Analyse fonctionnelle et EDP,
Partiel, mars 2011
ENS, FIMFA, première année.

Aucun document, ni calculatrice ni téléphone.

Exercice 1 (Sur la métrisabilité de la topologie faible étoile).

1. Soit E un evtlcs, montrer que la topologie faible étoile de E' est métrisable si et seulement si E possède une base algébrique au plus dénombrable.

2. En déduire que si E est un espace de Banach de dimension infinie, la topologie faible étoile de E' n'est pas métrisable.

Exercice 2 (Condition de Legendre-Hadamard et systèmes elliptiques du second ordre).

Dans tout ce qui suit, on utilisera systématiquement la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Soit d et n deux entiers non nuls, et $a_{\alpha\beta ij}$ des réels, $1 \leq \alpha, \beta, \leq d$, $1 \leq i, j \leq n$ vérifiant la condition (dite de Legendre-Hadamard) qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a_{\alpha\beta ij} M_{\alpha_i} M_{\beta j} \geq \nu \mathrm{tr}(MM^T)$$

pour toute matrice $M \in M_{dn}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à 1.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, soit $M(\xi) \in L(\mathbb{C}^n)$ défini par $(M(\xi)z)_i = a_{\alpha\beta ij}\xi_\alpha\xi_\beta z_j$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $z \in \mathbb{C}^n$, montrer que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi)$ est inversible et qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi))^{-1}\| \leq \frac{C}{1+|\xi|^2},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

2. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $f = (f_1, ..., f_n) \in (H^s(\mathbb{R}^d))^n$ montrer que le système d'EDPs:

$$-a_{\alpha\beta ij}\partial_{\alpha\beta} u_j + u_i = f_i,\ i = 1, ..., n$$

possède une unique solution $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathcal{S}'$. Montrer que $u \in H^{s+2}$ et que

$$\|u\|_{H^{s+2}} \leq C\|f\|_{H^s}$$

pour une constante C indépendante de $f \in H^s$.

Exercice 3 (Dualité pour des problèmes convexes paramétrés).

Soit G un evn et $f : G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, propre c'est à dire non identiquement égale à $+\infty$, la transformée de Legendre f, f^* est la fonction : $G' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in G} \{< x^*, x > - f(x)\}, \ \forall x^* \in G'.$$

Pour $x \in G$, le sous-différentiel de f en x est par définition l'ensemble

$$\partial f(x) := \{x^* \in G' \ : \ f(y) \geq f(x) + < x^*, y - x >, \ \forall y \in G\}.$$

Soit maintenant E et F deux evn, Φ convexe s.c.i. propre $E \times F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, pour tout $p \in F$, on pose

$$h(p) := \inf_{x \in E} \Phi(x, p).$$

On considère alors le problème

$$\inf_{x \in E} \Phi(x, 0) \tag{1}$$

ainsi que son *dual*:

$$\sup_{p^* \in F'} -\Phi^*(0, p^*) \tag{2}$$

On suppose que $h(0) \in \mathbb{R}$ et qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $p \in F \mapsto \Phi(x_0, p)$ soit finie et continue en $p = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que l'infimum dans (1) est égal au supremum dans (2) et que ce dernier est atteint, autrement dit de prouver la relation de dualité

$$\inf_{x \in E} \Phi(x, 0) = \max_{p^* \in F'} -\Phi^*(0, p^*). \tag{3}$$

1. Soit G un evn, f convexe s.c.i. propre : $G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ montrer que f^* est convexe s.c.i. propre sur E'.

2. Soit C un convexe d'intérieur non vide dans un evn, montrer que l'intérieur de C est convexe et dense dans C.

3. Soit G un evn, f convexe : $G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x \in G$ tel que f soit majorée au voisinage de x montrer que f est continue en x puis que $\partial f(x)$ est non vide.

4. Montrer que $h(p) > -\infty$ pour tout $p \in F$ et que h est convexe.

5. Etablir (3).