Géométrie Différentielle, Partiel du 30 mars 2010, durée 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 2,4,14. Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– Toutes les variétés compactes de dimension 1 sont elles orientables ?

2– Toutes les variétés compactes de dimension impaire sont elles orientables ?

3– Soit X une variété de dimension 3. On suppose que X contient une sous-variété difféomorphe à la bande de Möbius. X est elle forcément non orientable ?

Solution :

1– OUI. Chaque composante connexe est difféomorphe au cercle. Une réunion disjointe de variétés orientables est orientable.

2– NON. $P^2(\mathbb{R}) \times S^1$ est compacte, de dimension 3, mais non orientable.

3– NON. Dans $\mathbb{R}^3$, on peut plonger la bande de Möbius (on peut même la réaliser avec une bande de papier). Or $\mathbb{R}^3$ est orientable.

2. Côniques non dégénérée

Une *cônique non dégénérée* du plan projectif $P^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est l'ensemble des droites isotropes d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{K}^3$.

1– Montrer que toute cônique non dégénérée non vide de $P^2(\mathbb{R})$ est difféomorphe au cercle S^1.

2– Soit H l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On plonge $\mathbb{R}^2$ comme un ouvert affine dans $P^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'adhérence de H dans $P^2(\mathbb{R})$ est une sous-variété difféomorphe au cercle.

3– Montrer que toute cônique non dégénérée de $P^2(\mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère S^2.

Solution :

1– Si la cônique est non vide, il existe des droites isotropes, donc la signature de la forme quadratique q n'est ni $(3,0)$, ni $(0,3)$. Il existe donc des coordonnées sur $\mathbb{R}^3$ telles que, au signe près, $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Le plan $\{z = 0\}$ ne contient pas de droite isotrope, donc la cônique est entièrement contenue dans l'ouvert affine $U_3 = \{z \neq 0\}$. Dans la carte affine $\varphi_3^{-1} : \mathbb{R}^2 \to U_3$, $(u,v) \mapsto (u,v,1)$, l'équation de la cônique est $u^2 + v^2 - 1 = 0$, c'est le cercle unité.

2– L'image de H dans $P^2(\mathbb{R})$ satisfait l'équation homogène $q(x,y,z) = xy - z^2 = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation dans $P^2(\mathbb{R})$ est une cônique $\mathcal{C}$ non dégénérée non vide, c'est une sous-variété difféomorphe au cercle. L'image de H dans $\mathcal{C}$ est le complémentaire des deux points de coordonnées homogènes $[0:1:0]$ et $[1:0:0]$, donc son adhérence est $\mathcal{C}$.

3– A changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que la forme quadratique s'écrit $q(x,y,z) = xy - z^2$. La partie de la cônique $\mathcal{C}$ située dans l'ouvert affine $\{z \neq 0\}$ est l'hyperbole d'équation $xy = 1$, la projection $(x,y) \mapsto y$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{C}$, à une singularité près, due au fait qu'on a exclu la droite "à l'infini". Pour inclure les points à l'infini, il faut utiliser des coordonnées homogènes. La projection sur les deux dernières coordonnées homogènes, $\varphi : [x : y : z] \mapsto [y : z]$, est une bijection de classe C^∞ de $\mathcal{C}$ sur la droite projective $P^1(\mathbb{C})$. Le point délicat, c'est la différentiabilité au point $[1 : 0 : 0]$. Pour la vérifier, on utilise la carte affine

$\varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \to U_1 \subset P^2(\mathbb{C})$, $(u,v) \mapsto (1,u,v)$. Dans cette carte, $\mathcal{C}$ est définie par l'équation $u - v^2 = 0$, et $\varphi([1:u:v]) = [u:v] = [v^2:v] = [v:1]$ coïncide avec la restriction à $\mathcal{C}$ d'une application lisse définie au voisinage de $[1:0:0]$. L'application réciproque est $[u:v] \mapsto [v^2:u^2:uv]$, elle est aussi de classe C^∞. φ est un difféomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $P^1(\mathbb{C})$, qui est difféomorphe à S^2, donc $\mathcal{C}$ est difféomorphe à S^2.

3. Redressement de champs de vecteurs dans le plan

Soit ξ un champ de vecteurs de classe C^2 défini sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\xi(0) = 0$. On le voit comme une application $U \to \mathbb{R}^2$, et on note $L = T_0\xi$ sa différentielle en 0. On suppose que les valeurs propres de L ne sont pas réelles et que leur partie réelle est strictement négative. Soit η le champ de vecteurs linéaire $\eta(z) = Lz$ sur $\mathbb{R}^2$. L'objet de l'exercice est de construire un difféomorphisme local qui envoie η sur ξ au voisinage de 0.

1– Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une bijection $\mathbb{R}$-linéaire α de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(Lz) = \lambda\alpha(z)$. *Dans la suite, on notera simplement $Lz = \lambda z$.*

2– Montrer que pour $r > 0$ assez petit, le long du cercle de rayon r, ξ pointe vers l'intérieur du disque $D(r)$ de rayon r.

3– Montrer que le flot φ_t de ξ est défini sur $D(r)$ pour tout $t > 0$.

4– Montrer que pour tout $a < -\Re e(\lambda)$, il existe $r_a > 0$ tel que si $z \in D(r_a)$, alors $|\varphi_t(z)| \leqslant |z|e^{-at}$ pour tout $t \geqslant 0$.

5– Montrer que, pour r assez petit, lorsque t tend vers $+\infty$, les applications $\Phi_t = e^{-\lambda t}\varphi_t$ convergent uniformément sur $D(r)$ vers une application $\Phi : D(r) \to \mathbb{R}^2$.

6– Dans cette question et la suivante, on montre que les différentielles $T\Phi_t$ convergent aussi uniformément. On note $\rho(z) = \xi(z) - \lambda z$. On fixe $z \in D(r)$. Etant donné $h \in \mathbb{C}$, on note $u(t) = (T_z\Phi_t)(h)$. Montrer que u est la solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = (T_{\varphi_t(z)}\rho)(u(t)), \quad u(0) = h.$$

7– En écrivant l'inéquation différentielle satisfaite par $t \mapsto |u(t)|^2$, montrer que u est bornée. En déduire que u converge, et donc que $T\Phi_t$ converge uniformément.

8– Montrer que Φ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

9– Montrer que pour $s \geqslant 0$, $\Phi \circ \varphi_s = e^{sL} \circ \Phi$.

10– Montrer que $\Phi_*\eta = \xi$.

11– On définit un champ de vecteurs ζ sur $\mathbb{C}$ par $\zeta(z) = (i - |z|^2)z$. Montrer que les trajectoires de ξ tendent vers 0.

12– En déduire qu'il n'existe pas de difféomorphisme local qui envoie ζ sur sa linéarisation en 0.

Solution :

1– Soient W et $\bar{W}$ les droites propres de L dans $\mathbb{C}^2$, relatives aux valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$. Comme λ n'est pas réel, $\mathbb{C}^2 = W \oplus \bar{W}$ et $W \cap \mathbb{R}^2 = \bar{W} \cap \mathbb{R}^2 = \{0\}$. Soit P la projection sur W parallèlement à $\bar{W}$, elle satisfait $LP = PL$. Soit $B : \mathbb{R}^2 \to W$ la restriction de P à $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. C'est une bijection. Alors $BL_{\mathbb{R}^2} = L_W B$, et L_W est la multiplication par λ.

2– Par hypothèse, quand z tend vers 0, $\xi(z) = \lambda z + O(|z|^2)$. Le produit scalaire $\lambda z \cdot z = \Re e(\lambda z\bar{z}) = |z|^2\Re e(\lambda) < 0$. Donc sur le cercle de rayon r, $\xi(z) \cdot z = r^2\Re e(\lambda) + o(r^2) < 0$ pour r assez petit. Autrement dit, ξ pointe vers l'intérieur du disque D de rayon r.

3– Soit $z \in D$, γ la ligne intégrale maximale de $\xi_{|U}$ issue de z. Soit $]a,b[$ son intervalle de définition. Supposons que $b < +\infty$. Par le théorème des bouts, $\lim_{t\to b} |\gamma(t)| > r$, donc $b' = \inf\{t > 0 \,|\, r(\gamma(t)) \geqslant 0\} < b$. Par continuité $|\gamma(b')| = r$. Or

$$\frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2_{|t=b'} = 2\gamma(b')\cdot\xi(\gamma(b')) < 0,$$

donc il existe $t < b'$ tel que $|\gamma(b')| > r$, contradiction. On conclut que $b = +\infty$, donc $\varphi_t(z) = \gamma(t)$ est défini pour tout $t > 0$.

4– Par hypothèse, $-a - \Re e(\lambda) > 0$. Par définition de la différentielle en 0, il existe $r_a > 0$ tel que, si $|z| \leqslant r_a$, $|\xi(z) - \lambda z| \leqslant (-a - \Re e(\lambda))|z|$. Alors pour $z \in D(r_a)$,

$$\begin{aligned}(\xi(z) - \lambda z)\cdot z &\leqslant (-a - \Re e(\lambda))|z|^2,\\ \xi(z)\cdot z &\leqslant \Re e(\lambda)|z|^2 + (-a - \Re e(\lambda))|z|^2 = -a|z|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\varphi_t(z)|^2 &= 2\xi(\varphi_t(z))\cdot\varphi_t(z)\\ &\leqslant -2a|\varphi_t(z)|^2.\end{aligned}$$

Cette inéquation différentielle entraîne que $|\varphi_t(z)|^2 \leqslant |z|^2 e^{-2at}$ pour tout $t \geqslant 0$.

