Géométrie Différentielle, Partiel du 31 mars 2009, durée 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 7,8,5 Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– La réunion de deux sous-variétés disjointes de même dimension est-elle toujours une sous-variété ?

2– Soit X une sous-variété compacte de classe C^∞, de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que X coupe toute droite en un nombre fini de points ?

3– Soit X une variété de classe C^∞, soit ξ un champ de vecteurs de classe C^∞ sur X. Le sous-ensemble $\{(x, \xi(x)) \,|\, x \in X\}$ de TX est il une sous-variété ?

4– Soit X une variété de classe C^∞ de dimension 2. Soient ξ et η des champs de vecteurs de classe C^∞ sur X tels que pour tout $x \in X$, $\xi(x)$ et $\eta(x)$ ne sont pas colinéaires. Alors X est orientable.

5– Un champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}^n$ est-il complet ?

6– Existe-t-il des champs de vecteurs de classe C^∞ non complets sur $\mathbb{R}$?

7– Existe-t-il des champs de vecteurs de classe C^∞ non complets sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?

Solution :

1– NON. Par exemple, dans le plan, soit X l'axe Ox et Y l'axe Oy privé de l'origine. Ce sont deux sous-variétés disjointes, mais leur réunion n'est pas une sous-variété.

2– NON. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui s'annule exactement le long d'un segment non réduit à un point. On peut modifier son graphe pour en faire une sous-variété compacte. Son intersection avec l'axe Ox contient un segment.

3– OUI. Dans une carte $(\varphi, T\varphi)$, c'est le graphe d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, donc une sous-variété.

4– OUI. La base $(\xi(x), \eta(x))$ définit une orientation de l'espace tangent T_xX. Transportée dans une carte, cette base donne une famille continue de bases de $\mathbb{R}^2$, qui définissent une orientation constante de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, l'orientation de TX est localement constante, c'est une orientation de X.

5– OUI. Si $\xi(x) = v$, la ligne intégrale de ξ d'origine x est $t \mapsto x + tv$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6– OUI. Par exemple, $\xi(x) = x^2$. La ligne intégrale de ξ d'origine 1 est $t \mapsto 1/1-t$, définie sur $]-\infty, 1[$ seulement.

7– NON. Tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.

2. Champ de vecteurs sur la sphère.

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, soit $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord, $S = (0, 0, -1)$ le pôle sud. Comme carte au voisinage de S, on utilise la projection stéréographique sur le plan tangent à $\mathbb{S}^2$ au pôle sud. Elle associe à un point Q de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ le point d'intersection $\Phi(Q)$ de la droite NQ avec le plan affine $\{Z = -1\}$. C'est un difféomorphisme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ sur $\mathbb{R}^2$. De même, la projection stéréographique sur le plan tangent à $\mathbb{S}^2$ au pôle nord constitue un difféomorphisme Ψ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle que le changement de carte $\Theta = \Psi \circ \Phi^{-1}$ est donné par la formule

$$\Theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4x}{x^2+y^2} \\ \frac{4y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au champ de vecteurs ξ sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ obtenu en transportant le champ constant $\zeta(x,y) = (1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ par le difféomorphisme Φ^{-1}.

1– Par un argument géométrique, montrer que les lignes intégrales de ξ sont contenues dans des cercles passant par N. Déterminer leurs tangentes en N. Faire un dessin de l'aspect des lignes intégrales au voisinage de N.

2– A quel type de champ de vecteurs linéaire ce dessin fait-il penser ? Existe-t'il un difféomorphisme local qui redresse ξ sur un tel champ de vecteurs linéaire ?

3– Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\tau_t(x,y) = (x+t,y)$. Ecrire l'expression du difféomorphisme $\psi_t = \Theta \circ \tau_t \circ \Theta^{-1}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

4– En déduire que $\varphi_t = \Phi^{-1} \circ \tau_t \circ \Phi$ se prolonge en un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{S}^2$.

5– Calculer le champ de vecteurs η sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui engendre le groupe à un paramètre $t \mapsto \psi_t$.

