Exercice 2.

Soit $\alpha > 1/2$ et D_α l'ouvert de C défini par: $D_\alpha = \{z = re^{i\theta}/r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2\alpha}\}$.
Soit f une fonction définie et continue dans l'adhérence de D_α , analytique dans D_α. On suppose qu'il existe un réel $c > 0$ et $0 < \beta < \alpha$ tels que: $\forall z \in D_\alpha, |f(z)| \leq ce^{|z|^\beta}$. On suppose f bornée par M sur la frontière FrD_α et on se propose de montrer que: $sup_{z\in D_\alpha}|f(z)| = sup_{z\in FrD_\alpha}|f(z)|$.

On fixe $\epsilon > 0$ et $\gamma \in]\beta, \alpha[$. On pose $F(z) = e^{\epsilon z^\gamma} f(z)$.

a) Montrer que pour $z \in FrD_\alpha, |F(z)| \leq M$.

b) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que si $z \in D_\alpha, |z| \geq R$ alors $|F(z) \leq M$.

c) Montrer que $\forall z \in D_\alpha$, avec $z = re^{i\theta}$, $|f(z)| \leq Me^{\epsilon r^\gamma cos(\gamma\theta)}$ et conclure.

Exercice 3.

Soit U^+ un ouvert dans le demi-espace supérieur $\{z; Im(z) > 0)$ dont la frontière contient un intervalle ouvert non vide I de R. Soit U^- le symétrique de U^+ par rapport à l'axe réel, et $U = U^+ \cup I \cup U^-$, que l'on suppose ouvert.

a) Soit $f : U \to C$ une fonction continue, qui est holomorphe dans U^+ et U^-. Montrer que f est holomorphe dans U tout entier.

b) Soit f une fonction continue sur $U^+ \cup I$, analytique dans U^+ et à valeurs réelles sur I. Montrer que f a un prolongement analytique F sur U, et que F satisfait à : $F(z) = \bar{f}(\bar{z})$.

Exercice 4.

1. Soit $c \in C, r > 0$ et D le disque ouvert d centre c et rayon r. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite bornée de fonctions holomorphes dans D. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur tout compact

(ii) Pour tout entier $k \geq 0$, la suite numérique $(f_n^{(k)}(c))_{n\in N}$ est convergente.

(Pour établir que (ii) implique (i), on pourra considérer les développements en série entière des f_n en c et contrôler leurs coefficients pour voir que leurs limites définissent une série entière de rayon de convergence au moins r).

2. Soit U un ouvert connexe, et $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions holomorphes dans U qui est localement bornée. Montrer que cette suite converge uniformément sur tout compact si et seulement si il existe $c \in U$ tel que pour tout entier $k \geq 0$, la suite numérique $(f_n^{(k)}(c))_{n\in N}$ est convergente.