Corrigé du partiel

Durée : 2 heures. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet est constitué de trois exercices indépendants, qui ne sont pas ordonnés par difficulté.

Exercice 1 :
Posons $a = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'anneau $A = \mathbb{Z}[a,b]$. On rappelle que A est la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{C}$ engendrée par a et b.

1. L'anneau A est-il intègre ? Est-il noethérien ?

Solution : L'anneau A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$: il est donc intègre.

Par ailleurs, le morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z}[X,Y] \to A, X \mapsto \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, Y \mapsto \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ est surjectif. De plus, d'après le théorème de transfert de Hilbert, $\mathbb{Z}[X,Y]$ est noethérien. On en déduit que A est noethérien.

2. Montrer que A est un groupe abélien libre de rang 4, de base $(1,a,b,ab)$.

Solution : Notons $a = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$. On a $a^2 - a + 2 = 0$ et $b^2 - b + 4 = 0$. On en déduit que $(1,a,b,ab)$ est une famille génératrice de A en tant que $\mathbb{Z}$-module.

Montrons maintenant que la famille $(1,a,b,ab)$ est $\mathbb{Z}$-libre. Pour ce faire, il suffit de montrer que la famille $(1, i\sqrt{7}, i\sqrt{15}, \sqrt{105})$ est $\mathbb{Q}$-libre. Soit $(s,t,u,v) \in \mathbb{Q}^4$ tel que :

$$s + ti\sqrt{7} + ui\sqrt{15} + v\sqrt{105} = 0.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on a alors $s + v\sqrt{105} = 0$ et $ti\sqrt{7} + ui\sqrt{15} = 0$. Comme $\sqrt{105}$ est irrationnel, la relation $s + v\sqrt{105} = 0$ montre que $s = v = 0$. Par ailleurs, la relation $ti\sqrt{7} + ui\sqrt{15} = 0$ montre que $7t + u\sqrt{105} = 0$ et donc que $t = u = 0$ puisque $\sqrt{105}$ est irrationnel. On en déduit que $(s,t,u,v) = (0,0,0,0)$ et donc que la famille $(1, i\sqrt{7}, i\sqrt{15}, \sqrt{105})$ est $\mathbb{Q}$-libre. Cela prouve bien que A est isomorphe à $\mathbb{Z}^4$ et que $(1,a,b,ab)$ en est une base.

3. En déduire que tout élément de A est un entier algébrique. On rappelle qu'un entier algébrique est un nombre complexe z qui est annulé par un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Solution : Soit $c \in A$. Soit $B = \mathbb{Z}[c]$. C'est un sous-$\mathbb{Z}$-module de A. Comme A est un groupe abélien de type fini, B l'est aussi. Il existe donc $n \geq 1$ tel que $(1, c, c^2, ..., c^n)$ est une famille génératrice du groupe abélien B. On en déduit qu'il existe $(s_0, ..., s_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $c^{n+1} = a_n c^n + ...a_0$. Cela prouve que c est un entier algébrique.

4. Montrer que A contient exactement 4 idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ tels que $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En dresser la liste.

Solution 1 : On a déjà vu que l'on a un morphisme surjectif d'anneaux :

$$\phi : \mathbb{Z}[X,Y] \to A, X \mapsto a, Y \mapsto b.$$

Le noyau de ϕ contient $(X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4)$. Soit maintenant $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Il existe alors $(s,t,u,v) \in \mathbb{Z}^4$, $Q \in \mathbb{Z}[X,Y]$ et $R \in \mathbb{Z}[X,Y]$ tels que $P = s + tX + uY + vXY + (X^2 - X + 2)Q + (Y^2 - Y + 4)R$. On a alors :

$$0 = \phi(P) = s + ta + ub + vab.$$

Mais nous avons déjà montré que la famille $(1, a, b, ab)$ est $\mathbb{Z}$-libre. Donc $s = t = u = v = 0$, et $P \in (X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\phi) = (X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4)$ et que ϕ induit un isomorphisme :

$$\psi : \mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4) \to A.$$

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A tel que $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il contient forcément 2. Il correspond donc à un idéal maximal de :

$$\begin{aligned} A/(2) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X,Y]/(X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4) \\ &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X,Y]/(X^2 - X, Y^2 - Y). \end{aligned}$$