5– On choisit un $a \in]-\Re e(\lambda)/2, -\Re e(\lambda)[$. Comme ξ est de classe C^2, il existe une constante C telle que, pour $|z \in D(r_a)$, $|\xi(z) - \lambda z| \leqslant C|z|^2$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_t(z) &= \frac{d}{dt}e^{-\lambda t}\varphi_t(z)\\ &= e^{-\lambda t}(-\lambda\varphi_t(z) + \xi(\varphi_t(z))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\frac{d}{dt}\Phi_t(z)| &\leqslant e^{-\Re e(\lambda)t}C|\varphi_t(z)|^2\\ &\leqslant C|z|^2 e^{(-2a-\Re e(\lambda))t},\end{aligned}$$

qui est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc Φ_t converge uniformément sur $D(r_a)$.

6– On sait que pour tout $t \geqslant 0$, Φ_t est de classe C^1 sur $D(r)$, donc $u(t) = (T_z\Phi_t)(h)$ est bien définie. De plus, $u(t) = e^{-\lambda t}v(t)$ où $v(t)$ est la solution de l'équation aux variations

$$v'(t) = (T_{\varphi_t(z)}\xi)(v(t)), \quad v(0) = h.$$

Alors u satisfait

$$\begin{aligned}u'(t) &= e^{-\lambda t}(-\lambda v(t) + v'(t))\\ &= (-\lambda + T_{\varphi_t(z)}\xi)(e^{-\lambda t}v(t))\\ &= (T_{\varphi_t(z)}\rho)(u(t)).\end{aligned}$$

ainsi que la condition initiale $u(0) = h$.

7– Comme ξ est de classe C^2, $T\rho$ est de classe C^1, elle est nulle en $z = 0$ donc il existe une constante C telle que, si $z \in D(r)$.

$$\|T_z\rho\| \leqslant C|z|.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 &= 2(T_{\varphi_t(z)}\rho)(u(t))\cdot u(t)\\ &\leqslant 2\|T_{\varphi_t(z)}\rho\||u(t)|^2\\ &\leqslant 2C|z|e^{-at}|u(t)|^2.\end{aligned}$$

Cette inéquation, qui s'écrit $\frac{d}{dt}\log|u(t)| \leqslant C|z|e^{-at}$, s'intègre et montre que $|u(t)|$ reste bornée. Par conséquent, $|u'(t)| \leqslant const.e^{-at}$ est intégrable, et $u(t)$ converge uniformément quand t tend vers $+\infty$. Cela prouve la convergence uniforme des différentielles $T\Phi_t$.

8– On vient de montrer que Φ est de classe C^1. Lorsque $z = 0$, $\varphi_t(0) = 0$ pour tout t, donc u satisfait $u' = 0$. Par conséquent, pour tout $t \geqslant 0$, la différentielle de Φ_t est l'identité, et $T_0\Phi = \lim T_0\Phi_t$ est l'identité. Par le théorème d'inversion locale, Φ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

9– Pour tous $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $\Phi_t \circ \varphi_s = e^{sL} \circ \Phi_{t+s}$ tend à la fois vers $\Phi \circ \varphi_s$ et vers $e^{sL} \circ \Phi$.

10– Comme Φ envoie les trajectoires de ξ (en temps positif) sur les trajectoires de η, $\Phi_*\xi = \eta$.

11– Soit γ une ligne intégrale maximale de ζ. Comme $\frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2 = 2\zeta(\gamma(t)) \cdot \gamma(t) = -2|\gamma(t)|^4 < 0$, γ se rapproche de l'origine, donc l'intervalle de définition de γ contient $[0, +\infty[$, et $|\gamma(t)|$ tend vers une limite $\ell \geqslant 0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\ell > 0$. Alors $\frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2 \leqslant -2\ell$, d'où $|\gamma(t)|^2 \leqslant |\gamma(0)|^2 - 2\ell t$, ce qui est contradictoire si t est assez grand. On conclut que $\ell = 0$.

12– Les trajectoires du champ linéarisé $z \mapsto iz$ sont des cercles centrés à l'origine. Aucun difféomorphisme n'envoie ces cercles sur des courbes qui convergent vers 0, donc aucun difféomorphisme local n'envoie ζ sur sa linéarisation.