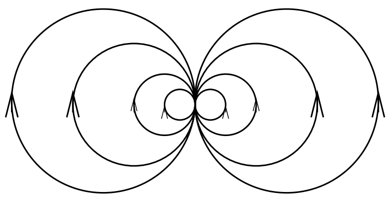
6– On note ξ le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ qui engendre le groupe à un paramètre $t \mapsto \varphi_t$. On voit $g : p \mapsto (p, \xi(p))$ comme une application $\mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$. Soit G son image. Soit $F = \mathbb{S}^2 \times \{0\} \subset T\mathbb{S}^2$. Les sous-variétés F et G sont elles transverses ?

7– On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ en posant $z = x + iy$. De la sorte, $\eta(x,y)$ devient un nombre complexe $f(z)$. Calculer f.

8– Soit ξ' le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ obtenu en transportant le champ constant $\zeta(x,y) = (1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ par le difféomorphisme Ψ^{-1}, puis en le prolongeant par continuïté. Soit G_ε l'image de l'application $g_\varepsilon : p \mapsto (p, \xi(p) + \varepsilon\xi'(p))$, $\mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$. Montrer que pour ε petit mais non nul, G_ε coupe F en deux points voisins de $(N, 0)$.

Solution :

1– Chaque trajectoire T du groupe à un paramètre $t \mapsto \tau_t$ est une droite parallèle à l'axe Ox. Soit P le plan contenant N et T. Alors l'image de T par la projection stéréographique est l'intersection de P et de $\mathbb{S}^2$, c'est un cercle passant par N, tangent à l'intersection de P et du plan tangent à $\mathbb{S}^2$ en N, i.e. à l'axe Ox. La figure suivante donne une idée des trajectoires de ξ au voisinage de N.



2– Cela ressemble à un noeud, mais il y a une différence notable : tout voisinage de N contient entièrement des trajectoires non ponctuelles. Cela n'arrive pas pour un noeud, dégénéré ou non. Donc aucun difféomorphisme local ne peut redresser ξ sur un champ de vecteurs linéaire.

3– On remarque que $\Theta^{-1} = \Theta$. ψ_t résulte de la suite d'opérations

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{4x}{x^2+y^2} \\ \frac{4y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{4x}{x^2+y^2} + t \\ \frac{4y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{4(\frac{4x}{x^2+y^2}+t)}{(\frac{4x}{x^2+y^2}+t)^2+(\frac{4y}{x^2+y^2})^2} \\ \frac{4\frac{4y}{x^2+y^2}}{(\frac{4x}{x^2+y^2}+t)^2+(\frac{4y}{x^2+y^2})^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{16x+4t(x^2+y^2)}{16+8xt+t^2(x^2+y^2)} \\ \frac{16y}{16+8xt+t^2(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

4– On constate que ψ_t se prolonge en une application de classe C^∞ qui envoie 0 sur 0. Cette application consiste à lire $\varphi_t = \Phi^{-1}\circ\tau_t\circ\Phi$ (prolongé par $\varphi_t(N) = N$) dans la carte Ψ. Cela prouve que φ_t se prolonge en une application de classe C^∞ de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$. Comme $\varphi_{-t}\circ\varphi_t = Id_{\mathbb{S}^2}$, c'est un difféomorphisme.

5– On calcule

$$\eta(x,y) = \frac{\partial\psi_t(x,y)}{\partial t}_{|t=0} = (\frac{y^2-x^2}{4}, -\frac{xy}{2}).$$

On peut aussi utiliser la formule

$$\Theta_*\zeta(x,y) = (T_{\Theta^{-1}(x,y)}\Theta)(\zeta(\Theta^{-1}(x,y))).$$

Or

$$\begin{aligned} T_{(x',y')}\Theta(\zeta(x',y')) &= (\frac{\partial}{\partial x'}\frac{4x'}{x'^2+y'^2}, \frac{\partial}{\partial x'}\frac{4y'}{x'^2+y'^2}) \\ &= (4\frac{y'^2-x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}, -8\frac{x'y'}{(x'^2+y'^2)^2}). \end{aligned}$$

