs S_i , on choisit un carré comme précédemment selon la règle (arbitraire) suivante : $b(x)$ est tangent à S_j où $j = \min\{i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket, x \in S_i\}$. Enfin, nous notons $b(0) = b_3(m)$ le carré de centre l'origine tangent à la face inférieure.

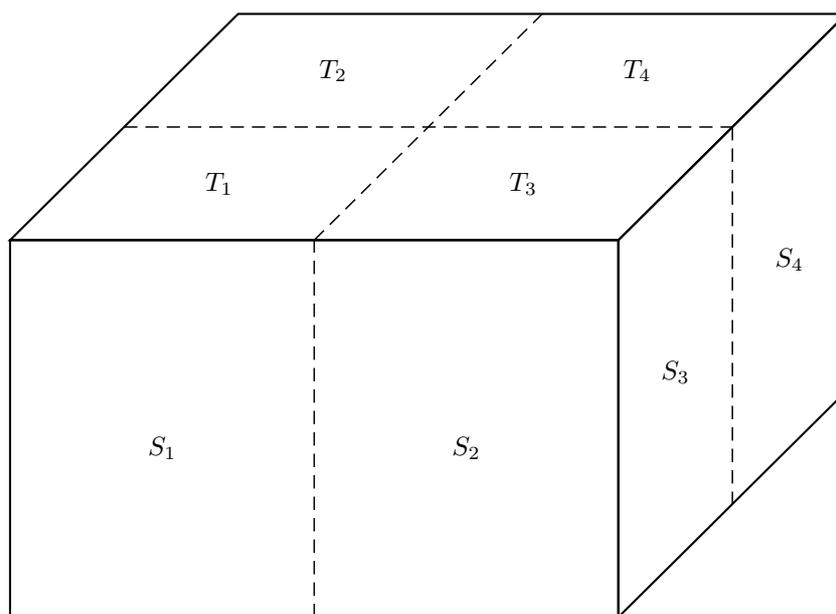


FIGURE 3.1 – Forme d'une brique

Idée générale de la preuve. L'objectif est de trouver un évènement F dépendant d'un nombre fini d'arêtes et vérifiant la propriété suivante : sous une hypothèse précise¹ (ici ce sera $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$), si cet évènement arrive avec une probabilité suffisamment élevée, alors pour la probabilité p_0 à laquelle nous travaillons, nous avons $\theta_{\mathbb{H}}(p_0) > 0$. Si jamais l'on parvient à construire un tel évènement, la continuité de $p \mapsto \mathbb{P}_p(F)$ nous permettrait de conclure que sur un voisinage de p_0 on doit avoir $\theta_{\mathbb{H}} > 0$. En appliquant ceci en $p = p_c$ on obtiendrait, en raisonnant par l'absurde, le résultat voulu. C'est cette méthode que nous cherchons à mettre en œuvre dans les lemmes ci-dessous. L'évènement F dont nous parlons ici est construit dans la définition suivante.

1. Cette hypothèse permet d'assurer que l'évènement F a lieu avec une forte probabilité.

Définition 7. Supposons L, H, m entiers positifs satisfaisant $L \geq m$ et $H \geq 2m$. On dit que la brique $B(L, H)$ est **admissible** si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 8 \rrbracket \times \llbracket 1, 4 \rrbracket$, il existe $(x_i, y_j) \in S_i \times T_j$ tel que $b(x_i)$ et $b(y_j)$ soient des graines ;
- (b) pour tout $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$, il existe un chemin ouvert dans $B(L, H)$ joignant $b(x_i)$ à $b(0)$ sans utiliser d'arêtes dans la face inférieure U ;
- (c) pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, il existe un chemin ouvert dans $B(L, H)$ joignant $b(y_j)$ à $b(0)$ sans utiliser d'arêtes dans la face inférieure U .

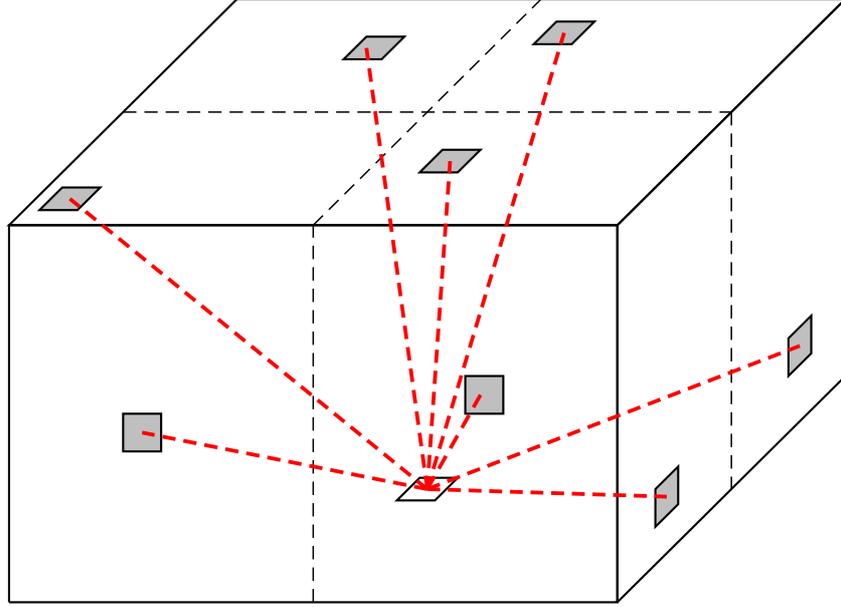


FIGURE 3.2 – Une brique admissible

Nous pouvons à présent énoncer les lemmes utiles dans la démonstration du théorème 8. Le lemme **A** est vrai pour p tel que $\theta_{\mathbb{H}}(p) > 0$, néanmoins supposer en plus que $p = p_c$ permet de simplifier légèrement la preuve.

Lemme A. On suppose que $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$. Soit $\eta > 0$. Alors il existe des entiers m, L et H tels que $m \geq 1, L \geq m, H \geq 2m$ et

$$\mathbb{P}_{p_c}(B(L, H) \text{ est admissible}) > 1 - \eta.$$

Lemme B. Il existe $\nu > 0$ tel que la proposition suivante soit vraie. Soit $p \in [0, 1]$. Supposons que m, L et H sont des entiers positifs satisfaisant $m \geq 1, L \geq m, H \geq 2m$ et

$$\mathbb{P}_p(B(L, H) \text{ est admissible}) > 1 - \nu, \tag{3.1}$$

alors $\theta_{\mathbb{H}}(p) > 0$.

Preuve du théorème 8. Supposons par l'absurde $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) = 0$. Soit $\nu > 0$ donné par le lemme **B**. Par le lemme **A**, il existe des entiers positifs m, L et H satisfaisant $m \geq 1, L \geq m, H \geq 2m$ et tels que 3.1 soient réalisées avec $p = p_c$. L'évènement $\{B(L, H) \text{ est admissible}\}$ ne dépend que de l'état d'un nombre fini d'arêtes et par conséquent l'application $p \mapsto \mathbb{P}_p(B(L, H) \text{ est admissible})$ est continue. Il existe donc $p' < p_c$ tel que

$$\mathbb{P}_{p'}(B(L, H) \text{ est admissible}) > 1 - \nu.$$

Alors le lemme **B** assure que $\theta_{\mathbb{H}}(p') > 0$ ce qui est absurde par définition de p_c . Donc $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) = 0$.

Remarque 8. L'idée de preuve utilisée ici est celle que les mathématiciens ont cherché à appliquer pour démontrer la conjecture $\theta(p) = 0$ dans le cas général. Seulement dans le cas du demi-espace, la géométrie particulière du problème (qui est absolument essentielle dans le lemme **A**), facilite grandement les conclusions. Dans le cas d'un modèle de percolation sur tout l'espace, les mathématiciens se heurtent à une difficulté supplémentaire. Il est possible sous l'hypothèse que $p_0 > p_c$ de trouver un évènement dépendant d'un nombre fini d'arêtes et qui lorsqu'il arrive avec une probabilité suffisamment élevée implique $\theta(p) > 0$ sur un voisinage de p_0 ; cependant il faudrait plutôt réussir à obtenir ce genre de résultat en partant de l'hypothèse (plus faible) $\theta(p_0) > 0$.

3.2 Démonstration des lemmes

3.2.1 Démonstration du lemme A

Si $V \subset \mathbb{Z}^3$ et si $x, y \in V$, on note « $x \leftrightarrow y$ dans V^* » s'il existe un chemin ouvert dans V joignant x et y et n'utilisant aucune arête sur la frontière de V . On note de façon similaire « $x \leftrightarrow \infty$ dans V^* » s'il existe dans V un chemin infini partant de x et n'utilisant aucune arête sur la frontière de V .

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{3}[$ que l'on fixera plus tard en fonction de η . Supposons donc que $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$. Notons \mathbb{L} le plan $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$. L'évènement $J = \{\mathbb{L} \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*\}$ est invariant par toute transformation de la forme $x \mapsto x + u$ avec $u \in \mathbb{L}$. On peut conclure que $\mathbb{P}_p(J) \in \{0, 1\}$ en utilisant une version particulière de la loi du tout ou rien de Kolmogorov, on renvoie le lecteur à l'annexe **D** pour une démonstration de ceci. Dans notre cas, on conclut de manière directe à l'aide des deux lemmes suivants.

Notons \mathbb{L} le plan $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$, et \mathbb{L}^+ le quart de plan $\mathbb{N}^2 \times \{0\}$.

Lemme 4. *Supposons que $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$. Alors on a :*

$$\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) = 1$$

Preuve. On conditionne selon la taille du cluster $C(0)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) &= \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty, 0 \leftrightarrow \infty) + \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty, 0 \not\leftrightarrow \infty) \\ &= \mathbb{P}_{p_c}(0 \leftrightarrow \infty) + \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty, |C(0)| < \infty) \\ &= \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty, |C(0)| = m) \\ &\geq \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ + (m+1, m+1, 0) \leftrightarrow \infty, |C(0)| = m). \end{aligned}$$

Mais pour tout entier $m \geq 1$, les évènements $\mathbb{L}^+ + (m+1, m+1, 0) \leftrightarrow \infty$ et $|C(0)| = m$ portent sur des ensembles disjoints d'arêtes. On en déduit qu'ils sont indépendants. On obtient alors :

$$\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) \geq \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ + (m+1, m+1, 0) \leftrightarrow \infty) \mathbb{P}_{p_c}(|C(0)| = m),$$

et par invariance par translation de l'évènement $\{\mathbb{L}^+ + (m+1, m+1, 0) \leftrightarrow \infty\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) &\geq \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_{p_c}(|C(0)| = m) \\ &= \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) \mathbb{P}_{p_c}(0 \not\leftrightarrow \infty) \\ &= \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) (1 - \theta_{\mathbb{H}}(p_c)). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) \geq \theta_{\mathbb{H}}(p_c) + \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) (1 - \theta_{\mathbb{H}}(p_c))$. On en déduit que

$$\theta_{\mathbb{H}}(p_c) \mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) \geq \theta_{\mathbb{H}}(p_c).$$

Mais $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$, donc on peut simplifier et on obtient bien $\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L}^+ \leftrightarrow \infty) = 1$.

□

Lemme 5. *Supposons que $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$. Alors on a :*

$$\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L} \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) = 1$$

Preuve. On a $\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L} + (0, 0, 1) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H} + (0, 0, 1)) = 1$ en appliquant la loi du tout ou rien de Kolmogorov. En fait, presque sûrement, il existe une infinité de points $(x_m, y_m, 1)$ tels que $(x_m, y_m, 1) \leftrightarrow \infty$ dans $\mathbb{H} + (0, 0, 1)$. Sinon, l'ensemble des points de $\mathbb{L} + (0, 0, 1)$ reliés à l'infini dans $\mathbb{H} + (0, 0, 1)$ serait borné et donc il existerait un quart de plan qui n'en contiendrait aucun. Comme le nombre de quarts de plan de $\mathbb{H} + (0, 0, 1)$ est dénombrable, on obtient par σ -sous-additivité :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{p_c}(\text{Le nombre de points de } \mathbb{L} + (0, 0, 1) \text{ reliés à l'infini dans } \mathbb{H} + (0, 0, 1) \text{ est fini}) \\ & \leq \mathbb{P}_{p_c} \left(\begin{array}{c} \text{Il existe un quart de plan de } \mathbb{L} + (0, 0, 1) \text{ qui ne contient} \\ \text{aucun point relié à l'infini dans } \mathbb{H} + (0, 0, 1) \end{array} \right) \\ & \leq \sum_{Q \text{ quart de plan}} \mathbb{P}_{p_c}(Q \text{ n'est pas relié à l'infini dans } \mathbb{H} + (0, 0, 1)) \\ & = 0. \end{aligned}$$

On a enfin :

$$\mathbb{P}_{p_c}(\mathbb{L} \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) \geq \mathbb{P}_{p_c}(\exists m \in \mathbb{N}, (x_m, y_m, 0) \leftrightarrow (x_m, y_m, 1)) = 1$$

ce qui fournit donc $\mathbb{P}_{p_c}(J) = 1$. □

Ainsi, par continuité monotone,

$$\mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1. \quad (3.2)$$

On choisit alors $m = m(\varepsilon)$ de telle façon que

$$\mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) > 1 - \varepsilon^2. \quad (3.3)$$

On admet que si S_h est la tranche $\mathbb{Z}^2 \times [0, h]$, alors $p_c(S_h) > p_c$ (voir [Gri99]). Il vient alors que pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } S_h) = 0. \quad (3.4)$$

Soit M un entier positif. Posons $N_1 = \lceil M(6m + 1)^{-3} \rceil$. On a choisi un tel entier N_1 de sorte que, pour tout choix de M sommets $x_i \in S$ et M sommets $y_j \in T$ (ces sommets étant deux à deux distincts), on puisse trouver au moins N_1 sommets $x_i \in S$ et N_1 sommets $y_j \in T$ tels que les $b(x_i)$, $b(y_j)$ soient disjoints. On choisit ensuite $M = M(\varepsilon)$ suffisamment grand de façon à avoir

$$(1 - \mathbb{P}_{p_c}(b(0) \text{ est une graine}))^{N_1} < \varepsilon \quad (3.5)$$

et

$$\mathbb{P}(Z \leq M) < \varepsilon \quad (3.6)$$

où l'on a pris pour Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $(N_2 = \lceil \frac{2M}{p_c} \rceil, p_c)$. Observons qu'un tel choix de M est bien possible car Z est concentrée autour de $2M$ et $\mathbb{P}_{p_c}(b(0) \text{ est une graine}) > 0$. On justifie l'obtention de 3.6 par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On a $\mathbb{E}[Z] = N_2 p_c \geq 2M$ de sorte que

$$\mathbb{P}(Z \leq M) \leq \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq M) \leq \frac{N_2 p_c (1 - p_c)}{M^2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0.$$

Posons

$$U(h) = |\{x, x_3 = h \text{ et } b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } S_h^*\}|.$$

Lemme 6. *On peut écrire*

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(h) < 2N_2) \leq a_h + \varepsilon^2 \quad (3.7)$$

avec une suite $(a_h)_{h \geq 0}$ de limite nulle.

