FIMFA 2010/2011
Mercredi 30 mars 2011

**ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE**
DURÉE 2 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

## 1. Equation de Bezout

Soient $f_1, f_2$ deux fonctions holomorphes au voisinage du disque fermé $\bar{B} = \bar{B}(0,1)$ sans zéro sur $\partial B$, et sans zéro commun sur $B$. On pose $F = f_1 f_2$, et on définit la fonction $G$ sur $B$ par

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+} \frac{1}{F(\zeta)} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

1)* Montrer que $G$ est holomorphe sur $B$, puis en utilisant le théorème des résidus, montrer que $G$ appartient à l'idéal de l'anneau des fonctions holomorphes sur $B$, engendré par $f_1$ et $f_2$.

2) Montrer que pour tout $z \in B$,

$$1 - G(z) = \frac{F(z)}{2i\pi} \int_{\partial B^+} \frac{d\zeta}{F(\zeta)(\zeta - z)} .$$

3) Conclure qu'il existe des fonctions $g_1, g_2$ holomorphes sur $B$ telles que

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 \equiv 1 \text{ sur } B .$$

On suppose maintenant que $P_1$ et $P_2$ sont deux polynômes sans zéro commun, avec $\deg(P_1) > 0$. On pose

$$Q_1(z) = \sum_{a \,/\, P_2(a)=0} \mathrm{Res}\left( \frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_2(z) - P_2}{z - \cdot}, a \right) ,$$

$$Q_2(z) = \sum_{a \,/\, P_1(a)=0} \mathrm{Res}\left( \frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_1(z) - P_1}{z - \cdot}, a \right) .$$

4) Montrer qu'on a

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \equiv 1 \text{ sur } \mathbf{C} .$$

Les fonctions $Q_1$ et $Q_2$ sont-elles polynomiales ?

## 2. Représentation conforme du carré

Soit $K$ le carré ouvert de sommets 1, $i$, $-1$ et $-i$.

1) Montrer que la fonction

$$\varphi : z \mapsto \int_0^z \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}$$

est définie sur $\bar{B}$, holomorphe sur $B$ et continue jusqu'au bord.

2)* Calculer l'image du bord $\partial B$ par $\varphi$.

En déduire que $\lambda\varphi$ est une bijection conforme de $B$ sur $K$ pour $\lambda$ bien choisi.

## 3. Fonctions holomorphes sur le disque

On désigne par $\mathcal{H}(B)$ l'ensemble des fonctions complexes continues sur le disque compact $\bar{B}$, dont la restriction au disque ouvert $B$ est holomorphe.

1) Montrer que $\mathcal{H}(B)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\bar{B}$ est un espace de Banach, et un anneau intègre.

2) Soit $f \in \mathcal{H}(B)$ telle que pour tout $z \in \partial B$, $f(z) = 0$. Montrer que $f$ est identiquement nulle.

3) Soit $f \in \mathcal{H}(B)$ s'annulant identiquement sur un ouvert non vide $W$ du bord $\partial B$.

- Montrer qu'il existe un nombre fini de points du bord $z_1, z_2, ...z_m$ tels que

$$\partial B = \cup_{p=1}^{m} \{z \in \partial B \,/\, z_p z \in W\} \ .$$

- En déduire que la fonction $g$ définie par

$$g(z) = \Pi_{p=1}^{m} f(z_p z)$$

est identiquement nulle sur $B$.

- Conclure que $f$ est identiquement nulle.

## 4. Itération de fonctions holomorphes

On considère un ouvert connexe borné $\Omega$ de $\mathbf{C}$, $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe et un point fixe $a$ de $f$. On pose, pour tout $n \geq 0$, $f_n = f \circ \cdots \circ f$ ($n$ fois). H. Cartan a établi les trois faits suivants :

(A) $|f'(a)| \leq 1$;
(B) $|f'(a)| = 1 \iff f : \Omega \to \Omega$ est bijective ;
(C) si $|f'(a)| < 1$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\Omega$ vers la fonction constante égale à $a$.

1) Montrer ces trois propriétés dans le cas où $\Omega$ est simplement connexe.

2) Montrer (A), puis que si $f : \Omega \to \Omega$ est bijective, alors $|f'(a)| = 1$.

3) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f$ est la fonction identité.

Soit $E$ une partie de $\mathbf{C}$. Montrer que si $(g_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $O$, à images dans $E$, qui converge uniformément sur tout compact de $O$ vers une fonction $g$ non constante, alors $g(O) \subset E$.

En déduire (B), en considérant une sous-suite de $(f_n)_n$ tendant vers une fonction $g$ telle que $g'(a) = 1$.

4) Montrer (C), et dire ce qu'il advient du résultat si l'on ne suppose plus $\Omega$ borné.

5) Soit $O$ l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive. Soit $a \in ]0, 1[$ et $f : O \ni z \mapsto az + \frac{1-a}{z}$. Que dire de la suite $(f_n)_n$ ?

Soit $\Omega$ l'ensemble des nombres complexes de parties réelle et imaginaire strictement positives, et de module strictement inférieur à 1. Soit $f : \Omega \ni z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}z}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers une constante.