Géométrie Différentielle, Partiel du 22 mars 2011, durée 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 6, 7, 7. Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– Sur la sphère S^2, pour toute fonction de Morse, les lignes de niveaux sont connexes.

2– Deux droites projectives distinctes du plan projectif se coupent elles en deux points ?

3– Deux droites projectives distinctes du plan projectif sont elles toujours transverses ?

4– Si je déplace continûment une droite projective D du plan projectif, son point d'intersection avec une droite projective fixe D_0 varie-t-il continûment ?

5– Soit G un groupe qui agit librement et proprement discontinûment sur une variété X. Soit Y une sous-variété de X. L'image de Y dans $G\backslash X$ est elle une sous-variété ?

6– Soit G un groupe qui agit librement et proprement discontinûment sur une variété X. Soit Y une sous-variété de X invariante par G. L'image de Y dans $G\backslash X$ est elle une sous-variété ?

Solution :

1– Non. Poser un haricot sur une table de sorte que la restriction de la fonction hauteur à la surface du haricot ait 2 minima. Choisir une fonction linéaire voisine, qui est une fonction de Morse. Pour elle aussi, les lignes de niveau proches du minimum ne sont pas connexes.

2– Non, en un seul point. En effet, une droite projective, c'est $p(P)$ où P est un plan de $\mathbb{R}^3$. L'intersection de deux plans distincts étant une droite, l'intersection de deux droites projectives distinctes est un point.

3– Oui. Dans une carte affine, une droite projective devient une droite affine. Deux droites affines distinctes du plan sont transverses.

4– Oui, tant que D reste distincte de D_0. C'est une conséquence de la transversalité. Autre façon de le voir : dans une carte affine. Les droites affines possèdent cette propriété.

5– Non. Par exemple, l'image d'un cercle de rayon > 1 du plan dans le tore $\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2$ possède des points doubles, ce n'est pas une sous-variété.

6– Oui. Dans ce cas, $Y = p^{-1}(p(Y))$. Pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage U de y sur lequel p est un difféomorphisme local, il envoie $U \cap Y$ sur $p(U) \cap p(Y)$ et sa réciproque envoie $p(U) \cap p(Y)$ sur $U \cap Y$, cela prouve que $p(Y)$ est une sous-variété.

2. Séparatrices et cols

Soit ξ un champ de vecteurs de classe C^1 défini au voisinage de 0 dans le plan. On suppose que $\xi(0) = 0$ et que $T_0\xi$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On montre qu'il existe des *séparatrices*, i.e. des lignes intégrales non constantes qui tendent vers 0 et y sont tangentes à l'axe Oy.

1– Soit ξ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et α une sous-variété de classe C^1 contenue dans la frontière de U, on a envie de dire que α est "rentrante" (resp. "sortante") si U est d'un seul côté de α et ξ pointe de ce côté (resp. du côté opposé) le long de α. Donner une définition rigoureuse de ces notions.

2– Notons $\xi(x,y) = (\lambda x + a(x,y), -\mu y + b(x,y))$. Montrer qu'il existe une fonction positive g définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$ telle que $g(r) = o(r)$ et

$$\max\{|a(x,y)|, |b(x,y)|\} \leqslant g(\max\{|x|,|y|\}).$$

3– Soit h une fonction de classe C^1, positive, croissante, définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$, telle que $g = o(h)$ et $h(r) = o(r)$. On considère le rectangle $U_\varepsilon = \{(x,y)\,;\, |x| \leqslant h(\varepsilon),\, |y| \leqslant \varepsilon\}$. Montrer que si ε est suffisamment petit, alors les 2 côtés horizontaux α_ε^+ et α_ε^- de U_ε sont entrants et les deux côtés verticaux β_ε^+ et β_ε^- sont sortants.

4– Donner une définition rigoureuse de l'ensemble A_ε^+ des points z du côté α_ε^+ “dont la trajectoire sort de U_ε par le côté β_ε^+”. Montrer que A_ε^+ est un ouvert non vide de α_ε^+.

5– Montrer que (A_ε^+ *est un intervalle. En déduire que*) l'ensemble A_ε^0 des points z du côté α_ε^+ dont la trajectoire ne sort pas de U_ε est un (*intervalle*) fermé non vide. (*en italiques, phrase malheureuse, à supprimer*).

6– Fixons ε. Pour $0 < \delta < \varepsilon$, notons B_δ l'ensemble des points de A_ε^0 dont la trajectoire coupe A_δ^0. Montrer que tout point de A_δ^0 appartient à la trajectoire d'un point de A_ε^0. En déduire que la famille d'ensembles B_δ est décroissante et que son intersection I est non vide.