Preuve. En effet, on écrit

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(h) < 2N_2) \leq \mathbb{P}_{p_c}(U(h) < 2N_2, b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) + \mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*).$$

Or par 3.3, on a

$$\mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) \leq \varepsilon^2$$

et par 3.4 on dispose aussi de

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(h) < 2N_2, b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*) \leq \mathbb{P}_{p_c}(1 \leq U(h) < 2N_2).$$

Il nous reste donc à majorer cette dernière probabilité. Nous observons alors que $U(h+1) = 0$ si toutes les arêtes partant des points de $\{x, x_3 = h \text{ et } b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } S_h^*\}$ sont fermées. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c}(1 \leq U(h) < 2N_2, \text{ les arêtes de } \{x, x_3 = h \text{ et } b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } S_h^*\} \text{ sont fermées}) \\ \leq \mathbb{P}_{p_c}(U(h+1) = 0, U(h) \geq 1) \end{aligned}$$

et par indépendance, comme \mathbb{P}_{p_c} (les arêtes de $\{x, x_3 = h \text{ et } b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } S_h^*\}$ sont fermées) $\geq (1 - p_c)^{5(2N_2)}$, on obtient

$$\mathbb{P}_{p_c}(1 \leq U(h) < 2N_2) \leq (1 - p_c)^{-5(2N_2)} \mathbb{P}_{p_c}(U(h+1) = 0, U(h) \geq 1).$$

Il reste alors à remarquer que

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(h+1) = 0, U(h) \geq 1) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$$

car par 3.2

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{p_c}(U(h) \geq 1) = \mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H}^*).$$

□

On choisit alors H_0 suffisamment grand de sorte que pour tout $h \geq H_0$, $a_h \leq \varepsilon^2$. On en déduit donc pour $h \geq H_0$,

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(h) \geq 2N_2) \geq 1 - 2\varepsilon^2 > 1 - \varepsilon. \quad (3.8)$$

Maintenant, pour $h \geq H_0$, définissons

$$U(\ell, h) = |\{x \in T(\ell, h), b(0) \leftrightarrow x \in B(\ell, h)^*\}|.$$

Comme $U(\ell, h) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} U(h)$, il existe un entier $L_0 = L_0(h)$ tel que

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, h) \geq N_2) > 1 - 2\varepsilon \quad \forall \ell \geq L_0. \quad (3.9)$$

Nous essayons à présent d'affiner la hauteur h de telle manière que $U(\ell, h)$ soit « juste assez grand », ceci est indispensable pour conclure plus tard qu'il existe (avec grande probabilité) de nombreux points dans $S(\ell, h)$ et $T(\ell, h)$ connectés à $b(0)$ dans $B(\ell, h)^*$.

Supposons $\ell \geq L_0(H_0)$. Posons $\alpha(h) = \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, h) \geq N_2)$. On a donc par ce qui précède,

$$\alpha(H_0) > 1 - 2\varepsilon.$$

De plus,

$$\alpha(h) \leq \mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow T(\ell, h) \text{ dans } B(\ell, h)) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } B(\ell, \infty)).$$

Or comme $B(\ell, \infty)$ est un cylindre, donc topologiquement unidimensionnel,

$$\mathbb{P}_{p_c}(b(0) \leftrightarrow \infty \text{ dans } B(\ell, \infty)) = 0.$$

Il existe donc un entier $H_1 = H_1(\ell) > H_0$ tel que

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1 - 1) \geq N_2) > 1 - 2\varepsilon \geq \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1) \geq N_2). \quad (3.10)$$

De plus comme $U(\ell, h) \nearrow U(h)$ quand $\ell \rightarrow +\infty$, on obtient que $(H_1(\ell))_{\ell \geq L_0(H_0)}$ est une suite croissante de ℓ . Posons alors

$$H_1(\infty) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} H_1(\ell).$$

Si jamais $H_1(\infty) < \infty$, par 3.10 et puisque $U((\ell, H_1(\ell))) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} U(H_1(\infty))$, on obtient

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(H_1(\infty)) \geq N_2) \leq 1 - 2\varepsilon,$$

ce qui est absurde par 3.8. Ainsi,

$$H_1(\infty) = +\infty.$$

Introduisons maintenant l'analogie de $U(\ell, h)$ pour le bord de la boîte que nous sommes en train de construire :

$$V(\ell, h) = |\{x \in S(\ell, h), b(0) \leftrightarrow x \in B(\ell, h)^*\}|.$$

Notre objectif est à présent de montrer que l'on peut choisir le couple (ℓ, h) de telle manière qu'avec grande probabilité $U(\ell, h)$ et $V(\ell, h)$ soient grands.

Observons déjà que si $\ell \geq L_0(H_0)$, par 3.10,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) \geq M) &\geq \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell) - 1) \geq N_2) \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) \geq M \mid U(\ell, H_1(\ell) - 1) \geq N_2) \\ &> (1 - 2\varepsilon) \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) \geq M \mid U(\ell, H_1(\ell) - 1) \geq N_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considérons à présent N_2 points z dans $T(\ell, H_1(\ell) - 1)$. D'après 3.6, la probabilité qu'au moins M arêtes $\langle z, z + (0, 0, 1) \rangle$ soient ouvertes est au moins égale à $1 - \varepsilon$. On note aussi que l'évènement précédent est indépendant de l'état des arêtes dans $B(\ell, H_1(\ell) - 1)$. Alors, la probabilité conditionnelle apparaissant dans 3.11 vaut au moins $1 - \varepsilon$, et donc

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) \geq M) > (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) \geq (1 - 3\varepsilon) \quad \forall \ell \geq L_0(H_0). \quad (3.12)$$

On procède à présent de manière similaire pour $V(\ell, H_1(\ell))$.

On rappelle que $H_1(\infty) = +\infty$ ce qui garantit que $B(\ell, H_1(\ell)) \nearrow \mathbb{H}$ lorsque $\ell \rightarrow +\infty$. En procédant comme dans le lemme 6, on peut montrer qu'il existe une suite $(b_\ell)_{\ell \geq L_0(H_0)} \in \mathbb{R}_+^*$ de limite nulle telle que pour tout $\ell \geq L_0(H_0)$

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) + V(\ell, H_1(\ell)) < M + N_2) \leq b_\ell + \varepsilon^2.$$

On peut donc trouver un entier $L_1 = L_1(H_0) > L_0(H_0)$ tel que

$$\mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) + V(\ell, H_1(\ell)) < M + N_2) \leq 2\varepsilon^2 \quad \forall \ell \geq L_1(H_0).$$

Par l'inégalité **FKG**, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) < N_2) \mathbb{P}_{p_c}(V(\ell, H_1(\ell)) < M) &\leq \mathbb{P}_{p_c}(U(\ell, H_1(\ell)) + V(\ell, H_1(\ell)) < M + N_2) \\ &\leq 2\varepsilon^2 \quad \forall \ell \geq L_1(H_0). \end{aligned}$$

Ainsi, par 3.10,

$$\mathbb{P}_{p_c}(V(\ell, H_1(\ell)) \geq M) > 1 - \varepsilon \quad \forall \ell \geq L_1. \quad (3.13)$$

On pose $L = L_1$ et $H = H_1(L_1)$ de sorte que $U = U(L, H)$ et $V = V(L, H)$ vérifient

$$\mathbb{P}_{p_c}(U \geq M) > 1 - 3\varepsilon, \quad \mathbb{P}_{p_c}(V \geq M) > 1 - \varepsilon \quad (3.14)$$

par 3.12 et 3.13. Si $U \geq M$, alors par la discussion réalisée au 3.5, il existe un sous-ensemble \mathcal{N} de $T(L, H)$ vérifiant :

- (i) $|\mathcal{N}| \geq N_1$;
- (ii) $\forall x \in \mathcal{N}, b(0) \leftrightarrow x$ dans $B(L, H)^*$;
- (iii) les carrés $b(x)$, pour $x \in \mathcal{N}$, sont disjoints ;

(iv) la partie \mathcal{N} est mesurable dans la tribu engendrée par l'état des arêtes qui ont au moins un sommet dans l'intérieur de $B(L, H)$.

Puisque les carrés $b(x)$, $x \in \mathcal{N}$, n'intersectent pas l'intérieur de $B(L, H)$, on obtient à l'aide de 3.5 que

$$\mathbb{P}_{p_c}(X = 0 \mid U \geq M) < \varepsilon,$$

où

$$X = |\{x \in T(L, H), b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } B(L, H)^*, b(x) \text{ est une graine}\}|.$$

En utilisant 3.14, on obtient alors

$$\mathbb{P}_{p_c}(X = 0) \leq \mathbb{P}_{p_c}(U < M) + \varepsilon \mathbb{P}(U \geq M) < 4\varepsilon. \quad (3.15)$$

On procède de manière similaire avec

$$Y = |\{x \in S(L, H), b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } B(L, H)^*, b(x) \text{ est une graine}\}|$$

ce qui permet d'obtenir

$$\mathbb{P}_{p_c}(Y = 0) < 2\varepsilon. \quad (3.16)$$

On se rapproche du résultat voulu cependant nous cherchons à mettre en évidence des graines dans chaque portion T_j de T et S_i de S pour obtenir une boîte admissible. Pour obtenir ceci, nous utilisons encore une fois l'inégalité **FKG**. Définissons alors

$$X_j = |\{x \in T_j, b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } B(L, H)^*, b(x) \text{ est une graine}\}| \quad \forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$$

et

$$Y_i = |\{x \in S_i, b(0) \leftrightarrow x \text{ dans } B(L, H)^*, b(x) \text{ est une graine}\}| \quad \forall i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket.$$

Par symétrie, les X_j (resp. les Y_i) ont même loi. De plus on a

$$X \leq \sum_{j=1}^4 X_j, \quad Y \leq \sum_{i=1}^8 Y_i.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité **FKG** (les événements $\{X_j = 0\}$, $\{X_1 = 0, X_2 = 0\}$ et $\{X_3 = 0, X_4 = 0\}$ sont décroissants) et 3.15 on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c}(X_1 = 0)^4 &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}_{p_c}(X_j = 0) \\ &\leq \mathbb{P}_{p_c}(X_j = 0, \forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket) \\ &\leq \mathbb{P}_{p_c}(X = 0) \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit pour $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$

$$\mathbb{P}_{p_c}(X_j = 0) < \sqrt[4]{4\varepsilon}. \quad (3.17)$$

De manière identique, on obtient pour $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$

$$\mathbb{P}_{p_c}(Y_i = 0) < \sqrt[8]{2\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Soit $\eta > 0$. Choisissons maintenant $\varepsilon > 0$ tel que

$$\eta = 4\sqrt[4]{4\varepsilon} + 8\sqrt[8]{2\varepsilon}.$$

Les résultats 3.17 et 3.18 permettent alors d'obtenir

$$\mathbb{P}_{p_c}(B(L, H) \text{ n'est pas admissible}) \leq \mathbb{P}_{p_c} \left(\left(\bigcup_{i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket} \{Y_i = 0\} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket} \{X_j = 0\} \right) \right) < \eta$$

ce qui donne bien le lemme **A**.

3.2.2 Démonstration du lemme B

Description de l'argument

Soient m , L et H des entiers qui vérifient $m \geq 1$, $L \geq m$ et $H \geq 2m$ et soit $0 < p < 1$ un réel. On pose :

$$\pi = \mathbb{P}_p(B(L, H) \text{ est admissible}).$$

Nous allons définir un réseau de percolation par sites dans $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ dans lequel les sites auront une probabilité supérieure à $p_c^{\text{sites}}(\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z})$ d'être ouverts. Nous allons construire ce réseau de telle façon à ce que la percolation dans $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ implique la percolation dans l'espace \mathbb{H} .

Pour cela, nous allons commencer par séparer l'espace $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ en tubes, et chaque tube constituera un sommet de notre réseau. Malheureusement, comme nous l'expliquerons plus tard dans la preuve, nous allons devoir distinguer selon la valeur du rapport entre L et H . Nous définissons donc l'entier N de la manière suivante :

$$N = \begin{cases} 5H + 7L & \text{si } H \geq L, \\ 11H + 11L & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous définissons des **tubes** de largeur $2N$: Pour tout $a = (a_2, a_3)$ dans $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$, on pose :

$$\tau_a = \mathbb{Z} \times [-N, N]^2 + (0, 2Na_2, 2Na_3)$$

Deux tubes τ_a et τ_b sont dits **adjacents** si a et b le sont. Nous allons chercher à construire des séquences de briques $B(H, L)$ dans les tubes afin de relier les différents bords. Nous allons pour cela définir des zones cibles dans les tubes qui serviront de points d'ancrage aux séquences de briques. On commence par introduire deux nouvelles variables :

$$\alpha = \begin{cases} 4H + 5L & \text{si } H \geq L, \\ 9H + 9L & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\beta = \begin{cases} N - H - 1 & \text{si } H \geq L, \\ N - 2H - L - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit ensuite les **zones cibles** (Z_a^i) comme étant les translatées par $x \mapsto x + (0, 2Na_2, 2Na_3)$ des zones cibles de 0 :

$$\begin{aligned} Z_0^1 &= \mathbb{Z} \times [-\alpha, \alpha] \times [\beta, N], \\ Z_0^2 &= \mathbb{Z} \times [\beta, N] \times [-\alpha, \alpha], \\ Z_0^3 &= \mathbb{Z} \times [-\alpha, \alpha] \times [-N, -\beta], \\ Z_0^4 &= \mathbb{Z} \times [-N, -\beta] \times [-\alpha, \alpha]. \end{aligned}$$

Remarquons que ces quatre zones sont disjointes deux à deux, et que chaque zone chevauche exactement une zone cible analogue associée à un tube adjacent. Nous allons déclarer un tube ouvert ou fermé selon certaines règles que nous allons expliquer plus tard. Ces règles devront vérifier les trois conditions suivantes :

- Le tube 0 est ouvert avec probabilité strictement positive.
- Si un tube τ_a est ouvert, alors un tube τ_b adjacent à τ_a est ouvert avec une probabilité strictement supérieure à $p_c^{\text{sites}}(\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z})$.
- Si un cluster infini de tubes ouverts existe, alors on peut reconstruire un chemin infini dans le demi-espace.

Si ces trois propriétés sont vérifiées, alors il est clair que l'on aura bien un cluster infini dans le demi-espace avec probabilité strictement positive.