Si $(x',y') = \Theta^{-1}(x,y)$, alors $x = \frac{4x'}{x'^2+y'^2}$, $y = \frac{4y'}{x'^2+y'^2}$, d'où

$$\Theta_*\zeta(x,y) = (\frac{1}{4}(y^2-x^2), -\frac{1}{2}xy) = \eta(x,y).$$

6– Comme carte pour $\mathbb{S}^2$ au voisinage de N, utilisons la projection stéréographique Ψ. Alors $(\Psi, T\Psi)$ fournit une carte pour le fibré tangent $T\mathbb{S}^2$ au voisinage de $(N,0)$. Lue dans cette carte, l'application $g : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ devient l'application $T\Psi\circ g\circ\Psi^{-1} : (x,y)\mapsto((x,y),\Psi_*\xi(x,y))$. Or $\Psi_*\xi(x,y) = \Theta_*\zeta(x,y) = (\frac{1}{4}(y^2-x^2), -\frac{1}{2}xy)$. Sa différentielle à l'origine est $(u,v)\mapsto(u,v,0,0)$, car les dérivées premières de $\eta = \Theta_*\zeta$ sont nulles à l'origine. On conclut que F et G ont même plan tangent à l'origine. Elles ne sont pas transverses.

7– Par définition, si $z = x+iy$, $f(z) = \frac{y^2-x^2}{4} - i\frac{xy}{2} = -\frac{1}{4}(x^2-y^2+2ixy) = -\frac{1}{4}z^2$. Lorsque (x,y) fait une fois le tour de l'origine, $\eta(x,y)$ fait deux fois le tour de l'origine, comme la figure l'indique.

8– Dans la carte $(\Psi, T\Psi)$, $g_\varepsilon(x,y) = (x,y,\frac{1}{4}(y^2-x^2)+\varepsilon, -\frac{1}{2}xy)$. Ce point appartient à F si et seulement si $\frac{1}{4}(y^2-x^2)+\varepsilon = -\frac{1}{2}xy = 0$, i.e., en notation complexe, si $-\frac{1}{4}z^2+\varepsilon = 0$. Cette équation a exactement deux solutions si $\varepsilon \neq 0$.

3. Champs de vecteurs dépendant du temps.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $t\mapsto\xi_t$, $t\in I$, une famille de classe C^∞ de champs de vecteurs de classe C^∞ sur U (i.e., l'application $I\times U\to\mathbb{R}^n$, $(t,x)\mapsto\xi_t(x)$ est de classe C^∞. On cherche à construire une famille de classe C^∞ de difféomorphismes φ_t (définis au moins au voisinage de 0 et pour t assez petit) tels que pour $x\in U$, $\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t} = \xi_t(\varphi_t(x))$, et $\varphi_0 = Id_U$.

1– On considère le champ de vecteurs $(t,x)\mapsto\Xi(t,x) = (1,\xi_t(x))$ sur $I\times U$. On note $s\mapsto\Phi_s$ son flot. Vérifier que $\Phi_s(0,x) = (s,\varphi_s(x))$, où $\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t} = \xi_t(\varphi_t(x))$. Et aussi, que $\varphi_0 = Id_U$.

2– Montrer que φ_s est un difféomorphisme d'un ouvert U_s contenant 0 sur un autre ouvert.

3– Donner un énoncé généralisant celui obtenu en 2 au cas où U est remplacé par une variété de classe C^∞.

4– Soit X une variété compacte. Montrer que, pour $t\in I$, φ_t est un difféomorphisme global de X.

5– Inversement, soit X une variété. Soit φ_t, $t \in I$, une famille de classe C^∞ de C^∞-difféomorphismes de X. Montrer qu'il existe une famille de classe C^∞ de champs de vecteurs ξ_t de classe C^∞ sur X tels que, pour tout $(t,x) \in I \times X$, $\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \xi_t(\varphi_t(x))$.