7– Montrer que si $z \in I$, la ligne intégrale maximale u_z issue de z est définie sur $[0, +\infty[$ et que $u_z(t)$ tend vers l'origine suand t tend vers l'infini. Montrer qu'en 0, la courbe $u_z(\mathbb{R}_+)$ admet une tangente verticale.

Solution :

1– Soit $x \in \alpha$. Soit φ un C^1-difféomorphisme qui redresse α sur l'axe Ox et tel que $\varphi(U)$ coïncide avec $\{y < 0\}$ au voisinage de x. Disons que x est rentrant si la seconde composante de $(\varphi_*\xi)$ est strictement négative, sortant si elle est strictement positive. Cette condition ne dépend pas du choix de φ. En effet, si un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ stabilise l'axe Ox et le demi-plan $\{y < 0\}$, il en est de même de sa différentielle.

2– C'est la définition même de la différentiabilité en $(0,0)$.

3– Sur $\alpha_\varepsilon^\pm$, y vaut $\pm\varepsilon$ et $x = o(\varepsilon)$, donc la seconde composante du champ vaut

$$y(-\mu + \frac{b(x,y)}{y}) = \pm\varepsilon(-\mu + O(\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon})).$$

Pour ε assez petit, elle est strictement négative sur l'intérieur de α_ε^+, strictement positive sur l'intérieur de α_ε^-, donc ces arcs sont rentrants.

Sur $\beta_\varepsilon^\pm$, x vaut $\pm h(\varepsilon)$ et $y = \pm\varepsilon$), donc la première composante du champ vaut

$$x(\lambda + \frac{a(x,y)}{x}) = \pm h(\varepsilon)(\lambda + O(\frac{g(\varepsilon)}{h(\varepsilon)})).$$

Pour ε assez petit, elle est strictement positive sur l'intérieur de β_ε^+, strictement négative sur l'intérieur de α_ε^-, donc ces arcs sont sortants.

4– Pour $z = (x,\varepsilon) \in \alpha_\varepsilon^+$, notons $u_z : [0, T_z[\to \mathbb{R}^2$ la ligne intégrale maximale issue de z. Notons

$$t_z = \sup\{t < T_z\,;\, \forall s < t,\, u_z([0,s]) \subset U_\varepsilon\}.$$

Alors

$$A_\varepsilon^+ = \{z \in \alpha_\varepsilon^+\,;\, u_z(t_z) \in \beta_\varepsilon^+\}.$$

Au point $z_\varepsilon = (h(\varepsilon), \varepsilon)$, l'application $u_z : [0, T_z[\to \mathbb{R}^2$ est transverse aux deux droites affines d'équations $\{y = \varepsilon\}$ et $\{x = h(\varepsilon)\}$. La trajectoire d'un point $z = (x,\varepsilon)$ suffisamment proche de z_ε

coupe donc la droite $\{x = h(\varepsilon)\}$, en un point $z' = (h(\varepsilon), y)$ tel que y est proche de ε. Si $x < h(\varepsilon)$, alors $y < \varepsilon$. La portion de trajectoire entre z et z' est contenue dans U_ε. Par conséquent, $z \in A_\varepsilon^+$, donc A_ε^+ est non vide, il contient un voisinage de z_ε dans α_ε^+.

De même, pour tout $z = (x, \varepsilon) \in A_\varepsilon^+$, l'application $u_z : [0, T_z[\to \mathbb{R}^2$ est transverse à la sous-variété β_ε^+ en t_z. Par conséquent, pour $z' \in \alpha_\varepsilon^+$ suffisamment voisin de z, $u_{z'}$ coupe β_ε^+ sans être sortie de U_ε auparavant, donc $z' \in A_\varepsilon^+$, et A_ε^+ est ouvert.

5– On introduit A_ε^-, on montre que c'est un ouvert non vide de α_ε^+. Par connexité, S n'est pas la réunion des deux ouverts non vides A_ε^+ et A_ε^-, donc A^0 est non vide, et c'est un fermé.

6– Considérons le quadrilatère curviligne $R = \{|x| \leqslant h(y),\, \delta \leqslant y \leqslant \varepsilon\}$. Montrons que ses côtés verticaux sont sortants. Par exemple, le côté droit est défini par l'équation submersive $f = 0$ où $f(x, y) = x - h(y)$, et R est localement défini par l'inégalité $f \leqslant 0$. On calcule

$$Tf(\xi) = \lambda x + a - h'(y)(-\mu y + b).$$

Comme $|a| + |b| = o(|x|)$ dans R, $\lambda x + a > 0$ et $\mu y - b > 0$ sur le bord droit. Comme h est croissante, $h'(y) \geqslant 0$. On conclut que $Tf(\xi) > 0$, donc le bord droit est sortant.