Tout d'abord, déclarons 0 ouvert si et seulement si toutes les arêtes de E sont ouvertes, ou

$$E = ([-m, m]^2 \times [-N + m, N - m]) \cup ([-m, m] \times [-N + m, N - m] \times [-m, m]).$$

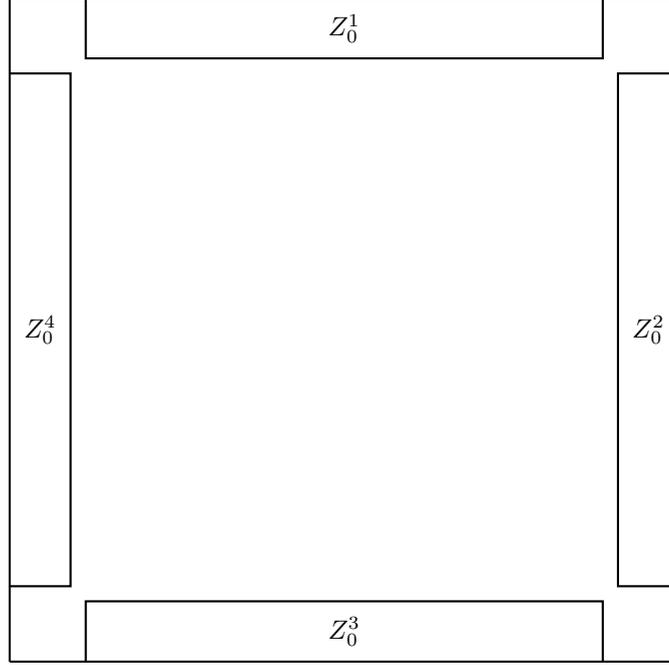


FIGURE 3.3 – Un tube et ses zones cibles

Afin de vérifier la dernière propriété, nous ferons en sorte dans notre construction que chaque tube τ_a ouvert avec a non nul soit relié à un tube τ_b ouvert avec b strictement plus petit que a dans un ordre prédéfini². Cela sera fait de telle sorte que l'on pourra suivre un chemin ouvert d'une zone cible à un autre et on pourra alors remonter jusqu'au tube τ_0 .

Il ne nous reste plus qu'à expliciter comment on définit les tubes occupés et à évaluer la probabilité que cela arrive. Pour cela, nous utiliserons l'algorithme de parcours de graphe suivant : à chaque fois qu'un tube est occupé, en commençant par zéro lorsque celui-ci l'est, on regarde les tubes adjacents que l'on range dans l'ordre que l'on a choisi. On étudie ensuite chacun d'entre eux et on continue tant qu'il reste des tubes adjacents à un tube ouvert non étudié. Si le processus s'arrête, alors la percolation échoue et n'a pas lieu. Si le processus se poursuit à l'infini, alors on a bien percolation.

Dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans le cas où $a = (0, 1)$ est adjacent à l'origine. Cela nous permettra d'alléger les notations et nous détaillerons brièvement à la fin de la preuve comment la construction s'étend à un tube quelconque. Avant de donner les règles permettant de déclarer τ_a occupé ou inoccupé, nous allons commencer par énoncer quelques principes auxquels nous ferons appel plus tard.

- « Top stacking », ou recollage par le haut :

Si une brique $B(L, H)$ est admissible, alors on dispose de chemins ouverts reliant $b(0)$ à chacune des facettes T_j . Il existe donc pour chaque j un sommet y_j qui est relié dans $B(L, H)^*$ à $b(0)$ ³. On peut utiliser ce sommet comme point d'ancrage pour une nouvelle brique $y_j + B(L, H)$. Comme les arêtes des deux briques forment des ensembles disjoints (les arêtes en commun sont celles de la faces supérieures à $B(L, H)$ qui sont inférieures à $y_j + B(L, H)$, mais celles-ci n'interviennent pas dans la définition des briques occupées), les événements « $B(L, H)$ est admissible » et « $y_j + B(L, H)$ est admissible » sont indépendants. On en déduit que les deux briques sont simultanément admissibles avec probabilité π^2 .

2. On définit avant le début de la preuve un ordre arbitraire sur les arêtes, celui-ci n'ayant aucune importance pour la suite de la preuve.

3. Si plusieurs sommets correspondent, on choisi le premier dans un ordre arbitraire.

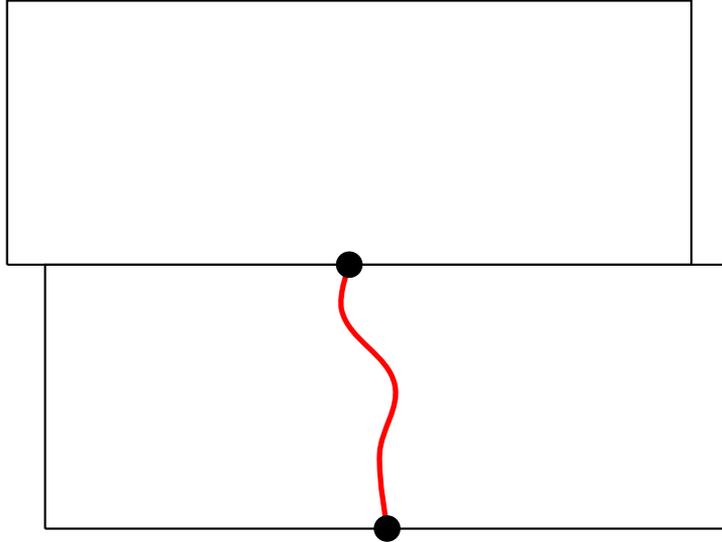


FIGURE 3.4 – Exemple de « top stacking »

En répétant ce procédé, on construit des suites de briques empilées et l'on peut alors suivre un chemin à travers celles-ci. Comme les ensembles d'arêtes sont toujours deux à deux disjoints, la probabilité que n briques recollées par le haut soient simultanément admissibles est π^n . Remarquons par ailleurs que pour une même brique $B(L, H)$, on ne peut à priori pas le recoller par le haut à plus d'une brique car si j et k sont distincts, alors les briques $y_j + B(L, H)$ et $y_k + B(L, H)$ ne sont pas forcément disjointes et donc les événements associés à ces briques ne sont pas indépendants.

- « Side stacking », ou recollage par le coté :

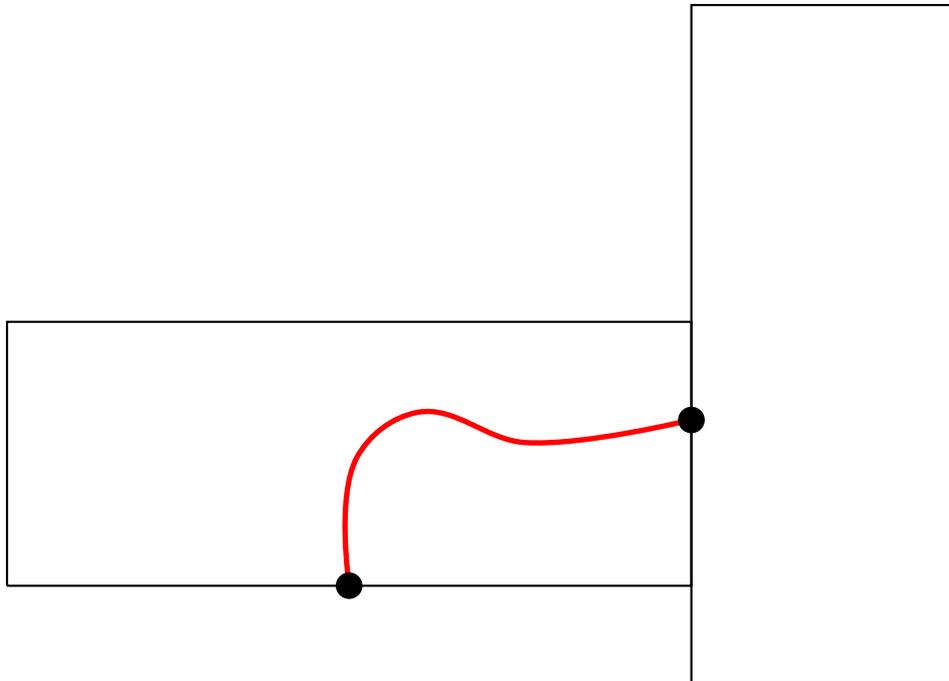


FIGURE 3.5 – Exemple de « side stacking »

Bien sûr, le recollage par le haut n'est pas suffisant. En effet, si celui-ci doit être répété une infinité de fois, il s'arrêtera presque sûrement sur une brique non admissible. Pour éviter ce problème, on considère également un recollage sur le coté. Pour cela, on va considérer des briques ayant suivi

une rotation. L'orientation d'une brique ne modifiant pas la probabilité que celle-ci soit admissible, la probabilité que deux briques recollées par le côté soient simultanément admissibles est encore π^2 . En revanche, on ne peut pas recoller par n'importe quel côté sans prendre de précautions. En effet, si l'on a déjà recollé par le haut, il faut vérifier que les ensembles d'arêtes sont bien disjoints. Pour cela, il faudra être prudent dans chaque étape de notre construction.

- **Branchements :**

Afin d'éviter les problèmes de dépendance dont nous avons déjà parlé, nous avons vu qu'il convient de prendre quelques précautions avant d'attacher des briques. En effet, les événements liés à deux briques recollées à la brique initiale par la même face n'ont que peu de chance d'être indépendants. On peut tout de même recoller plusieurs briques à une même brique initiale mais celles-ci doivent être prises sur deux faces bien choisies. Ainsi, considérons une brique initiale $B(L, H)$ admissible. Si on souhaite recoller une brique par un sommet z avec $z(2) = -L$, c'est à dire une brique sur la gauche, on doit sélectionner un point d'ancrage y_j sur le sommet de $B(L, H)$ tel que $y_j \geq 0$. Alors si $B_{\oplus}(L, H)$ désigne la boîte $B(L, H)$ qui a subi une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'intersection de $z + B_{\oplus}(L, H)$ et de $y_j + B(L, H)$ est soit vide soit incluse dans la face inférieure de $z + B_{\oplus}(L, H)$. On en déduit que les événements $\{z + B_{\oplus}(L, H) \text{ est admissible}\}$ et $\{y_j + B(L, H) \text{ est admissible}\}$ sont indépendants.

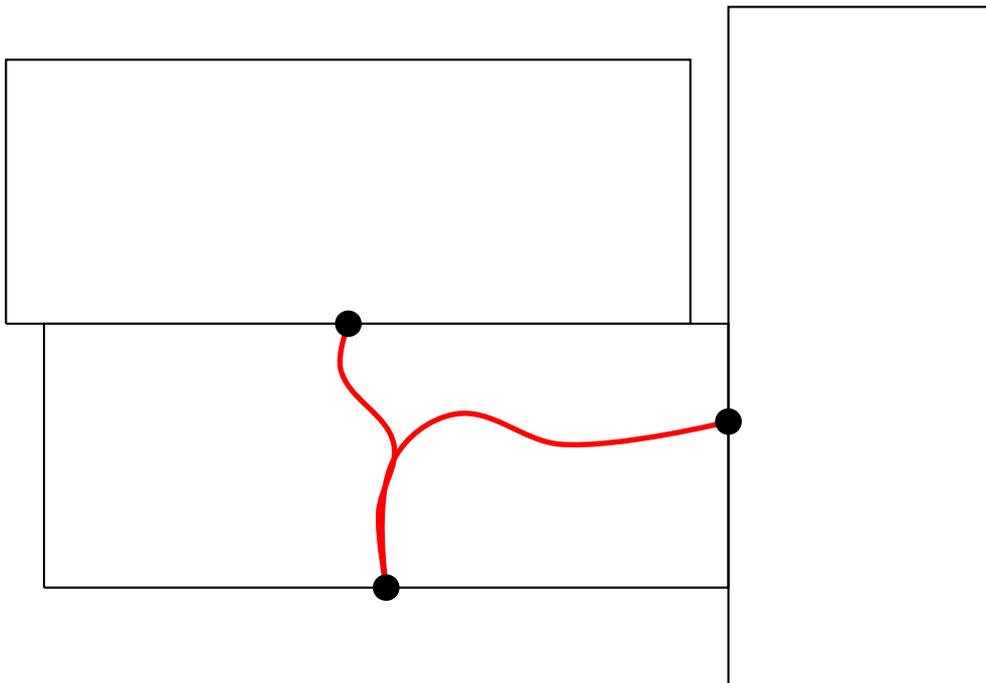


FIGURE 3.6 – Exemple de branchements

- « **Steering** », ou **contrôle des abscisses :**

Si on recolle des briques au sommet de notre brique initiale sans faire attention aux choix des abscisses, celles-ci peuvent dangereusement diverger. Heureusement, une règle simple permet de les maintenir dans une zone proche de la zone initiale. En effet, notons x_i les points d'ancrage de chacune des briques de la construction avec $x_0 = 0$. Supposons que l'on souhaite contrôler $x_i(1)$. Alors on remarque que $x_0(1) = 1$ et $x_{i+1}(1) = x_i(1) + A_{\pm}$ ou $-L \leq A_{-} \leq 0$ et $0 \leq A_{+} \leq L$ en fonction de la zone dans laquelle on choisit le nouveau point d'accroche. En choisissant correctement celle-ci (ce qui élimine deux des quatre points sur le sommet de la brique), on s'assure que pour tout i , on ait $-2L \leq x_i(1) \leq 2L$. Nous utiliserons toujours le contrôle de la première coordonnée, et par moment le contrôle de la seconde lorsque cela sera nécessaire (et cela sera alors indiqué).

Remarquons qu'en combinant les deux derniers points, le contrôle de la première coordonnée des points d'ancrages et le choix d'une face sur le côté où on recolle une face détermine complètement le choix du point d'ancrage sur la face supérieure.

Retournons maintenant à notre principal argument. Supposons que τ_0 soit occupé. Alors $[-m, m]^2 \times \{-N - m\}$ est une graine. Nous déclarerons τ_a occupé si un certain algorithme de recollement de briques dépendant du rapport $\frac{H}{L}$ fonctionne et permet de relier les trois zones cibles non atteintes avec un nombre borné R de briques. Le choix de ces briques est entièrement déterminé et l'algorithme fonctionne dès que toutes les briques choisies sont admissibles. On en déduit que :

$$\mathbb{P}_p(\tau_a \text{ est occupé} \mid \tau_0 \text{ est occupé}) \geq \mathbb{P}_p(B(L, H) \text{ est admissible})^R = \pi^R.$$

Cette construction s'étend naturellement à des tubes quelconques. En effet, si τ_b (où $b \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$) doit être examiné car un voisin τ_a est occupé, on dira que τ_b est occupé si le même algorithme de recollement de briques que précédemment fonctionne et permet ici aussi de relier les trois zones cibles non atteintes avec le même nombre borné R de briques. Alors on aura aussi :

$$\mathbb{P}_p(\tau_b \text{ est occupé} \mid \tau_a \text{ est occupé}) \geq \mathbb{P}_p(B(L, H) \text{ est admissible})^R = \pi^R.$$

Il suffit alors de prendre ν assez petit pour que pour que si $\pi > 1 - \nu$, alors $\pi^R > p_c^{\text{sites}}$. $\nu = 1 - (p_c^{\text{sites}})^{\frac{1}{R}}$ convient.

