Analyse complexe et théorie spectrale

Examen partiel du 16 avril 2008

Durée: 2h30

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1.

Soit D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Soit $f : D \to \mathbf{C}$ une application holomorphe injective telle que $f(0) = 0, |f'(0)| \leq 1$ et $D \subset f(D)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{C}$, $|c| = 1$ tel que $\forall z \in D, f(z) = cz$.

Exercice 2.

Soit α un réel strictement positif, $\alpha \leq \pi$, et $\Omega = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z| < 1, -\alpha < arg(z) < \alpha\}$; Soit f une fonction holomorphe bornée dans Ω telle que $lim_{z \to 0^+} f(z) = L$, où la limite est prise pour z dans le segment $]0, 1[$. Soit $\delta \in]0, \alpha[$. On se propose de montrer que $lim_{z \to 0} f(z) = L$, uniformément pour z dans le secteur fermé $-\alpha + \delta \leq arg(z) \leq \alpha - \delta$.

a) Soit $f_n(z) = f(\frac{z}{2^n})$. Montrer que que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction constante égale à L.

b) Soit $K = \{z \in \Omega; \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}, -\alpha + \delta \leq arg(z) \leq \alpha - \delta\}$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer, en utilisant la convergence uniforme de la suite f_n sur K qu'il existe $n > 0$ tel que si $0 < |z| < 2^{-n}$ et $-\alpha + \delta \leq arg(z) \leq \alpha - \delta\}$, alors $|f(z) - L| < \epsilon$. Conclure.

Exercice 3.

1. Le but de cette question est de calculer l'intégrale: $\int_0^\pi logsin\theta d\theta$.

On considère le rectangle de sommets 0, π, $\pi + iY$ et iY, et afin d'éviter les points 0 et π les quarts de cercles centrés en 0 et π de rayon δ.

a) Justifier l'existence d'un logarithme holomorphe de la fonction $(1 - e^{2iz})$ pour $z = x + iy$ en dehors des demi-droites $x = n\pi, y \leq 0$.

b) Montrer que $\int_0^\pi log(-2ie^{ix}sinx)dx = 0$

c) Conclure.

Exercice 4.

1. Soit f une fonction holomorphe dans le disque ouvert de centre 0 et rayon R, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $r \in]0, R[$ tel que soit le seul zéro de f dans le disque ouvert de centre 0 et rayon r.

b)Pour $0 < \rho < r$, soit $m = inf\{|f(t)|; |t| = \rho\}$. Pour $|w| < m$, montrer que l'équation $f(z) = w$ possède une unique solution $g(w)$, et que la fonction g ainsi définie est holomorphe.

b) Montrer que les coefficients du dévelop- pement en série de g : $g(w) = \sum_{n\geq 1} a_n w^n$ sont donnés par: $a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{|t|=\rho} \frac{dt}{(f(t))^n}$.

c) Montrer que l'on a aussi: $a_n = \frac{1}{n!}\{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(\frac{t}{f(t)})^n]\}(0)$.

2. a) Soit $\lambda > 1$. Montrer que la fonction $h(z) = \lambda - z - e^{-z}$ possède un unique zéro dans le demi-plan $\{Re(z) \geq 0\}$.

b) Soit $z(\lambda)$ cet unique zéro. Donner $z(\lambda)$ comme somme d'une série de fonctions. (On pourra poser $z = \lambda + s$, montrer que s est solution d'une équation de la forme $f(s) = -e^{-\lambda}$ et utiliser 1.).