MMFAI ENS Ulm — Mardi 3 avril 2007 — Durée : 2 heures

Examen partiel de géométrie différentielle

Documents et calculatrices interdits

Les exercices (1) à (5) sont indépendants et peuvent être résolus dans n'importe quel ordre. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on note $||(x_1, \dots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| = 1\}$, $\mathrm{SO}(n) = \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x = x^{-1}\}$ et tr X la trace d'une matrice carrée X. Pour tout g dans $\mathrm{SO}(3)$, on note encore $g : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ la restriction à $\mathbb{S}_2$ de l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ de matrice g. Si M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$, on considère les champs de vecteurs X de classe C^∞ sur M comme les applications $X : M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telles que, pour tout x dans M, le vecteur $X(x)$ appartienne au sous-espace tangent $T_x M$ de M en x.

(1) Soit $M_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{S}_3 \ : \ bd = ac\}$. Montrer que M_1 est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_3$ de dimension 2.

(2) a) On considère l'application f de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathrm{SO}(3)$ qui à $x \in \mathbb{S}_2$ associe la rotation d'angle π et d'axe $\mathbb{R}x$. Montrer que f est une immersion C^∞, et que l'image de f est une sous-variété C^∞ de $\mathrm{SO}(3)$, qui est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, soit $N_c = \{x \in \mathrm{SO}(3) \ : \ \mathrm{tr}\ x = c\}$. Montrer que N_c est une sous-variété C^∞ de $\mathrm{SO}(3)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

(3) a) Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$, et M une sous-variété C^∞ de dimension p de $\mathbb{R}^n$. On note

$$T^1 M = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ x \in M, \ v \in T_x M, \ ||v|| = 1\}$$

et $\pi : T^1 M \to M$ l'application $(x, v) \mapsto x$. Montrer que $T^1 M$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2p - 1$, et que π est une fibration de fibre $\mathbb{S}_{p-1}$.

b) Pour tout $g \in \mathrm{SO}(3)$, montrer que l'application tangente Tg de $g : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ envoie $T^1\mathbb{S}_2$ dans $T^1\mathbb{S}_2$, et qu'il existe un C^∞-difféomorphisme $\Phi : T^1\mathbb{S}_2 \to \mathrm{SO}(3)$ tel que $\Phi \circ Tg = g\Phi$.

(4) On identifie $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$ par l'application $(a, b, c, d) \mapsto (w = a + ib, z = c + id)$. On note C_1 et C_2 les cercles intersections de $\mathbb{S}_3$ avec les plans d'équations $w = 0$ et $z = 0$.

a) Soit G le groupe produit $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$, qui agit sur $\mathbb{C}^2$ par $(\epsilon, \eta) \cdot (w, z) = (\epsilon w, \eta z)$ pour tous $(\epsilon, \eta) \in G$ et $(w, z) \in \mathbb{C}^2$. Montrer qu'il existe une unique structure de variété C^∞ sur l'espace topologique quotient $Q = G \backslash (\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2))$ telle que la projection canonique $\pi : \mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2) \to Q$ soit un C^∞-difféomorphisme local.

b) Pour tout $(w, z) \in \mathbb{S}_3 \subset \mathbb{C}^2$, on note $X(w, z) = (iw, iz)$ et $Y(w, z) = (iw, -iz)$. Montrer que les applications $X, Y : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{C}^2$ ainsi définies sont des champs de vecteurs C^∞ complets sur $\mathbb{S}_3$. Calculer leur crochet $[X, Y]$.

c) Pour tout (w,z) dans $\mathbb{S}_3$, notons $\Delta_{w,z}$ le sous-espace vectoriel de $T_{(w,z)}\mathbb{S}_3$ engendré par $X(w,z)$ et $Y(w,z)$. Montrer que $\Delta : (w,z) \mapsto \Delta_{w,z}$ est un champ de plans C^∞ intégrable sur $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$.

d) Soient $(\phi_{X,t})_{t\in\mathbb{R}}, (\phi_{Y,t})_{t\in\mathbb{R}}$ les flots des champs de vecteurs X et Y, $(w,z) \in \mathbb{S}_3$ et $f_{w,z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}_3$ l'application $(s,t) \to \phi_{X,s}\circ\phi_{Y,t}(w,z)$. Montrer que si $(w,z) \in \mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$, alors l'image $M_{w,z}$ de $f_{w,z}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_3$ qui est C^∞-difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$.

(5) Soit M une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$.

a) Si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, montrer que l'application $x \mapsto (x, X(x))$ de M dans la sous-variété TM de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est un plongement C^∞, dont on notera N_X l'image. En particulier, si $X = 0$ désigne le champ de vecteurs nuls, alors N_0 est l'image de la section nulle de TM.

b) Montrer que $T_xX : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est à valeurs dans T_xM, et que $T_{(x,v)}TM = T_xM \times T_xM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pour tout (x,v) dans TM.

c) Si A et B sont deux sous-variétés C^∞ de M, nous dirons dans ce problème que A et B sont *transverses* si pour tout x dans $A \cap B$, les sous-espaces vectoriels T_xA et T_xB de T_xM sont supplémentaires. Montrer que si A et B sont deux sous-variétés compactes transverses de M, alors $A \cap B$ est un ensemble fini.

d) Si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, montrer que N_X et N_0 sont transverses dans TM si et seulement si $T_xX : T_xM \to T_xM$ est surjective pour tout zéro x de X.

e) Montrer que l'application $X : (a,b,c) \mapsto (0,-c,b)$ de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, tel que N_X et N_0 soient transverses dans $T\mathbb{S}_2$ et se rencontrent en deux points.