Partiel de Géométrie différentielle

8 avril 2013

1 Formes différentielles du tore

Soit α une 1-forme fermée sur T^n. On note S_i le cercle $\{1\}^{i-1} \times S^1 \times \{1\}^{n-i-1}$, et on pose $a_i = \int_{S_i} \alpha$, et $a = (a_1, ..., a_n)$. On veut montrer que $\alpha - \sum_{j=1}^n a_j d\theta_j$ est exacte.

(A) Soit $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$ la projection qui identifie T^n à $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Montrer qu'il existe une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ telle que $df = p^*(\alpha)$.

Solution : *La forme $p^*\alpha$ est fermée sur $\mathbb{R}^n$ donc exacte. On note f une fonction telle que $df = p^*(\alpha)$.*

(B) Montrer que $f(x + \nu) = f(x) + \langle a, \nu \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\nu \in \mathbb{Z}^n$.

Solution : *Il suffit par symétrie de montrer que $f(x + e_1) = f(x) + a_1$. Or $f(x + e_1) - f(x) = \int_0 f'(x + se_1)e_1 ds = \int_{S_1} p^*(\alpha)$.*

(C) Conclure.

Solution : *En remplaçant α par $\alpha - \sum_{j=1}^n a_j d\theta_j$, on voit que a devient nul, et donc f est périodique. Mais alors f définit une fonction $\bar{f}$ sur T^n, et on a $\alpha = d\bar{f}$, donc α est exacte.*

2 Topologie

Soit B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui envoie S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et ayant 0 pour valeur régulière. On veut démontrer en notant $N(x) = \frac{x}{|x|}$ que

$$\deg((N \circ f)_{|S^{n-1}}) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} sgn(\det(df(x)).$$

(A) En utilisant les formes $\alpha_n(x)(v_1, .., v_{n-1}) = \det(x, v_1, ..., v_{n-1})$ sur S^{n-1} et $\beta_n = N^*\alpha_n$, montrer que $\deg((N \circ f)_{|S^{n-1}})$ est invariant par homotopie, i.e. si $F : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et telle que $F([0,1] \times S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et on pose $f_t(x) = F(t, x)$, on a $\deg((N \circ f_0)_{|S^{n-1}}) = \deg((N \circ f_1)_{|S^{n-1}})$. On pourra se contenter de démontrer le cas où F est C^∞ et admettre le cas général.

Solution : *Si* $\beta_n = N^*(\alpha_n)$ *où* $N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ *est l'application* $N(x) = \frac{x}{|x|}$ *et* $\beta_n = N^*(\alpha_n)$*, on a* $\deg(N \circ f) = \int_{S^{n-1}} f^*\beta_n$*. Alors* $\int_{S^{n-1}} f_1^*\beta_n - \int_{S^{n-1}} f_0^*\beta_n = \int_{[0,1]\times S^{n-1}} F^*(d\beta_n)$ *par Stokes, mais ce terme est nul, car* $d\beta_n = N^*(d\alpha_n)$ *et* $d\alpha_n = 0$.

(B) Utiliser la connexité de $GL^+(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ pour démontrer le résultat lorsque f est linéaire.

Solution : *Dire qu'une application linéaire envoie* S^{n-1} *dans* $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$*, signifie qu'elle est dans* $GL(n,\mathbb{R})$*. Par connexité de* $GL^+(n,\mathbb{R})$ *on se ramène au cas de l'identité ou d'une réflexion hyperplane.*

(C) Soient $S(x,\varepsilon)$ des sphères suffisamment petites centrées en x, où $x \in f^{-1}(0)$. Montrer que $0 \notin f(S(x,\varepsilon))$. On pose $g_{x,\varepsilon} = N \circ (f_{|S(x,\varepsilon)})$.

Solution : 0 *est valeur régulière, donc* f *est un difféomorphisme local au voisinage de* x *et* 0 *n'est pas dans l'image de* $S(x,\varepsilon)$.