Les idéaux maximaux de $A/(2)$ sont $\mathfrak{n}_1 = (X,Y)$, $\mathfrak{n}_2 = (X, Y-1)$, $\mathfrak{n}_3 = (X-1, Y)$ et $\mathfrak{n}_4 = (X-1, Y-1)$. On a $(A/(2))/\mathfrak{n}_i \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour chaque i. Les idéaux $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_4$ de A correspondants sont donc les idéaux recherchés. On calcule :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &= (2,a,b) = (a,b), & \mathfrak{m}_2 &= (2,a,b-1) = (a,b-1), \\ \mathfrak{m}_3 &= (2,a-1,b) = (a-1,b), & \mathfrak{m}_4 &= (2,a-1,b-1) = (a-1,b-1). \end{aligned}$$

Solution 2 : On montre comme dans la solution 1 que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4)$.

Les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de A tels que $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont les noyaux des morphismes d'anneaux de A dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2-X+2, Y^2-Y+4)$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} f_1 &: X \mapsto 0, Y \mapsto 0, & f_2 &: X \mapsto 0, Y \mapsto 1, \\ f_3 &: X \mapsto 1, Y \mapsto 0, & f_4 &: X \mapsto 1, Y \mapsto 1. \end{aligned}$$

Les idéaux maximaux recherchés sont donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &= \mathrm{Ker}(f_1) = (a,b), & \mathfrak{m}_2 &= \mathrm{Ker}(f_2) = (a,b-1), \\ \mathfrak{m}_3 &= \mathrm{Ker}(f_3) = (a-1,b), & \mathfrak{m}_4 &= \mathrm{Ker}(f_4) = (a-1,b-1). \end{aligned}$$

5. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'élément $x \in A$ tel que $A = \mathbb{Z}[x]$.

Solution 1 : Supposons qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $A = \mathbb{Z}[x]$. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$. L'anneau A est alors un quotient de $C = \mathbb{Z}[X]/(P)$. On déduit alors de la question 4 que C contient au moins 4 idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ tels que $C/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cherchons maintenant les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de C tels que $C/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour ce faire, on calcule :

$$C/(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(P).$$

On considère la décomposition de P en produit de facteurs premiers dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$:

$$P = P_1^{r_1} \dots P_s^{r_s}.$$

Les idéaux maximaux de $C/(2)$ sont les $\mathfrak{n}_i = P_i\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/P\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$. On vérifie alors que $(C/(2))/\mathfrak{n}_i \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(P_i)$. Par conséquent, l'anneau $(C/(2))/\mathfrak{n}_i$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si, et seulement si, P_i est de degré 1. Comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ contient exactement deux polynômes de degré 1, on en déduit que C contient au plus 2 idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de C tels que $C/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: absurde !

Solution 2 : Supposons qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $A = \mathbb{Z}[x]$. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$. L'anneau A est alors un quotient de $C = \mathbb{Z}[X]/(P)$. On déduit alors de la question 4 que C contient au moins 4 idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ tels que $C/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cherchons maintenant les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de C tels que $C/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ils sont en bijection avec :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \{x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} | P(x) = 0\}.$$

Il y en a donc au plus 2 : absurde !

Nous voulons maintenant montrer que A n'est pas factoriel. Considérons la fonction :

$$f : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}, x \mapsto |A/(x)|.$$

6. Expliquer pourquoi la fonction f est bien définie.

Solution 1 : Considérons l'application $\mathbb{Z}$-linéaire :

$$m_x : A \to A, z \mapsto xz.$$

Soit M_x sa matrice dans une $\mathbb{Z}$-base de A. L'application m_x est injective. On en déduit que $\det(M_x) \neq 0$. Comme $M_x{}^t(\mathrm{Com}(M_x)) = \det(M_x)\mathrm{I}_4$, on voit que $\mathrm{Im}(m_x)$ contient $\det(M_x)A$. On en déduit que $A/(x)$ est un quotient de $A/\det(M_x)A \cong \mathbb{Z}^4/\det(M_x)\mathbb{Z}^4$, qui est fini. On en déduit que $f(x)$ est bien défini.

