Ecole Normale Supérieure **2006-2007**
Première année de Master FIMFA

Partiel d'Analyse Fonctionnelle et EDP

14h30 à 16h30 - aucun document n'est autorisé

Exercice 1. (3 points). Soit H un espace de Hilbert ayant une base hilbertienne $(e_n;\ n \in \mathbb{N})$. Soit $(a_n;\ n \in \mathbb{N})$ une suite de réels. Soit $x_n = a_n\, e_n$. A quelle condition sur la suite $(a_n;\ n \in \mathbb{N})$ la suite $(x_n;\ n \in \mathbb{N})$ est-elle faiblement convergente? fortement convergente?

Exercice 2. (3 points) Soit E un espace de Banach et soit C un convexe de E. Montrer qu'il y a équivalence entre
(a) C est séquentiellement fermé faible;
(b) C est séquentiellement fermé;
(c) C est fermé;
(d) C est fermé faible.
(Ind. On pourra montrer (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (a) et citer le cas échéant des résultats du cours).

Exercice 3. (2 points) Calculer $\dfrac{d}{dx} \log |x|$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 4. (6 points) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
a) Rappeler pourquoi $I - \Delta$ est un isomorphisme de $H^{\sigma+2}(\mathbb{R}^N) \to H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, pourquoi $C^k_c(\mathbb{R}^N) \subset H^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pourquoi $H^\sigma(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\sigma > k + N/2$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\nabla : H^\sigma(\mathbb{R}^N) \to H^{\sigma-1}(\mathbb{R}^N)$ et que si $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ alors $u\,\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$.
Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\omega \subset \Omega$ un ouvert, on définit

$$H^\sigma_{loc}(\omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\omega);\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega),\ \varphi\, u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)\}.$$

b) Montrer que toute distribution est localement dans H^s; i.e. $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall\, \omega$ ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ il existe $\exists\, s = s(T, \omega) \in \mathbb{R}$ tel que $T \in H^s_{loc}(\omega)$.
c) Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une solution de $-\Delta\, u = f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Supposons que $f \in H^r_{loc}(\omega)$ avec ω ouvert $\subset \Omega$ et montrer que $u \in H^{r+2}_{loc}(\omega)$. En déduire que si $f \in C^\infty(\omega)$ alors $u \in C^\infty(\omega)$. On dit que l'opérateur Δ est hypoéliptique.

Exercice 5. (6 points) Soit H un espace de Hilbert (on note $(\ ,\ )$ son produit scalaire et $|\ |$ la norme associée), soit C un convexe fermé de H et soit $T : C \to H$ une contraction, c'est-à-dire, une application telle que

$$|Tu - Tv| \leq |u - v| \qquad \forall u, v \in C. \tag{1}$$

On suppose pour commencer (questions 1 et 2) que $C = H$.

1) Établir l'inégalité $((v - Tv) - (w - Tw), v - w) \geq 0 \ \ \forall v,\, w \in H$.

2) Soit (u_n) une suite de H telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement} \qquad \text{et} \qquad u_n - Tu_n \to f \text{ fortement.} \tag{2}$$

Montrer que $(f + Tw - w, u - w) \geq 0$ pour tout $w \in H$. En déduire que $u - Tu = f$.

On revient au cas général où C est un convexe fermé non vide quelconque de H.

3) Soit maintenant (u_n) une suite de C qui satisfait (2). En introduisant l'opérateur $S = T \circ P_C$, où P_C est l'opérateur de projection sur C, montrer que l'on a encore $u - Tu = f$.

4) Montrer que si C est borné et $T(C) \subset C$ alors T admet un point fixe. (Ind. On pourra penser à introduire la famille d'opérateurs (T_ε) avec $T_\varepsilon\, u = (1 - \varepsilon)\, T\, u + \varepsilon\, a$ avec $a \in C$ fixé et $\varepsilon > 0$).