(D) Montrer que

$$\deg(N \circ f_{|S^{n-1}}) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} \deg(g_{x,\varepsilon})$$

Solution : *Soit* $W = B \setminus \bigcup_{x\in f^{-1}(0)} B(x,\varepsilon)$*. Alors* $0 \notin f(W)$*, et donc on peut considérer* $g = N \circ (f_W)$*. L'application* g *est à valeurs dans* S^{n-1} *et comme* $\partial W = S^{n-1} - \bigcup_{x\in f^{-1}(0)} S(x,\varepsilon)$ *(où le signe* $-$ *indique que les sphères ont l'orientation opposée). Alors* $\deg(g_{S{n-1}}) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} \deg(g_{|S(x,\varepsilon)})$

(E) Conclure.

Solution : *Au voisinage de* x*,* f *se déforme en l'application linéaire* $df(x)$*, et donc* $\deg(g_{x,\varepsilon}) = sgn(\det(df(x))$*. La question précédente permet alors de conclure.*

3 Théorème de Borsuk-Ulam

On considère la sphère $S^n = \{(x_1, \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}$. On note π la projection $\pi(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$.

On veut montrer qu'une application f de classe C^∞ de S^n dans elle-même vérifiant $f(-x) = -f(x)$ (on dit qu'une telle application est impaire) est de degré impair. On raisonne par récurrence.

(A) Démontrer le résultat pour $n = 1$. On admettra que l'on peut écrire f sous la forme $f(x) = e^{2i\pi u(x)}$ avec $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et utiliser le fait que $\deg(f) = u(x+1) - u(x)$.

Solution : *On peut supposer que* $f(x) = e^{2i\pi u(x)}$ *et alors* $\deg(f) = u(x+1) - u(x)$*. Comme* $u(x + \frac{1}{2}) = u(x) + \frac{2k+1}{2}$*, on a* $u(x+1) = u(x) + (2k+1)$ *et donc le degré de* f *est* $2k+1$*.*

Supposons le résultat démontré à l'ordre $n-1$, et soit $f : S^n \longrightarrow S^n$ une application C^∞ vérifiant $f(-x) = -f(x)$. Soit g la restriction de f à l'équateur.

(B) Montrer qu'il existe un point qui n'est pas dans l'image de g, et qui est valeur régulière de f, et que l'on peut supposer, modulo une rotation, que ce point est le pôle nord $N = (0, \dots, 0, 1)$. On note S le pole sud, antipode du pôle nord, $S = (0, \dots, -1)$.

(C) Soit f^+ la restriction de f à l'hémisphère nord, identifié à la boule unité B^n.

Montrer que la parité du degré de f égale celle du nombre de préimages de N ou S par f^+ (i.e. le cardinal de $(f^+)^{-1}(\{N, S\})$.

On note h la composée de la projection π sur le plan équatorial (i.e. orthogonal à la droite Nord-Sud et passant par 0) et de f^+. On considère donc h comme une application de B^n dans B^n.

Montrer que $\deg(f)$ a la parité du nombre de préimages de 0 par h.

Solution : *Le point N est valeur régulière de f, donc la parité du degré correspond à la parité du nombre de préimages par f de N. Or une telle préimage, x est soit dans l'hémisphère nord, i.e. dans $(f^+)^{-1}(N)$ soit dans l'hémisphère sud, mais alors $-x$ est dans l'hémisphère nord et vérifié $f^+(-x) = S$ i.e. $-x \in (f^+)^{-1}(S)$. On notera que π est impaire*

(D) Montrer que $h_{\partial B^n} = \pi \circ g$ se déforme en une application impaire de S^{n-1} dans S^{n-1}.

Solution : *Comme g évite N et donc S, $h_{\partial B^n} = \pi \circ g$ évite 0. On déforme donc $\pi \circ g$ par $k_t(x) = (1-t)\pi \circ g(x) + t\frac{\pi \circ g(x)}{|\pi \circ g(x)|}$ et cette déformation respecte le caractère impair des applications.*

(E) Conclure en utilisant l'exercice précédent Solution : *L'application g est par hypothèse de récurrence de degré impair. Or la formule démontrée à l'exercice précédent montre que le nombre de préimages de f^+ a la même parité que le degré de g. Comme ce nombre de préimages correspond à la parité du degré de f, on en déduit que f est de degré impair.*

4 Théorème de Borsuk-Ulam, 2

Soit f une application continue de S^n dans $\mathbb{R}^n$. On veut montrer qu'il existe un couple de points antipodaux de la sphère, $(x, -x)$ tels que $f(x) = f(-x)$.

