FIMFA 2008/2009
Mercredi 1er avril 2009

ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE
DURÉE 2 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

1. Singularité essentielle et Théorème de Picard

Le but de ce problème est d'obtenir une démonstration géométrique, relativement élémentaire, du "grand théorème de Picard" dont on rappelle l'énoncé :

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité épointé $B^* = B(0,1) \setminus \{0\}$, avec une singularité essentielle en 0.
Alors, pour tout $s \in]0,1[$, l'image de $B(0,s) \setminus \{0\}$ par f est $\mathbf{C}$ privé d'au plus un point.

Ce résultat est une extension non triviale du "petit théorème de Picard" qui ne considère que le cas où la partie non singulière du développement de Laurent de f en 0 est identiquement nulle.

1.1. **Préliminaire : stratégie de preuve.**

L'idée sous-jacente à la preuve proposée ici consiste à considérer le point ∞ comme les autres points du plan complexe, en identifiant $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ à la sphère de Riemann $\mathbf{S}^2$ via la projection stéréographique. On peut alors voir les fonctions méromorphes comme des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Etape 1. Notion de compacité

On doit alors introduire une notion de convergence qui autorise la convergence vers ∞, et la notion de compacité correspondante.

Définition : Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions de U dans $\mathbf{C}$. On dit que $\mathcal{F}$ est normale si de toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}$, on peut extraire
- une sous-suite (g_n) convergeant uniformément sur tout compact K de U;
- ou une sous-suite (g_n) divergeant uniformément sur tout compact K de U, i.e.

$$\forall R > 0, \quad \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad \forall z \in K, \quad |g_n(z)| > R.$$

Le théorème de Marty montre que la notion de famille normale est associée à une condition d'équicontinuité, quand on l'exprime dans la bonne métrique. Cette métrique sur $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ est en fait héritée de la métrique euclidienne sur la sphère $\mathbf{S}^2$:

$$\sigma(z) = \frac{2}{1+|z|^2}.$$

Etape 2. Théorème de Montel

On peut alors établir une condition géométrique suffisante pour qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur un ouvert U soit normale (condition qui s'exprime simplement sur les images $f(U)$ pour $f \in \mathcal{F}$).
Ce résultat dû à Montel repose sur la version géométrique du lemme de Schwarz.

Etape 3. Etude de la singularité

1.2. **Théorème de Marty.** La première partie de la preuve consiste donc à établir le théorème de Marty :

Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur U.
Alors, $\mathcal{F}$ est normale si et seulement si, pour tout compact K de U, il existe une constante $M_K > 0$ telle que

$$(*) \qquad \forall z \in K, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M_K.$$

Pour commencer, on suppose que pour tout compact K de U, il existe une constante M_K telle que la condition $(*)$ est satisfaite. On se donne alors $z_0 \in U$ et une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}$.

1) Montrer que si la suite $(|f_n(z_0)|)_n$ est bornée, alors les fonctions f_n sont uniformément bornées dans un voisinage de z_0.

2) Montrer que si la suite $(|f_n(z_0)|)_n$ tend vers ∞, alors les fonctions f_n tendent uniformément vers ∞ dans un voisinage de z_0. (On pourra utiliser le théorème de l'argument).

3) Conclure que $\mathcal{F}$ est normale.

Reste alors à prouver la réciproque. On suppose donc que $\mathcal{F}$ est normale.

4) Pour tout $f \in \mathcal{F}$, on définit la fonction $f^*\sigma$

$$f^*\sigma(z) = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Soit K un compact de U. Montrer que les fonctions $\{f^*\sigma \,/\, f \in \mathcal{F}\}$ sont uniformément bornées sur K.

1.3. **Théorème de Montel.** Le résultat central à établir est le théorème de Montel :

Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, et a, b des éléments distincts de $\mathbf{C}$.
Si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \{a, b\}$, alors $\mathcal{F}$ est normale.

1) Montrer qu'on peut toujours se ramener au cas où $a = 0$ et $b = 1$, puis qu'il suffit d'étudier le cas où $U = B(z_0, \alpha)$, et enfin qu'on peut supposer $z_0 = 0$ et $\alpha = 1$.

