Ecole Normale Supérieure **2007-2008**
Première année de Master FIMFA

Partiel d'Analyse Fonctionnelle et EDP

10h45 à 12h45 - aucun document n'est autorisé

Exercice 1. Soit E un espace de Banach réflexif et strictement convexe, cela signifie que $\|(x+y)/2\| < 1$ pour tout $x, y \in B_E$, $x \neq y$. Soit $K \subset E$ un convexe fermé non vide de E. Montrer qu'il existe une application $p_K : E \to K$ telle pour tout $u \in E$

$$\|u - p_K u\| = \min_{y \in K} \|u - y\|.$$

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer qu'il y a équivalence entre
(i) ϕ est continue;
(ii) ϕ est séquentiellement continue;
(iii) ϕ est faiblement $\sigma(E, E')$ continue;
(iv) ϕ est séquentiellement continue pour la convergence faible $\sigma(E, E')$.
Exhiber un espace de Banach E tel que $Id : (E, \sigma(E, E')) \to (E, \|.\|_E)$ est séquentiellement continue mais pas continue (On pourra accepter sans avoir à le redémontrer un résultat présenté en TD).

Exercice 3. Soient $p \in [1, \infty]$, et $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de réels. Montrer que si $\sum_n \alpha_n \, x_n < \infty$, pour tout $x = (x_n) \in \ell^p$, alors $\alpha \in \ell^{p'}$, avec $1/p' + 1/p = 1$. En déduire que $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ si $p \in]1, \infty[$.

Exercice 4. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad - \Delta \, u + u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N.$$

a) - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ à (1).
b) - Montrer que si $u, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ satisfont (1) alors $\|u\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
c) - Pour $p \in [1, \infty)$, en déduire pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ l'existence d'une solution $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à (1).

Problème 5. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ et $R \in SO(\mathbb{R}^N)$ une rotation de $\mathbb{R}^N$. On définit la distribution dilatatée $\delta_\lambda T$ par $\langle \delta_\lambda T, \varphi \rangle = \lambda^N \langle T, \delta_{\lambda^{-1}} \varphi \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avec $(\delta_\lambda \varphi)(x) = \varphi(x/\lambda)$. On dit que T est positivement homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0 \; \delta_\lambda T = \lambda^{-\alpha} T$. On définit la distribution $\rho_R T$ par $\langle \rho_R T, \varphi \rangle = \langle T, \rho_{R^{-1}} \varphi \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avec $(\rho_R \varphi)(x) = \varphi(R^{-1} x)$. On dit que T est invariant par rotation si $\forall R \in SO(\mathbb{R}^N)$ on a $\rho_R T = T$.
1) Le but de cette question est de démontrer que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est telle que la distribution $\{f\}$ associée est homogène de degré $\beta > -N$ et invariante par rotation, alors il existe C tel que $f(x) = C \, |x|^\beta$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N$.

a) - Faire la preuve dans le cas $f \in C(\mathbb{R}^N)$.
b) - Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$G(x) := \int_{B(0,|x|)} f(y)\, dy = \int_0^{|x|} \int_{S^{N-1}} f(r\,\sigma)\, d\sigma\, r^{N-1}\, dr$$

est homogène de degré $\beta + N$ et conclure [On pourra utiliser que la mesure $d\sigma$ est invariante par rotation].

2) Pour $\alpha \in]0, N[$ on note $\phi_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$. Pourquoi $\mathcal{F}(\phi_\alpha)$ est-elle bien définie? Montrer que $\mathcal{F}(\phi_\alpha)$ est invariante par rotation et homogène de degré $\alpha - N$.

3) Montrer que $\mathcal{F}(\phi_\alpha) \in L^2 + L^\infty$ si $\alpha \in]N/2, N[$. En déduire (à la détermination d'une constante près) la transformée de Fourier de $|x|^{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in]N/2, N[$, $\alpha \in]0, N/2[$, puis $\alpha = N/2$.

Problème 6 (Théorème ergodique de Von Neumann). Soit X un espace de Banach réflexif et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire tel que $\|T\| \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$S_n := \frac{Id + T + ... + T^{n-1}}{n}.$$

1) - Soit (u_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $u \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite (v_n) dans l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k \geq n}$ qui converge vers u fortement.

2) - Montrer que $\forall x \in X$, il existe une sous-suite (S_{n_k}) telle que la suite $(S_{n_k}\, x)_k$ converge faiblement dans X vers une limite notée y. Montrer que $\lim_{k\to\infty}(T\, S_{n_k}\, x - S_{n_k}\, x) = 0$. En déduire que la limite faible de la suite $(S_{n_k}\, x)$ est un point fixe de T.

3) - Montrer que $\forall m \geq 1$, $\forall x \in X$, $\lim_{n\to\infty}(S_n\, T^m\, x - S_n\, x) = 0$, et en déduire que $\forall x \in X$, $\forall A \in \text{Conv}(Id, T, ..., T^n, ...)$ on a $\lim_{n\to\infty}(S_n\, A\, x - S_n\, x) = 0$.

4) - Montrer que $\forall x \in X$, $\forall k \geq 1$, $\exists A_k \in \text{Conv}(S_{n_k}, S_{n_{k+1}}, ...)$ telle que la suite $(A_k\, x)$ converge fortement dans X vers y défini au 2).

5) - En déduire que pour tout $x \in X$, la suite $(S_n\, x)$ est convergente dans X fort.

6) - Pour tout $x \in X$, on pose $P(x) = \lim_{n\to\infty} S_n\, x$. Montrer que P est une projection linéaire continue et déterminer son image.

7) - Soit $E = L^2([0, 1[, dx)$. Pour θ irrationnel et $f \in E$, on pose

$$(T_\theta f)(x) = T f\,(x) := f(x + \theta\,(\text{mod } 1)).$$

Vérifier que T satisfait les hypothèses de l'énoncé.