FIMFA 2009/2010
Mercredi 7 avril 2010

ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE
DURÉE 2 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

1. Une caractérisation de la simple connexité

Par définition, la sphère de Riemann est l'espace topologique $\mathcal{S}^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ pour lequel une base de voisinages de ∞ est formée des complémentaires dans $\mathcal{S}^2$ des compacts de $\mathbf{C}$, et une base de voisinages de $a \in \mathbf{C}$ est formée des disques ouverts de centre a. L'objectif de ce problème est d'obtenir une caractérisation des ouverts simplement connexes de $\mathcal{S}^2$, c'est-à-dire des ouverts connexes de $\mathcal{S}^2$ dans lesquels tout lacet est homotope à un point.

Plus précisément, l'énoncé qu'on se propose de montrer est le suivant : *Soit U un ouvert connexe de $\mathcal{S}^2$. Alors U est simplement connexe si et seulement si $\mathcal{S}^2 \setminus U$ est connexe.*

1.1. **Soit $U \neq \mathcal{S}^2$ un ouvert simplement connexe.** Supposons que $\mathcal{S}^2 \setminus U$ n'est pas connexe.

1) Montrer qu'il suffit de considérer le cas où $U \subset \mathbf{C}$, et qu'on peut supposer de plus que 0 appartient à une composante connexe compacte K de $\mathbf{C} \setminus U$.

On définit alors

$$F = (\mathcal{S}^2 \setminus U) \setminus K\,, \quad F_1 = \{z \in \mathbf{C} \,/\, z \in F \text{ ou } |z| \geq R+1\} \text{ où } K \subset B(0,R)$$
$$\text{et } T = \{z \in \mathbf{C} \,/\, d(z, K \cup F_1) \geq \frac{1}{3} d(K, F_1)\}\,.$$

2) Construire une fonction φ continue sur $\mathbf{C}$, dont la restriction à T est une détermination holomorphe du logarithme. On pourra utiliser le corollaire suivant du théorème de Stone-Weierstrass :

<u>Théorème de Tietze</u> : *Soient E un espace métrique, et F un compact non vide de E. Alors toute fonction continue de F dans $\mathbf{C}$ se prolonge en une fonction continue de E dans $\mathbf{C}$.*

On considère alors la fonction ψ définie par

$$\psi(z) = z \text{ si } z \in T \cup \{z \in \mathbf{C} \,/\, d(z, F_1) < \frac{1}{3} d(K, F_1)\}$$
$$\psi(z) = \exp(\varphi(z)) \text{ si } z \in T \cup \{z \in \mathbf{C} \,/\, d(z, K) < \frac{1}{3} d(K, F_1)\}\,.$$

et la famille de lacets $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$ définie par

$$\gamma_t(\theta) = \psi\big((R+1)(1 - t(1 - e^{i\theta}))\big)\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

3) Montrer que $\mathrm{Ind}(0, \gamma_0) = \mathrm{Ind}(0, \gamma_1)$. En déduire une contradiction.

1.2. **Soit $U \neq \mathcal{S}^2$ un ouvert connexe de complémentaire connexe.** Comme précédemment, on se ramène au cas où $U \subset \mathbf{C}$. On considère alors $\gamma : [0,1] \to U$ un lacet de classe C^1 par morceaux.

1) Montrer que $X = \gamma([0,1]) \cup \{w \in \mathbf{C} \,/\, \mathrm{Ind}(w, \gamma) \neq 0\}$ est un compact contenu dans U.

2) En considérant un quadrillage du plan en carrés de côté $d(X, \mathcal{S}^2 \setminus U)/3$, construire un ensemble de segments $(I_\alpha)_{\alpha \in \{1,\ldots,N\}}$ inclus dans $U \setminus X$ et tels que, pour toute fonction holomorphe sur U,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_\gamma \frac{1}{2i\pi} \int_{I_\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0\,.$$

3) En déduire que U est simplement connexe.

2. Fonctions Γ et ζ de Riemann

2.1. Fonction Γ.

1) Montrer soigneusement que la fonction Γ définie sur $U = \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe.

2) Etablir l'identité

$$\forall z \in U, \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)}\,.$$

En déduire que Γ se prolonge de façon analytique sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}^-$.

2.2. Fonction ζ et nombres premiers.

Soit ζ la fonction holomorphe définie sur $V = \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > 1\}$ par $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-z}$.

3) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que, pour tout $z \in V$, on a

$$\zeta(z) = \Pi_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-z})^{-1}\,,$$

avec convergence normale sur les compacts.
En déduire que la fonction ζ'/ζ est holomorphe sur V.

4) Montrer que

$$\forall z \in V, \quad \zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{z+1}} dt\,.$$

En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur U, et que son unique pôle est situé en $z = 1$.

5)* En utilisant la définition de ζ sous forme de produit infini, et les propriétés du logarithme, montrer que

$$\forall (x, y) \in]1, \infty[\times \mathbf{R}, \quad \log |\zeta(x + iy)| = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^\infty \frac{p^{-xk}}{k} \cos(ky \log p)\,,$$

puis que

$$\forall (x, y) \in]1, \infty[\times \mathbf{R}, \quad 3 \log |\zeta(x)| + 4 \log |\zeta(x + iy)| + \log |\zeta(x + 2iy)| \geq 0.$$

En déduire que si ζ admet un zéro en $1 + iy$, alors

$$\lim_{x \to 1+} \log |\zeta(x + 2iy)| = +\infty.$$

Conclure que ζ n'a pas de zéro dans $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) = 1\}$.

6)* Montrer que pour tout $z \in V$

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt\,.$$

En développant l'intégrande en série entière sur $[0, 1]$, montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.