Dans R, la seconde composante $-\mu y + b$ du champ ξ est majorée par une constante strictement négative. Soit $z \in A_\delta^0$. Notons $v_z : [0, S_z[\to \mathbb{R}^2$ la trajectoire retrograde de z, i.e. la ligne intégrale de $-\xi$ issue de z. Comme h est croissante, pour $s > 0$ assez petit, $v_z(s) \in R$. Soit

$$s_z = \sup\{s < S_z\,;\, \forall r < s,\, v_z([0, r]) \subset R\}.$$

La seconde coordonnée de $v_z(s)$ a une dérivée bornée inférieurement sur $[0, s_z[$ par une constante strictement positive, donc $s_z < +\infty$ et $v(s_z)$ appartient à la frontière de R. La trajectoire rétrograde ne pouvant sortir de R par les côtés verticaux, $z' = v_z(s_z) \in \alpha_\varepsilon^+$. La trajectoire de z' passe par z et ne sort jamais de U_ε, donc $z \in B_\delta$, qui est non vide.

Soit $\delta' < \delta < \varepsilon$. Si $z \in B_{\delta'}$, il existe t tel que $u_z(t) \in A_{\delta'}^0$. On vient de montrer que $u_z(t)$ est sur la trajectoire d'un point z' de A_δ^0, trajectoire qui coïncide avec celle de z, donc $z \in B_\delta$. L'intersection de la famille décroissante de compacts B_δ est non vide.

7– Soit $z \in I$. Comme U_ε est compact, la ligne intégrale maximale u_z est définie sur $[0, +\infty[$, i.e. $T_z = +\infty$. Toute valeur d'adhérence de l'application $u_z : [0, +\infty[\to U_\varepsilon$ est contenue dans l'intersection des U_δ, donc vaut 0. Comme U_ε est compact, cela entraîne que $\lim_{t\to+\infty} u_z(t) = 0$.

Si $u_z(t) = (x, y)$, alors $(x, y) \in \partial U_{|y|}$, donc $|x| < h(|y|)$, le vecteur colinéaire $(\frac{x}{y}, 1)$ tend vers $(0, 1)$, donc la trajectoire possède une tangente verticale en 0.

3. Courbes fermées génériques dans le plan

Soit $f : 2\pi\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^∞. On va montrer qu'il existe des applications arbitrairement voisines de f qui sont des immersions à croisements normaux. Pour cela, on introduit la famille d'applications périodiques

$$f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t) + p_{-1}e^{-it} + p_1 e^{it} + p_2 e^{2it},$$

où $p = (p_{-1}, p_1, p_2) \in \mathbb{C}^3$.

1– Montrer que pour presque tout $p \in \mathbb{C}^3$, f_p est une immersion.

2– Montrer que pour presque tout $p \in \mathbb{C}^3$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'équation $f_p(t) = z$ possède au plus deux solutions modulo 2π.

3– Montrer qu'en général, on ne peut pas faire disparaître un point double de f en perturbant f.

4– En considérant l'application

$$F(t,t',p) = (f_p(t) - f_p(t'), \frac{f'_p(t)}{f'_p(t')}),$$

montrer que pour presque tout $p \in \mathbb{C}^3$, lorsque $f_p(t) = f_p(t')$, les vitesses $f'_p(t)$ et $f'_p(t')$ sont non colinéaires.

Solution :

1– On pose

$$F_1(t,p) = f'_p(t) = f'(t) - ip_{-1}e^{-it} + ip_1 e^{it} + 2ip_2 e^{2it}.$$

Alors $\frac{\partial}{\partial p_1} F_1(t,p)$ est la multiplication par ie^{it}, qui ne s'annule jamais, donc $\frac{\partial}{\partial p_1} F_1$ est surjective. Cela prouve que F_1 est une submersion. En particulier, F_1 est transverse à la sous-variété $Y = \{0\}$ de $Z = \mathbb{C}$. D'après le lemme de transversalité, pour presque tout $p \in \mathbb{C}^3$, f'_p est transverse à Y. Comme f'_p est définie sur $X = \mathbb{R}$, et $\dim(X) + \dim(Y) = 1 < 2 = \dim(Z)$, ${f'}_p^{-1}(Y) = \emptyset$, i.e. la dérivée de f_p ne s'annule pas, et f_p est une immersion. On remarque que f_p vue comme application définie sur le cercle $2\pi\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ est aussi une immersion. On a donc perturbé f en une immersion.