★ Construction dans le cas $L \leq H$

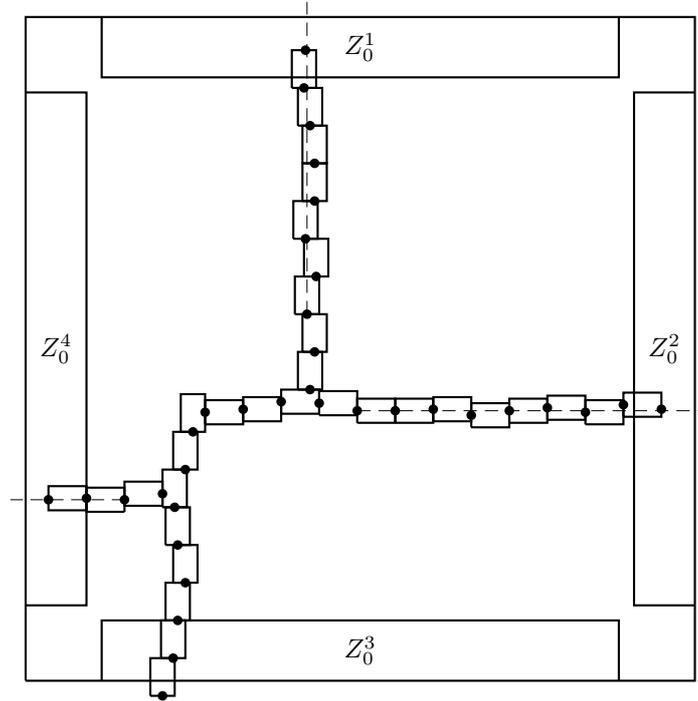


FIGURE 3.7 – Construction dans le cas $L \leq H$

Rappelons que l'on a pris ici $N = 5H + 7L$. Nous avons aussi pris des régions cibles avec des dimensions $(8H + 10L) \times (H - 1)$.

Nous allons expliciter le choix des blocs que l'on fait ici afin de pouvoir relier la zone de départ aux trois zones cibles du tubes. Nous partons d'un bloc supposé admissible, et sans perte de généralité nous allons supposer que celui ci se trouve dans la partie gauche de la zone cible précédente. L'idée consiste à empiler des briques en haut et à réaliser deux bifurcations, une à droite et une à gauche

pour rejoindre les extrémités droite et gauche. En dehors des périodes de bifurcation, on cherche à centraliser le plus possible les blocs de sorte à rester proche de l'axe $x(1) = x(2) = 0$. L'algorithme continue tant que tous les blocs considérés sont occupés.

Notre algorithme de recollement est donc constitué de trois suites de blocs admissibles :

- La suite des blocs reliant le bas au haut, que l'on notera $(B_i)_{i \geq 0}$. Celle-ci a l'orientation usuelle des blocs. On notera $(b_i)_{i \geq 0}$ les points d'accroche respectifs.
- La suite des blocs reliant la suite $(B_i)_{i \geq 0}$ au bord gauche, que l'on notera $(B'_i)_{i \geq 0}$. Celles-ci ont subi une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique par rapport aux briques usuelles. On notera $(b'_i)_{i \geq 0}$ les points d'accroche respectifs.
- La suite des blocs reliant la suite $(B_i)_{i \geq 0}$ au bord droit, que l'on notera $(B''_i)_{i \geq 0}$. Celles-ci ont subi une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique par rapport aux briques usuelles. On notera $(b''_i)_{i \geq 0}$ les points d'accroche respectifs.

En fait, nous verrons plus tard que pour pouvoir centrer notre suite de blocs $(B_i)_{i \geq 0}$, il sera nécessaire de l'interrompre pour la reprendre plus tard. Entre temps le chemin passera par la suite $(B''_i)_{i \geq 0}$.

Si \bar{b} est un point, nous noterons également $b(1)$ son abscisse et $b(2)$ son ordonnée. Par soucis de simplicité, nous considérerons également que l'origine du repère dans lequel nous nous plaçons ici est le centre de côté inférieur du tube. Notre tube, dont on oublie une coordonnée, est donc assimilé ici à $[-N, N] \times [0, 2N + 1]$. Par hypothèse sur la position de B_0 , on a donc $-4H - 5L \leq b_0(1) \leq 0$ et $-H + 1 \leq b_0(2) \leq 0$.

On commence par empiler de nouveaux blocs par le haut, en nous dirigeant vers la droite, afin de recentrer un peu le chemin principal. On construit ainsi B_1 , B_2 et B_3 . En suivant cette procédure, on a $-5H - 5L \leq b_3(1) \leq 3L$. On a également $2H + 1 \leq b_3(2) \leq 3H$. Nous sommes donc bien sortis de la zone cible du bas du tube.

Nous allons ensuite commencer une séquence de bifurcation à gauche. Cela consiste à empiler 4 blocs de la manière suivante : Les trois blocs B_4 et B_5 sont empilés sur le sommet du précédent, en choisissant un point sur la gauche du sommet et les deux blocs B_6 , B_7 sont empilés en choisissant un point sur la droite. On a alors $6H + 1 \leq b_7(2) \leq 7H$. De plus $b_5(1) \geq -4H - 7L$ car on a fait 3 déplacements vers la gauche seulement depuis le début de la construction.

Arrêtons nous un instant sur la construction du chemin rejoignant la zone cible à gauche. Nous reviendrons après à notre chemin principal. La bifurcation vers la zone cible à gauche a lieu en B_5 . C'est afin d'éviter tout contact avec ce nouveau chemin que nos blocs B_4 à B_7 prennent la forme d'un chevron ouvert. Notre chemin a donc pour première accroche b'_1 qui se trouve sur la face gauche de B_5 . À partir de ce point d'accroche, on construit une suite de blocs jusqu'à arriver à la zone cible en suivant le principe de recollement par le sommet des blocs (qui sont ici tournés, le sommet étant donc la face orientée vers la gauche). On ajoute à ce principe celui de contrôle des abscisses qui devient suite à la rotation un contrôle des ordonnées. On s'assure donc que que les ordonnées ne s'éloignent pas de $b'_1(2) + L$ de plus de $2L$. Un rapide examen de la suite de la construction permet de se convaincre que la zone dans laquelle évolue $(B'_i)_{i \geq 0}$ est déconnectée de toutes les autres zones et que ces blocs n'en rencontreront aucun autre. De plus, on a $b'_1(2) \geq b_5(2) \geq 4H + 1$. On en déduit qu'avec le contrôle des ordonnées précédemment mis en place, on a :

$$b'_k(2) \geq b'_1(2) - L \geq b'_5(2) - L \geq 4H + 1 - L \geq H + 2L + 1.$$

Cette dernière borne nous assure qu'on atteint bien la zone cible à gauche, puisque celle-ci commence en $H + 2L + 1$.

Le principal problème de la procédure précédente est que, combinée avec l'aléatoire concernant le placement de B_0 nous disposons de très peu d'informations quant aux abscisses de B_7 . Nous allons ensuite procéder par disjonction de cas en fonction de celle-ci.

L'idée la plus instinctive pour poursuivre notre route serait de répéter le processus précédent pour construire un chemin à droite puis continuer notre chemin jusqu'en haut. Nous allons voir lorsque cette construction fonctionne et lorsque celle-ci ne fonctionne pas, nous proposerons une construction alternative qui permettra de conclure.⁴

4. Il faut ici remarquer que les conditions assurant la réussite de la première construction ne porteront que sur les abscisses de B_7 . Ainsi l'algorithme pourra savoir dès la construction de B_7 quelle est la procédure à suivre sans avoir besoin de tester l'une puis de faire du « backtracking » qui serait préjudiciable à notre preuve puisque cela aurait détruit l'indépendance des événements « une brique est admissible ».

Nous allons donc procéder comme précédemment. On met ainsi en place une bifurcation vers la droite en B_7 . On applique ici aussi un contrôle des ordonnées pour ne pas s'éloigner de l'ordonnée initiale. En effectuant les mêmes vérifications que précédemment, on s'assure alors que la suite de blocs $(B''_i)_{i \geq 0}$ rejoint bien la zone cible droite. Puis, on recolle deux blocs B_8 et B_9 en choisissant un point sur la gauche, ce qui nous assure que sans retour en arrière, on ne croisera jamais de nouveau le chemin de droite. Enfin, on poursuit le chemin en empilant vers le haut avec un contrôle des abscisses pour ne pas s'éloigner de celle de B_9 . On a donc le contrôle suivant sur les abscisses des B_k pour tout $k \geq 9$:

$$b_k(1) \geq b_9(1) - 2L \geq b_7(1) - 4L.$$

Pour atteindre la zone cible, il faut que cette quantité soit minorée par $-(4H + 5L)$, ce qui est le cas dès que $b_7(1) \geq -4H + L$.

Le dernier cas à traiter est donc $b_7(1) \leq -4H + L$. Rappelons que l'on a aussi $b_7(1) \geq b_5(1) \geq -4H - 7L$. Afin de s'éloigner du bord gauche, on met aussi en place une bifurcation vers la droite en B_7 . Celle-ci ne peut pas intersecter de briques précédemment étudiées car B_6 et B_7 ont été recollés par le haut en choisissant un point sur la droite. Comme indiqué au début de la construction, nous allons maintenant mettre en arrêt le chemin $(B_i)_{i \geq 0}$ avant de le reprendre plus tard. Le point d'accroche b''_1 de la suite de blocs $(B''_i)_{i \geq 0}$ vérifie alors $b''_1(1) \leq b''_1(1) \leq b''_1(1) \leq b''_1(1) \leq$. Avant de relancer le chemin vertical, nous devons nous assurer que celui-ci ne rencontrera aucun chemin déjà tracé. Pour cela, nous allons construire les blocs B''_2 à B''_5 en forme d'accent circonflexe, c'est à dire que B''_2 et B''_3 sont recollés en choisissant le point le plus en haut de la face à droite du précédent bloc et B''_4 et B''_5 en choisissant le point le plus en bas. On peut alors recommencer notre chemin vers le haut à partir de B''_3 en réalisant un contrôle des abscisses pour s'assurer que l'on arrive bien dans la zone cible supérieure, et on continue le chemin vers la droite à partir de B''_5 avec cette fois ci un contrôle des ordonnées pour arriver dans la zone cible latérale. Les vérifications à faire sont similaires au précédentes.

Il reste à vérifier que l'on a bien utilisé un nombre borné de blocs pour relier les zones cibles. En fait, nous n'avons pas pu parcourir d'avantage que 2 fois la longueur du carré, plus un bloc pour sortir de la zone cible précédente. Comme le carré peut être parcouru en 25 blocs, on obtient finalement : $R \leq 51$.

★ Construction dans le cas $H < L$

Commençons par remarquer pourquoi la construction précédente ne fonctionne plus ici. Si nous avons pris les mêmes valeurs pour K , α et β et si nous avons procédé de la même façon, notre construction aurait échoué lorsque nous aurions essayé de vérifier que nous atteignons bien les zones cibles. En effet, nous utilisons à plusieurs endroits de la preuve et de manière cruciale dans nos calculs que $L \leq H$. Nous aurions pu alors essayer de réparer ce problème en modifiant quelque peu la construction. Cependant toutes ces tentatives auraient été infructueuses à cause de l'observation suivante : pour traverser entièrement le carré nous avons besoin d'environ $\frac{2K}{H} + 1 = \frac{11H+14L}{H}$ blocs. 25 blocs suffisent donc si $H \geq L$. Mais on voit ici que nous avons besoin d'au moins $\frac{14L}{H}$ blocs. Ce rapport est non borné si L diverge et nous ne pourrions donc pas aboutir en un nombre borné de blocs.

Pour pouvoir conclure, nous allons devoir utiliser la largeur des blocs plutôt que leur hauteur afin d'évoluer dans le carré. Pour cela, l'idée de D. Barsky, G. Grimmett et de C. Newman dans leur article de 1991 [BGN91] consiste à utiliser des briques élémentaires appelées « crabes » (voir figure 3.8) dans leur construction. Celles-ci sont constituées de 3 blocs. Le premier est à l'horizontal, le suivant est collé sur le sommet du premier et le troisième est à la verticale collé sur une face du second.

La suite de la construction est semblable au cas $H \geq L$, quoi que plus technique, et nous n'entrerons pas dans les détails.

Le nombre de blocs utilisés ici est naturellement plus important que dans la première construction et un calcul permet de se convaincre que $R \leq 125$.

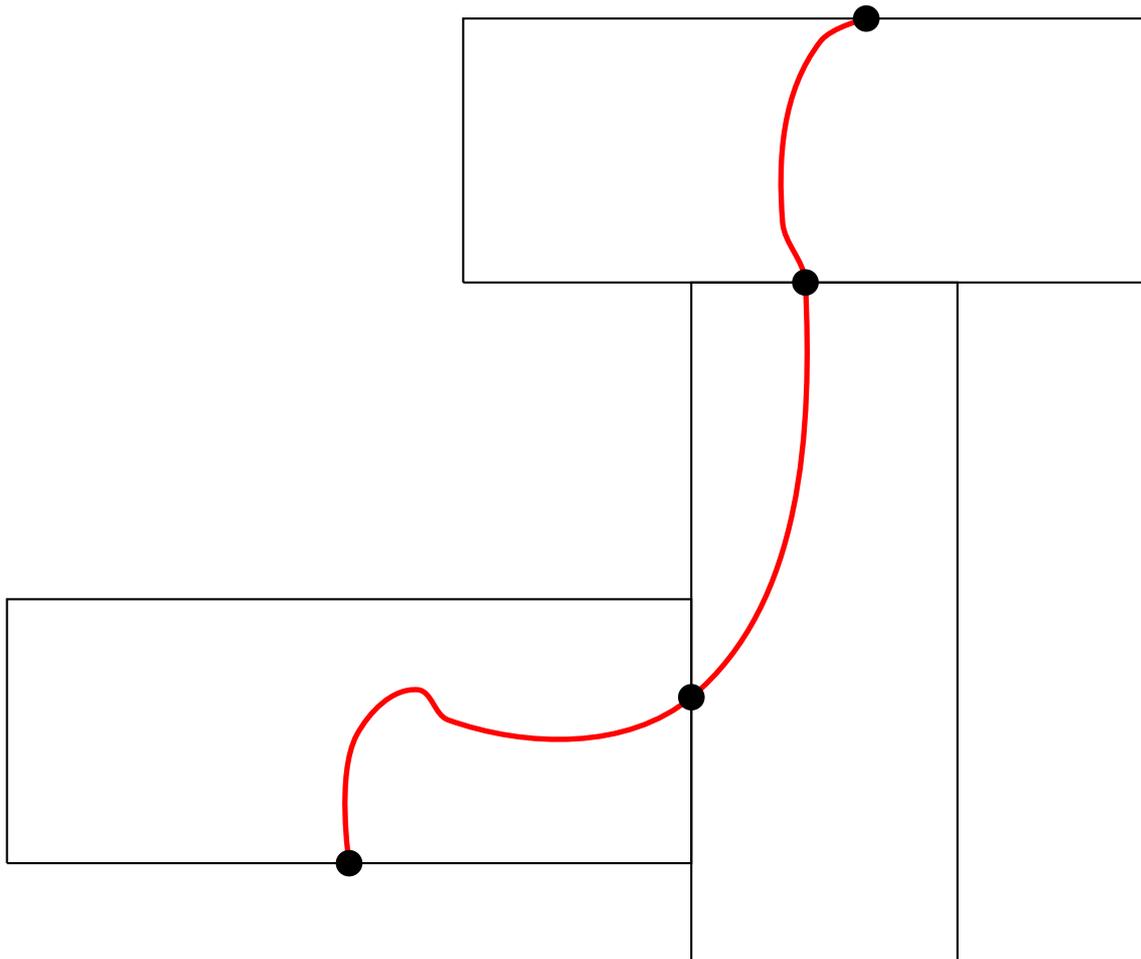


FIGURE 3.8 – Un « crabe »

Chapitre 4

Unicité du cluster infini

L'objectif de ce chapitre est d'établir un théorème d'unicité du cluster ouvert infini (lorsque celui-ci existe avec probabilité strictement positive). On complète ainsi la preuve du théorème 3.