Solution :

1– Par définition, $s \mapsto \Phi_s(t,x)$ est la solution de l'équation différentielle $\frac{\partial \Phi_s}{\partial s}(t,x) = \Xi(\Phi_s(t,x))$ de condition initiale $\Phi_0(t,x) = (t,x)$. Elle est définie sur un ouvert W de $\mathbb{R} \times I \times U$. Notons $\Phi_s(0,x) = (a(s,x), \varphi_s(x))$. Alors $\frac{\partial a}{\partial s}(s,x) = 1$, $a(0,x) = 0$, d'où $a(s,x) = s$. Il en résulte que $\frac{\partial \varphi_s(x)}{\partial s} = \xi_s(\varphi_s(x))$, et $\varphi_0(x) = x$. Le domaine de définition de φ_s est l'ensemble des U_s des $x \in U$ tels que $(s,s,x) \in W$, c'est un ouvert contenant 0.

2– Faisons le même travail avec la famille de champs de vecteurs $t \mapsto \eta_t = -\xi_{s-t}$. On obtient des applications ψ_t de classe C^∞ qui satisfont $\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(x) = -\xi_{s-t}(\psi_t(x))$. On remarque $t \mapsto \varphi_{s-t}(x)$ est solution de la même équation différentielle, mais avec la condition initiale $\varphi_s(x)$. Par unicité dans Cauchy-Lipschitz, $\varphi_{s-t}(x) = \psi_t(\varphi_s(x)$. En particulier, $\psi_s \circ \varphi_s = Id_{U_s}$. Ceci prouve que φ_s est un difféomorphisme de U_s sur l'ouvert $\varphi_s(U_s)$.

3– Soit X une variété de classe C^∞. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $t \mapsto \xi_t$ une famille de classe C^∞ de champs de vecteurs sur X (i.e. un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $I \times X$ dont la première composante est nulle). Soit $x_0 \in X$. Il existe un voisinage de U de x_0 dans X, un voisinage J de 0 dans U et une famille de classe C^∞ de difféomorphismes φ_t, $t \in J$, de U sur des ouverts de X tels que $\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \xi_t(\varphi_t(x))$ et $\varphi_0 = Id_U$. La preuve consiste à transporter ξ_t sur une ouvert de $\mathbb{R}^n$ au moyen d'une carte définie au voisinage de x_0.

4– Il revient au même de dire que le champ de vecteurs $\Xi(t,x) = (1, \xi_t(x))$ sur $I \times X$ a des lignes intégrales définies sur I exactement lorsque la condition initiale est de la forme $(0,x)$, $x \in X$. On raisonne par l'absurde. On suppose que le domaine de définition $W \subset \mathbb{R} \times I \times X$ de ces lignes intégrales ne coïncide pas avec $I \times I \times X$. Soit $x \in X$ tel que l'intervalle de définition $]a,b[$ de la ligne intégrale de Ξ de condition initiale $(0,x)$ soit tel que $b \in I$. D'après le théorème des bouts, pour tout compact K de $I \times X$, pour t assez proche de b, la solution $(t, \varphi_t(x))$ n'appartient pas à K. En prenant $K = [0,b] \times X$, on a une contradiction. Idem si $a \in I$. On conclut que $\varphi_t(x)$ est défini pour tout $(t,x) \in I \times X$. Comme il en est de même pour le champ $\eta_t = -\xi_{s-t}$, ce champ s'intègre globalement en x, d'où une application ψ_s telle que $\psi_s \circ \varphi_s = Id_X$. On conclut que, pour $t \in I$, φ_t est un difféomorphisme global de X.

5– Posons $\xi_t(x) = \frac{\partial \varphi_{t+s}(\varphi_t^{-1}(x))}{\partial s}_{|s=0}$. La seule chose à vérifier est que $\Xi(t,x) = (0, \xi_t(x))$ est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $I \times X$. Montrons que $(t,x) \mapsto \varphi_t^{-1}(x)$ est de classe C^∞. On remarque que $z = \varphi_t^{-1}(x)$ est la solution de l'équation $\varphi_t(z) = x$. Comme la différentielle de φ_t est inversible, le théorème des fonctions implicites garantit que la solution z dépend de façon C^∞ de x. On en déduit que $(s,t,x) \mapsto \varphi_{t+s}(\varphi_t^{-1}(x))$ ets de classe C^∞, il en est de même de sa dérivée partielle par rapport à s.