Solution 2 : L'anneau A est un groupe abélien libre de rang 4. L'idéal (x) de A est un sous-groupe abélien libre de rang 4 de A. Le quotient $A/(x)$ est donc nécessairement fini.

7. Montrer que f est multiplicative, c'est-à-dire que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in A \setminus \{0\}$.

Solution 1 : On écrit la suite exacte :

$$0 \to (x)/(xy) \to A/(xy) \to A/(x) \to 0.$$

On a alors :

$$f(xy) = f(x)|(x)/(xy)|.$$

Or $A/(y) \to (x)/(xy), z \mapsto xz$ est un isomorphisme de A-modules. On en déduit que :

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Solution 2 : Le théorème de la base adaptée pour les $\mathbb{Z}$-modules (qui est au programme d'algèbre 1) montre que $f(x) = |\det(m_x)|$, où m_x a été introduit dans la solution à la question 6. La multiplicativité de f découle alors du fait que $m_x \circ m_y = m_{xy}$.

8. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $x \in A$ a-t'on $f(x) = 1$? Que vaut $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{Z}$?

Solution : On a $f(x) = 1$ si, et seulement si, $x \in A^\times$. Si $x \in \mathbb{Z}$, la question 2 montre que l'on a un isomorphisme de groupes abéliens :

$$A/(x) \cong \mathbb{Z}^4/x\mathbb{Z}^4 \cong (\mathbb{Z}/x\mathbb{Z})^4.$$

On en déduit que $f(x) = x^4$.

9. Construire un automorphisme ϕ de A tel que $\phi(a) = \overline{a}$ et $\phi(b) = b$. Montrer que $f(x) = x\phi(x)\overline{x\phi(x)}$ pour tout $x \in A \setminus \{0\}$.

Solution : Comme A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4)$, la propriété universelle du quotient montre l'existence d'un unique morphisme d'anneaux $\phi : A \to A$ tel que $\phi(a) = \overline{a}$ et $\phi(b) = b$. On a $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}$, donc ϕ est un automorphisme de A. En particulier, pour tout $x \in A \setminus \{0\}$, on a $f(x) = f(\phi(x))$. Bien sûr, la conjugaison complexe étant un automorphisme de A, on a aussi $f(x) = f(\overline{x})$ pour tout $x \in A \setminus \{0\}$. A l'aide de la question 7, on en déduit que si $x \in A \setminus \{0\}$ et $z = x\phi(x)$, alors :

$$f(z\overline{z}) = f(x)f(\phi(x))f(\overline{x})f(\overline{\phi(x)}) = f(x)^4.$$

Fixons maintenant $x \in A\setminus\{0\}$ et notons $z = x\phi(x)$. En écrivant x dans la $\mathbb{Z}$-base $(1, a, b, ab)$ de A, on vérifie aisément que $z \in \mathbb{Z}[b]$, puis que $z\overline{z} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, d'après la question 8, $f(z\overline{z}) = (z\overline{z})^4$. Comme $f(x)$ et $z\overline{z}$ sont dans $\mathbb{N}$, l'égalité $f(x)^4 = f(z\overline{z})$ montre que $f(x) = z\overline{z}$.

10. En déduire qu'il n'existe pas d'élément $x \in A \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = 2$.

Solution : Soit $x \in A \setminus \{0\}$. Comme dans la question précédente, posons $z = x\phi(x) \in \mathbb{Z}[b]$. Écrivons alors $z = s + t\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ avec $s, t \in \mathbb{Z}$. On a alors $f(x) = \left(s + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{15t^2}{4}$. Si $f(x) = 2$, alors $(2s + t)^2 + 15t^2 = 8$: impossible ! Donc $f(x) \neq 2$.

11. Montrer que a est irréductible dans A, puis que A n'est pas factoriel.

Solution 1 : Soient $x, y \in A$ tels que $xy = a$. On a alors $f(x)f(y) = f(a)$. D'après la question 9, on a $f(a) = a\overline{a}\overline{a}\overline{\overline{a}} = 4$. Comme $f(x)$ et $f(y)$ sont différents de 2, cela implique que $f(x) = 1$ ou $f(y) = 1$, et donc que $x \in A^\times$ ou $y \in A^\times$. On en déduit que a est irréductible.