Théorème 9 (Burton - Keane, 1989). *Soit $p \in [0, 1]$ tel que $\theta(p) > 0$, alors*

$$\mathbb{P}_p(\text{ Il existe exactement un cluster ouvert infini }) = 1.$$

Le résultat est clair si $p \in \{0, 1\}$, on suppose donc dans la suite que $0 < p < 1$. On note N le nombre de clusters ouverts infinis. Si B est un ensemble d'arêtes, on note \mathbb{E}_B l'ensemble des arêtes joignant deux sommets de B . On note $N_B(0)$ (resp. $N_B(1)$) le nombre de clusters ouverts infinis lorsque toutes les arêtes de \mathbb{E}_B sont déclarées fermées (resp. ouvertes). Enfin, on note M_B le nombre de clusters ouverts infinis intersectant B .

L'espace $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ est un espace produit muni naturellement d'une famille de translations héritée des translations sur le réseau \mathbb{L}^d . De plus, \mathbb{P}_p est une mesure produit sur Ω . Puisque N est une fonction invariante par translation de Ω , elle est presque sûrement constante. Ainsi,

$$\text{ Il existe } k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ tel que } \mathbb{P}_p(N = k) = 1. \quad (4.1)$$

Évidemment l'entier k ainsi défini dépend de p .

Proposition 3. *L'entier k défini au 4.1 vérifie $k \in \{0, 1, \infty\}$.*

Preuve. On raisonne par l'absurde en supposant $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit B un ensemble fini de sommets. Puisque toute configuration dans \mathbb{E}_B a une probabilité strictement positive, on déduit du fait que N est constante presque sûrement que

$$\mathbb{P}_p(N_B(0) = N_B(1) = k) = 1.$$

Or $N_B(0) = N_B(1)$ si et seulement si B intersecte au plus un cluster ouvert infini (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse que k est fini). On obtient donc

$$\mathbb{P}_p(M_B \geq 2) = 0.$$

Il est clair que M_B est une fonction croissante de B . De plus,

$$M_B \xrightarrow[B \nearrow \mathbb{Z}^d]{} N.$$

Choisissons pour B le « diamant » $S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d, |x| \leq n\}$. On obtient donc

$$0 = \mathbb{P}_p(M_{S(n)} \geq 2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}_p(N \geq 2), \quad (4.2)$$

ce qui assure que $k \geq 1$: d'où l'absurdité. \square

Il reste donc à éliminer le cas où $k = \infty$. On suppose désormais que $k = \infty$. Nous obtenons une contradiction en utilisant un argument géométrique.

Définition 8. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. On dit que x est une **trifurcation** si x vérifie les trois conditions suivantes :

- (a) x appartient à un cluster ouvert infini ;
- (b) il existe exactement trois arêtes ouvertes incidentes en x ;
- (c) la suppression de x et des trois arêtes qui lui sont incidentes divise le cluster ouvert infini en exactement trois clusters ouverts infinis et aucun clusters finis.

On note T_x l'évènement « x est une trifurcation ».

Commençons par observer que $\mathbb{P}_p(T_x)$ est une grandeur indépendante de x de sorte que

$$\frac{1}{|B(n)|} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in B(n)} \mathbb{1}_{T_x} \right] = \mathbb{P}_p(T_0). \quad (4.3)$$

Proposition 4. La quantité $\mathbb{P}_p(T_0)$ est strictement positive.

Preuve. Nous utilisons ici l'hypothèse $k = \infty$. Soit B un ensemble fini de sommets. Notons $M_B(0)$ le nombre de clusters ouverts infinis intersectant B lorsque toutes les arêtes de \mathbb{E}_B sont déclarées fermées. Comme $M_B(0) \geq M_B$, en utilisant un argument similaire à celui utilisé au 4.2,

$$\mathbb{P}_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \mathbb{P}_p(M_{S(n)} \geq 3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(N \geq 3) = 1.$$

Ainsi, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}.$$

On pose $B = S(n)$. On effectue les remarques suivantes :

- (a) l'évènement $\{M_B(0) \geq 3\}$ est indépendant de l'état des arêtes de \mathbb{E}_B ;
- (b) si l'évènement $\{M_B(0) \geq 3\}$ a lieu, il existe $(x, y, z) \in (\partial B)^3$ appartenant à des clusters ouverts infinis distincts de $\mathbb{E}^d \setminus \mathbb{E}_B$.

Soit $\omega \in \{M_B(0) \geq 3\}$. Choisissons $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$ et $z = z(\omega)$ selon le point (b) de la remarque précédente (s'il y a plusieurs possibilités pour un tel triplet, on le choisit selon une règle prédéterminée). On peut facilement démontrer qu'il existe dans \mathbb{E}_B trois chemins¹ joignant l'origine à (respectivement) x , y et z ; et que ces chemins peuvent être choisis de façon à satisfaire les points suivants :

- (i) l'origine est le seul sommet commun à deux chemins quelconques parmi ces trois chemins ;
- (ii) chacun de ces chemins touche exactement un sommet de ∂B .

Notons à présent $J_{x,y,z}$ l'évènement « toutes les arêtes de ces trois chemins sont ouvertes et toutes les autres arêtes de \mathbb{E}_B sont fermées ». Comme B est finie, en notant R le nombre d'arêtes dans \mathbb{E}_B , on obtient

$$\mathbb{P}_p(J_{x,y,z} \mid M_B(0) \geq 3) \geq (\min(p, 1-p))^R > 0.$$

Il suffit alors d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(T_0) &\geq \mathbb{P}_p(J_{x,y,z} \cap \{M_B(0) \geq 3\}) \\ &= \mathbb{P}_p(J_{x,y,z} \mid M_B(0) \geq 3) \mathbb{P}_p(M_B(0) \geq 3) \\ &\geq \frac{1}{2} (\min(p, 1-p))^R > 0. \end{aligned}$$

□

1. Il est important de voir que l'argument utilisé ici est déterministe.

Idée de la preuve. On dispose à présent de tous les résultats nécessaires pour conclure. Commençons par donner une idée de l'argument final avant d'en fournir une preuve rigoureuse. La proposition suivante et 4.3 assurent que le nombre moyen de trifurcations dans $B(n)$ croît comme $|B(n)|$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Nous allons obtenir la contradiction recherchée grâce à cette remarque. Soit t_1 une trifurcation de $B(n)$. On choisit un sommet $y_1 \in \partial B(n)$ tel que $t_1 \leftrightarrow y_1$ dans $B(n)$. On choisit une nouvelle trifurcation t_2 dans $B(n)$. La définition d'une trifurcation assure l'existence de $y_2 \in \partial B(n) \setminus \{y_1\}$ telle que $t_2 \leftrightarrow y_2$ dans $B(n)$. On continue de la sorte en choisissant à chaque étape une nouvelle trifurcation t_k dans $B(n)$ et un nouveau point y_k dans $\partial B(n)$ distinct des précédents points choisis. Ainsi, s'il y a τ trifurcations dans $B(n)$, on peut obtenir τ sommets distincts dans $\partial B(n)$ et donc

$$|\partial B(n)| \geq \tau.$$

Or comme nous l'avons vu,

$$\mathbb{E}_p[\tau] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}_p(T_0)|B(n)|,$$

ce qui permet d'obtenir la contradiction recherchée puisque $|\partial B(n)|$ croît comme du n^{d-1} alors que $|B(n)|$ croît comme du n^d .

Nous fournissons maintenant une preuve rigoureuse de la fin de l'argument. On utilise pour cela un argument combinatoire que l'on décrit à l'aide de la définition suivante.

Définition 9. Soit Y un ensemble fini avec $|Y| \geq 3$. On appelle **3-partition** $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ de Y toute partition de Y en exactement trois ensembles P_1, P_2 et P_3 . Étant données deux 3-partitions $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ et $\Pi' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$, on dit que Π et Π' sont **compatibles** s'il existe une numérotation de leurs éléments telle que $P'_2 \cup P'_3 \subset P_1$ (ou de manière équivalente $P_2 \cup P_3 \subset P'_1$). Une collection \mathcal{P} de 3-partitions de Y est dite **compatible** si pour toute paires distinctes Π, Π' dans \mathcal{P} , Π et Π' sont compatibles.

Lemme 7. Si \mathcal{P} est une collection compatible de 3-partitions distinctes de Y , alors

$$|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2.$$

Preuve. On démontre ce résultat par récurrence forte sur le cardinal de Y . Remarquons déjà que si $|Y| = 3$, alors $|\mathcal{P}| \leq 1$. Supposons maintenant $n \geq 3$ et le résultat vrai pour tout ensemble de cardinal au plus n . Soit Y un ensemble fini de cardinal $n + 1$. Soit $y \in Y$. On note $Z = Y \setminus \{y\}$.

Soit \mathcal{P} une collection compatible de 3-partitions de Y . Tout élément Π de \mathcal{P} peut s'écrire sous la forme

$$\Pi = \{\Pi_1 \cup \{y\}, \Pi_2, \Pi_3\}$$

où les ensembles Π_1, Π_2 et Π_3 sont des sous-ensembles disjoints de Z satisfaisant : Π_2 et Π_3 sont non vides et $\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3 = Z$. Notons \mathcal{P}' l'ensemble des éléments Π de cette forme avec $\Pi_1 \neq \emptyset$. Posons enfin $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$.

Il est clair que \mathcal{P}' est une collection compatible de 3-partitions de Z . Par hypothèse de récurrence nous avons donc

$$|\mathcal{P}'| \leq |Z| - 2 = |Y| - 3.$$

Il nous reste donc à établir que $|\mathcal{P}''| \leq 1$. Supposons par l'absurde que \mathcal{P}'' contienne deux 3-partitions distinctes de Y que l'on écrit $\{\{y\}, A_2, A_3\}$ et $\{\{y\}, B_2, B_3\}$. Quitte à ré-indicer, on peut supposer que $\{y\} \cup B_2 \subset A_2$. Mais ceci est absurde puisque $A_2 \cap \{y\} = \emptyset$. On a finalement obtenu

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}'| + |\mathcal{P}''| \leq |Y| - 3 + 1 = |Y| - 2$$

ce qui est bien le résultat recherché. \square

Preuve du théorème 9. Soit K un cluster ouvert de $B(n)$. Si x est une trifurcation appartenant à $K \cap B(n-1)$, la suppression de x induit une partition de $K \cap \partial B(n)$ en trois ensembles, qui sont les ensembles de sommets reliés à x par un chemin ouvert passant par l'une des trois arêtes ouvertes incidentes en x . Ainsi, on associe à x une 3-partition $\Pi(x) = \{P_1, P_2, P_3\}$ de $K \cap \partial B(n)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) les parties P_i sont non vides ;
- (b) P_i est un sous-ensemble d'un graphe connexe ouvert de $B(n) \setminus \{x\}$;
- (c) $P_i \leftrightarrow P_j$ dans $B(n) \setminus \{x\}$, si $i \neq j$.

De plus, si x et x' sont deux trifurcations distinctes de $K \cap B(n-1)$, alors $\Pi(x)$ et $\Pi(x')$ sont distinctes et compatibles. Alors, en utilisant le lemme 7 on obtient que le nombre $\tau(K)$ de trifurcations dans $K \cap B(n-1)$ vérifie

$$\tau(K) \leq |K \cap \partial B(n)| - 2. \quad (4.4)$$

On somme cette inégalité sur tous les clusters ouverts K de $B(n)$ pour finalement obtenir

$$\sum_{x \in B(n-1)} \mathbb{1}_{T_x} \leq |\partial B(n)|.$$

En passant à l'espérance et en utilisant 4.3 on obtient donc

$$|B(n-1)|\mathbb{P}_p(T_0) \leq |\partial B(n)|,$$

ce qui est impossible par l'argument de croissance que nous avons évoqués précédemment.

Chapitre 5

Étude approfondie des valeurs des probabilités critiques

5.1 Généralisation du modèle de percolation

Au chapitre 1, nous avons présenté le modèle le plus célèbre de percolation, celui sur \mathbb{Z}^d . Mais celui-ci peut se généraliser sans difficulté à un graphe G muni d'un ensemble d'arêtes dénombrable V . Nous pouvons alors également parler de probabilité critique $p_c(G)$. Nous avons d'ailleurs déjà vu au corollaire 4 que dès que le graphe est connexe, dénombrable et localement fini, celle-ci ne dépend pas du point de départ dans le graphe et que $\theta_G(p)$ n'en dépend pas non plus.

Certains de ces réseaux peuvent, à l'instar des slabs ou du demi-espace étudié précédemment, être asymétriques. Afin d'obtenir des inégalités strictes entre les probabilités critiques associées à deux graphes distincts, il est utile d'étudier de manière plus générale la percolation sur un graphe quelconque. Cette idée d'étudier de manière plus globale les graphes est reprise en annexe D pour établir une loi du tout ou rien.

5.2 Inégalités strictes

Il est en général facile d'obtenir des inégalités larges entre différentes probabilités critiques. Par exemple, il est clair que si Γ est un sous-graphe de G ¹ alors $p_c(\Gamma) \geq p_c(G)$. En effet, tout chemin infini dans Γ fournit directement un chemin infini dans G . Cependant, la réciproque n'est pas vraie et nous pouvons naturellement nous demander si l'inégalité stricte est vérifiée. Nous avons déjà évoqué ce problème au paragraphe 1.3. Nous nous demandons alors si $p_c(\mathbb{Z}^{d+1}) < p_c(\mathbb{Z}^d)$. La réponse positive à cette question nous est donnée par la notion d'**accroissement de graphes**.

La notion d'accroissement est définie de manière assez vague comme l'ajout de manière systématique de connections suivant des règles locales. Comme il est difficile de donner une définition plus rigoureuse générale, nous allons nous contenter d'expliciter cette définition dans le cas d'un sous-graphe G de \mathbb{L}^d .