2) On définit sur $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$ la métrique strictement positive μ par

$$\mu(z) = \left(\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right) \left(\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}} \right)$$

- Montrer que la courbure de μ est uniformément majorée par une constante strictement négative $-C_\mu < 0$

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\}, \quad \kappa_\mu(z) \leq -C_\mu.$$

- Montrer qu'il existe une constante strictement positive $C_\sigma > 0$ telle que la métrique σ définie sur $\mathbf{C}$ par

$$\sigma(z) = \frac{2}{1+|z|^2},$$

satisfait

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\}, \quad \sigma(z) \leq C_\sigma \mu(z).$$

3) Question de cours : démontrer la version géométrique du lemme de Schwarz

Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et μ une métrique strictement positive sur U de courbure strictement négative $\kappa_\mu \leq -C_\mu$.
Si f est une fonction holomorphe de $B(0,1)$ dans U , alors

$$f^*\mu \leq \frac{2}{\sqrt{C_\mu}} \rho_0,$$

où ρ_0 est la métrique de Poincaré définie sur $B(0,1)$ par $\rho_0(z) = (1-|z|^2)^{-1}$.

On pourra étudier le maximum de la fonction $\log v_r$, où v_r est définie sur $B(0,r)$ par

$$v_r(z) = \frac{\sqrt{C_\mu}}{2} f^*\mu \, \frac{r}{r^2 - |z|^2} \, .$$

4) Déduire des deux questions précédentes qu'il existe une constante C telle que, pour tout $f \in \mathcal{F}$,

$$f^*\sigma \leq C\rho_0 \text{ sur } B(0,1).$$

Conclure en utilisant le théorème de Marty.

1.4. **Preuve du théorème de Picard.** Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité épointé $B^* = B(0,1) \setminus \{0\}$, dont l'image omet les valeurs a et b ($a \neq b$). On définit la suite (f_n) de fonctions holomorphes sur B^* par

$$f_n(z) = f(z/n).$$

1) Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n), notée (g_n), qui converge uniformément sur tout compact K de B^* ou qui diverge uniformément sur tout compact K de B^*.

2) Si (g_n) converge uniformément sur tout compact K de B^*, prouver en utilisant le principe du maximum que 0 est une singularité éliminable de f.

3) Si (g_n) diverge uniformément sur tout compact K de B^*, prouver par un argument similaire que 0 est un pôle de f.

4) Conclure la preuve du théorème de Picard.

2. Equation de Bezout

Soient f_1, f_2 deux fonctions holomorphes au voisinage du disque fermé $\bar{B} = \bar{B}(0,1)$ sans zéro sur ∂B, et sans zéro commun sur B. On pose $F = f_1 f_2$, et on définit la fonction G sur B par

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+} \frac{1}{F(\zeta)} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

1) Montrer que G est holomorphe sur B, puis en utilisant le théorème des résidus, montrer que G appartient à l'idéal de l'anneau des fonctions holomorphes sur B, engendré par f_1 et f_2.

2) Montrer que pour tout $z \in B$,

$$1 - G(z) = \frac{F(z)}{2i\pi} \int_{\partial B^+} \frac{d\zeta}{F(\zeta)(\zeta - z)}\,.$$

3) Conclure qu'il existe des fonctions g_1, g_2 holomorphes sur B telles que

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 \equiv 1 \text{ sur } B\,.$$

On suppose maintenant que P_1 et P_2 sont deux polynômes sans zéro commun, avec $\deg(P_1) > 0$. On pose

$$Q_1(z) = \sum_{a \,/\, P_2(a)=0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_2(z) - P_2}{z - \cdot}, a \right)\,,$$

$$Q_2(z) = \sum_{a \,/\, P_1(a)=0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_1(z) - P_1}{z - \cdot}, a \right)\,.$$

4) Montrer qu'on a

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \equiv 1 \text{ sur } \mathbf{C}\,.$$

Les fonctions Q_1 et Q_2 sont-elles polynomiales?