Géométrie Différentielle, Partiel du 14 mars 2008, durée 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 7,3,10 Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$?

2– L'ensemble $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ des multiples entiers de $\sqrt{2}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$?

3– Soit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection de la droite vers le cercle. L'image $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?

4– Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que $f^{-1}(0)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Peut on affirmer que f est une submersion au-dessus de 0 ?

5– Deux droites projectives distinctes du plan projectif se coupent elles en deux points ?

6– Deux droites projectives distinctes du plan projectif sont elles toujours transverses ?

7– Si je déplace continûment une droite projective D du plan projectif, son point d'intersection avec une droite fixe D_0 varie-t'il continûment ?

8– Soit $T\mathbb{S}^2$ le fibré tangent à la sphère unité. Soit P_0 un plan vectoriel fixé. La famille des droites $x \mapsto T_x\mathbb{S}^2 \cap P_0$ forme-t-elle un fibré vectoriel sur $\mathbb{S}^2$?

2. Un fibré vectoriel.

Soit ℓ une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. On note $\ell^\perp$ le plan orthogonal à ℓ. Montrer que les plans $\ell \mapsto \ell^\perp$ constituent un fibré vectoriel sur le plan projectif. Autrement dit, munir l'ensemble $\coprod_{\ell \in P^2(\mathbb{R})} \ell^\perp$ d'une structure de fibré vectoriel.

3. Champ de vecteurs et fonction sur le plan projectif.

Le groupe linéaire $GL_3(\mathbb{R})$ envoie droite vectorielle sur droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, donc agit sur $P^2(\mathbb{R})$. A chaque matrice M est donc associé un champ de vecteur ξ_M sur $P^2(\mathbb{R})$, dont le flot coïncide avec l'action des éléments e^{tM} de $GL_3(\mathbb{R})$. On rappelle que les cartes affines de $P^2(\mathbb{R})$ sont données par

$$\varphi_1^{-1}(x,y) = [1 : x : y], \quad \varphi_2^{-1}(x',y') = [x' : 1 : y'], \quad \varphi_3^{-1}(x'',y'') = [x'' : y'' : 1].$$

1– Soit M une matrice 3×3. En quels points le champ de vecteurs ξ_M s'annule-t'il ?

2– Soit $D = \mathrm{diag}(a,b,c)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux a, b et c. Calculer l'action de e^{tD} dans chacune des cartes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Dériver par rapport à t et en déduire l'expression du champ de vecteurs ξ dans les trois cartes.

3– On suppose désormais que $a < b < c$. Dessiner sommairement les trajectoires des trois champs de vecteurs obtenus, en indiquant le sens de parcours. Mettre des signes distinctifs permettant de retrouver la même ligne intégrale sur les trois cartes.

4– On note S (resp. S', resp. S'') le point du plan projectif qui correspond à l'origine dans la carte φ_1 (resp. φ_2, resp. φ_3. Combien y a t'il de trajectoires dont l'adhérence contient S et S' (resp. S et S'', resp. S' et S'') ?

5– Le groupe $GL_3(\mathbb{R})$ agit aussi sur l'espace des demi-droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. On identifie cet espace à la sphère $\mathbb{S}^2$. On note η_M le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ dont le flot coïncide avec l'action de e^{tM}. Vérifier que si $v \in \mathbb{S}^2$, $\eta_M(v)$ est la projection orthogonale de Mv sur le plan orthogonal à v.

6– Quel est le rapport entre η_M et ξ_M ?

7– Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ passe au quotient en une fonction $\bar{f}$ de classe C^∞ sur $P^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{L}_{\xi_D}\bar{f} \geqslant 0$. En quels points l'égalité a t'elle lieu ?

8– Décrire l'ensemble $\bar{f}^{-1}(b)$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $a < b - \varepsilon < b < b + \varepsilon < c$. Soit $T = \{\ell \in P^2(\mathbb{R}) \,|\, b - \varepsilon < \bar{f}(\ell) < b + \varepsilon\}$. La variété T est-elle orientable ? Dessiner un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui est homéomorphe à T.

9– Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\bar{f}^{-1}(z)$ est-il une sous-variété de dimension 1 ?

10– Commenter la figure suivante. Qu'y voit-on (points, champ de vecteurs, lignes de niveau,...) ? En utilisant cette figure, déterminer le nombre de composantes connexes de chaque ensemble $\bar{f}^{-1}(z)$, pour $z \in \mathbb{R}$.