PARTIEL

Durée : 2 heures. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet est constitué de trois exercices indépendants, qui ne sont pas ordonnés par difficulté.

Exercice 1 :

Posons $a = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'anneau $A = \mathbb{Z}[a, b]$. On rappelle que A est la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{C}$ engendrée par a et b.

1. L'anneau A est-il intègre ? Est-il noethérien ?

2. Montrer que A est un groupe abélien libre de rang 4, de base $(1, a, b, ab)$.

3. En déduire que tout élément de A est un entier algébrique. On rappelle qu'un entier algébrique est un nombre complexe z qui est annulé par un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

4. Montrer que A contient exactement 4 idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ tels que $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En dresser la liste.

5. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'élément $x \in A$ tel que $A = \mathbb{Z}[x]$.

Nous voulons maintenant montrer que A n'est pas factoriel. Considérons la fonction :

$$f : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}, x \mapsto |A/(x)|.$$

6. Expliquer pourquoi la fonction f est bien définie.

7. Montrer que f est multiplicative, c'est-à-dire que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in A \setminus \{0\}$.

8. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $x \in A$ a-t'on $f(x) = 1$? Que vaut $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{Z}$?

9. Construire un automorphisme ϕ de A tel que $\phi(a) = \overline{a}$ et $\phi(b) = b$. Montrer que $f(x) = x\phi(x)\overline{x\phi(x)}$ pour tout $x \in A \setminus \{0\}$.

10. En déduire qu'il n'existe pas d'élément $x \in A \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = 2$.

11. Montrer que a est irréductible dans A, puis que A n'est pas factoriel.

Exercice 2 :

1. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. On note $f : A \to S^{-1}A$ le morphisme naturel. Soient I un idéal de A n'intersectant pas S et J un idéal de $S^{-1}A$. Rappeler pourquoi $J = f(f^{-1}(J))S^{-1}A$. A-t'on forcément $I = f^{-1}(f(I)S^{-1}A)$?

Soit k un corps. Considérons les k-algèbres $B = k(X) \otimes_k k(Y)$ et $C = k[X, Y]$. On note T la partie multiplicative de C constituée des polynômes non nuls de la forme $P(X)Q(Y)$.

2. Montrer que B est isomorphe à $T^{-1}C$ en tant que k-algèbre.

3. En déduire que B est un anneau principal.

Tournez la page, SVP.

Exercice 3 :

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier toutes les réponses.

1. Soient A un anneau, M un A-module et N_1 et N_2 deux sous-A-modules de M. Les A-modules M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si, et seulement si, $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

2. Si A est un anneau intègre et I et J deux idéaux de A, le morphisme $f : I \otimes_A J \to IJ, x \otimes y \mapsto xy$ est un isomorphisme.

3. L'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie de Zariski ne possède aucune suite infinie strictement décroissante de fermés.

4. Soient p et ℓ deux nombres premiers distincts. Pour tous $x \in \mathbb{Z}_p$ et $y \in \mathbb{Z}_\ell$, il existe une suite $(z_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui converge simultanément vers x dans $\mathbb{Z}_p$ et vers y dans $\mathbb{Z}_\ell$.

$\star\star\star$ **Fin du sujet** $\star\star\star$