Par ailleurs, on a des isomorphismes d'anneaux :

$$A/(a) \cong \mathbb{Z}[X,Y]/(X, X^2 - X + 2, Y^2 - Y + 4) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[Y]/(Y^2 - Y) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

L'anneau $A/(a)$ n'est donc pas intègre, et l'idéal (a) n'est pas premier. On en déduit que A n'est pas factoriel.

Solution 2 : On montre l'irréductibilité de a comme dans la solution 1.

On remarque maintenant que : $4 = a^2\overline{a}^2 = b\overline{b}$. Supposons que a divise b ou $\overline{b} = 1 - b$. Il existe alors $\epsilon \in \{0, 1\}$, $\eta \in \{-1, 1\}$ et $c = c_0 + c_1 a + c_2 b + c_3 ab$ (avec $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$) tels que $ac = \epsilon + \eta b$. On a donc :

$$c_0 a + c_1(a - 2) + c_2 ab + c_3(ab - 2b) = \epsilon + \eta b,$$

d'où $-2c_3 = \eta b$: absurde ! Par conséquent, a est irréductible mais ne divise ni b ni $\overline{b}$: l'anneau A n'est donc pas factoriel.

Exercice 2 :

1. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. On note $f : A \to S^{-1}A$ le morphisme naturel. Soient I un idéal de A n'intersectant pas S et J un idéal de $S^{-1}A$. Rappeler pourquoi $J = f(f^{-1}(J))S^{-1}A$. A-t'on forcément $I = f^{-1}(f(I)S^{-1}A)$?

Solution : L'inclusion $f(f^{-1}(J))S^{-1}A \subseteq J$ est évidente. Considérons donc $x \in J$. Soient $a \in A$ et $s \in S$ tels que $x = \frac{a}{s}$. On a alors $f(a) \in J$. Cela montre que $a \in f^{-1}(J)$ et que $f(a) \in f(f^{-1}(J))$. On en déduit que $x = f(a) \cdot \frac{1}{s}$ est dans $f(f^{-1}(J))S^{-1}A$.

L'autre égalité est fausse. Prenons par exemple $A = \mathbb{Z}$, $S = \{2^k | k \in \mathbb{N}\}$ et $I = 6\mathbb{Z}$. Alors $I \cap S = \emptyset$ et $f^{-1}(f(I)S^{-1}A) = 3\mathbb{Z} \neq I$.

Soit k un corps. Considérons les k-algèbres $B = k(X) \otimes_k k(Y)$ et $C = k[X, Y]$. On note T la partie multiplicative de C constituée des polynômes non nuls de la forme $P(X)Q(Y)$.

2. Montrer que B est isomorphe à $T^{-1}C$ en tant que k-algèbre.

Solution 1 : Considérons les applications :

$$\begin{aligned} \phi_0 : k(X) \times k(Y) &\to T^{-1}C \\ (g, h) &\mapsto gh, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_0 : C &\to B \\ X &\mapsto X \otimes 1 \\ Y &\mapsto 1 \otimes Y. \end{aligned}$$

Comme ϕ_0 est k-bilinéaire, il induit un morphisme :

$$\phi : B \to T^{-1}C.$$

Comme $\psi_0(T) \subseteq B^\times$, il induit un morphisme :

$$\psi : T^{-1}C \to B.$$

On vérifie aisément que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

Solution 2 : Soient $S_1 = k[X]\setminus\{0\}$ et $S_2 = k[Y]\setminus\{0\}$. On a des isomorphismes canoniques de k-algèbres :

$$\begin{aligned} B &\cong (k(X) \otimes_{k[X]} k[X]) \otimes_k k[Y](\otimes_{k[Y]} k(Y)) \\ &\cong (k(X) \otimes_{k[X]} (k[X] \otimes_k k[Y])) \otimes_{k[Y]} k(Y) \\ &\cong (k(X) \otimes_{k[X]} k[X,Y]) \otimes_{k[Y]} k(Y) \\ &\cong (S_1^{-1}k[X] \otimes_{k[X]} k[X,Y]) \otimes_{k[Y]} k(Y) \\ &\cong S_1^{-1}k[X,Y] \otimes_{k[Y]} k(Y) \\ &\cong S_1^{-1}k[X,Y] \otimes_{k[Y]} S_2^{-1}k[Y] \\ &\cong S_2^{-1}(S_1^{-1}k[X,Y]) \\ &\cong (S_1 \cdot S_2)^{-1}k[X,Y]). \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que $T = S_1 \cdot S_2$.

