Analyse fonctionnelle et EDP,
Partiel, avril 2009
ENS, FIMFA, première année.

Exercice 1 Première partie: principe variationnel d'Ekeland
Soit (X,d) *un espace métrique complet,* $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *une fonction s.c.i minorée non identiquement égale à* $+\infty$*. Pour tout* $x \in X$ *on pose*

$$S(x) := \{y \in X \ : \ f(y) \leq f(x) - d(x,y)\}.$$

1. *Soit* $x \in X$*, montrer que* $S(x)$ *est un fermé non vide et que si* $y \in S(x)$ *alors* $S(y) \subset S(x)$*.*

2. *Soit* $K_0 := X$*, on définit par récurrence* $K_n := S(x_n)$ *où*

$$x_{n+1} \in K_n, \ f(x_{n+1}) \leq \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

   Montrer qu'il existe $x_0 \in X$ *tel que* $\{x_0\} = \cap_n K_n$*.*

3. *Montrer que*

$$f(x) > f(x_0) - d(x,x_0), \ \forall x \in X \setminus \{x_0\}.$$

4. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $x_\varepsilon \in X$ *tel que*

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon$$

   soit $k > 0$ *montrer qu'il existe* $y_\varepsilon \in X$ *tel que*

$$f(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon), \ d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{k}, \ f(x) > f(y_\varepsilon) - k\varepsilon d(x, y_\varepsilon), \ \forall x \in X\setminus\{y_\varepsilon\}.$$

Deuxième partie: applications

1. *Soit* E *un espace de Banach et* $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ *minorée. Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $x_\varepsilon \in X$ *tel que* $f(x_\varepsilon) \leq \inf_E f + \varepsilon$ *et* $\|f'(x_\varepsilon)\|_{E'} \leq \sqrt{\varepsilon}$*.*

2. *Soit* E *un espace de Banach et* $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ *telle qu'il existe* $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(x) \geq a\|x\| + b$ *pour tout* $x \in E$*. Montrer que* $f'(E)$ *est dense dans* $aB_{E'}$*.*

Troisième partie: théorème de Bishop-Phelps

Soit E un espace de Banach, C une partie convexe fermée et bornée non vide de E et $f \in E'$. Soit enfin $\varepsilon > 0$, on déduit de la première partie qu'il existe $x_0 \in C$ tel que

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|, \ \forall x \in C.$$

On définit

$$C_1 := \{(x,t) \in E\times\mathbb{R}, \ : \ t \leq f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|\}, \ C_2 := \{(x,t) \in C\times\mathbb{R} \ : \ t \geq f(x)\}.$$

1. *Montrer que si E est réflexif alors f atteint son supremum sur C.*
2. *Trouver une forme linéaire sur $C([0,1])$ n'atteignant pas son supremum sur $B_{C([0,1])}$.*
3. *Montrer que C_1 et C_2 sont convexes et que l'intérieur de C_1 est disjoint de C_2.*
4. *Montrer qu'il existe $g \in E'$ tel que $\|g\| \leq \varepsilon$ et $f + g$ atteint son supremum sur C en x_0.*
5. *En déduire que l'ensemble des formes linéaires continues sur E qui atteignent leur supremum sur C est dense dans E'.*

Exercice 2 *Soit I une partie finie de $\mathbb{N}^d$, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ des réels non tous nuls et $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $\sum a_\alpha \partial^\alpha u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ montrer que $u = 0$.*

Exercice 3 *Soit E un espace de Banach et T un endomorphisme continu de E, on dit que T est séquentiellement compact si et seulement si l'image par T de toute suite faiblement convergente dans E est fortement convergente.*

1. *Soit E un espace de Banach réflexif et T un endomorphisme continu de E séquentiellement compact. Montrer que T est compact.*
2. *Trouver un contre-exemple dans le cas non réflexif.*