Soit R un entier positif. On note \mathcal{G} le graphe simple obtenu en restreignant G à $B(R)$. Pour toute configuration ω d'arêtes ouvertes ou fermées, on notera également ω_B cette configuration restreinte à la boule $B(R)$.

Définition 10. Une **fonction d'accroissement** F est une application qui à toute configuration restreinte ω_B associe un état du graphe \mathcal{G} .

Une telle fonction F a une portée locale, et est totalement déterministe. Nous allons rendre son action globale et aléatoire. Pour cela, on définit F de manière globale sur le réseau \mathbb{Z}^d de la manière suivante : Si ω est une configuration et x un élément du réseau, on note $F(x, \omega) = F((\tau_x \omega)_B)$, où $\tau_x \omega(e) = \omega(x + e)$.

1. Il faudrait formaliser cela en expliquant comment définir un sous-réseau, mais nous nous contenterons ici de la définition instinctive de cette notion.

On considère désormais un nouvel espace de probabilité $\Xi := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ munit d'une probabilité comme sur Ω , avec un paramètre s appelé **densité d'accroissement** qu'un sommet soit ouvert. On notera μ les éléments de Ξ .

Définition 11. *L'accroissement du graphe G est le graphe défini à partir des configurations ω et μ de la façon suivante :*

$$G^{\text{acc}}(\omega, \mu) = G(\omega) \cup \left(\bigcup_{x, \mu(x)=1} \{x + F(x, \omega)\} \right)$$

où $G(\omega)$ désigne le graphe des arêtes ouvertes sous la configuration ω .

Nous allons maintenant considérer l'espace produit $\Omega \times \Xi$, dont la probabilité $\mathbb{P}_{p,s}$ dépend de deux paramètres et nous allons regarder pour quelles valeurs de ceux-ci on obtient un cluster infini.

Définition 12. *On définit la **probabilité de percolation accrue** par*

$$\theta^{\text{acc}}(p, s) = \mathbb{P}_{p,s}(0 \text{ appartient à un cluster infini de } G^{\text{acc}})$$

et le **point critique de percolation accrue** est alors défini par

$$p_c^{\text{acc}}(F, s) = \inf\{p, \theta^{\text{acc}}(p, s) > 0\}.$$

Remarquons que le point critique dépend de la fonction d'accroissement choisie mais aussi de la densité d'accroissement. Afin de pouvoir donner plus d'informations sur le comportement de $\theta^{\text{acc}}(p, s)$, on a besoin de davantage d'hypothèses sur F .

Définition 13. *On dit que F est **monotone** si pour tout μ et pour tous $\omega \leq \omega'$, le graphe $G^{\text{acc}}(\omega, \mu)$ est un sous-graphe de $G^{\text{acc}}(\omega', \mu)$.*

Une conséquence directe du théorème 6 est que si F est monotone, alors θ^{acc} est croissante au sens large. Plus précisément, son comportement est très similaire à celui de θ . Ce comportement est présenté à la figure 5.1. La notion de point critique prend alors le sens voulu :

$$\begin{aligned} \theta^{\text{acc}}(p, s) &= 0 \text{ si } p < p_c^{\text{acc}}(F, s) \\ \theta^{\text{acc}}(p, s) &> 0 \text{ si } p > p_c^{\text{acc}}(F, s) \end{aligned}$$

Avant de pouvoir énoncer le théorème principal de cette section qui permet de conclure à de nombreuses inégalités strictes, on doit encore définir une dernière propriété :

Définition 14. *On dit que F est **essentielle** s'il existe une configuration ω telle que $G(\omega) \cup F(\omega)$ contient un chemin infini des deux côtés alors que $G(\omega)$ ne contient aucun chemin vérifiant cette propriété.*

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 10. *Soit $s > 0$. Si la fonction F est essentielle, alors $p_c^{\text{acc}}(F, s) < p_c$.*

Ce théorème a été démontré par Aizenman et Grimmett en 1991 (voir [AG91]). Il utilise des identités différentielles sur la fonction θ .

Un corollaire important de ceci est un résultat que nous avons utilisé à l'égalité 3.4. Celui-ci indique que si $S_h = \mathbb{Z}^2 \times [0, h]$, alors $p_c(S_h) > p_c$. Ce résultat s'étend à tout slab de dimension supérieure. En dimension d , ceux-ci sont définis de la manière suivante : $S_h = \mathbb{Z}^2 \times [0, h]^{d-2}$. On a alors le résultat suivant :

Corollaire 6. *Pour tout $h \geq 0$, on a $p_c(S_h) > p_c(S_{h+1})$.*

Preuve. Bien sûr, comme $S_h \subset S_{h+1}$, on a $p_c(S_h) \geq p_c(S_{h+1})$. On va chercher à utiliser le théorème précédent pour montrer l'inégalité stricte. On notera e_d le vecteur $(0, \dots, 0, 1)$.

Soit \mathbb{L} le graphe associé au réseau S_{h+1} . Celui-ci peut être construit à partir de \mathbb{L}^d en supprimant toutes les arêtes de la forme $\langle x, x + e_d \rangle$ avec $|x_d + 1|$ divisible par $h + 2$. La composante connexe de 0 du graphe résultant est alors le graphe \mathbb{L} .

On construit ensuite le graphe \mathbb{L}' dont la composante connexe associée à l'origine sera le réseau S_h . Celui-ci se forme alors à partir de \mathbb{L} en supprimant de nouveau toutes les arêtes de la forme $\langle x, x + e_d \rangle$ avec $|x_d + 1|$ divisible par $h + 1$.

La fonction d'accroissement consiste à rajouter de manière systématique les arêtes supprimées lors de la dernière étape. Cette fonction est essentielle (il n'est pas difficile de trouver un chemin infini dans S_{h+1} qui ne l'est pas dans S_h). Par le théorème précédent, on a donc : $p_c^{\text{acc}}(F, s) < p_c(S_h)$.

On remarque également que si $p = s$, alors il est équivalent de réaliser un processus de percolation sur \mathbb{L}' puis de faire le processus d'accroissement de graphe ou de réaliser directement la percolation sur \mathbb{L} . On en déduit que $\theta^{\text{acc}}(p, p) = \theta_{S_{h+1}}(p)$.

Finalement, on a bien $p_c(S_{h+1}) < p_c(S_h)$. □

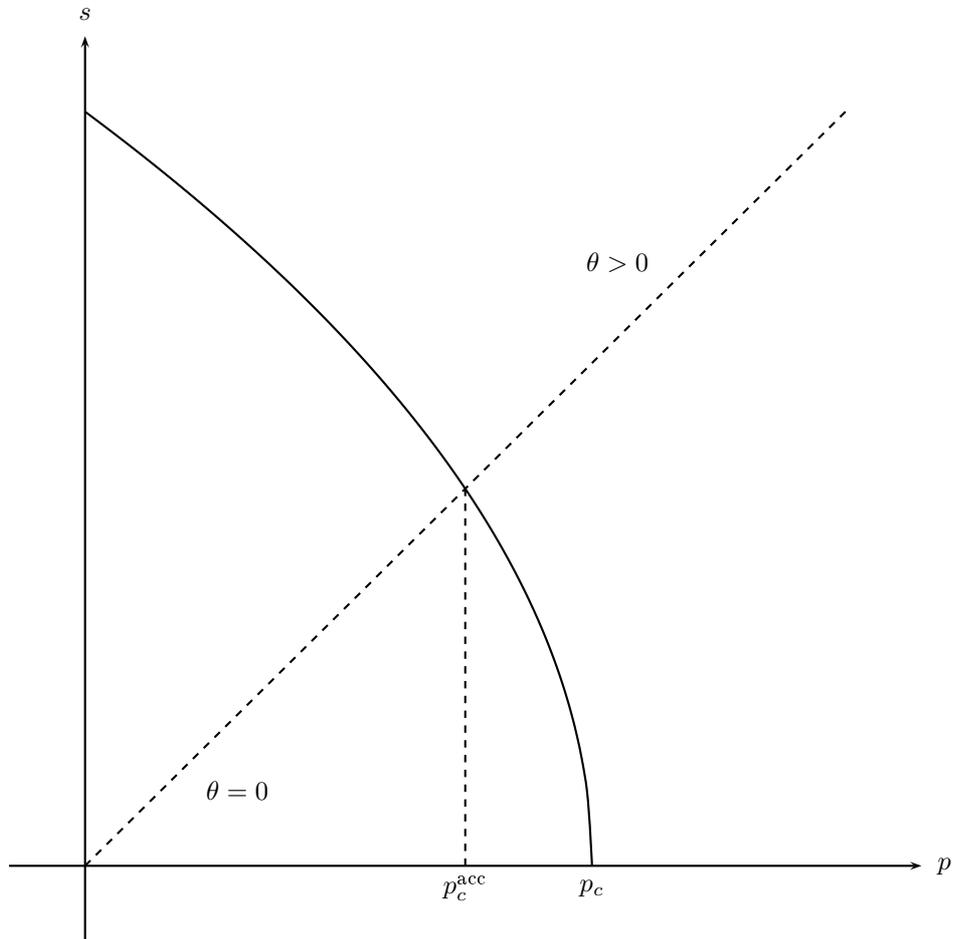


FIGURE 5.1 – Graphe de la probabilité de percolation accrue

Appendices

Annexe A

Un lemme d'analyse

Lemme 8. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante d'applications continues de E dans \mathbb{R} . On suppose que cette suite converge simplement vers une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est semi-continue supérieurement. Si l'on suppose de plus que f est croissante, alors f est continue à droite.

Preuve. On rappelle la définition de la semi-continuité supérieure. Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **semi-continue supérieurement** en $x_0 \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de x_0 dans E tel que pour tout $x \in U$,

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $x_0 \in E$. Cherchons un voisinage U comme ci-dessus pour la limite simple f . Comme f est limite simple d'une suite de fonctions décroissantes on a pour tout $x \in E$, pour tout $n \geq 0$,

$$f_n(x) \geq f(x).$$

Ainsi, si $n \geq 0$, $x \in E$,

$$f(x) = f_n(x) + (f(x) - f_n(x)) \leq f_n(x)$$

puis en remarquant que $f_n(x) = f_n(x_0) - f(x_0) + f(x_0) + f_n(x) - f_n(x_0)$, on obtient

$$f(x) \leq f(x_0) + (f_n(x_0) - f(x_0)) + (f_n(x) - f_n(x_0)).$$

Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par continuité de f_{n_0} choisissons aussi un voisinage U de x_0 dans E tel que pour tout $y \in U$

$$|f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc pour tout $x \in U$,

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \tag{A.1}$$

ce qui est bien le résultat voulu. Si l'on suppose de plus f croissante on obtient directement par [A.1](#) la continuité à droite de f en x_0 . \square

Remarque 9. Il suffit en fait de supposer les f_n semi-continues supérieurement. On a aussi montré qu'une fonction croissante et semi-continue supérieurement est continue à droite.

Annexe B

Espérance conditionnelle

B.1 Définition

On fixe dans cette partie un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ quelconque. Dans la pratique, lorsque l'on réalise une expérience aléatoire, on dispose parfois d'informations sur le résultat de cette expérience. Ces informations modifient intrinsèquement l'expérience. Ainsi, si on lance deux fois un dé, le résultat du premier tirage permet d'affiner la prédiction probabiliste de base portant sur la somme des deux dés. L'espérance conditionnelle formalise ce concept. Étant donné deux variables aléatoires X et Y , on appelle *espérance conditionnelle* de X sachant Y la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|Y]$ définie par $\mathbb{E}[X|Y] = \phi(Y)$ où

$$\phi(\omega) = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{Y=Y(\omega)\}}]}{\mathbb{P}(Y = Y(\omega))}.$$

Bien sûr, cette définition n'a pas de sens pour des variables continues par exemple, mais on va préciser cette définition afin qu'elle garde un sens. Avant de faire cela, insistons bien sur le fait que $\mathbb{E}[X|Y]$ reste une variable aléatoire. C'est la variable aléatoire qui à ω associe l'espérance de X sachant que Y prenait la valeur $Y(\omega)$. Rigoureusement, on définit l'espérance conditionnelle à l'aide du théorème suivant :

Théorème 11. *Soit \mathcal{B} une sous-tribu de \mathcal{A} , et soit X une variable aléatoire intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors il existe une unique variable aléatoire intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ que l'on note $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ telle que l'on ait :*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X \mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \mathbf{1}_B].$$

Preuve. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si X' et X'' sont intégrables et \mathcal{B} -mesurables vérifient

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X' \mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[X'' \mathbf{1}_B],$$

alors $X' - X'' = 0$. En considérant $B = \{X' \geq X''\}$ et son symétrique $B = \{X'' \geq X'\}$, on voit que $X' = X''$ presque sûrement.

Pour l'existence, on remarque qu'il est possible de décomposer X sous la forme $X = X^+ - X^-$, on peut supposer que X est positive. L'existence de X' découle alors du théorème de Radon-Nikodym appliqué à la mesure $Q(B) := \mathbb{E}[X \mathbf{1}_B]$. \square

Le théorème de Radon Nikodym nous assure également que si X est positive, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ l'est aussi.

Corollaire 7. *Pour toute variable aléatoire Z \mathcal{B} -mesurable bornée, on a également :*

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Z].$$

Preuve. On se place dans le cadre du résultat précédent. Remarquons tout d'abord que par linéarité de l'espérance, notre propriété est vérifiée dès que Z est une combinaison linéaire d'indicatrices. Puis, soit Z une variable aléatoire \mathcal{B} -mesurable bornée. Alors on sait qu'il existe une suite croissante

en valeur absolue $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires étagées qui converge presque sûrement vers Z . Mais alors on a bien par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XZ] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[XZ_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Z_n] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Z].\end{aligned}$$

□

Bien sûr, ces définitions s'étendent aux variables aléatoires positives non intégrables. Mais pour cela, on a besoin de quelques propriétés sur l'espérance conditionnelle. Tout d'abord, on remarque que les cas extrémaux où X est \mathcal{B} -mesurable et celui où X est indépendante de \mathcal{B} sont faciles à traiter.

Proposition 5. *Si X est \mathcal{B} -mesurable, alors presque sûrement $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = X$. De même, si X est indépendante de \mathcal{B} , alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X]$ presque sûrement.*

Preuve. Si X est \mathcal{B} -mesurable, alors $Z = X$ vérifie la propriété

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_B],$$

donc on a forcément $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = X$. De même, si X est indépendante de \mathcal{B} alors on a

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]\mathbf{1}_B],$$

donc $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X]$ convient

□

Dans les deux parties de la preuve ci-dessus, on utilise le fait que l'espérance conditionnelle est l'unique variable aléatoire vérifiant la propriété demandée dans le théorème 11 pour identifier celle-ci. Ainsi, on exhibe la variable qui convient et par unicité, on a bien identifié l'espérance conditionnelle. On va reprendre cette idée afin d'étudier de manière plus générale l'espérance conditionnelle.