3. En déduire que B est un anneau principal.

Solution : Soit $S_1 = k[X] \setminus \{0\}$. L'anneau B est intègre et, comme $S_1 \subseteq T$, c'est un localisé de $S_1^{-1}k[X,Y]$. Or $S_1^{-1}k[X,Y] \cong k(X)[Y]$ est principal. Donc d'après la question 1, l'anneau B est aussi principal.

Exercice 3 :

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier toutes les réponses.

1. Soient A un anneau, M un A-module et N_1 et N_2 deux sous-A-modules de M. Les A-modules M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si, et seulement si, $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

Solution : VRAI. On écrit la suite exacte :

$$0 \to M/(N_1 \cap N_2) \to M/N_1 \oplus M/N_2 \to M/(N_1 + N_2) \to 0.$$

Si M/N_1 et M/N_2 sont noethériens, $M/N_1 \oplus M/N_2$ l'est aussi et $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien. Réciproquement, si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien, alors $M/(N_1 + N_2)$ l'est aussi (puisque c'est un quotient de $M/(N_1 \cap N_2)$) : la suite exacte précédente permet alors de conclure que $M/N_1 \oplus M/N_2$ est noethérien. Il en est donc de même de $M/N_1 \oplus M/N_2$.

2. Si A est un anneau intègre et I et J deux idéaux de A, le morphisme $f : I \otimes_A J \to IJ, x \otimes y \mapsto xy$ est un isomorphisme.

Solution : FAUX. Prenons $A = \mathbb{C}[X,Y]$ et $I = J = (X,Y)$. Quitte à identifier $\mathbb{C}$ et A/I, on peut voir $\mathbb{C}$ comme un A-module. On verifie alors que l'application :

$$\phi : I \times I \to \mathbb{C}, (P,Q) \mapsto \frac{\partial P}{\partial X}(0,0) \cdot \frac{\partial Q}{\partial Y}(0,0)$$

est A-bilinéaire. Elle induit donc un morphisme :

$$\psi : I \otimes_A I \to \mathbb{C}.$$

Ce morphisme envoie $X \otimes Y - Y \otimes X$ sur 1. On en déduit que $X \otimes Y - Y \otimes X$ est non nul dans $I \otimes_A I$. Mais son image par f est nulle. Donc f n'est pas un isomorphisme.

Remarque : On pouvait aussi choisir $A = \mathbb{Z}[X]$ et $I = J = (2, X)$, puis remarquer que $f(2 \otimes X - X \otimes 2) = 0$ mais $2 \otimes X - X \otimes 2 \neq 0$ dans $I \otimes_A I$.

3. L'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie de Zariski ne possède aucune suite infinie strictement décroissante de fermés.

Solution : VRAI. Soit $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq ...$ une suite décroissante de fermés de $\mathbb{C}^n$. Soient $I_1, I_2, ...$ des idéaux de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que $V_k = V(I_k)$. On note $J_k = I_1 + ... + I_k$. On a alors $V_k = V(J_k)$ pour chaque k. La suite d'idéaux (J_k) est croissante. Elle doit donc stationner puisque $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est noethérien. On en déduit que la suite (V_k) doit aussi stationner.

4. Soient p et ℓ deux nombres premiers distincts. Pour tous $x \in \mathbb{Z}_p$ et $y \in \mathbb{Z}_\ell$, il existe une suite $(z_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui converge simultanément vers x dans $\mathbb{Z}_p$ et vers y dans $\mathbb{Z}_\ell$.

Solution : VRAI. Pour chaque $n > 0$, soit $z_n \in \mathbb{Z}$ dont la classe dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$) coïncide avec celle de x (resp. de y) dans $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{Z}_\ell/\ell^n\mathbb{Z}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$). Le lemme chinois garantit l'existence de z_n. On remarque alors que, pour chaque n, on a $v_p(x - z_n) \geq n$ et $v_\ell(y - z_n) \geq n$. Cela montre que la suite $(z_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge vers x dans $\mathbb{Z}_p$ et vers y dans $\mathbb{Z}_\ell$.