(A) En raisonnant par l'absurde, montrer que si ce n'est pas le cas $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ est une application de S^n dans S^{n-1} telle que $g(-x) = -g(x)$.

Solution : *En effet si $f(x) - f(-x)$ ne s'annule pas, g est bien définie et a les propriétés requises.*

(B) Monter que la restriction h de g à S^{n-1} est de degré nul.

Solution : *Une application de S^{n-1} dans S^{n-1} qui s'étend à B^n est de degré nul (Stokes).*

(C) Montrer en utilisant l'exercice précédent que h est de degré impair.

Solution : *Application directe de l'exercice*

(D) Conclure. Solution : *Nous avons démontré que g est de degré impair et de degré nul, d'où une contradiction.*

5 Théorème de Tischler

On identifie S^1 à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on notera θ la fonction coordonnée sur $\mathbb{R}$ et $d\theta$ la forme différentielle induite sur S^1.

Soit M une variété compacte, α une forme différentielle fermée de degré un qui ne s'annule pas. On veut montrer que si α est entière (on verra ce que cela signifie), il existe $p : M \to S^1$ telle que $\alpha = p^*(d\theta)$.

Soit x_0 un point de M fixé une fois pour toutes et $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ un chemin de classe C^∞. On pose

$$f(\gamma) = \int_0^1 \gamma^*(\alpha) = \int_0^1 \alpha(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

(A) Montrer que si on a deux chemins γ_0, γ_1 de mêmes extrémités et homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une famille de chemins paramétrée par $s \in [0,1]$, γ_s telle que $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ soit C^∞ et (pour tout $s \in [0,1]$, $\gamma_s(0) = \gamma_0(0)$ et $\gamma_s(1) = \gamma_0(1)$), alors $f(\gamma_0) = f(\gamma_1)$.
Solution : *C'est l'invariance par homotopie de l'intégrale*

(B) Soit G l'ensemble des valeurs de $f(\gamma)$ sur les chemins γ tels que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Montrer que G est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.

Solution : *Si a, b correspondent à des chemins γ_a, γ_b, alors γ_a composé avec γ_b renversé (i.e. $t \mapsto \gamma_b(1-t)$) a pour intégrale $a - b$.* On dit que α est entière si ce sous-groupe est discret.

(C) Donner un exemple d'une telle forme différentielle α qui n'est pas entière.

Solution : *Par exemple sur le tore T^2, la forme $dx + \sqrt{2}dy$. Le groupe G est alors l'ensemble des $a + b\sqrt{2}$.*

On suppose dans la suite que α est entière, et on identifie ce sous-groupe à $\mathbb{Z}$.

(D) Montrer que f induit une application C^∞ $p : M \longrightarrow S^1$ et que $p^*(d\theta) = \alpha$.

Solution : *Si γ,γ_2 sont deux chemins de x_0 à x, alors les intégrales de α sur γ_1 et γ_2 diffèrent par $\int \gamma^*(\alpha)$ où $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$, qui est un entier. Donc $\int \gamma_1^*(\alpha) - \int \gamma_2^*(\alpha)$ est un entier, et on note $f(x) = \int \gamma_1^*(\alpha)$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On vérifie sans difficulté que si γ est un chemin de x à y, $f(y) - f(x) = \int \gamma^*(\alpha)$.*

On veut maintenant montrer que $p^{-1}(\theta)$ est difféomorphe à $p^{-1}(1)$ pour tout $\theta \in S^1$.

(E) Montrer que $dp(x)$ est surjective pour tout $x \in M$.

Solution : *Comme $p^*(d\theta) = \alpha$, on a $dp(x)v = \alpha(x)v$ et comme α ne s'annule pas, il en est de même pour $dp(x)$.*

(F) Soit X un champ de vecteurs sur M tel que, pour tout $x \in M$, $dp(x)X(x)$ est le vecteur unitaire tangent de S^1 en $p(x)$. Si φ^t est le flot de X, c-est-à-dire que $\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = X(\varphi^t(x))$, montrer que $p(\varphi^t(x)) = p(x) + t$.
Solution : *On a $\frac{d}{dt}p(\varphi^t(x)) = dp(\varphi^t(x))X(\varphi^t(x)) = 1$. Donc $p(\varphi^t(x)) = p(x) + t$.*

(G) Conclure.