1. Les questions suivantes sont indépendantes.

(a) Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, $f\colon V^{n-1} \to k$ une application $(n-1)$-linéaire alternée. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n \in V$ sont tels que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ alors :

$$\sum_{j=1}^{j=n} (-1)^j f(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)\, x_j = 0$$

(l'expression $\widehat{x_j}$ signifie que x_j a été omis).

[**Erreur dans l'énoncé :** La question avait été posée avec l'expression sans le x_j, soit : $\sum_{j=1}^{j=n} (-1)^j f(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) = 0$.]

(b) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie n, de matrice X dans une base fixée de V. Si p est un entier $1 \leq p \leq n-1$ et H, R des parties de $\{1, \ldots, n\}$ à p éléments, on désigne par $X_{H,R}$ la matrice extraite de X où l'on a gardé les lignes indexées par H et les colonnes indexées par R. On désigne par H' et R' les parties complémentaires de H et R dans $\{1, \ldots, n\}$. On note enfin $\rho_{H,H'} = (-1)^\nu$, où ν est le nombre de couples $(i,j) \in H \times H'$ tels que $i > j$.

On fixe une partie H à p éléments comme ci-dessus. Montrer que :

$$\det(X) = \rho_{H,H'} \sum \rho_{R,R'} \det(X_{R,H}) \det(X_{R',H'})$$

où la somme est étendue à toutes les parties à p éléments.

2. Soit p un nombre premier et $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré p ayant 2 racines complexes conjuguées x_1, x_2 et $p-2$ racines réelles, $x_3, \ldots, x_p$. On note $K = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_p)$ le corps engendré par les racines de P dans $\mathbb{C}$, et on identifie $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ à un sous-groupe du groupe des permutations $\mathfrak{S}_p$.

(a) Montrer que la permutation $\tau = (12)$ appartient à $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(b) Montrer que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ contient un p-cycle σ.

(c) Que vaut $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$?

(d) Application : $P(X) = X^5 - 6X + 3$.

3. Soit $E \subseteq F$ une extension finie séparable, $E \subseteq K$ sa clôture galoisienne.

(a) Montrer que le nombre de E-morphismes de F vers K est $n = [F : E]$.

(b) Soient $\eta_1 = \mathrm{id}$, $\eta_2, \ldots, \eta_n$ ces morphismes. Montrer que des éléments $u_1, \ldots, u_n$ de F forment une base de F sur E si et seulement si $\det(\eta_i(u_j)) \neq 0$.

4. Soit E un sous-corps du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On appelle extension radicale réelle de E une extension radicale de E contenue dans $\mathbb{R}$.

(a) Soit $E \subseteq F$ une extension galoisienne finie, avec $F \subseteq \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha^N \in E$, où $N \geq 2$ est un entier.

(i) Soit $m = [E(\alpha) : E(\alpha) \cap F]$ et $\beta = \alpha^m$. Montrer que β appartient à $E(\alpha) \cap F$; en déduire que : $E(\beta) = E(\alpha) \cap F$. (On pourra considérer le polynôme minimal de α sur $E(\alpha) \cap F$ et s'intéresser au terme constant de celui-ci.)

(ii) Montrer que le degré $[E(\beta) : E]$ vaut 1 ou 2 (on pourra observer qu'une certaine puissance de β appartient à E).

(b) Soit $E \subseteq F$ une extension galoisienne finie, avec $F \subseteq \mathbb{R}$. Soit $E \subseteq K$ une extension radicale réelle. Montrer que $[K \cap F : E]$ est une puissance de 2. (On pourra procéder par récurrence, en introduisant une extension radicale élémentaire $E \subseteq L$, et en considérant les extensions $L \subseteq FL$ et $L \subseteq K$.)

(c) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré n, dont toutes les racines sont réelles. On suppose que l'une des racines α de P est dans une extension radicale réelle de $\mathbb{Q}$. Montrer que n est une puissance de 2.