Proposition 6. *L'application $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est une application linéaire.*

Preuve. Il suffit ici de vérifier que $\alpha\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] + \beta\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]$ vérifie la propriété de l'espérance conditionnelle de $\alpha X + \beta Y$, ce qui est bien le cas car l'espérance est linéaire et que $\alpha\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] + \beta\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]$ est bien \mathcal{B} mesurable.

□

Proposition 7. *L'application $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est croissante :*

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2, (X \leq Y \text{ presque sûrement} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}] \text{ presque sûrement}).$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la linéarité de $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ et du fait que si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \geq 0$.

□

Proposition 8. *On a l'égalité suivante :*

$$\forall X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X].$$

Preuve. On applique la définition de $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ avec $B = \omega$.

□

Proposition 9 (Inégalité triangulaire).

$$\forall X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \quad |\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]| \leq \mathbb{E}[|X|\mathcal{B}]$$

Preuve. On remarque que :

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]| = |\mathbb{E}[X^+|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{B}]| \leq |\mathbb{E}[X^+|\mathcal{B}]| + |\mathbb{E}[X^-|\mathcal{B}]| = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{B}] + \mathbb{E}[X^-|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[|X|\mathcal{B}]$$

puisque $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \geq 0$ dès que $X \geq 0$.

□

On a maintenant tous les outils nécessaires pour définir l'espérance conditionnelle de variables aléatoires positives non intégrables.

Théorème 12. *Soit \mathcal{B} une sous-tribu de \mathcal{A} , et soit X une variable aléatoire positive définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors la variable aléatoire*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] := \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X \wedge n|\mathcal{B}]$$

est bien définie. De plus, c'est l'unique variable aléatoire \mathcal{B} -mesurable telle que pour toute variable aléatoire Z \mathcal{B} -mesurable positive, on ait :

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Z].$$

Remarquons alors que l'on retrouve les mêmes propositions que dans le cas signé. Nous ne détaillons pas de nouveau les preuves.

B.2 Théorèmes de convergences

Théorème 13 (Convergence monotone). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de variables aléatoires positives. On note X la limite de cette suite. Alors on a :*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{B}].$$

Preuve. Comme $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est croissante, la suite $(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{B}])_n$ est aussi croissante de limite X' . Mais alors pour toute variable Z \mathcal{B} -mesurable positive, on a :

$$\mathbb{E}[XZ] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n Z] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{B}]Z] = \mathbb{E}[X'Z]$$

par le théorème de convergence monotone usuel. □

Théorème 14 (Lemme de Fatou). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives. Alors on a :*

$$\mathbb{E}[\liminf X_n|\mathcal{B}] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n|\mathcal{B}].$$

Preuve. On écrit $\liminf X_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq k} X_n$ et on utilise le théorème de convergence monotone précédent. □

Théorème 15. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires intégrables convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire X . Alors s'il existe Z intégrable telle que pour tout entier n , on ait $|X_n| \leq Z$ presque sûrement, on a :*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{B}].$$

Preuve. On applique deux fois le lemme de Fatou aux suites $Z - X_n$ et $Z + X_n$ □

B.3 Autres résultats utiles

L'espérance conditionnelle a quelques autres propriétés intéressantes que nous ne démontrerons pas, mais que nous citons à titre d'exemple.

Théorème 16 (Inégalité de Jensen). *Soit X une variable aléatoire intégrable et ϕ une fonction convexe. Alors on a :*

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{B}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}])$$

Proposition 10. *Soient X une variable aléatoire \mathcal{A} -mesurable et Y une variable aléatoire \mathcal{B} -mesurable. Alors dès que les expressions suivantes ont un sens, on a :*

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Y$$

Proposition 11. *Soient X une variable aléatoire et $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ deux sous tribus de \mathcal{A} . Alors on a :*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_2]|\mathcal{B}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1]$$

Le lecteur intéressé pourra trouver des démonstrations de ces propriétés ainsi qu'un cours sur les probabilités conditionnelles dans [Gal].

Annexe C

Martingales

C.1 Définition

Dans la vie, une martingale est une manière de tricher dans un jeu de hasard. Il s'agit en fait d'optimiser ses chances de gagner de l'argent. Pour cela, l'un des meilleurs outils se révèle être les probabilités. La théorie des martingales formalise donc ces notions en proposant un cadre pour étudier les suites de variables aléatoires lorsque celles-ci se déroulent les unes après les autres.

Bien sûr, la première chose à faire est de définir un espace de probabilité. Celui-ci sera noté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Afin de modéliser l'ordre dans lequel les expériences sont réalisées, on souhaite présenter différents états à notre espace de probabilité, correspondant à l'espace des possibles jusqu'à un moment donné. Cela nous conduit naturellement à la notion de filtration.

Définition 15. Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante au sens de l'inclusion de sous-tribus de \mathcal{F} . L'espace obtenu, noté $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$, est un espace probabilité filtré.

Une fois notre espace bien défini, on va pouvoir définir les variables aléatoires qui nous intéressent.

Définition 16. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire à temps discret sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ tel que pour tout $n \geq 0$, X_n soit \mathcal{F}_n -mesurable. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- Une **martingale** si : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$.
- Une **sous-martingale** si : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$.
- Une **sur-martingale** si : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$.

Remarquons tout d'abord que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale si et seulement si $(-X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sur-martingale. On en déduit que les propriétés suivantes qui seront souvent énoncées dans le cas des sous-martingales s'étendent naturellement aux sur-martingales.

En utilisant la proposition 11, on montre alors par récurrence que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, X_n = \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n].$$

C.2 Convergence

Lemme 9 (Doob-Kolmogorov). Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par rapport à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est à dire que pour tout n , on a $S_n = \mathbb{E}[S_{n+1} | X_1, \dots, X_n]$. On suppose que tous les $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont intégrables. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}[S_n^2].$$

Preuve. Posons $A_0 = \Omega$ et pour k entier, on définit par récurrence $A_k = \{\forall i \leq k, |S_i| < \varepsilon\}$ et $B_k = A_{k-1} \cap \{|S_k| \geq \varepsilon\}$ (avec $B_1 = \{|S_1| \geq \varepsilon\}$). On remarque alors que :

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) \cup A_k.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}[S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}] \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}[(S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}] + 2\mathbb{E}[S_i(S_n - S_i) \mathbf{1}_{B_i}] + \mathbb{E}[S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}] \right)\end{aligned}$$

Clairement, $\mathbb{E}[(S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}] \geq 0$ et par définition de B_i , on a aussi $\mathbb{E}[S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}] \geq \varepsilon^2 \mathbb{P}(B_i)$. De plus, on a :

$$\mathbb{E}[S_i(S_n - S_i) \mathbf{1}_{B_i}] = \mathbb{E}[S_i \mathbf{1}_{B_i} \mathbb{E}[S_n - S_i | X_1, \dots, X_n]] = 0.$$

On peut alors bien conclure en remarquant que :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon\right).$$

□

Théorème 17. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale dans \mathcal{L}^2 bornée par une constante M . Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement et dans \mathcal{L}^2 vers une variable aléatoire S .

Preuve. Remarquons tout d'abord que les variables aléatoires S_m et $S_{m+n} - S_m$ ne sont pas corrélées. En effet, on a :

$$\mathbb{E}[S_m(S_{m+n} - S_m)] = \mathbb{E}[S_m \mathbb{E}[S_{m+n} - S_m | X_1, \dots, X_m]] = 0.$$

On en déduit que pour tout m, n , on a $\mathbb{E}[S_{m+n}^2] = \mathbb{E}[S_m^2] + \mathbb{E}[(S_{m+n} - S_m)^2]$ et donc la suite $(\mathbb{E}[S_m^2])_{m \geq 0}$ est croissante. Mais comme elle est bornée, elle converge. Notons M sa limite.

Pour montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement, on va utiliser le critère de Cauchy de convergence dans \mathbb{R} . Notons donc C l'événement « La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy ». On a alors :

$$\begin{aligned}C &= \{\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall i, j \geq 0, |S_{m+i} - S_{m+j}| < \varepsilon\} \\ &= \{\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall i \geq 0, |S_{m+i} - S_m| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\forall i \geq 0, |S_{m+i} - S_m| < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{C} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m(\varepsilon)$ où $A_m(\varepsilon) = \{\exists i \geq 0, |S_{m+i} - S_m| < \varepsilon\}$. On remarque ensuite que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m(\varepsilon)$ est décroissant en ε . Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{C}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m(\varepsilon)\right) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_m(\varepsilon)).\end{aligned}$$

Pour montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement, il nous suffit donc de montrer que pour ε et m fixés, on a $\mathbb{P}(A_m(\varepsilon)) = 0$. En effet, la suite $Y_n = S_{m+n} - S_m$ est une martingale par rapport à elle-même :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{n+1} | X_1, \dots, X_{m+n}] | Y_1, \dots, Y_n] \\ &= \mathbb{E}[Y_n | Y_1, \dots, Y_n] \\ &= Y_n\end{aligned}$$

De plus, comme $\mathbb{E}[S_{m+n}^2] = \mathbb{E}[S_m^2] + \mathbb{E}[(S_{m+n} - S_m)^2]$, on a par les inégalités de Doob-Kolmogorov :

$$\mathbb{P}(\exists i \leq n, |S_{m+i} - S_m| < \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}[(S_{m+i} - S_m)^2] = \frac{M - \mathbb{E}[S_n]}{\varepsilon^2}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien que $\mathbb{P}(A_m(\varepsilon)) = 0$ et donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire S . Les inégalités de Fatou nous permettent alors de conclure que S est aussi dans \mathcal{L}^2 et que c'est la limite dans \mathcal{L}^2 de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_n - S)^2] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{m \rightarrow +\infty} (S_n - S_m)^2\right] \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(S_n - S_m)^2] \\ &= M - \mathbb{E}[S_n^2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Remarque 10. *Pour étudier plus en détail les martingales, le lecteur pourra consulter [Gri01].*

Annexe D

Ergodicité de \mathbb{P}_p

On introduit dans cette section une nouvelle de la loi du tout ou rien de Kolmogorov, particulièrement utile dans l'étude de la percolation sur des graphes dénombrables. On fixe $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Proposition 12. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ la tribu engendrée par (X_1, \dots, X_n) . On pose aussi $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$. Alors si $A \in \mathcal{F}_\infty$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ et $B \in \mathcal{F}_{n_0}$ tels que*

$$\mathbb{P}(A \Delta B) < \varepsilon$$

où l'on a noté $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la différence symétrique de A et B .

Preuve. Soient $A \in \mathcal{F}_\infty$ et $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$T_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n].$$

Comme la fonction $\mathbb{1}_A$ est \mathcal{L}^1 , le théorème de convergence des martingales montre que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement et dans \mathcal{L}^1 vers

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_\infty] = \mathbb{1}_A.$$

En particulier, cette suite converge en probabilité et si $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\mathbb{P}(|T_{n_0} - \mathbb{1}_A| < \eta) > 1 - \varepsilon.$$

On introduit les évènements $C = \{|T_{n_0} - \mathbb{1}_A| < \eta\}$ et $B = \{T_{n_0} \geq \frac{1}{2}\}$. Si C est réalisé, comme $0 < \eta < \frac{1}{2}$ et $\mathbb{1}_A \in \{0, 1\}$, la valeur de T_{n_0} détermine celle de $\mathbb{1}_A$. On a donc

$$B \cap C \subset A \quad \text{et} \quad \overline{B} \cap C \subset \overline{A}.$$

On en déduit en particulier que

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (B \cup \overline{C}) \setminus (B \cap C).$$

Or, $C = (\overline{B} \cap C) \cup (B \cap C)$, donc

$$\overline{C} = (B \cup \overline{C}) \cap \overline{(B \cap C)} = (B \cup \overline{C}) \setminus (B \cap C).$$

On a finalement obtenu

$$\mathbb{P}(A \Delta B) \leq 1 - \mathbb{P}(C) < \varepsilon$$

ce qui est bien le résultat recherché. \square

Définition 17. *Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes. Un **morphisme de graphes** de G est une application $\varphi : V \rightarrow V'$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $(x, y) \in V^2$, si $\{x, y\} \in E$ alors $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$. Un **isomorphisme de graphes** est un morphisme de graphes bijectif dont la réciproque est aussi un morphisme de graphes. On parle d'**automorphisme de graphes** lorsque $G = G'$. L'ensemble des automorphismes de graphes de G est un groupe, on le note $\text{Aut}(G)$. On dit que G est **transitif** si le groupe de ses automorphismes agit transitivement sur ses sommets.*

Remarque 11. Un automorphisme γ d'un graphe $G = (V, E)$ induit aussi une bijection sur les arêtes via $\gamma(\{x, y\}) = \{\gamma(x), \gamma(y)\}$ où $\{x, y\} \in E$.

Définition 18. Soit $G = (V, E)$ un graphe dénombrable, localement fini et connexe. Soit Γ un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$. Une probabilité \mathbb{P}^1 sur $\{0, 1\}^E$ est dite Γ -invariante si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout A évènement,

$$\mathbb{P}(\gamma A) = \mathbb{P}(A)$$

où l'on a noté, si A dépend de l'état d'un ensemble X d'arêtes, γA l'évènement de \mathcal{A} dépendant de l'état des arêtes de γX . Cette définition a bien un sens par la remarque précédente.

Proposition 13. Soit $G = (V, E)$ un graphe dénombrable, localement fini et connexe. On peut définir sur G un modèle de percolation analogue à celui présenté au 1.2, en particulier on peut définir un espace probabilisé $(\{0, 1\}^E, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p)$ où \mathcal{A} est la tribu engendrée par les cylindres de dimension finie. On dispose alors du résultat suivant : $\forall p \in [0, 1], \mathbb{P}_p$ est $\text{Aut}(G)$ -invariante.

Preuve. Soit $\gamma \in \text{Aut}(G)$. On considère $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(\gamma A)\}$. Alors \mathcal{T} est une tribu contenant les cylindres élémentaires (par définition de \mathcal{P}_p), donc contient la tribu qu'ils engendrent c'est à dire \mathcal{A} . \square

Définition 19. Soit $G = (V, E)$ un graphe dénombrable, localement fini et connexe. Soit Γ un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$. On note \mathcal{A}_Γ la tribu des évènements invariants par l'action de Γ . Une probabilité \mathbb{P} sur $\{0, 1\}^E$ est dite Γ -ergodique si, pour tout $A \in \mathcal{A}_\Gamma$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Théorème 18. Si G est un graphe dénombrable localement fini, connexe, transitif et que les orbites sous l'action de Γ sont infinies, alors \mathbb{P}_p est Γ -ergodique.