2– On pose

$$F_2(t,t',t'',p) = (f_p(t) - f_p(t'), f_p(t) - f_p(t'')).$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial(p_1,p_2)} F_2(t,t',t'',p) = \left(p \mapsto (p_1(e^{it} - e^{it'}) + p_2(e^{2it} - e^{2it'}), p_1(e^{it} - e^{it''}) + p_2(e^{2it} - e^{2it''}))\right),$$

c'est l'application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} e^{it} - e^{it'} & e^{2it} - e^{2it'} \\ e^{it} - e^{it''} & e^{2it} - e^{2it''} \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\det(M) = (e^{it} - e^{it'})(e^{it} - e^{it''}) \det \begin{pmatrix} 1 & e^{it} + e^{it'} \\ 1 & e^{it} + e^{it''} \end{pmatrix} = (e^{it} - e^{it'})(e^{it} - e^{it''})(e^{it''} - e^{it'}).$$

Si t, t' et t'' sont distincts modulo 2π, M est inversible. Soit X l'ensemble des triplets de points distincts de $2\pi\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$. Alors $F_2 : X \times \mathbb{C}^3 \to Z := \mathbb{C}^2$ est une submersion. En particulier, F_2 est transverse à la sous-variété $Y = \{(0,0)\}$ de Z. D'après le lemme de transversalité, pour presque tout $p \in \mathbb{C}^3$, $F_{2,p}$ est transverse à Y. Comme $\dim(X) + \dim(Y) = 3 < 4 = \dim(Z)$, $F_{2,p}^{-1}(Y) = \emptyset$, i.e. f_p n'envoie jamais trois points distincts sur le même point. On a donc perturbé f en une application dont les points multiples sont au plus doubles.

3– Supposons que f possède un croisement normal, i.e. un point double où les deux tangentes sont distinctes. Autrement dit, il existe deux intervalles ouverts disjoints I et I' et des points $t \in I$ et $t' \in I'$ tels que $f(t) = f(t')$ et $f_{|I}$ et $f_{|I'}$ sont transverses. Par transversalité, l'intersection persiste pour toute perturbation de f.

4– Soit X' l'ensemble des couples de points distincts de $2\pi\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$. Soit $W = \{p \in \mathbb{C}^3 ; f_p$ est une immersion$\}$. C'est un ouvert. F est de classe C^∞ sur $X' \times W$.

Soit $k = -1, 1, 2$. Notons $z = e^{it}$, $z' = e^{it'}$. La dérivée partielle par rapport à p_k de $f_p(t) - f_p(t')$ vaut $e^{kit} - e^{kit'} = z^k - z'^k$.

La dérivée partielle par rapport à p_k de $\frac{f'_p(t)}{f'_p(t')}$ vaut

$$\frac{ike^{ikt}f'_p(t') - f'_p(t)ike^{ikt'}}{f'_p(t')^2} = ik\frac{z^k w' - wz'^k}{w'^2},$$

où on a noté $w = f'_p(t)$, $w' = f'_p(t')$. La différentielle partielle de F par rapport à p est l'application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^2$ dont la matrice, à un facteur non nul près, vaut

$$\begin{pmatrix} z^{-1} - z'^{-1} & z - z' & z^2 - z'^2 \\ -(z^{-1}w' - wz'^{-1}) & zw' - z'w & 2(z^2w' - wz'^2) \end{pmatrix}.$$

Si elle n'est pas surjective, les mineurs de taille 2 s'annulent. Un premier mineur vaut

$$\begin{vmatrix} z^{-1} - z'^{-1} & z - z' \\ -(z^{-1}w' - wz'^{-1}) & zw' - z'w \end{vmatrix} = \frac{(z - z')^3}{zz'}(w + w'),$$

cela entraîne que $w' = -w$. Dans ce cas, la matrice devient proportionnelle à

$$\begin{pmatrix} z^{-1} - z'^{-1} & z - z' & z^2 - z'^2 \\ z^{-1} + z'^{-1} & -z - z' & -2(z^2 + z'^2) \end{pmatrix}.$$

Un second mineur vaut

$$\begin{vmatrix} z - z' & z^2 - z'^2 \\ -z - z' & -2(z^2 + z'^2) \end{vmatrix} = -(z - z')^3,$$

il ne s'annule pas. On conclut que F est une submersion en tout point de $X' \times W$. Elle est donc transverse à la sous-variété $Y = \{0\} \times \mathbb{R}$ de $Z = \mathbb{C}^2$. D'après le lemme de transversalité, pour presque tout $p \in W$, F_p restreinte à X' est transverse à Y. Comme $\dim(X') + \dim(Y) = 3 < 4 = \dim(Z)$, $F_p^{-1}(Y) = \emptyset$, i.e. lorsque $f_p(t) = f_p(t')$, les vitesses $f'_p(t)$ et $f'_p(t')$ ne sont pas colinéaires. Comme W est de mesure pleine, et comme l'intersection de deux ensembles de mesure pleine est encore de mesure pleine, on conclut que pour presque tout $p \in \mathbb{C}^3$, f_p est une immersion, ses points multiples sont au plus doubles, et lorsque cela se produit, les tangentes sont distinctes. On parle de croisements normaux.