Preuve. Soient $A \in \mathcal{A}_\Gamma$ et $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 12, il existe un évènement $B \in \mathcal{A}$ qui ne dépend que de l'état d'arêtes e appartenant à un ensemble fini X et tel que $\mathbb{P}_p(A \Delta B) < \varepsilon$. Les orbites étant infinies, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $X \cap \gamma X = \emptyset$. Ainsi, les évènements B et γB sont indépendants. De plus, on a par la proposition 13

$$\mathbb{P}_p((\gamma A) \Delta (\gamma B)) = \mathbb{P}_p(\gamma(A \Delta B)) = \mathbb{P}_p(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Enfin, pour tous $C_1, C_2, D \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}_p((C_1 \cap D) \Delta (C_2 \cap D)) = \mathbb{P}_p(C_1 \cap D) + \mathbb{P}_p(C_2 \cap D) - 2\mathbb{P}_p(C_1 \cap C_2 \cap D),$$

de sorte que

$$|\mathbb{P}_p(C_1 \cap D) - \mathbb{P}_p(C_2 \cap D)| = \mathbb{P}_p((C_1 \cap D) \Delta (C_2 \cap D)) - 2(\mathbb{P}_p(C_2 \cap D) - \mathbb{P}_p(C_1 \cap C_2 \cap D))$$

et donc

$$|\mathbb{P}_p(C_1 \cap D) - \mathbb{P}_p(C_2 \cap D)| \leq \mathbb{P}_p((C_1 \cap D) \Delta (C_2 \cap D)) \leq \mathbb{P}_p(C_1 \Delta C_2).$$

Cette remarque permet ensuite d'écrire

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(A)^2| &= |\mathbb{P}_p(A \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq |\mathbb{P}_p(A \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(B \cap \gamma A)| + |\mathbb{P}_p(B \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(B \cap \gamma B)| \\ &\quad + |\mathbb{P}_p(B \cap \gamma B) - \mathbb{P}_p(B)^2| + |\mathbb{P}_p(B)^2 - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq \mathbb{P}_p(A \Delta B) + \mathbb{P}_p((\gamma A) \Delta (\gamma B)) + |\mathbb{P}_p(B)\mathbb{P}_p(\gamma B) - \mathbb{P}_p(B)^2| \\ &\quad + |\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(B)|(\mathbb{P}_p(A) + \mathbb{P}_p(B)) \\ &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(A)^2$, ce qui donne le résultat voulu. \square

Corollaire 8. En reprenant les notations de 3.2.1, on obtient que

$$\mathbb{P}_{p_c}(J) = 1.$$

1. On sous-entend que l'on définit un espace probabilisé $(\{0, 1\}^E, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Preuve. Les translations de la forme $x \mapsto x + (a, b, 0)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont des automorphismes du graphe défini sur le demi-espace \mathbb{H} . En particulier les orbites sous l'action du groupe Γ formé par ces automorphismes sont infinies. Par le théorème 18, comme J est un événement Γ -invariant, on obtient que

$$\mathbb{P}_{p_c}(J) \in \{0, 1\}.$$

Or on a aussi,

$$\mathbb{P}_{p_c}(J) \geq p_c \mathbb{P}_{p_c}(0 + (0, 0, 1) \leftrightarrow \infty \text{ dans } \mathbb{H} + (0, 0, 1)) = p_c \theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$$

donc $\mathbb{P}_{p_c}(J) = 1$.

□

Annexe E

Listing

Enfin, nous vous présentons ici le code source qui nous a permis de construire les données nécessaires à la réalisation du graphique 1.5. Le code aurait encore pu être amélioré, mais celui ci nous a permis d'obtenir la courbe présentée en quelques minutes.

```
1 //
2 // Cluster.cpp
3 // newPerco2D
4 //
5 //
6 //
7 //
8
9 #include "Cluster.hpp"
10 #include <iostream>
11
12 Cluster::Cluster(Cell *c) {
13     currentList = new List;
14     lastList = new List;
15     alive = true;
16     connected = false;
17     size = 0;
18     add(c);
19 }
20
21 Cluster::~Cluster() {
22     delete currentList;
23     delete lastList;
24 }
25
26 void Cluster::exchange() {
27     delete lastList;
28     lastList = currentList;
29     currentList = new List;
30 }
31
32 void Cluster::add(Cell * c) {
33     c->next = NULL;
34     currentList->add(c);
35     c->c = this;
36     ++size;
37 }
38
39 void Cluster::addold(Cell * c) {
```

```

40     c->next = NULL;
41     lastList->add(c);
42     c->c = this;
43     ++size;
44 }
45
46 void change(Cluster *dest, List *l) {
47     Cell *curr = l->first;
48     Cell *tmp = NULL;
49     while(curr) {
50         curr->c = dest;
51         tmp = curr;
52         curr = curr->next;
53     }
54 }
55
56 void Cluster::eat(Cluster* c) {
57     change(this, c->currentList);
58     change(this, c->lastList);
59
60     currentList->append(c->currentList);
61     lastList->append(c->lastList);
62
63     c->alive = false;
64     connected = c->connected || connected;
65     size += c->size;
66 }

```

```

1 //
2 // Cluster.hpp
3 // newPerco2D
4 //
5 // Created by grégoire szymanski on 03/04/2018.
6 // Copyright © 2018 grégoire szymanski. All rights reserved.
7 //
8
9 #ifndef Cluster_hpp
10 #define Cluster_hpp
11
12 #include "List.hpp"
13
14 class Cluster {
15 public:
16     Cluster(Cell *);
17     ~Cluster();
18
19     List *currentList;
20     List *lastList;
21
22     bool alive;
23     bool connected;
24     long size;
25
26     void exchange();
27     void add(Cell *);
28     void addold(Cell *);
29

```

```

30     void eat(Cluster*);
31 };
32
33
34 #endif /* Cluster_hpp */

1 //
2 // List.cpp
3 // newPerco2D
4 //
5 //
6 //
7
8 #include "List.hpp"
9
10 #include <iostream>
11
12 List::List() {
13     first = last = NULL;
14 }
15
16 void List::add(Cell* c) {
17     if(first != NULL) {
18         last->next = c;
19         last = c;
20     }
21     else {
22         first = last = c;
23     }
24 }
25
26 void List::check_integrity() {
27     Cell *curr = first;
28     Cell *tmp = NULL;
29     int i = 0;
30     while(curr) {
31         ++i;
32         tmp = curr;
33         curr = curr->next;
34     }
35     if (tmp != last) {
36         std::cout << "ERREUR" << std::endl;
37     }
38 }
39 void List::append(List* c) {
40     if(first) {
41         if(c->first) {
42             last->next = c->first;
43             last = c->last;
44         }
45     }
46     else {
47         first = c->first;
48         last = c->last;
49     }
50 }
51 }

```

```

52
53 bool List::empty() {
54     return first == NULL;
55 }

1 //
2 // List.hpp
3 // newPerco2D
4 //
5 // Created by grégoire szymanski on 02/04/2018.
6 // Copyright © 2018 grégoire szymanski. All rights reserved.
7 //
8
9 #ifndef List_hpp
10 #define List_hpp
11
12 #include <cstdlib>
13
14 typedef class Cluster Cluster;
15
16 class Cell {
17 public:
18     Cluster *c;
19     Cell *next;
20 };
21
22 class List {
23 public:
24     Cell *first;
25     Cell *last;
26
27
28     List();
29     void add(Cell*);
30     void append(List*);
31     bool empty();
32
33     void check_integrity();
34 };
35 #endif /* List_hpp */

1 //
2 // Sim.cpp
3 // newPerco2D
4 //
5 //
6 //
7
8 #include "Sim.hpp"
9 #include <vector>
10 #include <iostream>
11
12 Sim::Sim() {
13     size = 100;
14     proba = 0.2222222;
15     connect = 0;
16 }
17

```

```

18 void Sim::exec() {
19     Cell* current = (Cell*) malloc(size*size*sizeof(Cell));
20     Cell* last = (Cell*) malloc(size*size*sizeof(Cell));
21
22     for(long x(0); x<size; ++x) {
23         for(long y(0); y<size; ++y) {
24             for(long z(0); z<size; ++z) {
25                 current[size * y + z].next = NULL;
26                 current[size * y + z].c = NULL;
27
28                 if(x>0) {
29                     double p = ((double)rand()) / RAND_MAX;
30                     if(p < proba) {
31                         relyold(&current[size * y + z], &last[size * y + z]);
32                     }
33                 }
34                 else {
35                     Cluster *cl = new Cluster(&current[size * y + z]);
36                     clusters.push_back(cl);
37                     cl->connected = true;
38                 }
39
40                 if(y>0) {
41                     double p = ((double)rand()) / RAND_MAX;
42                     if(p < proba) {
43                         rely(&current[size * y + z], &current[size * (y-1) + z]);
44                     }
45                 }
46
47                 if(z>0) {
48                     double p = ((double)rand()) / RAND_MAX;
49                     if(p < proba) {
50                         rely(&current[size * y + z], &current[size * y + z-1]);
51                     }
52                 }
53
54             }
55         }
56
57         exchangeClusters();
58         Cell *tmp = last;
59         last = current;
60         current = tmp;
61     }
62
63
64     free(current);
65     free(last);
66 }
67
68 void Sim::exchangeClusters() {
69     for(int i = 0; i<clusters.size(); ++i) {
70         clusters.at(i)->exchange();
71     }
72 }
73
74 void Sim::rely(Cell *c1, Cell *c2) {

```

```

75     ++connect;
76
77     if(c1->c) {
78         if(c2->c) {
79             if(c1->c != c2->c)
80                 c1->c->eat(c2->c);
81         }
82         else {
83             c1->c->add(c2);
84         }
85     }
86     else if(c2->c) c2->c->add(c1);
87     else {
88         Cluster *c1 = new Cluster(c1);
89         clusters.push_back(c1);
90         c1->c->add(c2);
91     }
92 }
93
94 void Sim::relyold(Cell *c1, Cell *c2) {
95     if(c1->c) {
96         if(c2->c) {
97             if(c1->c != c2->c)
98                 c1->c->eat(c2->c);
99         }
100        else c1->c->addold(c2);
101    }
102    else if(c2->c) c2->c->add(c1);
103    else {
104        Cluster *c1 = new Cluster(c1);
105        clusters.push_back(c1);
106        c1->c->addold(c2);
107    }
108 }
109
110 void Sim::print(bool t) {
111
112     long volume = size * size * size;
113
114     long perco = 0;
115     long relied = 0;
116     long bigger = 0;
117
118     for(int i = 0; i<clusters.size(); ++i) {
119         if(clusters.at(i)->connected && clusters.at(i)->alive && !(clusters.at(i)
120             ->lastList->empty()))
121             ++perco;
122         if(clusters.at(i)->size > bigger)
123             bigger = clusters.at(i)->size;
124         if(clusters.at(i)->connected && clusters.at(i)->alive)
125             relied += clusters.at(i)->size;
126         delete clusters.at(i);
127     }
128
129     double theta = ((double) relied - size * size) / (volume - size * size);
130
131     //     theta           Cmax           Ncross           Tcross           Scross

```

```

131     if(t) {
132         std::cout << proba;
133         std::cout << "\t" << size;
134         std::cout << "\t" << volume;
135         std::cout << "\t" << connect;
136         std::cout << "\t" << relied;
137         std::cout << "\t" << theta;
138         std::cout << "\t" << bigger;
139         std::cout << "\t" << perco;
140         std::cout << std::endl;
141     }
142 }
143 else {
144     std::cout << proba << "\t" << theta << std::endl;
145     std::cout << proba << "\t" << theta << std::endl;
146 }
147 }
148 }

1 //
2 // Sim.hpp
3 // newPerco2D
4 //
5 // Created by grégoire szymanski on 03/04/2018.
6 // Copyright © 2018 grégoire szymanski. All rights reserved.
7 //
8
9 #ifndef Sim_hpp
10 #define Sim_hpp
11
12 #include <stdio.h>
13 #include <cstdlib>
14 #include "Cluster.hpp"
15 #include <vector>
16 #include <array>
17
18 class Sim {
19 public:
20     Sim();
21
22     void exec();
23
24     long size;
25     double proba;
26     long connect;
27     std::vector<Cluster*> clusters;
28
29     void print(bool t = true);
30
31 private:
32     void exchangeClusters();
33     void rely(Cell *c1, Cell *c2);
34     void relyold(Cell *c1, Cell *c2);
35 };
36
37 #endif /* Sim_hpp */

```

```

1 //
2 // main.cpp
3 // newPerco2D
4 //
5 //
6 //
7
8 #include <iostream>
9 #include "Sim.hpp"
10
11 int main(int argc, const char * argv[]) {
12     srand((unsigned int) time(0));
13
14     double p = 0;
15     bool complet = true;
16
17     if(complet) {
18         std::cout << "Proba:\t\t"
19             << "Taille:\t\t"
20             << "Volume:\t\t"
21             << "Connections:\t"
22             << "Reli s:\t\t"
23             << "Theta:\t\t"
24             << "Plus grand:\t"
25             << "Percolation:\t"
26             << std::endl;
27     }
28
29     while (p<0.23) {
30         Sim s;
31         s.size = 100;
32         s.proba = p;
33         s.exec();
34         s.print(complet);
35         p+=0.01;
36     }
37
38     while (p<0.28) {
39         Sim s;
40         s.size = 100;
41         s.proba = p;
42         s.exec();
43         s.print(complet);
44         p+=0.002;
45     }
46
47     while (p<0.5) {
48         Sim s;
49         s.size = 100;
50         s.proba = p;
51         s.exec();
52         s.print(complet);
53         p+=0.01;
54     }
55
56     while (p<1) {
57         Sim s;

```

```
58     s.size = 100;
59     s.proba = p;
60     s.exec();
61     s.print(complet);
62     p+=0.04;
63 }
64
65
66 return 0;
67 }
```

Table des figures

1.1	Partie du réseau cubique 2-dimensionnel \mathbb{L}^2	4
1.2	Exemple de cluster $C(0)$ en dimension 2	5
1.3	Le graphe \mathbb{L}^2 (en noir) et son graphe dual $(\mathbb{L}^2)^*$ (en vert)	8
1.4	Un cluster ouvert fini de l'origine, entouré par un circuit fermé dans le graphe dual	10
1.5	Approximation de la fonction θ	11
3.1	Forme d'une brique	21
3.2	Une brique admissible	22
3.3	Un tube et ses zones cibles	29
3.4	Exemple de « top stacking »	30
3.5	Exemple de « side stacking »	30
3.6	Exemple de branchements	31
3.7	Construction dans le cas $L \leq H$	32
3.8	Un « crabe »	35
5.1	Graphe de la probabilité de percolation accrue	42

Bibliographie

- [AG91] Michael Aizenman and Geoffrey Grimmett. Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models. *Journal of Statistical Physics*, 63(5/6) :817–835, 1991.
- [BGN91] David J. Barsky, Geoffrey R. Grimmett, and Charles M. Newman. Percolation in half-spaces : equality of critical densities and continuity of the percolation probability. *Probability Theory and Related Fields*, 90 :111–148, 1991.
- [Gal] Jean-François Le Gall. Intégration, probabilités et processus aléatoires.
- [Gri99] Geoffrey R. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition, 1999.
- [Gri01] Geoffrey R. Grimmett. *Probability and Random Processes*. OUP Oxford, 2001.
- [GS98] G. R. Grimmett and A. M. Stacey. Critical probabilities for site and bond percolation models. *The Annals of Probability*, 26(4) :1788–1812, 1998.